Лабораторная работа №8

Численное дифференцирование

Цель работы: научиться вычислять производные табличной функции в узлах таблицы и промежуточных точках.

Порядок выполнения работы

1. Пусть задана функция $y = 3x^5 + e^{3x}$ на интервале $x \in [-2; 2]$ с шагом h = 0.1. Требуется найти производные от этой функции в узлах таблицы и для значения x = 0.05, которое находится между двумя узлами.
2. Количество узлов таблицы с известными значениями x и y будет равно $n = ((b - a)/h) + 1$, а значения x можно задать как $x_i = a + h(i - 1), \quad i = 1,2,3\ldots n$. Результаты представления табличной функции в MathCAD приведены ниже

$ORIGIN := 1$

$a := -2$

$b := 2$

$h := 0.1$

$$n := \frac{(b - a)}{h}$$

$n = 40$

$i := 1 .. (n + 1)$

$x_i := a + h \cdot (i - 1)$

$y_i := 3 \cdot (x_i)^5 + e^{3 \cdot x_i}$

$x^T =$

	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	...

$y^T =$

	1	2	3	4	5	6	7
1	-95.998	-74.28	-56.683	-42.59	-31.449	-22.77	...

3. Для вычисления производной табличной функции с помощью интерполяционной формулы Ньютона необходимо найти как минимум конечные разности 1-го, 2-го и 3-го порядков $\Delta y^{(1)} = y_{i+1} - y_i$, $\Delta y^{(2)} = \Delta y^{(1)}{}_{i+1} - \Delta y^{(1)}{}_i$, $\Delta y^{(3)} = \Delta y^{(2)}{}_{i+1} - \Delta y^{(2)}{}_i$. Для вычисления конечных разностей удобно использовать программный модуль, который был использован в лабораторной работе №5. Результатом применения этого модуля является матрица, столбцы которой содержат конечные разности.

$$
\Delta y := \left|
\begin{array}{l}
\textbf{for } k \in 1..n \\
\quad \Delta_{k,1} \leftarrow y_{k+1} - y_k \\
\textbf{for } j \in 2..3 \\
\quad \textbf{for } i \in 1..(n+1) - j \\
\quad\quad \Delta_{i,j} \leftarrow \Delta_{i+1,j-1} - \Delta_{i,j-1} \\
\Delta
\end{array}
\right.
$$

$\Delta y =$

	1	2	3
1	21.718	-4.121	0.617
2	17.597	-3.504	0.552
3	14.093	-2.952	0.491
4	11.141	-2.462	0.433
5	8.679	-2.028	0.379
6	6.65	-1.649	0.329
7	5.001	-1.32	0.282
8	3.681	-1.038	0.239
9	2.643	-0.799	0.2
10	1.844	-0.598	0.164
11	1.246	-0.434	0.133
12	0.812	-0.301	0.105
13	0.511	-0.197	0.08
14	0.314	-0.116	0.06
15	0.197	-0.056	0.044
16	0.141	-0.012	...

4. Для вычисления производной в узлах таблицы применяется интерполяционная функция Ньютона $y'_i = (\Delta y_i^{(1)} - \Delta y_i^{(2)}/2 + \Delta y_i^{(3)}/3)/h$. Результат ее применения и сравнение с результатами вычисления производной с помощью встроенного в MathCAD оператора дифференцирования приведен ниже. Применение интерполяционной функции дает довольно большую погрешность, но сама процедура

вычисления довольно проста

$i := 1..n$

$$ydifnut_i := \left(\frac{1}{h}\right)\cdot\left[\Delta y_{i,1} - \left(\frac{\Delta y_{i,2}}{2}\right) + \left(\frac{\Delta y_{i,3}}{3}\right)\right]$$

$$ydif(x) := \frac{d}{dx}\left[3\cdot(x)^5 + e^{3\cdot x}\right]$$

$ydiff_i := ydif(x_i)$

$ydiff^T =$

	1	2	3	4	5	6
1	240.007	195.492	157.478	125.3	98.329	...

$ydifnut^T =$

	1	2	3	4	5	6
1	239.838	195.331	157.326	125.158	98.196	...

5. Для расчета производной табличной функции в точке, находящейся между узлами табличной функции можно использовать вариант интерполяционной функции в виде $y' = (\Delta y^{(1)} + (2t-1)\Delta y^{(2)}/2 + (3t^2 - 6t + 2)\Delta y^{(3)}/6)/h$, где $t = (x - x_0)/h$, x - точка, в которой ищется производная, x_0 - значение переменной в узле таблицы, находящемся слева от x. Вычислим производную в точке x = 0.05. Ближайшее слева к этому значению табличное значение функции $x_0 = 0$. Номер этого узла равен k = 21. Подставляя в формулу конечные разности с этим индексом, получаем значение производной в точке x, и сравниваем с результатом, полученным с помощью встроенного оператора.

$x1 := 0.05$

$k := 21$

$x0 := x_k = 0$

$$t := \frac{(x1 - x0)}{h}$$

$$ydifnutx := \left(\frac{1}{h}\right)\cdot\left[\Delta y_{k,1} + \frac{\Delta y_{k,2}\cdot(2\cdot t - 1)}{2} + \frac{\Delta y_{k,3}\cdot\left(3\cdot t^2 - 6\cdot t + 2\right)}{6}\right]$$

$ydifnutx = 3.479$

$ydif(0.05) = 3.486$

6. Также для вычисления производной в точках между узлами таблицы, можно использовать интерполяционную формулу Лагранжа $y' = \left(y_k(2t-3)/2 - y_{k+1}(2t-2) + y_{k+2}(2t-1)/2\right)/h$, где y_k - значение табличной функции, соответствующее точке x_0. Пример вычисления производной в точке x = 0.05 приведен ниже.

$$\mathbf{ydiflag} := \left(\frac{1}{h}\right)\cdot\left[\left[y_k\cdot\frac{(2\cdot t-3)}{2}\right] - y_{k+1}\cdot(2\cdot t-2) + y_{k+2}\cdot\frac{(2\cdot t-1)}{2}\right]$$

$$\mathbf{ydiflag} = 3.499$$

Варианты задания

Таблично задать на указанном интервале функцию и найти ее производные в узлах таблицы и точках, находящихся посередине между узлами таблицы. Для проведения операции дифференцирования заданный интервал разбить на 20 участков.

Номер варианта	Функция	Отрезок $[a, b]$
1	2	3
1.	$f(x) = x^2 \cos x$	$[0;1]$
2.	$f(x) = e^x \sin x$	$[1;2]$
3.	$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$	$[0;1]$
4.	$f(x) = x\sqrt{1+x^2}$	$[-1;0]$
5.	$f(x) = \sin(x + x^2)$	$[0;1]$
6.	$f(x) = \arcsin^2 x$	$\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$
7.	$f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$	$\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$
8.	$f(x) = \sin 2x \cos x$	$\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$
9.	$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	$[0;1]$
10.	$f(x) = \ln(x+1)$	$[1;2]$

11.	$f(x) = x^3 \ln x$	$[2;3]$
12.	$f(x) = xarctgx$	$[0;1]$
13.	$f(x) = (x^2 + 1)e^x$	$[1;2]$
14.	$f(x) = \cos 2x + \sin 3x$	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
15.	$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 2}$	$[0;1]$
16.	$f(x) = \left\|x^2 - 1\right\|$	$\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$