

## ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Исходные данные для индивидуальных заданий на контрольные работы по строительной механике студент должен брать из приводимой к каждой задаче таблицы в строгом соответствии с шифром зачетной книжки.

Для этого нужно написать шифр несколько раз и под последними шестью цифрами подписать буквы *a*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*. Тогда цифра над буквой «а» укажет, какую строку следует взять из столбца «а», цифра над буквой «б» – какую строку следует взять из столбца «б» и т. д.

*Пример.* При шифре 96-С-181 нужно 181 написать подряд два раза и под шестью цифрами подписать буквы:

1	8	1	1	8	1
<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>е</i>

Чертежи следует выполнять со строгим соблюдением масштаба; чертежи и тетрадь расчетов должны быть подписаны студентом, выполнившим работу. Страницы в тетради необходимо пронумеровать. Нужно также указать свой учебный номер (шифр) и адрес.

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ПЛОСКИХ РАМ

*Статически неопределимой* называют такую систему, которая не может быть рассчитана по методу сечений с использованием только одних уравнений равновесия, так как она обладает «лишними» связями. Под «лишними» понимают связи, которые необходимо удалить из состава заданной системы, чтобы превратить ее в статически определимую, при этом такая новая система, называемая *основной*, должна оставаться геометрически неизменяемой.

Различают *внешне* и *внутренне статически неопределимые* системы. К первому типу относят системы, которые имеют только «лишние» опорные закрепления, ко второму – системы, обладающие «лишними» внутренними связями, введенными для взаимного соединения частей системы, например многоэтажные рамы. Подробнее см. [1].

В строительной механике различают два классических метода расчета статически неопределимых систем: *метод сил* и *метод перемещений*.

При расчете по *методу сил* в качестве неизвестных (искомых параметров) принимают усилия в «лишних» связях.

При расчете по *методу перемещений* основными искомыми неизвестными являются перемещения узлов, вызванные деформацией системы.

### **Задача 1**

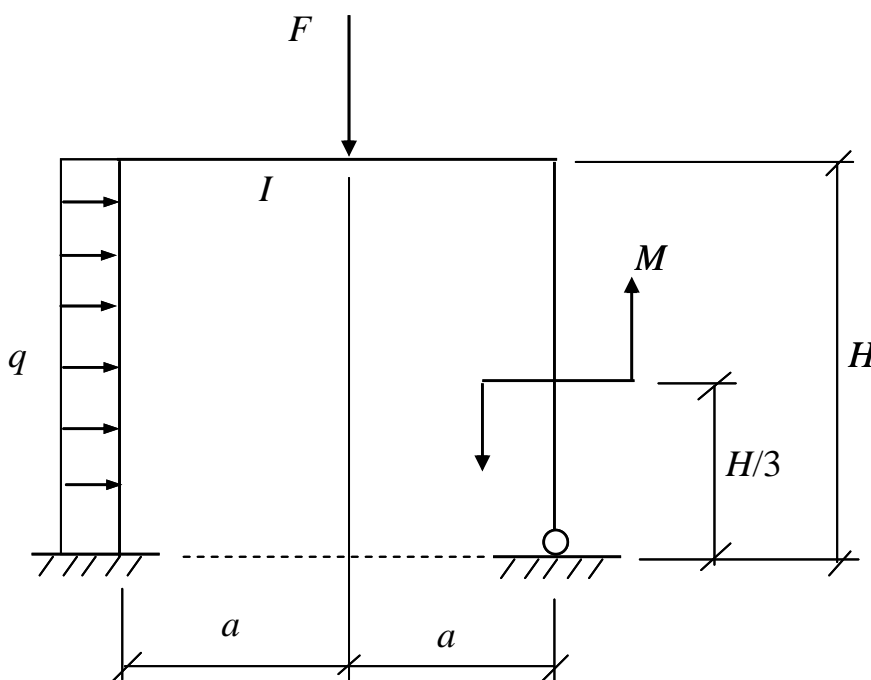
#### **Расчет плоской рамы методом сил**

Для статически неопределимой рамы (прил. 1, рис. П1) требуется:

- 1) определить степень статической неопределимости;
- 2) выбрать основную систему;
- 3) составить систему канонических уравнений;

- 4) вычислить коэффициенты и свободные члены канонических уравнений;
- 5) проверить правильность подсчета коэффициентов и свободных членов канонических уравнений;
- 6) решить систему канонических уравнений и проверить правильность этого решения;
- 7) построить эпюру изгибающих моментов  $M$  в заданной системе и проверить правильность ее построения;
- 8) построить эпюру поперечных сил  $Q$ ;
- 9) построить эпюру продольных сил  $N$ ;
- 10) выполнить статическую проверку рамы в целом.

**Пример расчета статически неопределимой рамы методом сил**



Исходные данные  
(рис. 1.1):

- $F = 20$  кН;
- $q = 10$  кН/м;
- $M = 10$  кН м;
- $a = 4$  м;
- $H = 3$  м.

Рис. 1.1

**1. Определение степени статической неопределимости**

Степень статической неопределимости находят по формуле:

$$n_c = 3K - Ш,$$

где  $K$  – количество замкнутых контуров в системе, включая опорные;

$Ш$  – количество одинарных (простых) шарниров в системе, включая опорные.

Для рассматриваемой плоской рамы, мысленно замыкая землю (см. пунктир на рис. 1.1), имеем  $K = 1$ ,  $Ш = 1$ ,

$$n_c = 3K - Ш = 3 \cdot 1 - 1 = 2.$$

Таким образом, рама дважды статически неопределима, т. е. рама имеет две «лишние» связи.

## 2. Выбор основной системы

Основная система получается из заданной путем отбрасывания «лишних» связей (количество которых равно степени статической неопределимости рамы) и приложением соответствующих усилий, возникающих в отброшенных связях в заданной системе. При этом основная система должна быть *геометрически неизменяемой* и (как правило) *статически определимой*.

При расчете рам методом сил может быть множество вариантов основных систем. От их рационального выбора зависят только простота и скорость решения, но не сам результат. Если исходная заданная система обладает упругой симметрией (имеющей геометрическую симметрию, одинаковые жесткости и закрепления симметричных элементов), то рационально и в качестве основной системы выбрать также упругосимметричную систему, приводящую к упрощению разрешающих уравнений (рис. 1.4).

На рис. 1.2 представлены два варианта основных систем, сравнивая которые можно прийти к выводу, что более рациональной является система, представленная на рис. 1.2, *a*, так как для этого варианта не требуется

предварительного вычисления опорных реакций и эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки будет более простой.

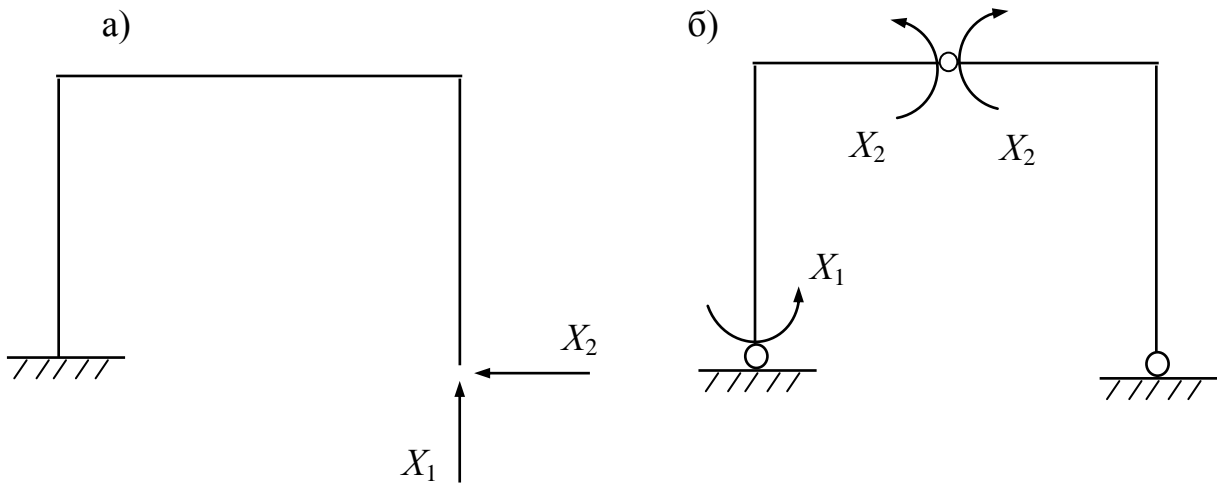


Рис. 1.2

### 3. Составление системы канонических уравнений

Канонические уравнения, необходимые для решения статически неопределимых задач *методом сил*, представляют собой уравнения совместности деформаций. Число канонических уравнений равно степени статической неопределимости.

В общем случае каждое из канонических уравнений имеет вид:

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iF} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Для рассматриваемого примера система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Физический смысл каждого из канонических уравнений состоит в том, что суммарное перемещение по направлению усилия  $X_i$  от всех действующих в основной системе силовых факторов, включая неизвестные,

равно нулю, так как в действительности по этим направлениям в исходной системе стоят связи, препятствующие возникновению этих перемещений.

Здесь  $\delta_{ij}$  – перемещение в основной системе по направлению отброшенной  $i$ -й связи от действия единичного усилия  $\bar{X}_j = 1$ ;  $\Delta_{iF}$  – перемещение в основной системе по направлению отброшенной  $i$ -й связи от действия внешних нагрузок.

Из теоремы о взаимности перемещений следует, что  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ; в нашем случае  $\delta_{12} = \delta_{21}$ .

#### 4. Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Для вычисления коэффициентов  $\delta_{ij}$  и свободных членов  $\Delta_{iF}$  канонических уравнений вначале строят единичные  $\bar{M}_i$  и грузовую  $M_F$  эпюры изгибающих моментов в основной системе. Затем по формуле Мора

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{n=1}^k \int_0^{l_n} \frac{\bar{M}_n^i \cdot \bar{M}_n^j}{EI_n} dz; \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{n=1}^k \int_0^{l_n} \frac{M_n^i \cdot \bar{M}_n^j}{EI_n} dz$$

определяются их значения.

Кроме того, в предлагаемой задаче рассчитывается плоская рама, все элементы которой являются прямолинейными стержнями, следовательно, эпюры изгибающих моментов от единичных усилий имеют линейный вид, а эпюра изгибающих моментов от внешних сил в самом сложном варианте (от равномерно распределенной нагрузки) имеет вид квадратной параболы. Таким образом, для вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений можно использовать формулу Мора–Верещагина, в соответствии с которой

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{n=1}^k \frac{\bar{\omega}_n^i \cdot \bar{\eta}_n^j}{EI_n} dz; \quad \Delta_{iF} = \sum_{n=1}^k \frac{\omega_n^F \cdot \bar{\eta}_n^i}{EI_n} dz,$$

или формулы численного интегрирования – формулы трапеций (рис. 1.3, а) или Симпсона (рис. 1.3, б) (см. [1]).

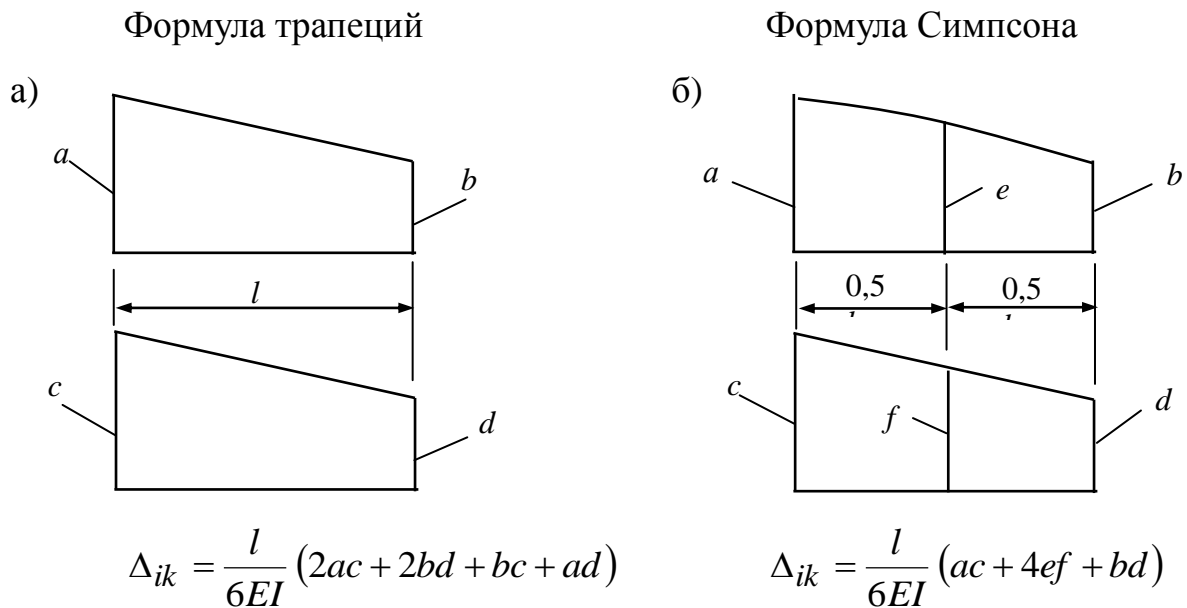


Рис. 1.3

В этих формулах перед каждым произведением ставят знак минус, если ординаты разнозначные.

Наконец, можно использовать и готовые формулы, приведенные в [1, табл. 2.2].

На рисунке 1.5 представлены эпюры изгибающих моментов, построенные на растянутых волокнах в основной системе от воздействия на нее каждого в отдельности единичного усилия:  $\bar{X}_1 = 1$  – эпюра  $\bar{M}_1$  (рис. 1.5, а) и  $\bar{X}_2 = 1$  – эпюра  $\bar{M}_2$  (рис. 1.5, б), а также грузовая эпюра  $M_F$  от внешних нагрузок (рис. 1.5, в).

Аналогично на рисунке 1.4 представлены эпюры для симметричных рам.

Рассмотрим симметричные рамы (рис. 1.4, а и б).

Число неизвестных в рамах:

$$n_c = 3K - Ш = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \text{ (рис. 1.4, а);}$$

$$n_c = 3K - \text{Ш} = 3 \cdot 2 - 4 = 2 \text{ (рис. 1.4, б):}$$

Для расчета этих рам необходимо составить по два канонических уравнения (см. п. 3). За неизвестные приняты группы сил, которые выбираем симметричными и кососимметричными, приводящих к соответствующим единичным эпюрам.

Если перемножить симметричную эпюру  $\bar{M}_1$  и кососимметричную  $\bar{M}_2$ , получи нулевые перемещения  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ .

Тогда уравнения (см. п. 3) распадутся на два самостоятельных (в общем случае – на две системы). В одной из них

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

остаются только симметричные неизвестные, во второй – только кососимметричные.

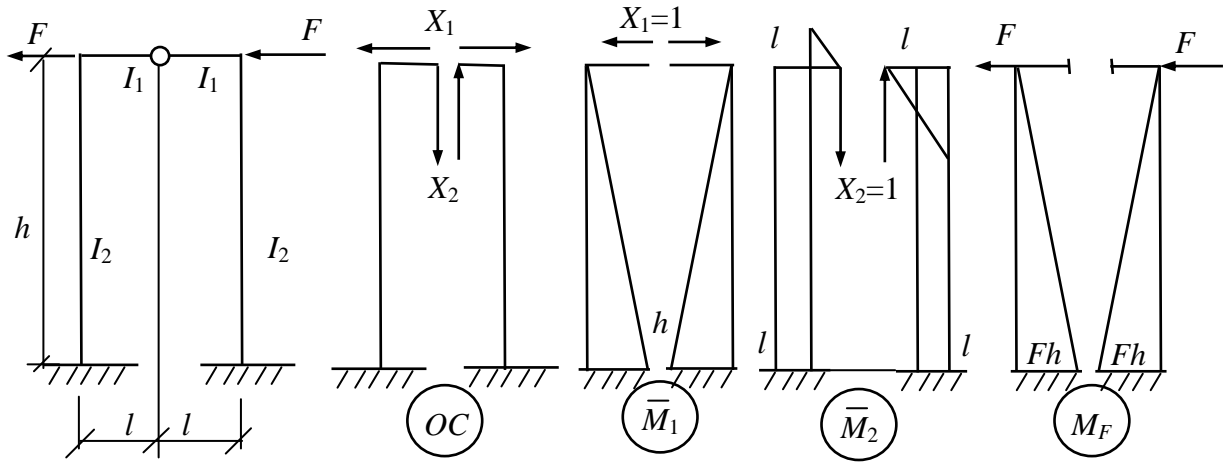
#### *Учет симметричной нагрузки*

Если в симметричных рамах внешние нагрузки симметричные либо кососимметричные, то соответствующие им свободные члены обращаются в ноль. Часть совместных уравнений без свободных членов становится однородными, что приводит к обращению в ноль неизвестных. В случае рис. 1.4, а нагрузка  $F$  кососимметричная, тогда в ноль обратится симметричная неизвестная  $X_1$ , а задаче (рис. 1.4, б) нагрузка  $q$  симметричная, поэтому в ноль обратится кососимметричная неизвестная  $X_2$ . Благодаря использованию симметрии во много раз уменьшаются трудозатраты на решение задач.

Исходя из единичных и грузовой эпюры и используя формулы трапеций и Симпсона, определяем коэффициенты канонических уравнений (с учетом заданных жесткостных параметров – см. рис. 1.1):



a)



б)

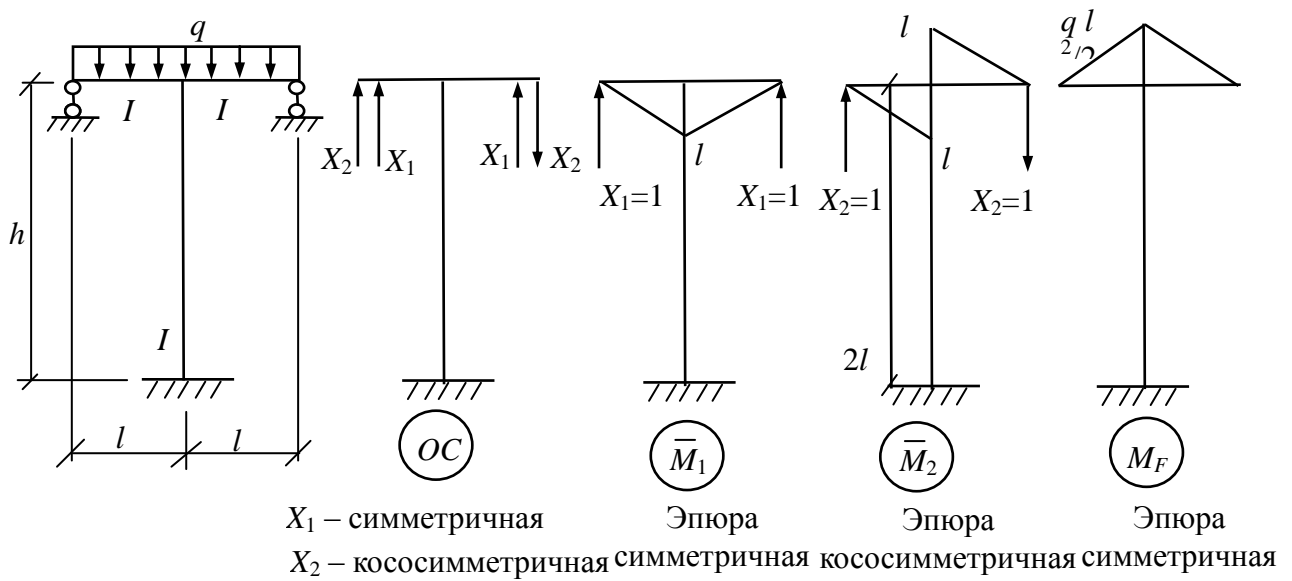


Рис. 1.4

$$\delta_{11} = \frac{3}{6E2I} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{4}{6EI} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{272}{6EI};$$

$$\delta_{22} = 2 \cdot \frac{3}{6E2I} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{4}{6EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{270}{6EI};$$

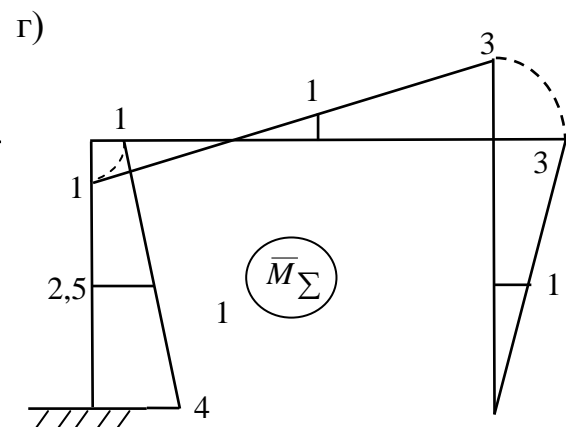
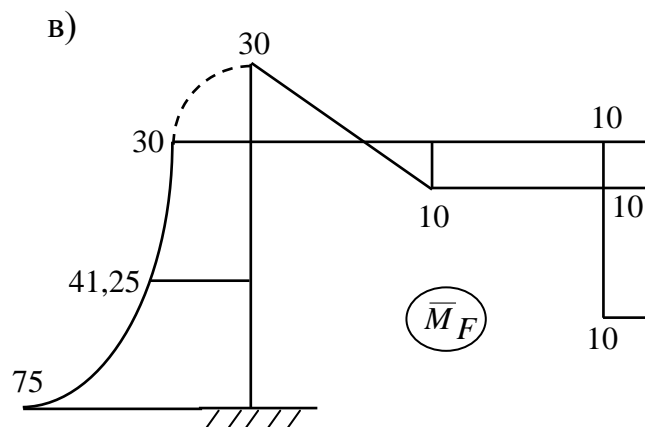
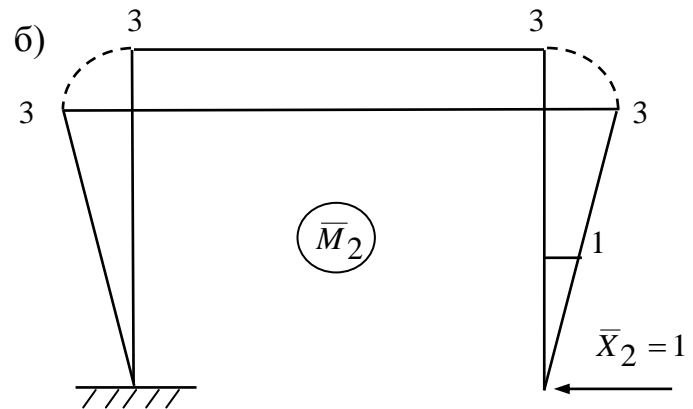
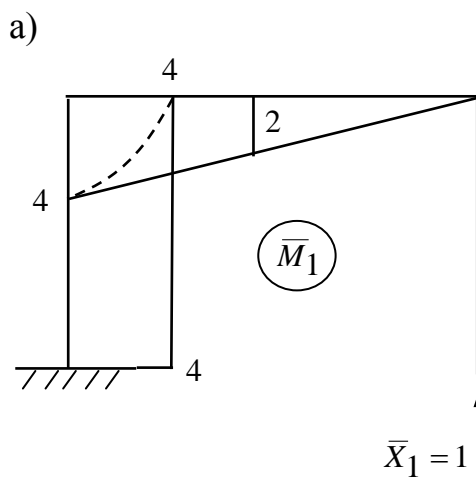
$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{3}{6E2I} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 - \frac{4}{6EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = -\frac{198}{6EI};$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{3}{6E2I} (75 \cdot 4 + 4 \cdot 41,25 \cdot 4 + 30 \cdot 4) +$$

$$+ \frac{2}{6EI} (-2 \cdot 30 \cdot 4 + 2 \cdot 10 \cdot 2 - 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4) + \frac{2}{6EI} (3 \cdot 10 \cdot 2) = -\frac{1940}{6EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{3}{6E2I} (30 \cdot 3 + 4 \cdot 41,25 \cdot 4) + \frac{2}{6EI} (2 \cdot 30 \cdot 3 - 2 \cdot 10 \cdot 3 - 10 \cdot 3 + 30 \cdot 3) -$$

$$- \frac{2}{6EI} (6 \cdot 10 \cdot 3) - \frac{2}{6E2I} (3 \cdot 10 \cdot 3 + 3 \cdot 10 \cdot 1) = \frac{386,25}{6EI}.$$



5. Проверка правильности подсчета коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Для проверки правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений необходимо предварительно построить суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_\Sigma$ , в основной системе путем сложения уже построенных единичных эпюр  $\bar{M}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i$  (в нашем случае  $\bar{M}_\Sigma = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$  – см. рис. 1.5, з).

Правильность расчета коэффициентов и свободных членов канонических уравнений осуществляется путем проверки правильности следующих соотношений:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \delta_{\Sigma\Sigma}; \quad \sum_{i=1}^n \Delta_{iF} = \Delta_{\Sigma F},$$

где  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$  – сумма всех коэффициентов канонических уравнений.

Для рассматриваемого примера  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}$ ;

$$\delta_{\Sigma\Sigma} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_\Sigma \cdot \bar{M}_\Sigma}{E I_k} dz \quad - \text{ величина, полученная в результате}$$

умножения суммарной единичной эпюры  $\bar{M}_\Sigma$  на саму себя;

$\sum_{i=1}^n \Delta_{iF}$  – сумма всех свободных членов канонических уравнений, в дан-

ном случае  $\sum_{i=1}^n \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F}$ ;

$$\Delta_{\Sigma F} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_F \cdot \bar{M}_{\Sigma}}{E I_k} dz \quad - \text{ величина, полученная в результате}$$

умножения грузовой эпюры  $M_F$  на суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_{\Sigma}$ .

В нашем случае:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{272}{6EI} - \frac{198}{6EI} - \frac{198}{6EI} + \frac{270}{6EI} = \frac{146}{6EI};$$

$$\delta_{\Sigma\Sigma} = \frac{3}{6E2I} (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 4) + \frac{2}{6EI} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 3) + \\ + \frac{3}{6E2I} (2 \cdot 3 \cdot 3) = \frac{146}{6EI};$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = -\frac{1940}{6EI} + \frac{386,25}{6EI} = -\frac{1553,75}{6EI};$$

$$\Delta_{\Sigma F} = -\frac{3}{6E2I} (75 \cdot 4 + 4 \cdot 41,25 \cdot 2,5 + 30 \cdot 1) + \\ + \frac{2}{6EI} (-2 \cdot 30 \cdot 1 - 2 \cdot 10 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 30 \cdot 1) - \frac{2}{6EI} (3 \cdot 1 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \cdot 3) - \\ - \frac{2}{6E2I} (3 \cdot 10 \cdot 3 + 3 \cdot 10 \cdot 1) = -\frac{1553,75}{6EI}.$$

Таким образом, оба условия проверки удовлетворяются. Следовательно, коэффициенты и свободные члены канонических уравнений найдены правильно.

#### 6. Решение системы канонических уравнений

Подставив найденные значения коэффициентов и свободных членов в систему канонических уравнений и сократив на  $6EI$ , получим:

$$\begin{cases} 272X_1 - 198X_2 - 1940 = 0; \\ -198X_1 + 270X_2 + 386,25 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем значения неизвестных:

$$X_1 = 13,065 \text{ кН}; \quad X_2 = 8,15 \text{ кН}.$$

Правильность вычисления неизвестных проверим путем подстановки найденных значений  $X_1$  и  $X_2$  в исходные уравнения:

$$272 \cdot 13,065 - 198 \cdot 8,15 - 1940 = 3553,68 - 3553,70 \approx 0;$$

$$-198 \cdot 13,065 + 270 \cdot 8,15 + 386,25 = -2586,87 + 2586,75 \approx 0.$$

### 7. Построение эпюры изгибающих моментов $M$ в заданной системе

Эпюра изгибающих моментов строится в соответствии с принципом независимости действия сил путем сложения эпюр  $\bar{M}_i$ , умноженных на предварительно найденные значения  $X_i$  и грузовой эпюры  $M_F$ :

$$M = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \cdot X_i + M_F.$$

В рассматриваемом примере  $M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_F$ .

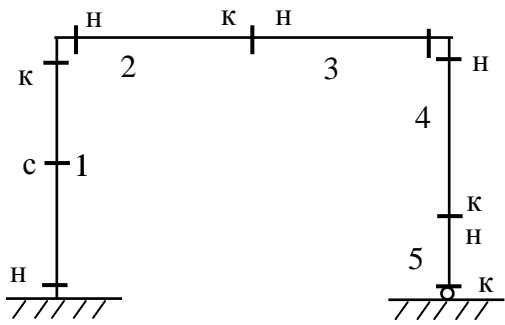
Сложение эпюр можно производить непосредственно графически (см. ординаты на эпюрах) или при помощи вспомогательной таблицы. Для этого необходимо разбить исходную раму на грузовые участки (рис. 1.6, а) и построить эпюры  $\bar{M}_1 \cdot X_1$  и  $\bar{M}_2 \cdot X_2$  (рис. 1.6, б). Если  $X_i < 0$ , то эпюру  $\bar{M}_i \cdot X_i$  следует строить на «противоположных» волокнах. На рисунке 1.6, б также приведена грузовая эпюра  $M_F$ , которая учитывается без изменений (см. рис. 1.4, в).

После построения эпюры  $\bar{M}_i \cdot X_i$  строится окончательная эпюра изгибающих моментов  $M$  (рис. 1.6, г).

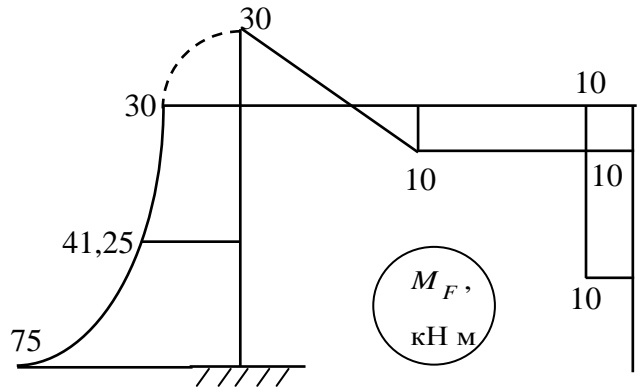
Криволинейный участок на эпюре  $M$  требует дополнительного уточнения его очертания, для чего необходимо найти, кроме значения изгибающего момента в середине участка, также и экстремальное его значе-

ние, соответствующее нулевому значению поперечной силы на этом участке. Данная процедура будет произведена ниже при построении эпюры  $Q$ .

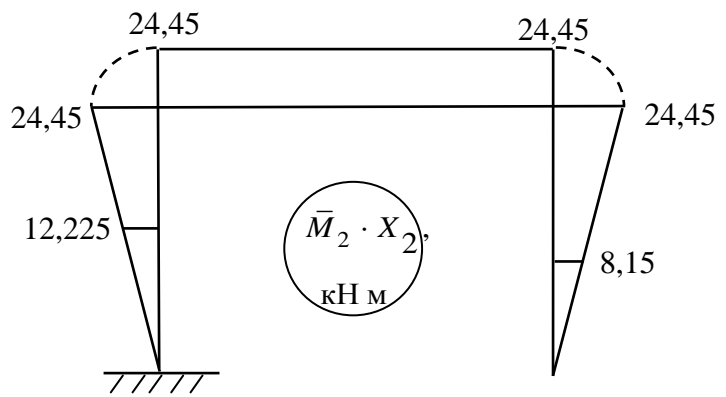
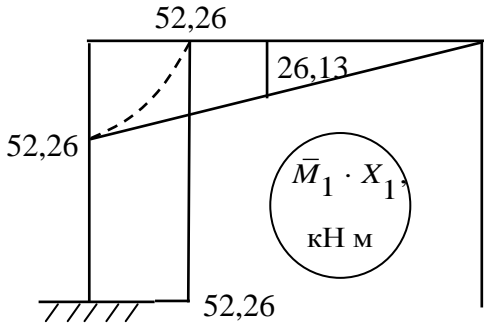
а)



б)



в)



г)

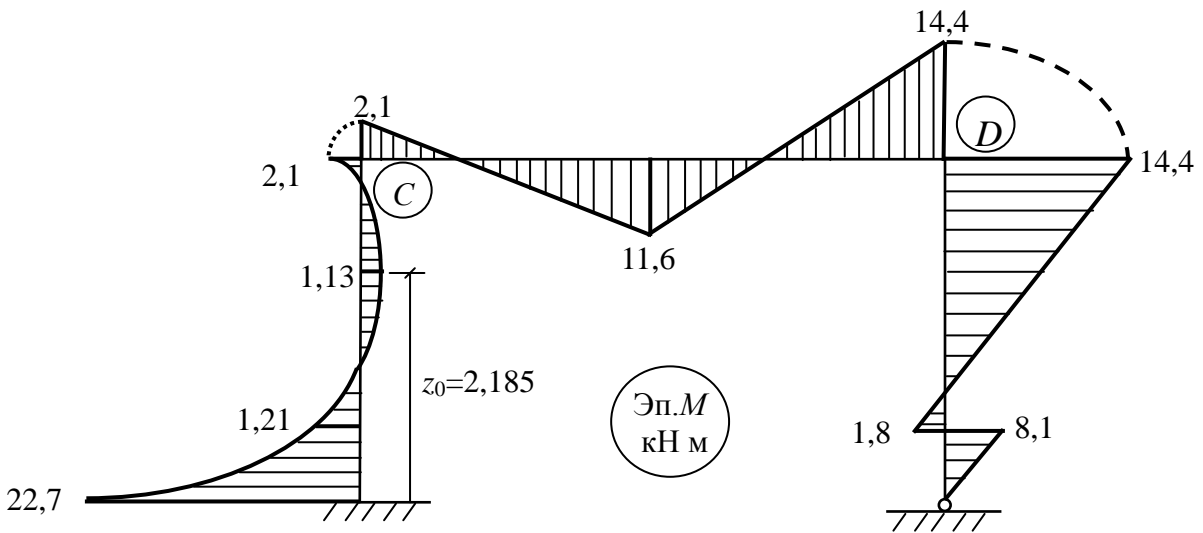


Рис. 1.6

### Проверка правильности построения эпюры $M$

Для проведения статической проверки вырезаем жесткие узлы рамы, кроме опорных, прикладываем все действующие в них моменты (в том числе внешние) и проверяем условия равновесия  $\sum M_{уз} = 0$ .

В рассматриваемом примере «вырежем» верхние узлы рамы (рис. 1.7) и проверим их равновесие, направляя стрелки моментов от растянутых волокон эпюр  $M$ .

$$\text{Узел } C: \quad \sum M_{уз} = 2,19 - 2,19 = 0.$$

$$\text{Узел } D: \quad \sum M_{уз} = 14,45 - 14,45 = 0.$$

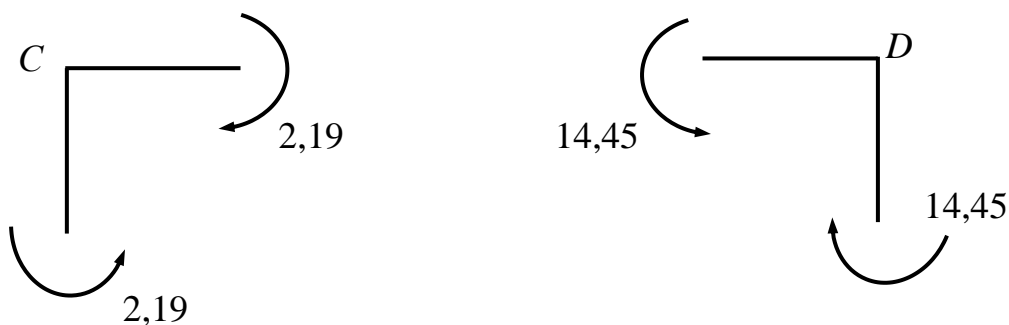


Рис. 1.7

Условие равновесия узлов  $C$  и  $D$  выполняется, значит эпюры сложены правильно, поэтому выполнение условия равновесия узлов является необходимым, но недостаточным.

Для контроля правильности построения эпюры  $M$  необходимо выполнить *деформационную* проверку. Суть этой проверки заключается в доказательстве отсутствия перемещения по направлению каждой отброшенной связи:



$$\Delta_S = \sum_{n=1}^k \int_0^{l_k} \frac{M \cdot \bar{M}_i}{E I_n} dz = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_{\text{сн}})$$

или по направлению всех отброшенных связей:

$$\Delta_{\Sigma\Delta} = \sum_{n=1}^k \int_0^{l_k} \frac{M \cdot \bar{M}_{\Sigma}}{E I_n} dz = 0.$$

В нашем примере, воспользовавшись последней формулой и приведенными выше формулами трапеций и Симпсона (см. рис. 1.3), получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma\Delta} &= \frac{3}{6E2I} (-22,74 \cdot 4 - 4 \cdot 1,215 \cdot 2,5 - 2,19 \cdot 1) + \\ &+ \frac{2}{6EI} (-2 \cdot 2,19 \cdot 1 - 2 \cdot 11,68 + 11,68 \cdot 1 + 2,19 \cdot 1) + \\ &+ \frac{2}{6EI} (-2 \cdot 11,68 \cdot 1 + 2 \cdot 14,45 \cdot 3 + 14,45 \cdot 1 - 11,68 \cdot 3) + \\ &+ \frac{2}{6E2I} (2 \cdot 14,46 \cdot 3 - 2 \cdot 1,85 \cdot 1 - 1,85 \cdot 3 + 14,45 \cdot 1) + \frac{1}{6E2I} (2 \cdot 8,15 \cdot 1) = \\ &= \frac{-157,95 - 27,74 + 85,5 + 91,9 + 8,15}{6EI} = -\frac{0,023}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Приблизительное равенство нулю значения  $\Delta_{\Sigma\Delta}$  говорит о том, что эпюра моментов построена правильно.

Здесь мы фактически определили нулевое перемещение в статически неопределимой системе. Чтобы найти в статически неопределимой системе перемещение в любом сечении, необходимо построить две эпюры  $M$ : одну в статически неопределимой (раскрыв статическую неопределимость), вторую от единичной силы, приложенной в сечении статически определимой основной системы.

## 8. Построение эпюр поперечных сил $Q$ и продольных сил $N$

Для построения эпюр поперечной и продольной сил расчленим раму на отдельные элементы, отбросив опорные закрепления, жесткие узлы, а также сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные силы и моменты (рис. 1.8):  $F = 20$  кН.

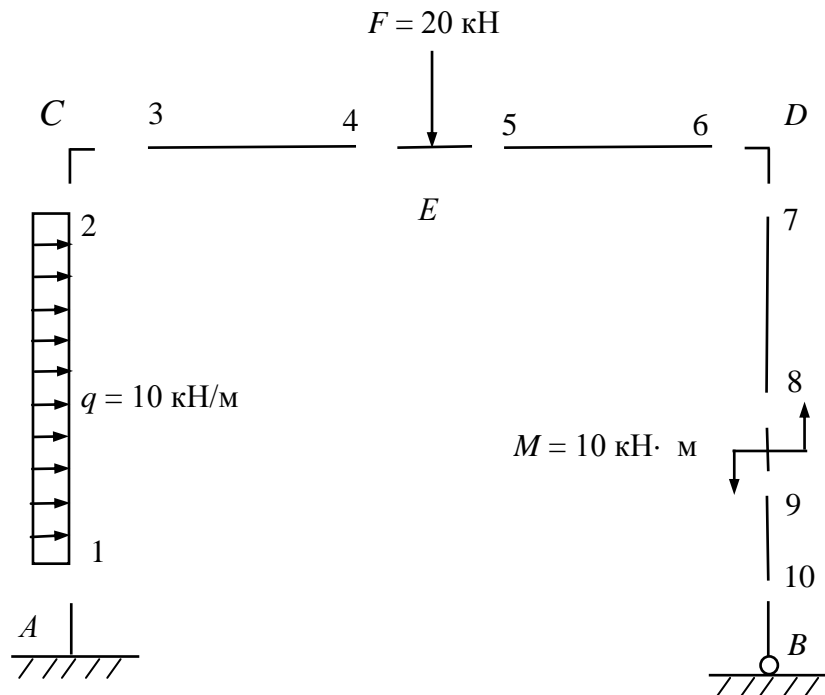


Рис. 1.8

*Правило знаков:* продольная сила считается положительной, если растягивает элемент, а поперечная сила положительна, если вращает отсеченную часть по часовой стрелке (рис. 1.9).

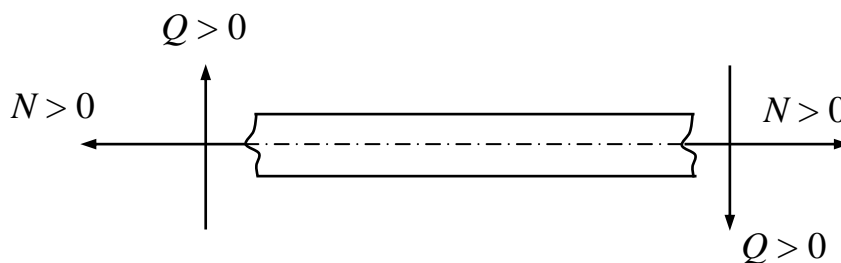


Рис. 1.9

Теперь для определения поперечной силы, действующей на каждом участке, имеющем расчетную схему в виде простой балки на двух опорах, загруженной внешней распределенной нагрузкой (если она есть) и опорными изгибающими моментами, взятыми с эпюры  $M$ , направленными от растянутых волокон, можно воспользоваться формулами, приведенными на рисунке 1.10. При этом искомые поперечные силы  $Q$  показываются положительно направленными.

Если в результате расчета оказывается, что сила  $Q$  имеет отрицательное значение, следует изменить направление поперечной силы на противоположное.

Затем, последовательно уравнивая каждый отдельный узел рамы ( $\sum z = 0$  и  $\sum y = 0$ ), определяются и продольные силы.

В этих формулах  $M$ , направленный по ходу часовой стрелки, берется со знаком минус.

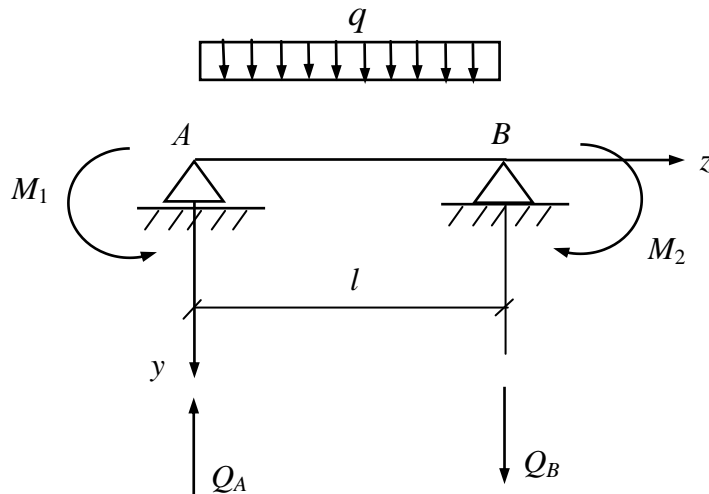


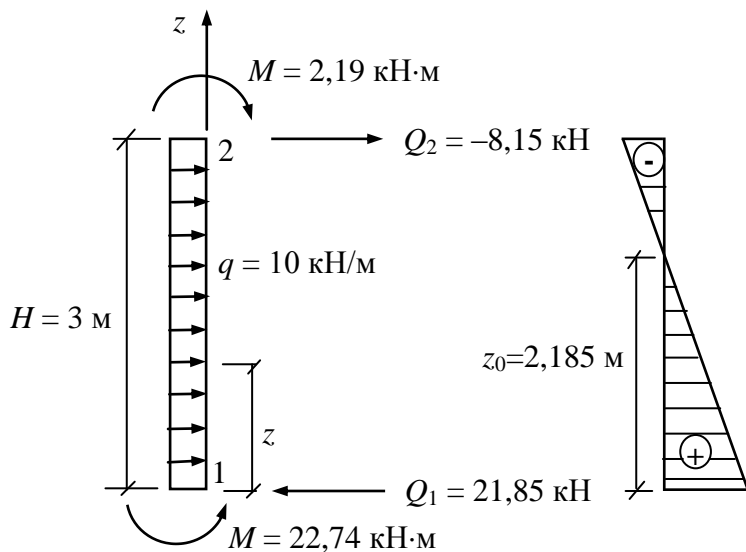
Рис. 1.10

$$Q_A = \frac{ql}{2} + \frac{M_1 - M_2}{l};$$

$$Q_B = -\frac{ql}{2} + \frac{M_1 - M_2}{l}.$$

## Определение поперечных сил $Q$

### Участок 1–2



$$Q_1 = \frac{qh}{2} + \frac{M_{\text{лев}} - M_{\text{пр}}}{l} = \frac{10 \cdot 3}{2} + \frac{22,74 - 2,19}{3} = 21,85 \text{ кН};$$

$$Q_2 = -\frac{qh}{2} + \frac{M_{\text{лев}} - M_{\text{пр}}}{l} = -\frac{10 \cdot 3}{2} + \frac{22,74 - 2,19}{3} = -8,15 \text{ кН}.$$

Эпюра поперечных сил приведена на рисунке 1.11, а.

Видно, что на рассматриваемом участке есть сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль, следовательно, изгибающий момент в данном сечении имеет экстремальное значение.

Для определения экстремального значения изгибающего момента запишем функцию изменения поперечной силы по длине участка, совместив ось  $z$  с продольной осью участка  $Q(z) = Q_1 - q \cdot z$ , и определим ординату  $z_0$ , при которой  $Q(z) = 0$ :

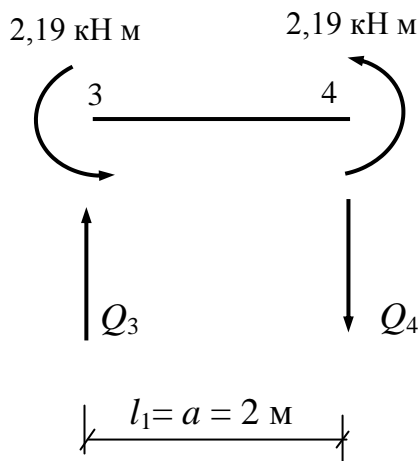
$$z_0 = \frac{Q_1}{q} = \frac{21,85}{10} = 2,185 \text{ м}.$$

Затем запишем функцию изменения изгибающего момента по длине участка  $M(z) = -22,74 + Q_1 \cdot z - q \frac{z^2}{2}$  и определим значение  $M_{\text{изг}}^{\text{экстр}}$  при  $z_0 = 2,185$  м:

$$M_{\text{изг}}^{\text{экстр}} = (z_0 = 2,185 \text{ м}) = -22,74 + 21,85 \cdot 2,185 - 10 \frac{2,185^2}{2} = 1,13 \text{ кН м.}$$

Нанесем полученное экстремальное значение момента на эпюру  $M$  (см. рис. 1.6, з).

#### Участок 3–4

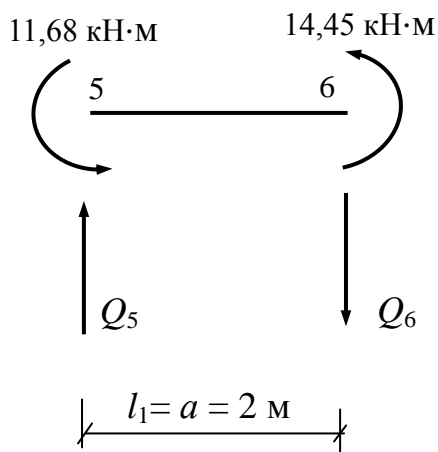


$$Q_3 = \frac{2,19 + 11,68}{2} = 6,94 \text{ кН;}$$

$$Q_4 = \frac{2,19 + 11,68}{2} = 6,94 \text{ кН.}$$

*Напоминание.* Принимаем  $M$ , направленный вращающий по часовой стрелке, со знаком минус.

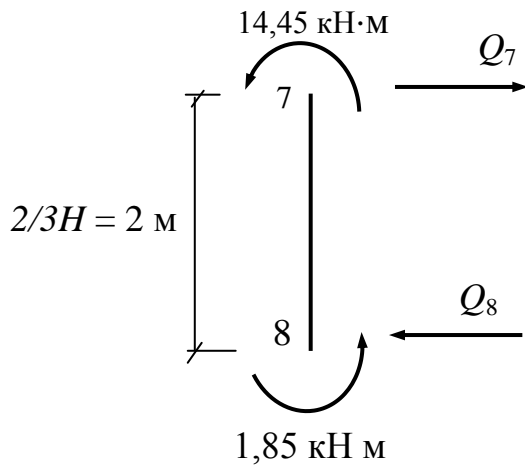
#### Участок 5–6



$$Q_5 = \frac{-11,68 - 14,45}{2} = -13,065 \text{ кН;}$$

$$Q_6 = \frac{-11,68 - 14,45}{2} = -13,065 \text{ кН.}$$

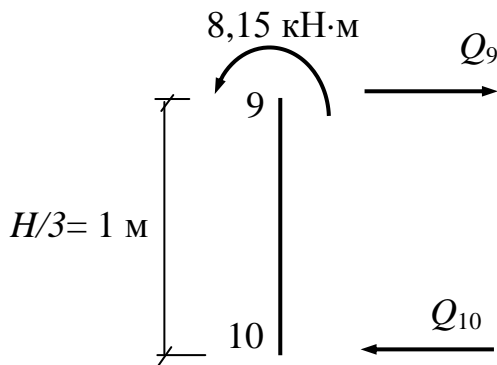
### Участок 7–8



$$Q_7 = \frac{1,85 + 14,45}{2} = 8,15 \text{ кН};$$

$$Q_8 = \frac{1,85 + 14,45}{2} = 8,15 \text{ кН}.$$

### Участок 9–10



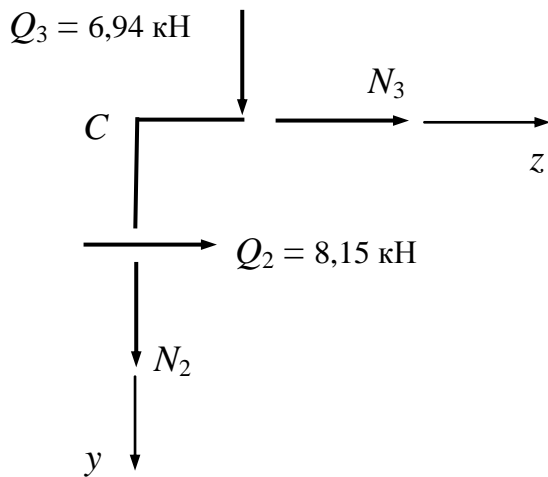
$$Q_9 = \frac{8,15}{1} = 8,15 \text{ кН};$$

$$Q_{10} = \frac{8,15}{1} = 8,15 \text{ кН}.$$

## 9. Определение продольных сил $N$

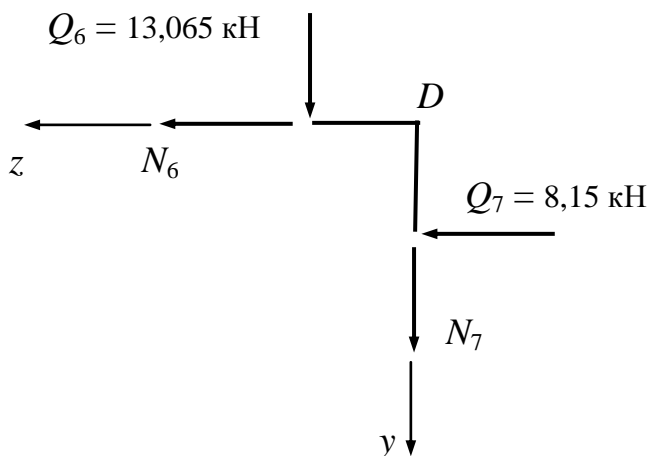
После определения поперечных сил на отдельных участках рамы приступаем к определению продольных сил. Для этого к вырезанному узлу прикладываем найденные поперечные силы со смежных участков рамы, взятых со своими знаками, и положительно направленные (растягивающие) продольные силы, составляем уравнения равновесия.

Узел C



$$\begin{aligned}\Sigma Z = 0; \quad & 8,15 + N_3 = 0; \\ & N_3 = -8,15 \text{ кН.} \\ \Sigma Y = 0; \quad & 6,94 + N_2 = 0; \\ & N_2 = -6,94 \text{ кН.}\end{aligned}$$

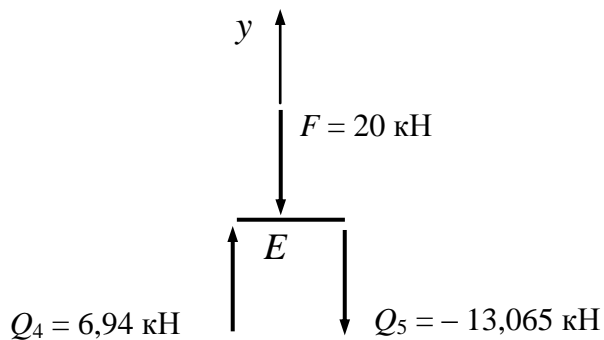
Узел D



$$\begin{aligned}\Sigma Z = 0; \quad & 8,15 + N_6 = 0; \\ & N_6 = -8,15 \text{ кН.} \\ \Sigma Y = 0; \quad & 13,065 + N_7 = 0; \\ & N_7 = -13,065 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Дополнительной проверкой правильности выполненных расчетов является проверка равновесия узла E.

Сечение E



$$\begin{aligned}\Sigma Y = 0; \quad & Q_4 - Q_5 - F = 0; \\ & 6,94 - (-13,065) - 20 = 0,005 \approx 0.\end{aligned}$$



На рисунке 1.11 приведены эпюры поперечной силы  $Q$  (а) и продольной силы  $N$  (б).

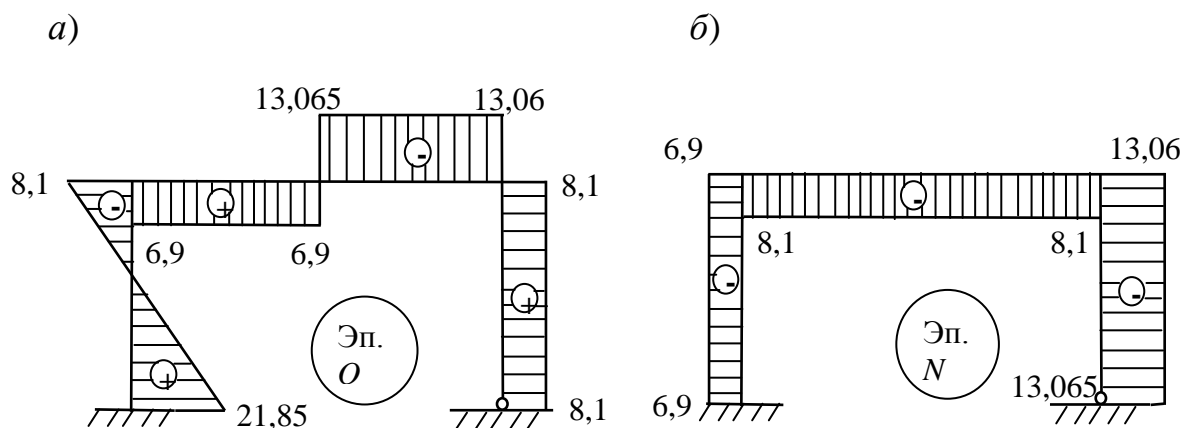


Рис. 1.11

### 10. Статическая проверка рамы в целом

Статическая проверка рамы в целом заключается в проверке равновесия всей рамы в целом с учетом найденных опорных реакций и внешних нагрузок или любой ее отсеченной части с учетом найденных внутренних усилий в местах проведенных сечений, т. е. в проверке выполнения условий равновесия:

$$\sum Z = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_A = 0.$$

Нарисуем вновь исходную раму с действующими на нее внешними нагрузками и определенными опорными реакциями (см. эп.  $M$ ,  $Q$  и  $N$ ) и проверим выполнение условий равновесия (рис. 1.12).

$$\sum Z = 0; \quad q \cdot H - H_A - H_B = 0;$$

$$10 \cdot 3 - 21,85 - 8,15 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad F - R_A - R_B = 0;$$

$$20 - 6,94 - 13,065 = 0,005 \approx 0;$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$\frac{qH^2}{2} + \frac{Fa}{2} - M - M_A - R_B L = \frac{10 \cdot 3^2}{2} - \frac{20 \cdot 4}{2} - 10 - 22,74 - 13,065 \cdot 4 = 0.$$

Уравнения равновесия выполняются, следовательно, расчет верен.

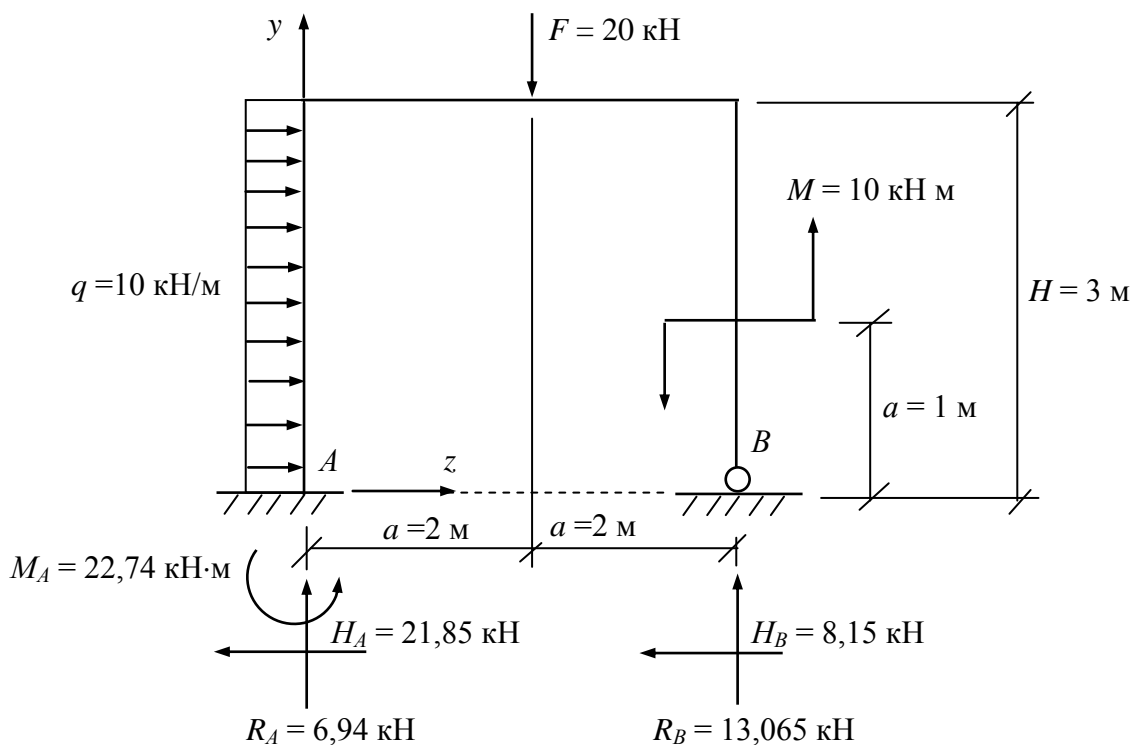


Рис. 1.12

### Задача 2

#### Расчет плоской рамы методом перемещений

Для статически неопределимой рамы (прил. 2, рис. П.2.1, П. 2.2, П. 2.3) требуется:

- 1) определить степень кинематической неопределимости рамы;
- 2) выбрать основную систему;
- 3) составить канонические уравнения;

4) определить коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений;

5) решить систему канонических уравнений и сделать проверку решения;

б) построить эпюры:

изгибающих моментов  $M$ ,

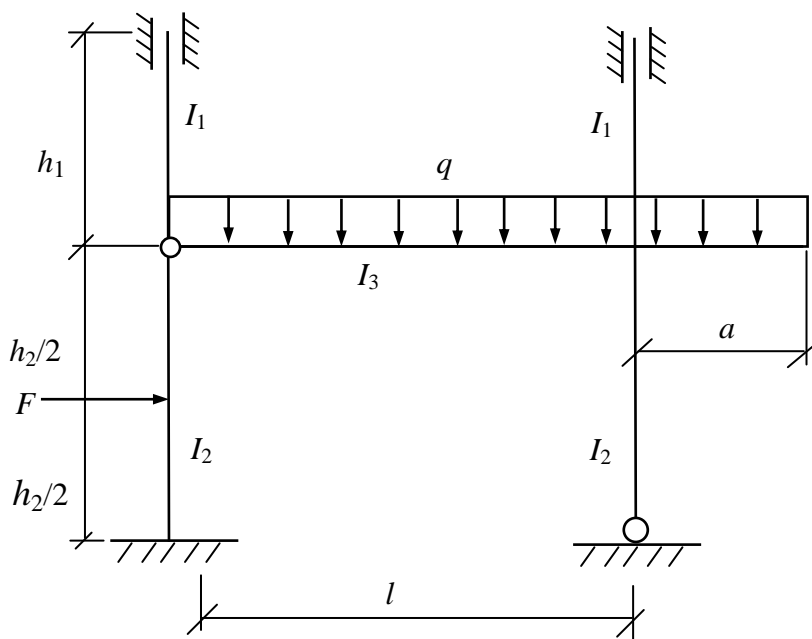
поперечных сил  $Q$ ,

продольных сил  $N$ ;

7) выполнить статическую проверку.

Исходные данные для расчета взять из прил. 2, табл. П2.1.

**Пример расчета статически неопределимой рамы  
методом перемещений**



Исходные дан-  
ные (рис. 2.1):

$$h_1 = 4 \text{ м};$$

$$h_2 = 6 \text{ м};$$

$$l = 8 \text{ м};$$

$$a = 2 \text{ м};$$

$$F = 40 \text{ кН};$$

$$q = 30 \text{ кН/м};$$

$$I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 2 : 3.$$

Рис. 2.1

**1. Определение степени кинематической неопределимости рамы**

Степень кинематической неопределимости рамы определяется по формуле:

$$n = n_y + n_d,$$

где  $n$  – общее число неизвестных;

$n_y$  – число неизвестных углов поворота узлов, равное числу «жестких» узлов рамы (не включая опорные);

$n_d$  – число неизвестных независимых линейных смещений узлов.

Число независимых линейных смещений узлов равно степени геометрической изменяемости рамы, полученной из заданной рамы путем введения во все «жесткие» узлы (включая опорные) полных шарниров.

Степень геометрической изменяемости рамы равна числу стержней, которые необходимо ввести в шарнирную схему рамы для превращения ее в геометрически неизменяемую.

В рассматриваемой раме один «жесткий» узел, поэтому  $n_y = 1$  (рис. 2.2, а).

Для определения  $n_d$  перейдем к шарнирной схеме рамы (рис. 2.2, б), представляющей собой изменяемую систему (консоль длиной  $a$  не показана на рис. 2.2, б, так как она не учитывается при кинематическом анализе). Для превращения изменяемой системы в геометрически неизменяемую достаточно поставить один опорный стержень, следовательно,  $n_d = 1$ .

Общее число неизвестных будет равно:

$$n = n_y + n_d = 1 + 1 = 2.$$

## 2. Выбор основной системы

Основная система получается из исходной рамы наложением на узлы рамы дополнительных связей двух типов:

а) «плавающих» заделок – связей, препятствующих углам поворота «жестких» узлов, но не препятствующих их линейным смещениям; «пла-

вающие» заделки накладываются на все «жесткие» узлы рамы (кроме опорных); число заделок равно  $n_y$ ;

б) линейных связей - связей, накладываемых на «жесткие» и шарнирные узлы рамы для ликвидации их независимых линейных перемещений: число таких связей равно  $n_d$ .

В нашем случае общее количество дополнительных связей равно двум – это «плавающая» заделка, которая должна быть наложена на «жесткий» узел рамы для ликвидации его углового смещения, и линейная связь, наложенная на один из узлов исходной рамы для ликвидации возможных горизонтальных смещений узлов (рис. 2.2, в).

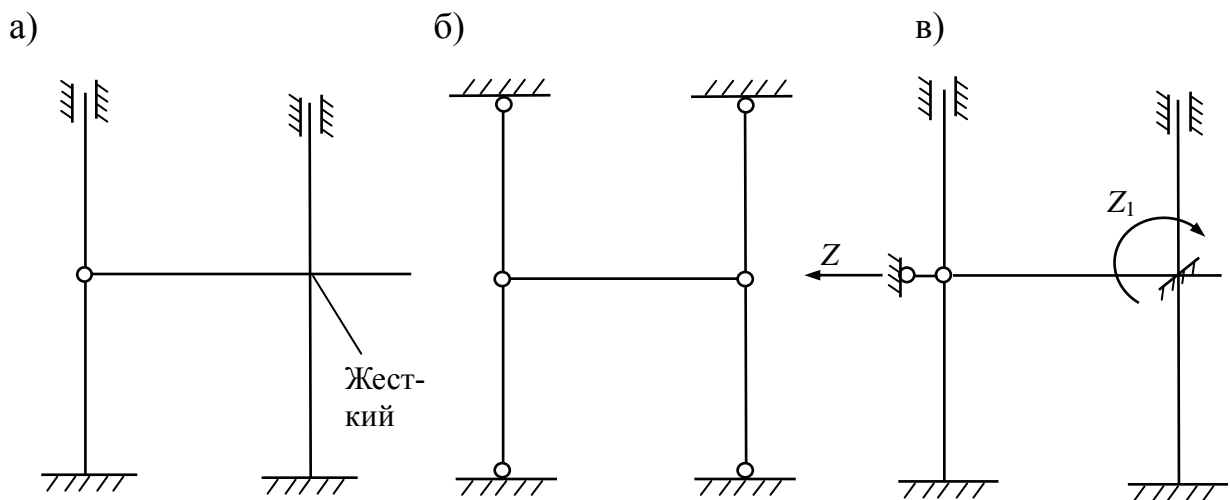


Рис. 2.2

За неизвестные  $Z_1$  и  $Z_2$  приняты соответственно реальный угол поворота «жесткого» узла и линейное перемещение обоих узлов (рис. 2.2, в). Следует отметить, что нумеровать неизвестные можно в любой последовательности.

### 3. Составление канонических уравнений метода перемещений

Разрешающие уравнения метода перемещений – это линейные алгебраические уравнения, относящиеся к группе статических. Порядок систе-

мы уравнений равен степени кинематической неопределимости рамы (числу неизвестных). При  $n = 2$  канонические уравнения записываются в виде:

$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных  $r_{ij}$  и свободные члены  $R_{ij}$  представляют собой реакции в виде сил или моментов, возникающих в наложенных связях соответственно от действия единичных неизвестных и внешних нагрузок. Так  $r_{ij}$  – реакция в  $i$ -й наложенной связи, вызванная смещением связи  $j$  – на величину  $Z_j = 1$ .  $R_{ij}$  – это реакция в  $i$ -й наложенной связи, вызванная действием внешних нагрузок.

В «плавающих» заделках возникают реакции в виде моментов, в линейных связях – в виде сил.

#### *4. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода перемещений*

Для определения коэффициентов и свободных членов необходимо предварительно построить в основной системе единичные (вызванные действием единичных неизвестных) и грузовую (вызванную внешними силовыми воздействиями) эпюры моментов.

Указанные эпюры в методе перемещений (в отличие от метода сил) строят с помощью специальных таблиц (прил. 3), в которых приведены результаты расчетов статически неопределимых балок на единичные кинематические и силовые воздействия. В виде набора таких балок может быть представлена любая основная система метода перемещений.

Для построения единичных и грузовой эпюр достаточно правильно воспользоваться табличными данными. Этому способствует предварительное изображение деформированного состояния основной системы, вызванного действием каждого из единичных неизвестных и внешней нагрузки,

которое в каждом отдельном случае позволяет выявить деформированные (изогнутые) элементы основной системы, а также расположение растянутых волокон в деформированных элементах. Такая информация необходима для правильного применения табличных данных при построении эпюр.

При вычислении коэффициентов и свободных членов используется, как правило, статический метод, при этом коэффициенты и свободные члены делят на две группы:

- коэффициенты и свободные члены, представляющие собой реакции в виде моментов, возникающих в «плавающих» заделках;
- коэффициенты и свободные члены, представляющие реакции в виде сил, возникающих в линейных связях.

Коэффициенты и свободные члены первой группы определяются *способом вырезания узлов*. Первый индекс коэффициента (или свободного члена) показывает, какой узел надо «вырезать», второй индекс – в какой эпюре «вырезается» узел. Для «вырезанного» узла составляется моментное уравнение равновесия, из которого определяется искомая величина.

При определении коэффициентов и свободных членов второй группы рассматривается равновесие либо всей основной системы в соответствующем состоянии, либо ее части. Первый индекс указывает на линейную связь (в соответствии с номером неизвестного  $Z_i$ ), в которой определяется реакция, второй – в каком состоянии (эпюре) определяется реакция в этой связи. Для вычисления искомых величин используется уравнение проекций на вертикальную или горизонтальную ось (в зависимости от ситуации).

Представим основную систему в виде набора балок с соответствующими основной системе опорными закреплениями (рис. 2.3, *a*) и пронумеруем их в любой последовательности. Необходимо отметить, что в исходной раме верхние опорные закрепления препятствуют углам поворотов опорных сечений стержней и их горизонтальным перемещениям, но не за-

прещают вертикальных перемещений. Указанная особенность в закреплении влияет на распределение продольных сил. С точки зрения распределения изгибающих моментов такие опорные закрепления эквивалентны стандартным жестким закреплениям (см. рис. 2.3, а, б).

Подробно рассмотрим построение эпюры моментов в основной системе от действия  $Z_1 = 1$ . Изобразим предварительно деформированное состояние основной системы, вызванное поворотом «плавающей» заделки на единичный угол (рис. 2.3, б). Из рисунка 2.3, б видно, что деформируются (изгибаются) стержни 3, 4, 5 (рис. 2.3, а), а консоль поворачивается как жесткое целое без деформаций. На рисунке 2.3, в изображено деформированное состояние балочной аналогии основной системы, вызванное действием  $Z_1 = 1$ .

Деформированное состояние показывает, что при действии  $Z_1 = 1$  изгибающие моменты возникнут только в элементах 3, 4, 5.

Для построения эпюр моментов в этих элементах обратимся к таблицам приложения 3. В таблицах находим балки, имеющие такие же опорные закрепления и схему загрузки, как элементы 3, 4, 5, и перенесем приведенные для них эпюры моментов (с указанием ординат) на основную систему.

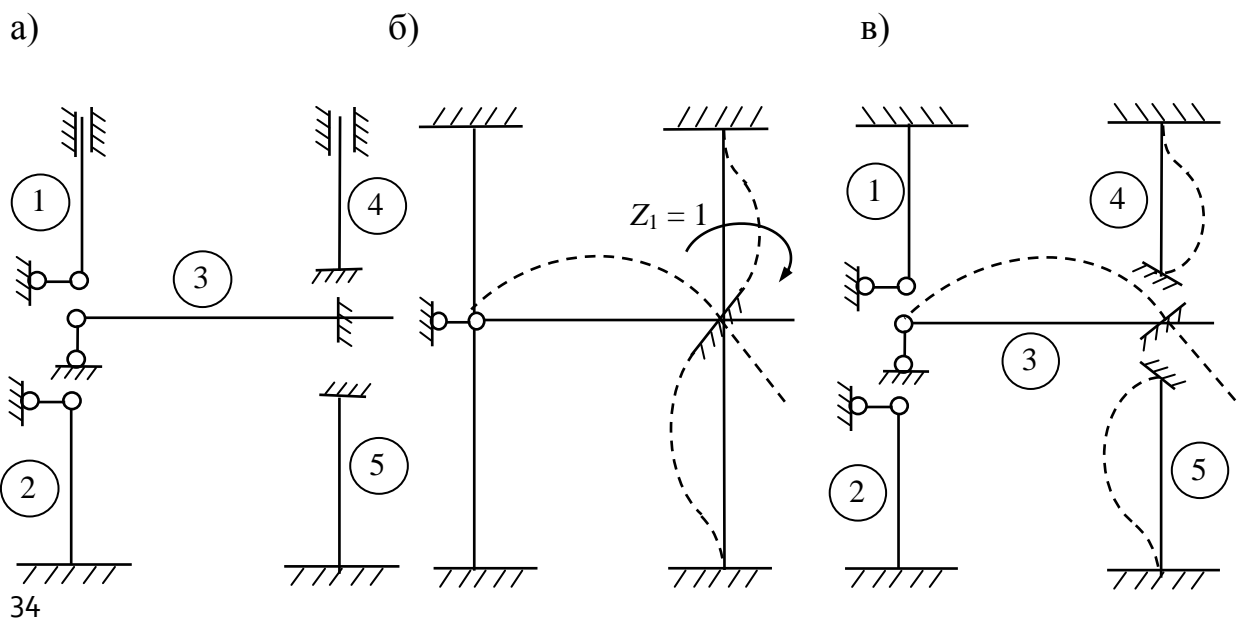




Рис. 2.3

При переносе необходимо учитывать, что ординаты эпюр моментов в таблицах отложены со стороны растянутых волокон балок. Кроме моментов, из таблиц необходимо перенести на основную систему опорные реакции, возникающие в реальных опорных закреплениях, с указанием их величин и направлений. Так, например, для элемента 3 в таблицах находим аналог в виде балки, шарнирно закрепленной с одной стороны и жестко защемленной с другой, при этом жесткое защемление поворачивается на единичный угол. На основной системе, в пределах данного элемента, изображаем приведенную в таблице для рассматриваемой балки эпюру моментов и указываем величину опорного момента в долях изгибной жесткости данного элемента (рис. 2.4, а). Опорные реакции в элементе 3 не показываем, так как он не содержит реальных опорных закреплений. Для элементов 4 и 5 аналогом в таблицах является балка, жестко защемленная по концам; одно из опорных сечений при этом поворачивается на единичный угол. Эпюру моментов для этого случая переносим на элементы 4 и 5 основной системы.

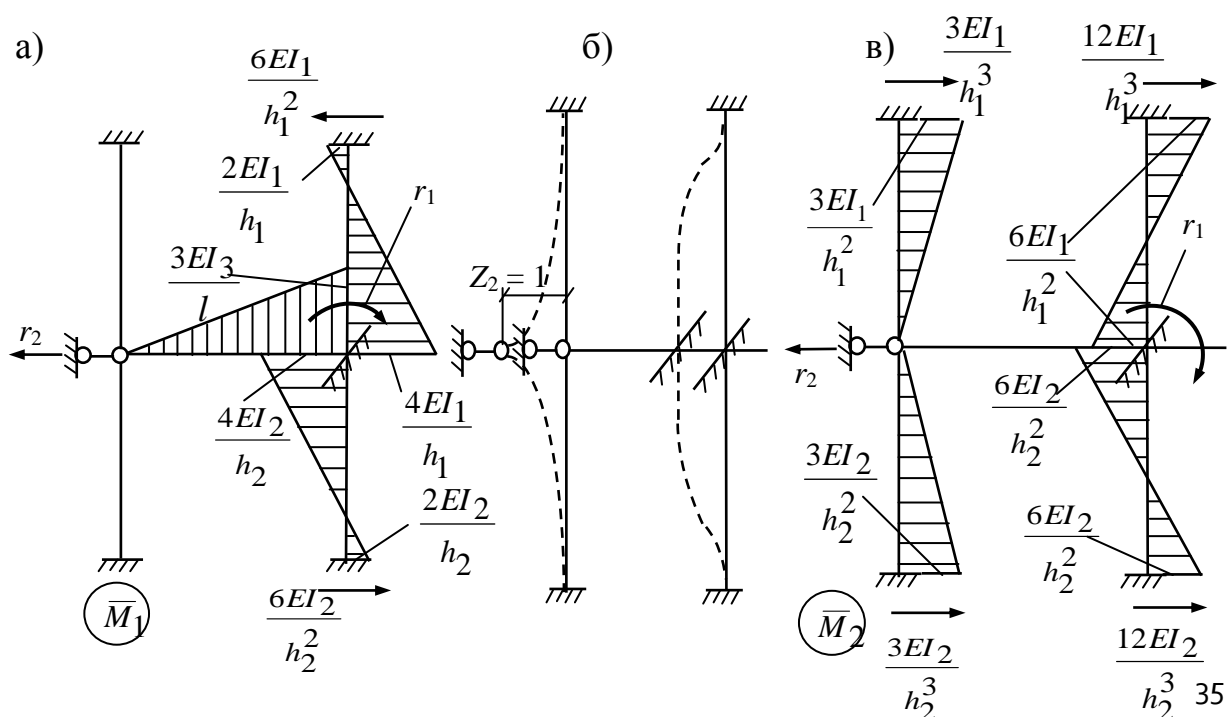


Рис. 2.4

По таблицам определяем значения и направления опорных реакций и показываем их в реальных опорах элементов 4 и 5. На рисунке 2.4, а показан конечный вид эпюры  $\bar{M}_1$ .

На рисунке 2.4, б, в показаны соответственно, деформированное состояние основной системы и эпюра моментов  $\bar{M}_2$ , вызванные действием  $Z_2 = 1$ . Эпюра  $\bar{M}_2$  построена по аналогии с эпюрой  $\bar{M}_1$ .

Грузовая эпюра  $M_F$  строится в такой же последовательности, что и единичные. На рисунке 2.5 а, б приведены соответственно деформированное состояние и эпюра моментов в основной системе, вызванные действием внешних нагрузок.

Заметим, что эпюра моментов в пределах консоли не имеет аналога в таблицах, так как консольная балка является статически определимой. Если в составе основной системы встречаются статически определимые балки, то эпюры моментов для них строятся самостоятельно.

Значения моментов в элементах 2 и 3 и опорной реакции для элемента 2 вычислены с помощью формул, приведенных в таблицах приложения 3.

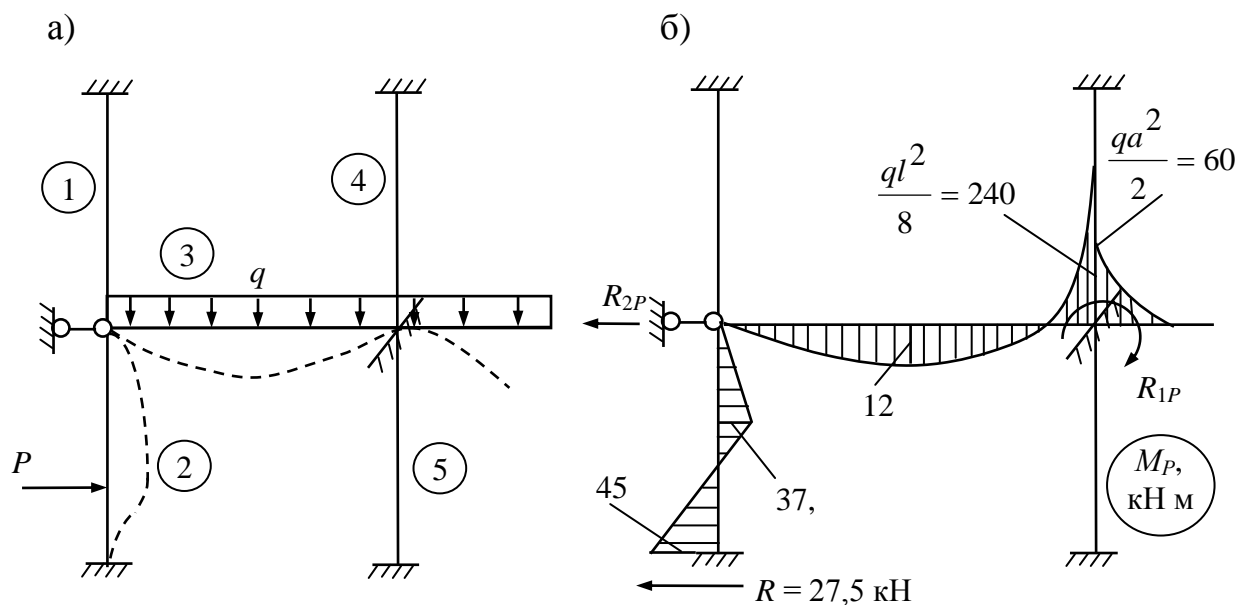


Рис. 2.5

После построения единичных и грузовой эпюр переходим к вычислению коэффициентов и свободных членов. К первой группе относятся  $r_{11}$ ,  $r_{12}$  и  $R_{1F}$  (см. рис. 2.4, а, в; 2.5, б), ко второй –  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  и  $R_{2F}$  (см. рис. 2.4, а, в; 2.5, б).

Для определения коэффициентов 1-й группы используем способ вырезания узлов.

Так, для вычисления  $r_{11}$  необходимо вырезать узел, на который наложена «плавающая» заделка (узел 1) в эпюре  $\bar{M}_1$  (рис. 2.6, а).

В рассеченных стержнях показаны моменты, значения которых взяты из эпюры  $\bar{M}_1$ .

Составим моментное уравнение равновесия для вырезанного узла:

$$\sum M_1 = 0; \quad r_{11} - \frac{3EI_3}{l} - \frac{4EI_1}{h_1} - \frac{4EI_2}{h_2} = 0,$$

откуда

$$r_{11} = \frac{3EI_3}{l} + \frac{4EI_1}{h_1} + \frac{4EI_2}{h_2}.$$

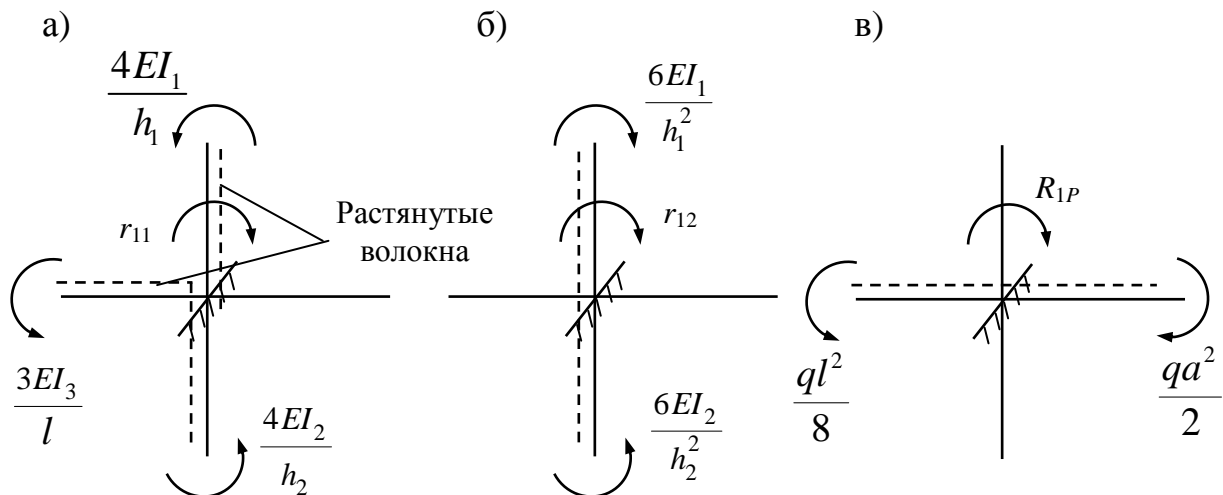


Рис. 2.6

Для придания этому коэффициенту и остальным более простого вида произведем приведение жесткостей, выразив жесткости всех элементов через какую-то одну, используя при этом заданное в исходных данных соотношение моментов инерции. Пусть  $EI_1 = EI$ , тогда  $EI_2 = 2EI$ ,  $EI_3 = EI$ .

Упростим коэффициент  $r_{11}$ :

$$r_{11} = \frac{3EI_3}{l} + \frac{4EI_1}{h_1} + \frac{4EI_2}{h_2} = \frac{3 \cdot 3EI}{8} + \frac{4EI}{4} + \frac{4 \cdot 2EI}{6} = 3,458 EI .$$

Для определения  $r_{12}$  «вырежем» первый узел в эпюре  $\bar{M}_2$  (рис. 2.6, б).

Из равновесия этого узла получим:

$$r_{12} = -\frac{6EI_1}{h_1^2} + \frac{6EI_2}{h_2^2} = -\frac{6EI}{4^2} + \frac{6 \cdot 2EI}{6^2} = -0,375 EI + 0,333 EI = -0,042 EI .$$

Для определения  $R_{1F}$  «вырежем» первый узел в состоянии  $M_F$  (рис. 2.6, в):

$$R_{1F} = \left( -\frac{q \cdot a^2}{2} + \frac{q \cdot l^2}{8} \right) = -60 + 240 = 180 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Коэффициенты и свободные члены 2-й группы определим из условия равновесия всей рамы в соответствующем состоянии. При этом используем уравнение проекций на горизонтальную ось.

Определим коэффициент  $r_{21}$ . Для этого рассмотрим равновесие рамы в состоянии  $\bar{M}_1$  (рис. 2.7, а).

Изгибающие моменты не показаны на рисунке, так как они не входят в уравнение проекций.

Составим уравнение проекций на горизонтальную ось:

$$\sum X_i = 0; \quad -r_{21} - \frac{6EI_1}{h_1^2} + \frac{6EI_2}{h_2^2} = 0,$$

отсюда 
$$r_{21} = -\frac{6EI_1}{h_1^2} + \frac{6EI_2}{h_2^2} = -\frac{6EI}{4^2} + \frac{6 \cdot 2EI}{6^2} = -0,042 EI .$$

Независимое друг от друга определение коэффициентов  $r_{12}$  и  $r_{21}$  является одновременно проверкой правильности их вычислений, так как  $r_{12}$  должно быть равно  $r_{21}$ .

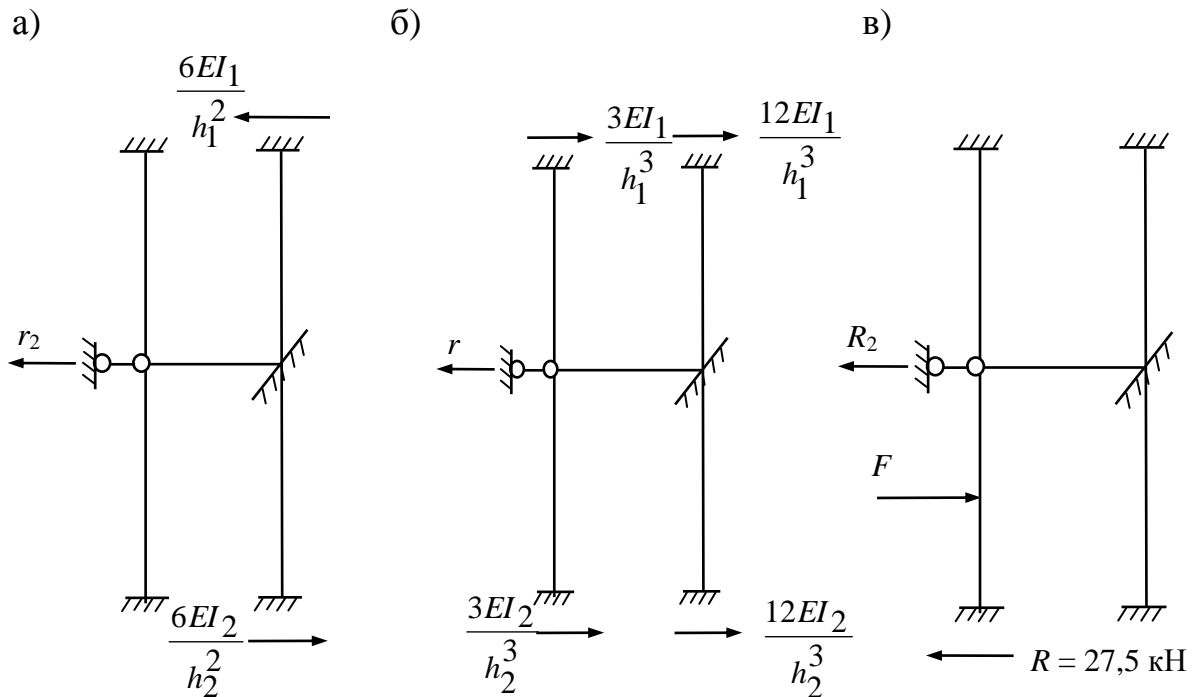


Рис. 2.7

Коэффициент  $r_{22}$  определяется в состоянии  $\bar{M}_2$  (рис. 2.7, б):

$$\sum X_i = 0; \quad r_{22} = \frac{3EI_1}{h_1^3} + \frac{3EI_2}{h_2^3} + \frac{12EI_1}{h_1^3} + \frac{12EI_2}{h_2^3} = 0,$$

отсюда 
$$r_{22} = \frac{3EI}{4^3} + \frac{3 \cdot 2EI}{6^3} + \frac{12EI}{4^3} + \frac{12 \cdot 2EI}{6^3} = 0,373 EI .$$

Для определения  $R_{2F}$  рассмотрим состояние  $M_F$  (рис. 2.7, в):

$$\sum X_i = 0; \quad R_{2F} = F - R = 40 - 27,5 = 12,5 \text{ кН.}$$

На рисунке 2.7, в не показана распределенная нагрузка, т. к. она не проектируется на горизонтальную ось.

После определения коэффициентов и свободных членов необходимо в принципе проверить правильность их вычислений. При выполнении контрольной работы проверку можно не делать, так как при ручном счете выполнение проверки требует проведения громоздких вычислений. Необходимо помнить, однако, что коэффициенты, имеющие одинаковые индексы ( $r_{11}$ ,  $r_{22}$ ), не могут быть отрицательными, а коэффициенты, имеющие смежные индексы ( $r_{12}$ ,  $r_{21}$ ), должны быть равны.

### 5. Решение системы канонических уравнений и проверка правильности решения

Сформируем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 3,458 EI \cdot Z_1 - 0,042 EI \cdot Z_2 + 180 = 0; \\ -0,042 EI \cdot Z_1 + 0,373 EI \cdot Z_2 + 12,5 = 0. \end{cases}$$

Поделим левую часть на  $EI$ :

$$\begin{cases} 3,458 Z_1 - 0,042 Z_2 + \frac{180}{EI} = 0; \\ -0,042 Z_1 + 0,373 Z_2 + \frac{12,5}{EI} = 0. \end{cases}$$

Решив систему уравнений подстановкой, получим:

$$Z_1 = -\frac{52,519}{EI};$$
$$Z_2 = -\frac{39,352}{EI}.$$

Для проведения проверки найденные значения неизвестных необходимо подставить в оба уравнения:

$$3,458 \cdot \left( -\frac{52,519}{EI} \right) - 0,042 \cdot \left( -\frac{39,352}{EI} \right) + \frac{180}{EI} = 0;$$

$$-0,042 \cdot \left( -\frac{52,519}{EI} \right) + 0,373 \cdot \left( -\frac{39,352}{EI} \right) + \frac{12,5}{EI} = 0.$$

Расхождение между левыми и правыми частями незначительно, следовательно, система решена верно.

*6. Построение эпюр изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$*

#### Построение эпюры изгибающего момента $M$

Эпюру моментов для заданной системы построим, используя принцип независимости действия сил, по формуле:

$$M = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + M_F.$$

Необходимо отметить, что при умножении единичной эпюры на соответствующее значение  $Z_i$  вид единичной эпюры сохранится, если  $Z_i$  имеет положительное значение. В противном случае ординаты после перемножения должны быть отложены с другой стороны от оси рамы.

На рисунке 2.8 представлены единичные эпюры, ординаты которых умножены на соответствующие значения  $Z_i$ , и эпюра  $M$ .

При перемножении учтено, что неизвестные  $Z_1$  и  $Z_2$  получились со знаком минус. Для построения результирующей эпюры моментов использована исходная схема рамы.

После построения эпюры  $M$  выполняется визуальная проверка, которая производится в соответствии со следующими правилами:

– ординаты на эпюре моментов в месте примыкания к «жесткому» узлу должны быть равны и отложены по одну сторону от оси рамы, если в

узле не приложен внешний момент; при наличии момента разница между значениями ординат должна быть равна приложенному моменту;

– в шарнирных узлах моменты должны быть равны нулю.

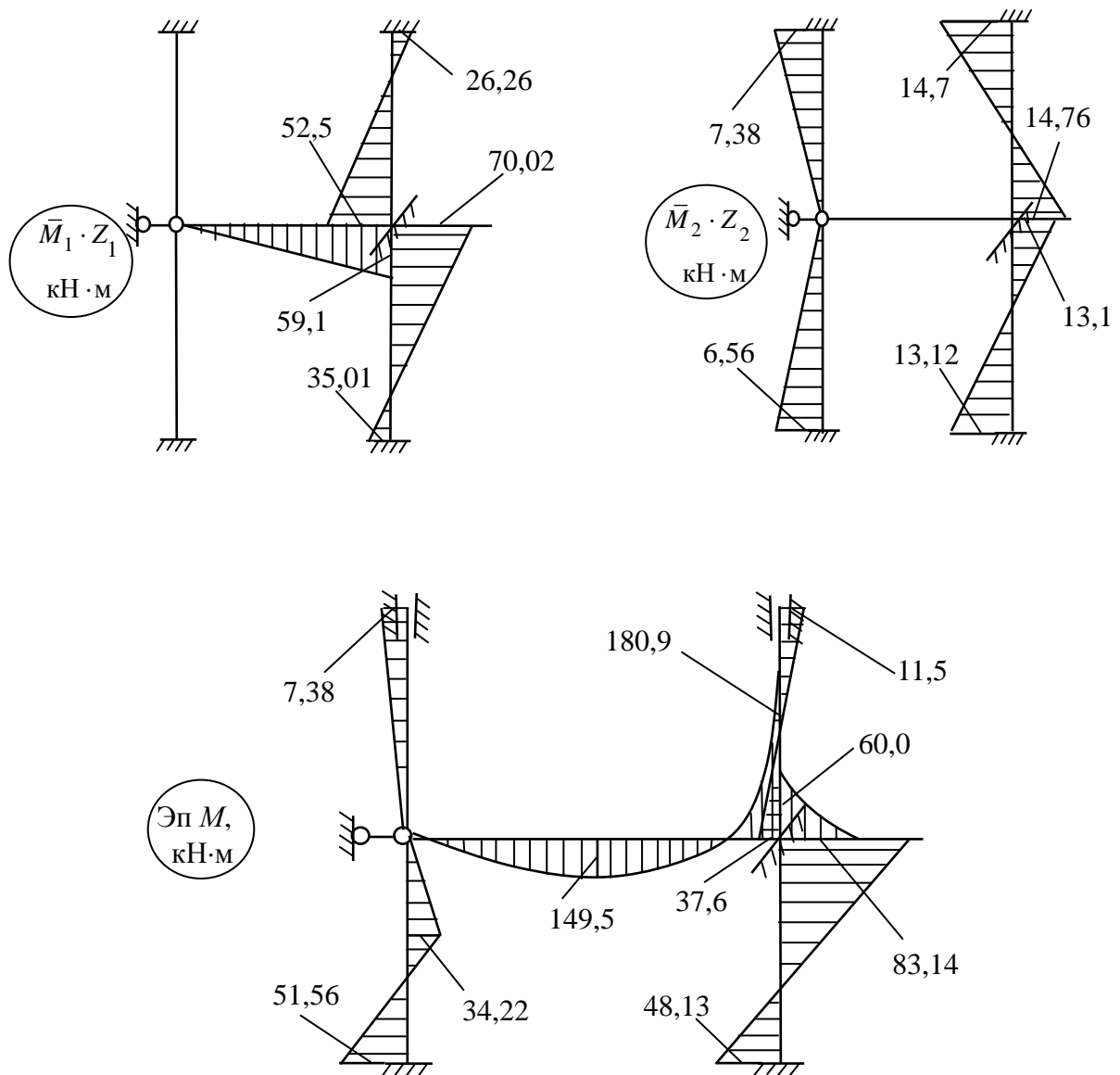


Рис. 2.8

Кроме указанных правил, имеют силу все правила, используемые при проверке эпюр моментов в балках.



Визуальная проверка показывает, что грубых ошибок в эпюре  $M$  нет – «жесткий» узел находится в равновесии, в шарнирах момент равен нулю, поэтому можно переходить к построению эпюр  $Q$  и  $N$ .

## Построение эпюры поперечных сил $Q$

Эпюра  $Q$  в заданной раме может быть построена либо с применением методики, изложенной выше в примере расчета статически неопределимой рамы методом сил, либо по методике, изложенной ниже.

Эпюру  $Q$  будем строить по эпюре  $M$ . Для участков рамы, где момент меняется по линейному закону, будем использовать для построения дифференциальную зависимость между  $M$  и  $Q$ :

$$\frac{dM}{dZ} = Q, \quad \text{или} \quad Q = \frac{\Delta M}{l},$$

где  $\Delta M$  – изменение момента в пределах рассматриваемого участка;

$l$  – длина участка.

Знак  $Q$  на участке определяется по следующему правилу: поперечная сила положительна, если для совмещения оси элемента с касательной к эпюре изгибающего момента на участке приходится вращать эту ось через острый угол по часовой стрелке (рис. 2.9).

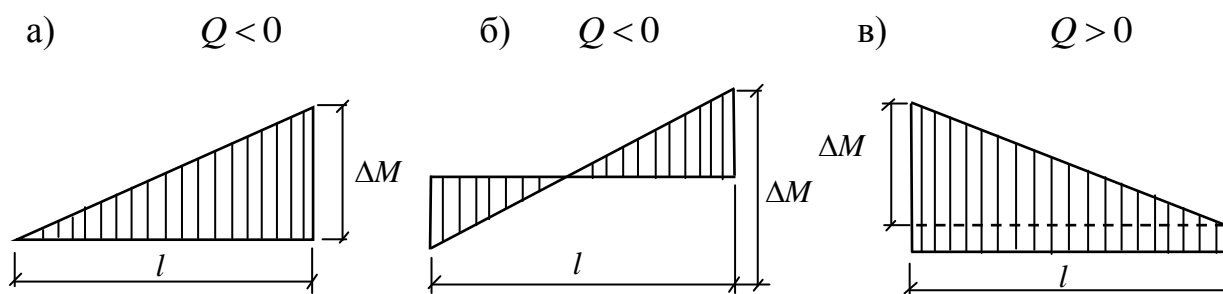


Рис. 2.9

Разобьем раму на участки в соответствии с очертанием эпюры моментов, пронумеруем их в произвольном порядке (рис. 2.10, а).

Определим абсолютные значения поперечных сил на всех участках, кроме 4-го и 7-го:

$$Q_1 = \left| \frac{\Delta M_1}{h_1} \right| = \frac{7,38}{4} = 1,845 \text{ кН}; \quad Q_2 = \left| \frac{\Delta M_2}{h_2/2} \right| = \frac{34,22}{3} = 11,407 \text{ кН};$$

$$Q_3 = \left| \frac{\Delta M_3}{h_2/2} \right| = \frac{34,22 + 51,56}{3} = 28,593 \text{ кН};$$

$$Q_5 = \left| \frac{\Delta M_5}{h_1} \right| = \frac{11,5 + 37,76}{4} = 12,315 \text{ кН};$$

$$Q_6 = \left| \frac{\Delta M_6}{h_2} \right| = \frac{83,14 + 48,13}{6} = 21,88 \text{ кН}.$$

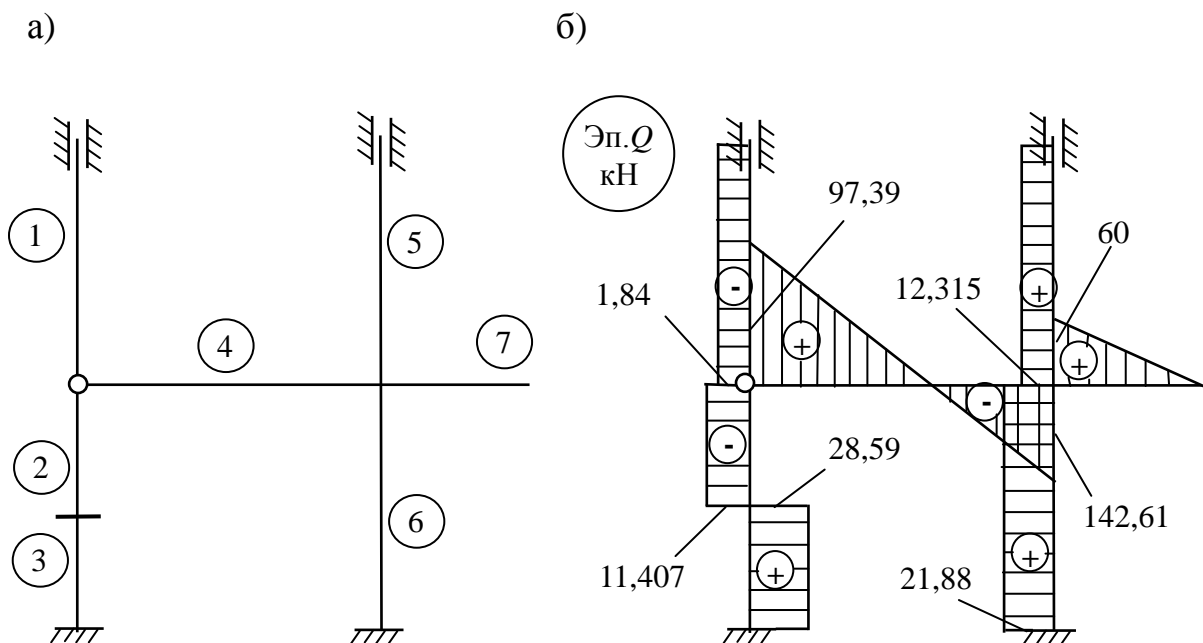


Рис. 2.10

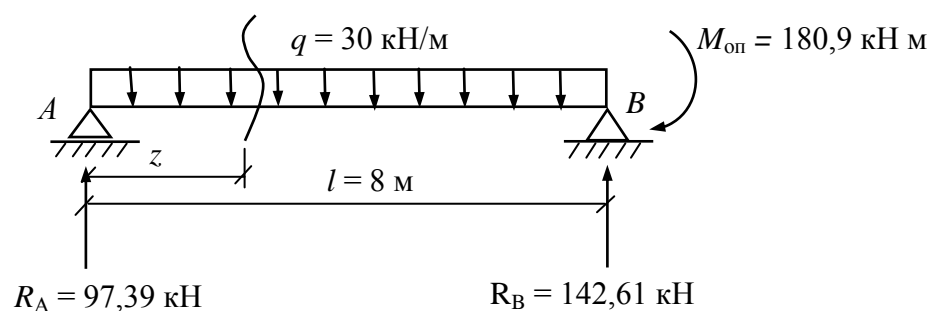
Так как на участках 1 и 2 ось рамы до совмещения с касательной к эюре моментов надо повернуть через острый угол против часовой стрелки, то поперечные силы на этих участках отрицательны (рис. 3.10, б).

На участках 3, 5 и 6 поперечные силы положительны, так как поворот ось рамы происходит по ходу часовой стрелки (рис. 2.10, б).

На участках, где действует равномерно распределенная нагрузка (момент меняется по закону квадратной параболы), эюра  $Q$  строится как в обычной статически определимой балке.

Так, для построения эюры  $Q$  на 4-м участке мысленно «вырежем» его из рамы и рассмотрим как статически определимую балку  $AB$  (рис. 2.11, а), загруженную заданной внешней нагрузкой  $q$  и опорным моментом, значение которого и направление действия переносится с эюры  $M$  (см. рис. 2.11, а).

а)



б)

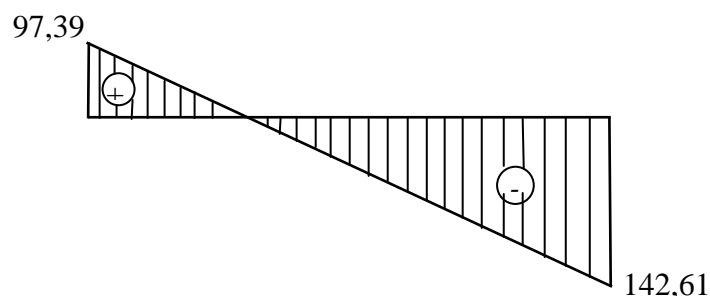


Рис. 2.11

Определим значения опорных реакций в балке, используя для этого моментные уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + M_{\text{оп}} - R_B \cdot l = 0,$$

отсюда

$$R_B = \frac{\frac{ql^2}{2} + M_{\text{оп}}}{l} = \frac{\frac{30 \cdot 8^2}{2} + 180,9}{8} = 142,61 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad M_{\text{оп}} - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + R_A \cdot l = 0;$$

отсюда

$$R_A = \frac{-M_{\text{оп}} + \frac{ql^2}{2}}{l} = \frac{-180,9 + \frac{30 \cdot 8^2}{2}}{8} = 97,39 \text{ кН}.$$

Проверим полученные значения опорных реакций:

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A - ql + R_B = 97,39 - 30 \cdot 8 + 142,61 = 0.$$

Запишем выражение для поперечной силы в сечении балки с координатой  $Z$  (см. рис. 2.11, а):

$$Q_Z = R_A - qZ.$$

Так как  $Q$  в пределах рассматриваемой балки меняется по линейному закону, для построения эпюры  $Q$  в этой балке достаточно определить два значения поперечной силы – в начале и в конце балки.

При  $Z = 0$  (начало балки)

$$Q = R_A - q \cdot 0 = R_A = 97,39 \text{ кН}.$$

При  $Z = l = 8$  м (конец балки)

$$Q = R_A - q \cdot 8 = 97,39 - 240 = -142,61 \text{ кН}.$$

На рис. 2.11, б приведена балочная эпюра  $Q$ , которая представляет собой эпюру  $Q$  для 4-го участка рамы (см. рис. 2.10, б).

На 7-м участке поперечная сила определяется как в статически определимой консольной балке, загруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 2.10, б).

### Построение эпюры продольных сил $N$

Эпюра  $N$  в раме строится по эпюре  $Q$ , при этом используется способ вырезания узлов.

Предварительно рама разбивается на участки аналогично разбиению при построении эпюры  $Q$  (рис. 2.12, а).

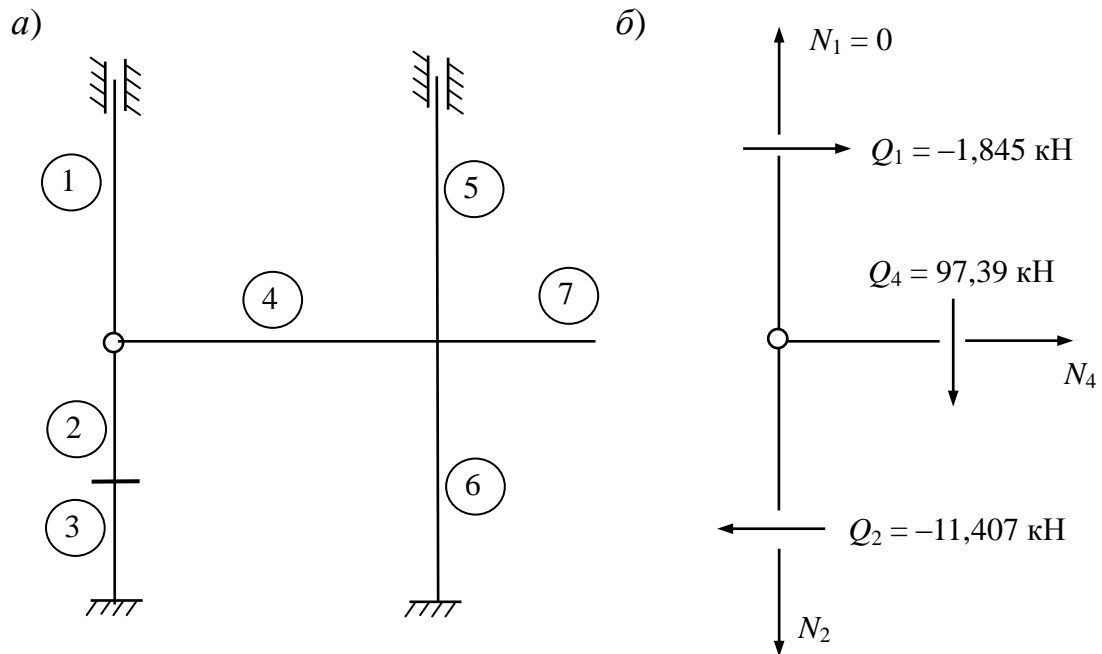


Рис. 2.12

В первую очередь на эпюре  $Q$  «вырезается» узел, в котором сходится не более двух стержней. В рассматриваемой раме такие узлы отсутствуют, зато есть стержни 1 и 5, в которых сразу определяются продольные силы. Так как верхние концы стержней могут свободно перемещаться в вертикальном направлении, а в пределах их длины отсутствуют внешние осевые нагрузки, продольные силы в этих стержнях равны нулю. По этой же причине равна нулю продольная сила в консольном стержне.

После этого можно «вырезать» шарнирный узел. В рассеченных стержнях покажем положительно направленные поперечные силы, истинные значения которых определяются по эпюре  $Q$ , и неизвестные продольные силы, предполагая их растягивающими (рис. 2.12, б). Составим уравнение проекций на горизонтальную ось:

$$\sum X_i = 0; \quad -Q_1 + Q_2 + N_4 = 0,$$

отсюда  $N_4 = -Q_1 + Q_2 = 1,845 - 11,407 = -9,562$  кН.

Знак минус показывает, что стержень 3 сжат.

Из уравнения проекций на вертикальную ось определяем  $N_2$ :

$$\sum Y_i = 0; \quad Q_4 - N_2 = 0; \quad N_2 = -Q_4 = -97,39 \text{ кН.}$$

Очевидно, что продольная сила на третьем участке равна  $N_2$ .

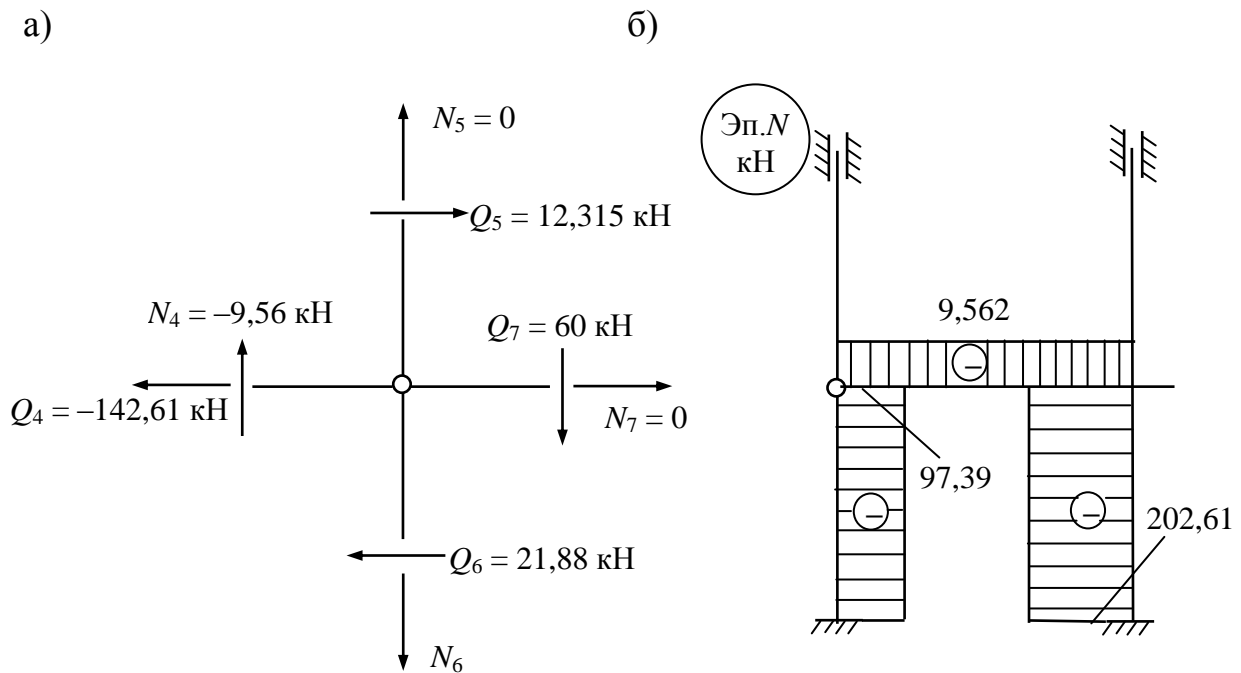


Рис. 2.13

Затем рассмотрим равновесие «жесткого» узла (рис. 2.13, а).

$$\sum Y_i = 0; \quad -N_6 + Q_4 - Q_7 = 0;$$

$$N_6 = Q_4 - Q_7 = -142,61 - 60 = -202,61 \text{ кН.}$$

Нетрудно убедиться, что значение  $N_4$ , определенное из равновесия этого узла, будет таким же, как определенное ранее.

Полностью эпюра  $N$  показана на рисунке 2.13, б.

### 7. Статическая проверка результирующих эпюр

Для осуществления статической проверки рама «отрезается» от опор. В местах рассечения стержней надо показать внутренние усилия,

значение которых и направление действия определяются по эпюрам  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ , а также приложить к отсеченной части рамы все внешние нагрузки (рис. 2.14).

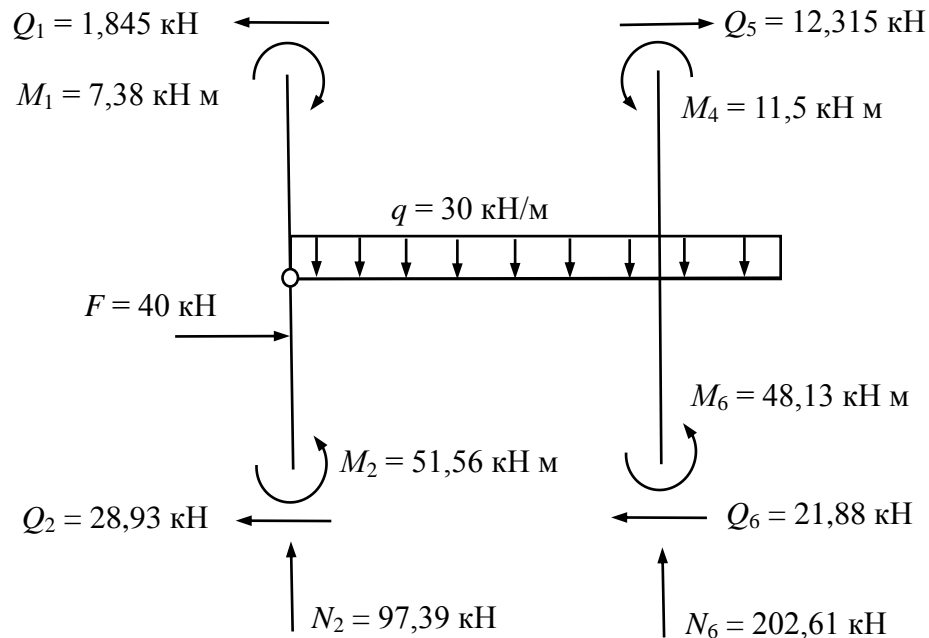


Рис. 2.14

Затем проверяется равновесие отсеченной части рамы по трем уравнениям равновесия:

$$1) \sum X_i = 0;$$

$$F - Q_1 - Q_2 + Q_5 - Q_6 = 40 - 1,845 - 28,593 + 12,315 - 21,88 = 0,003 \approx 0;$$

$$2) \sum Y_i = 0; \quad N_2 - q \cdot 10 + N_6 = 97,39 - 30 \cdot 10 + 202,61 = 0;$$

$$3) \sum M_{\text{шарн}} = 0;$$

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot 4 - Q_5 \cdot 4 - M_1 + M_4 - q \cdot 10 \cdot 5 + M_6 + N_6 \cdot 8 - Q_6 \cdot 6 - Q_2 \cdot 6 + M_2 = \\ = 7,38 - 49,26 - 7,38 + 11,5 - 1500 + 48,13 + \\ + 1620,88 - 131,28 - 171,558 + 51,56 + 120 = 0,028 \approx 0. \end{aligned}$$



Равновесие обеспечено (погрешности в 1-м и 3-м уравнениях менее 0,5%), что указывает на правильность решения задачи.

### **Библиографический список**

1. **Строительная** механика. Основы теории с примерами расчетов : учебник / ред. А.Е. Саргсян. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Высшая школа, 2000. – 416 с.

2. Справочные материалы для расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость и методические указания по выполнению расчетно - проектировочных работ : метод. указ. / Сост. Г. Д. Зайцев. – Л. : ЛИИЖТ, 1986. – 34 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Расчет плоской рамы методом сил

Требуется рассчитать плоскую раму (табл. П1, рис. П1) *методом сил* в последовательности, приведенной ниже:

- 1) определить степень статической неопределимости;
- 2) выбрать основную систему;
- 3) составить систему канонических уравнений;
- 4) вычислить коэффициенты и свободные члены канонических уравнений;
- 5) проверить правильность подсчета коэффициентов и свободных членов канонических уравнений;
- 6) решить систему канонических уравнений и проверить его правильность;
- 7) построить результирующую эпюру изгибающих моментов  $M$  ;
- 8) проверить правильность построения эпюры  $M$  ;
- 9) построить эпюры  $Q$  и  $N$ ;
- 10) выполнить статическую проверку рамы в целом.

Таблица П1

Строка	Номер схемы			$a$ , м	$F$ , кН	$M$ , кН·м	$q$ , кН/м	Отношение моментов инерции	
	МТ	ПГС	СЖД					$I_1$	$I_2$
1	1	11	21	4	40	20	20	1	2
2	2	12	22	2	60	30	25	1	3
3	3	13	23	3	80	40	30	2	3
4	4	14	24	3	90	20	35	3	2
5	5	15	25	4	50	30	40	2	1
6	6	16	26	4	70	20	10	3	1
7	7	17	27	2	60	50	20	1	2
8	8	18	28	3	80	40	15	3	1
9	9	19	29	4	60	30	40	2	1
0	10	20	30	3	40	50	30	1	2
	$e$			$\delta$	$\varepsilon$	$\zeta$	$\eta$	$A$	

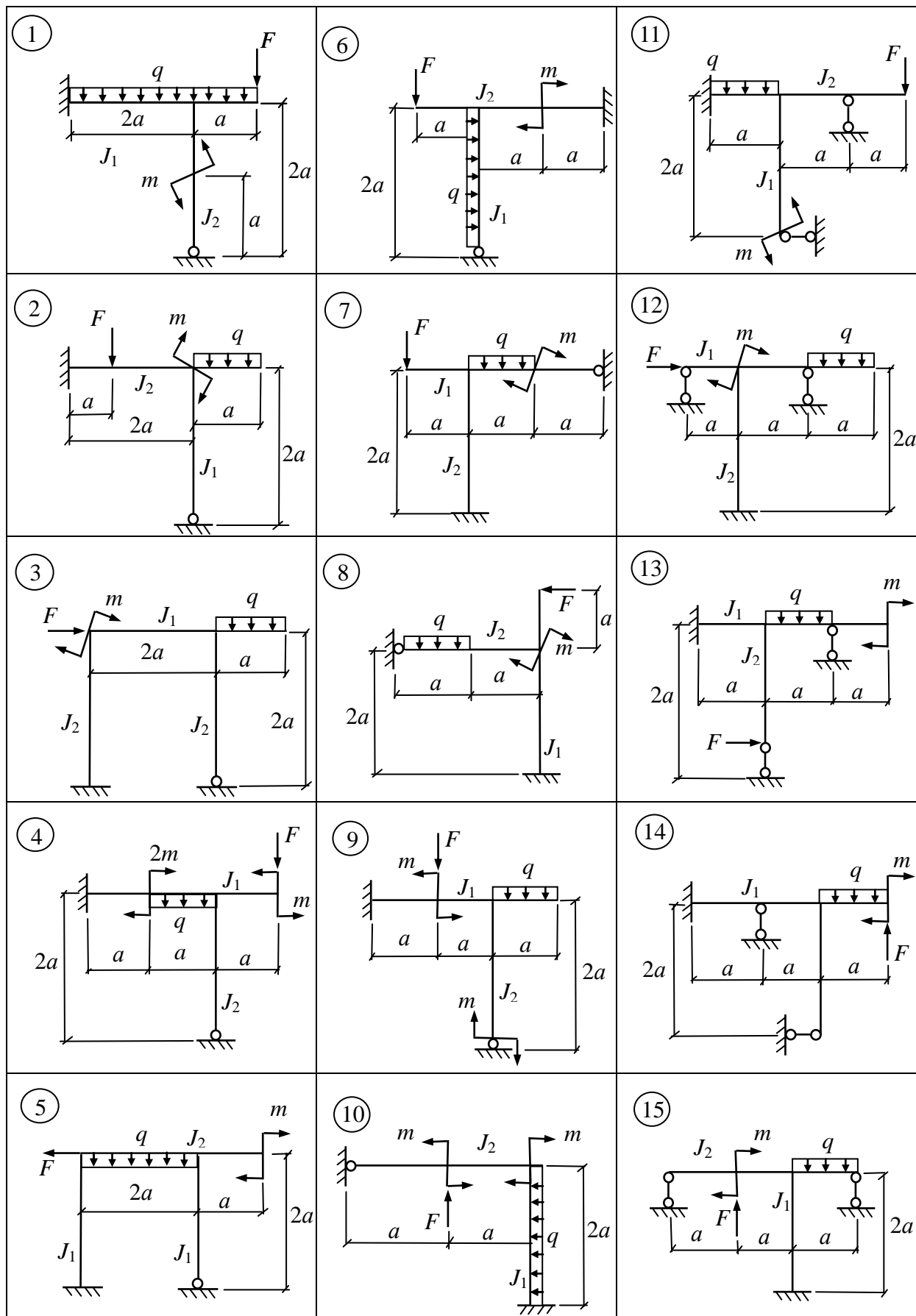


Рис. П1

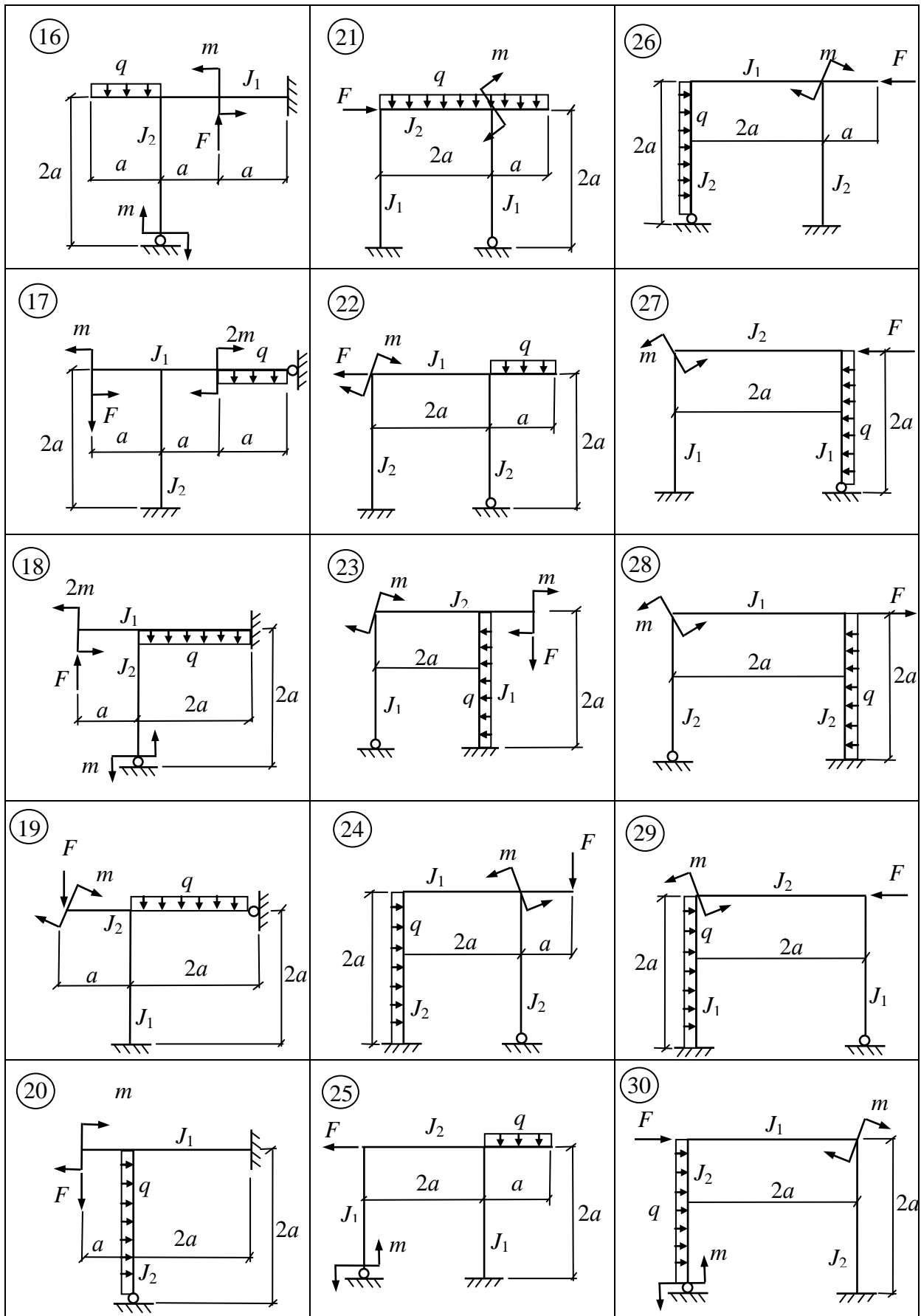


Рис. П1 (продолжение)

**Расчет плоской рамы методом перемещений**

Для статически неопределимой рамы (табл. П2, рис. П2) требуется:

- 1) определить степень кинематической неопределимости рамы;
- 2) выбрать основную систему;
- 3) составить канонические уравнения;
- 4) определить коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений;
- 5) решить систему канонических уравнений и сделать проверку решений;
- 6) построить результирующие эпюры изгибающего момента  $M$ , поперечной силы  $Q$  и продольной силы  $N$ ;
- 7) выполнить статическую проверку.

Таблица П2

Строка	№ схемы			$a$ , м	$F$ , кН	$q$ , кН/м	Отношение моментов инерции		
	МТ	ПГС	СЖД				$I_1$ :	$I_2$ :	$I_3$ :
1	1	11	21	2	40	20	1	2	3
2	2	12	22	3	60	25	1	3	2
3	3	13	23	4	80	30	2	3	1
4	4	14	24	5	90	35	3	2	1
5	5	15	25	4	50	40	2	1	3
6	6	16	26	3	70	10	3	1	2
7	7	17	27	4	60	20	1	2	2
8	8	18	28	2	80	15	3	1	2
9	9	19	29	5	60	40	2	1	3
0	10	20	30	3	40	30	1	2	3
	$e$			$v$	$z$	$\delta$	$E$		



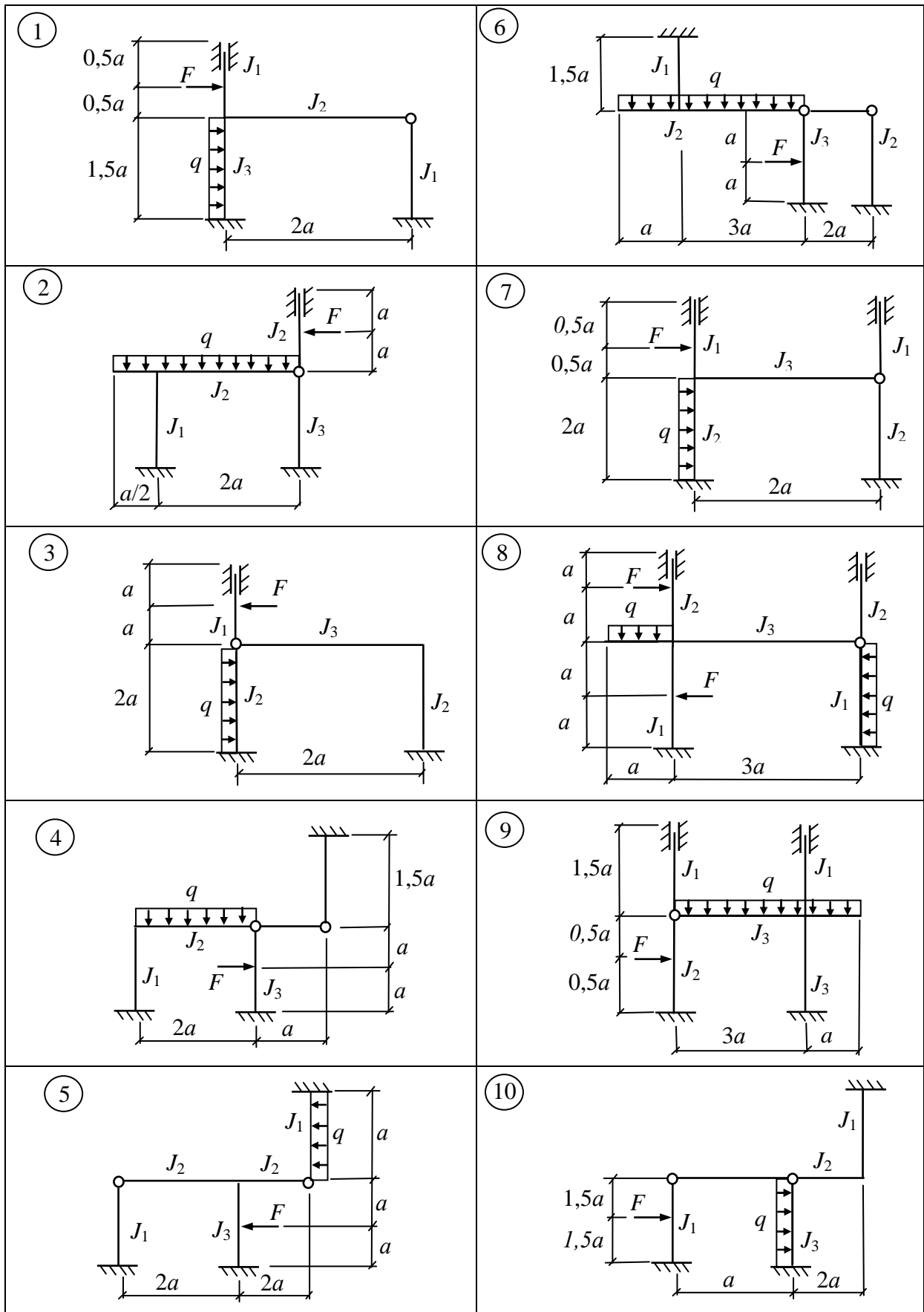


Рис. П2

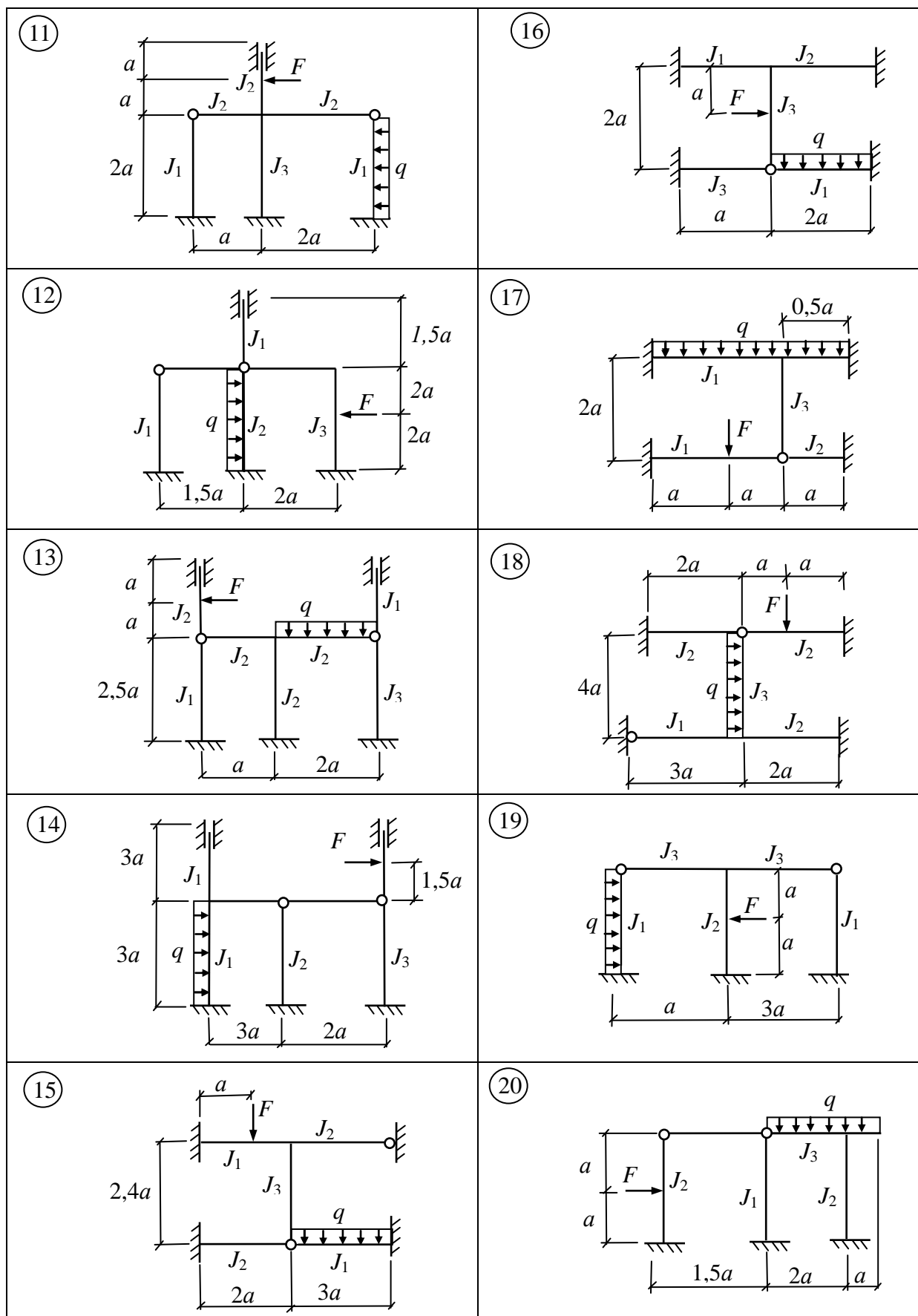
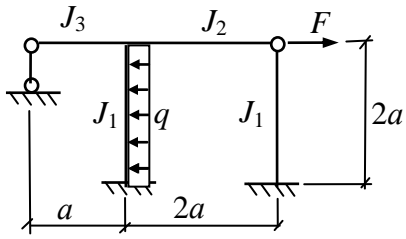


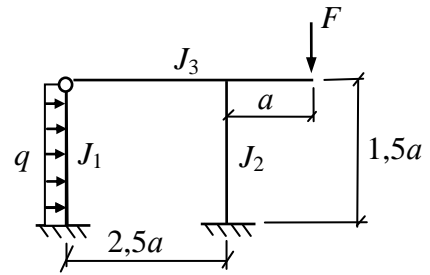
Рис. П2 (продолжение)



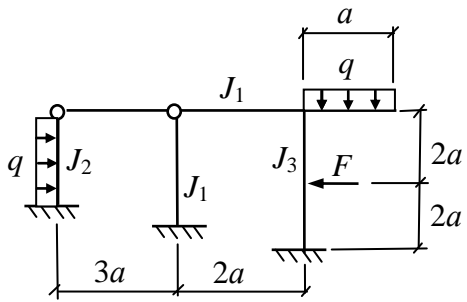
21



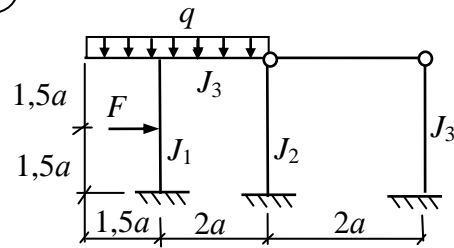
26



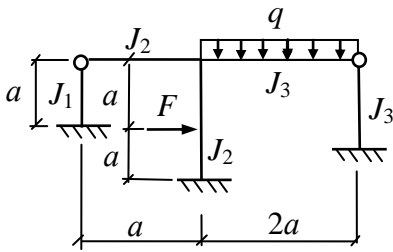
22



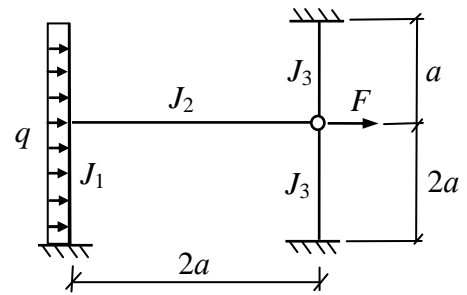
27



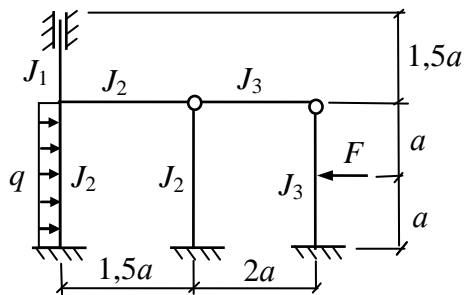
23



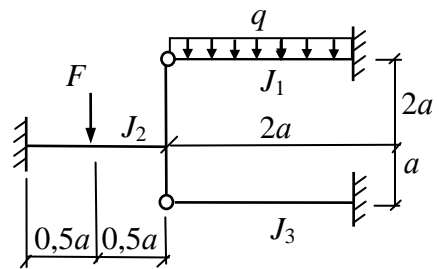
28



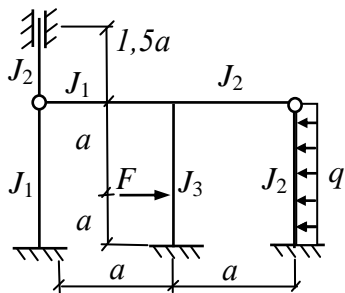
24



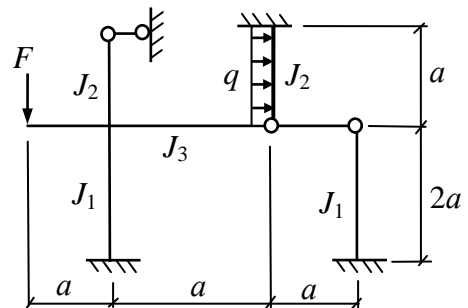
29



25



30

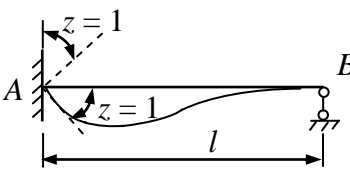
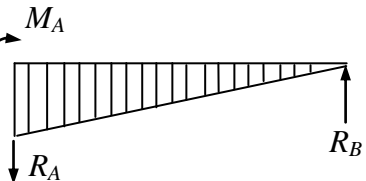
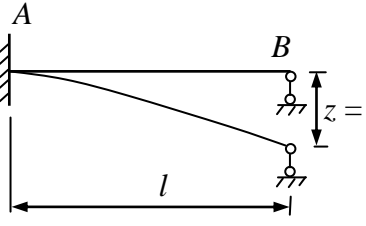
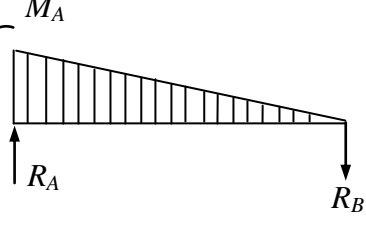
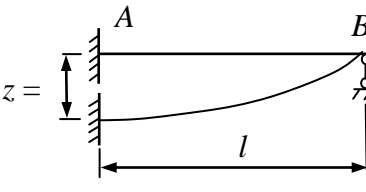
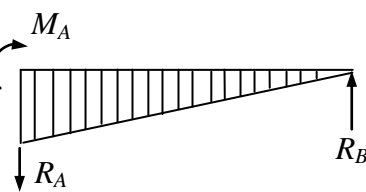
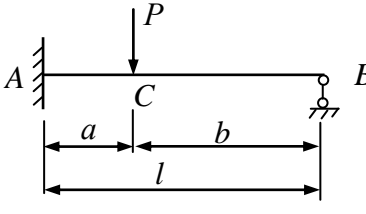
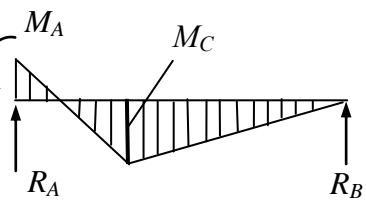
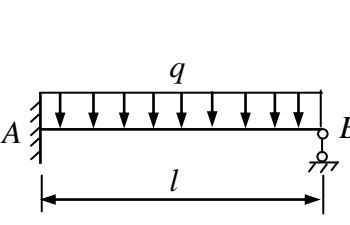
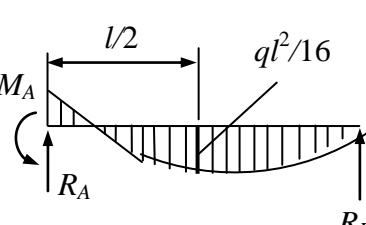


Таблицы реактивных усилий метода перемещений

Таблица П3.1

Схема балки	Реакции и эпюры изгибающих моментов	Формулы
Балка с защемленными концами $i = EI / l$ ; $EI = \text{const}$ ; $u = a / l$ ; $v = b / l$		
		$M_A = 4i$ $M_B = 2i$ $R_A = R_B = \frac{6i}{l}$
		$M_A = M_B = 2i$ $R_A = R_B = 0$
		$M_A = M_B = \frac{6i}{l}$ $R_A = R_B = \frac{12i}{l^2}$
		$M_A = Pav^2$ $M_B = Pbu^2$ $R_A = Pv^2(1+2u)$ $R_B = Pu^2(1+2v)$
		$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{1}{2}ql$

Продолжение прил. 3

Схема балки	Реакции и эпюры изгибающих моментов	Формулы
Балка с одним защемленным и другим шарнирно-опертым концом $i = EI/l$ ; $EI = \text{const}$ ; $u = a/l$ ; $v = b/l$		
		$M_A = 3i$ $R_A = R_B = \frac{3i}{l}$
		$M_A = \frac{3i}{l}$ $R_A = R_B = \frac{3i}{l^2}$
		$M_A = \frac{3i}{l}$ $R_A = R_B = \frac{3i}{l^2}$
		$M_A = 0,5Pv(1-v^2)$ $M_C = 0,5Pu^2(3-u)$ $R_A = 0,5Pv(3-v^2)$ $R_B = 0,5Pu^2(3-u)$
		$M_A = \frac{ql^2}{8}$ $R_A = \frac{5}{8}ql$ $R_B = \frac{3}{8}ql$

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения .....	3
Расчет статически неопределимых плоских рам .....	4
Общие положения .....	4
Задача № 1 Расчет плоской рамы методом сил .....	4
Задача № 2 Расчет плоской рамы методом перемещений .....	26
Библиографический список .....	48
<i>Приложение 1</i> .....	49
<i>Приложение 2</i> .....	52
<i>Приложение 3</i> .....	56

*Учебное издание*

**Бенин Андрей Владимирович**

**Козьминская Ольга Вячеславовна**

**Кульгавий Ярослав Карлович**

**Поварова Ирина Борисовна**

**Рыбина Ирина Игоревна**

**Шафеев Рашид Ахмиджанович**

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

**Учебное пособие**

**Часть 2**

Редактор и корректор *Н. В. Фролова*  
Технический редактор *А. В. Никифорова*

План 2012 г., № 30

Подписано в печать с оригинал-макета  
Формат 60×84 1/16. Бумага для множ. апп. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 3,75. Тираж 500 экз.

Заказ

Петербургский государственный университет путей сообщения.  
190031, СПб., Московский пр., 9.  
Типография ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.