

Домашнее задание №2

«Линейные коды»

Задание содержит 7 задач. Максимальное количество баллов за выполнение всего домашнего задания — 10. В таблице ниже указано, сколько баллов можно получить за каждую задачу. Все элементы внутри одной задачи равнозначны.

№ задачи	1	2	3	4	5	6	7
Макс. количество баллов	1	2	1	2	1	1	2

Правила выполнения домашней работы:

1. Домашнее задание выполняется студентом **самостоятельно**.
2. В работе ко всем заданиям должны быть даны развёрнутые решения. Ответы без решений и пояснений не оцениваются. Решение должно быть читаемым и аккуратно оформленным.
3. При оформлении решения должна использоваться общепринятая нотация. Все обозначения, кроме общепринятых и содержащихся в задании, должны быть явно введены при оформлении решения.
4. Недопустимы плагиат, списывание, присвоение результатов чужого труда, прямое использование результатов, полученных при помощи генеративного искусственного интеллекта. Решения, нарушающие данный пункт не оцениваются.

ЗАДАЧИ

Задача 1

1. Определите, является ли следующий код, заданный над полем $GF(7)$, линейным:

$$\mathcal{C} = \{13624, 25166, 31013, 44631, 62002\}$$

Если код \mathcal{C} является линейным, найдите его порождающую матрицу. Если не является, докажите это.

2. Постройте линейный код $(4, 2)$ над $GF(3)$. Запишите код в трёх представлениях: в виде перечисления кодовых слов, в виде порождающей матрицы и в виде проверочной матрицы.

Задача 2 Пусть задана порождающая матрица \mathbf{G} двоичного линейного кода \mathcal{C} :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Определите параметры кода: его длину n , количество информационных символов k , расстояние Хемминга d .
2. Постройте проверочную матрицу \mathbf{H} .
3. Постройте границу Хэмминга.
4. Постройте границу Варшавова-Гилберта.

Задача 3 Покажите, принадлежит ли слово

$$x = 0001110$$

линейному коду, заданному над полем $GF(2)$ с помощью порождающей матрицы \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4 Пусть заданы три линейно независимых вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} над конечным полем $GF(q)$. Являются ли векторы $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ и $(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ линейно независимыми? Обоснуйте Ваш ответ.

Задача 5 Пусть задан линейный код \mathcal{C} с помощью порождающей матрицы \mathbf{G} . Пусть минимальное расстояние кода равно d . Что может произойти со значением минимального расстояния кода, если:

1. Переставить две строки в \mathbf{G} .
2. Переставить две строки в \mathbf{H} .
3. Переставить два столбца в \mathbf{G} .
4. Переставить два столбца в \mathbf{H} .
5. Удалить строку в \mathbf{G} .
6. Сложить один столбец \mathbf{H} с другим столбцом \mathbf{H} .

Обоснуйте Ваш ответ и приведите примеры.

Задача 6 Пусть задан совершенный двоичный код с $d = 5$. Найдите минимальное значение длины кода, для которого такой код существует.

Задача 7 Для слова $x = (1000110)$, принадлежащего двоичному коду Хэмминга, постройте проверочную матрицу.