

## 2. Плоское движение твердого тела

*Задание.* Найти для заданного механизма скорости точек  $A$ ,  $B$  и  $M$ .

*Пример 2.1.* Диск радиуса  $R$  катится без скольжения по плоскости. Центр его  $A$  движется по закону  $s = f(t)$ . Скорость точек  $A$ ,  $B$  и  $M$  найти для момента  $t_1$  (рис.2.1). Пусть  $R = 0,12\text{ м}$ ;

$$s = (0,24t - 0,01t^3)\text{ м}; \quad AM = 0,08\text{ м}; \quad \beta = \frac{5\pi}{3}; \quad t_1 = 2\text{ с}.$$

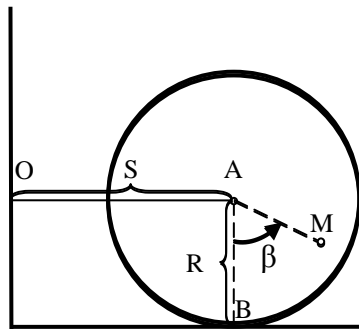


Рис.2.1

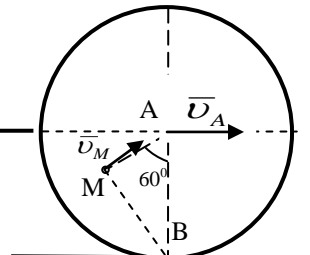


Рис.2.2

величины можно снять, а вектор увеличения координаты  $s$ , т.е. скорости

Мгновенный центр скоростей диска совпадает с точкой  $B$ , так как она находится в контакте с неподвижной плоскостью. Таким образом,  $v_B = 0$ . Для нахождения угловой скорости воспользуемся формулой  $v_A = BA\omega$ , откуда  $\omega = v_A / R = 0,12 / 0,12 = 1\text{ рад/с}$ .

Теперь не трудно найти скорость точки  $M$ :  $v_M = BM\omega$ . По теореме косинусов  $BM = \sqrt{AM^2 + R^2 - 2 \cdot AM \cdot R \cdot \cos 60^\circ} = 10^{-2} \sqrt{64 + 144 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 0,5} = 0,04\sqrt{7}\text{ м/с}$ .  
Окончательно  $v_M = 0,04\sqrt{7} \cdot 1 = 0,1\text{ м/с}$ .

*Решение.* Скорость точки  $A$   $v_A = |\dot{s}| = |0,24 - 0,03t^2|$ . При подстановке в производную  $\dot{s}$  величины заданного момента времени получаем положительную величину. Значит, знак абсолютной  $v_A$  направлен в сторону вправо (рис.2.2); модуль этой  $v_A = 0,24 - 0,03 \cdot 2^2 = 0,12\text{ м/с}$ .

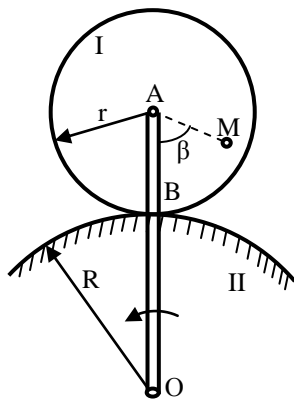


Рис.2.3

*Пример 2.2.* Шестеренка I радиуса  $r$  приводится в движение кривошипом  $OA$ , вращающимся вокруг оси  $O$  неподвижной шестеренки II радиуса  $R$  (рис.2.3). Пусть угловая скорость кривошипа в данный момент  $\omega_0 = 1/3\text{ рад/с}$ ;  $r = 0,3\text{ м}$ ;  $R = 0,6\text{ м}$ ;  $AM = 0,1\sqrt{3}\text{ м}$ ;  $\beta = 7\pi/6$ ; кривошип вращается равноускоренно.

*Решение.* Так как точка  $A$  принадлежит кривошипу, то скорость ее  $v_A = (R + r)\omega_0 = (0,6 + 0,3)/3 = 0,3\text{ м/с}$ . Вектор  $\bar{v}_A$  направлен в соответствии с направлением вращения кривошипа так, как показано на рис.2.4.

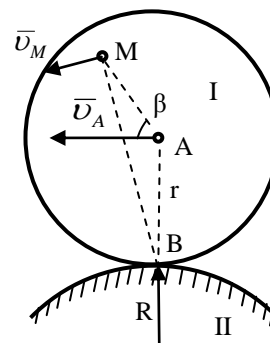


Рис.2.4

Мгновенный центр скоростей совпадает с точкой  $B$ . Поэтому  $v_B = 0$ . Теперь можно найти угловую скорость шестеренки I. Для скорости точки  $A$  можно написать и такое соотношение:  $v_A = BA \cdot \omega$ . Тогда  $r\omega = (R+r)\omega_0$ , откуда  $\omega = (R+r)\omega_0 / r = (0,6+0,3) \cdot (1/3) / 0,3 = 1 \text{ рад/с}$ .

Теперь найдем расстояние  $BM = \sqrt{AM^2 + r^2 - 2 \cdot AM \cdot r \cdot \cos 150^\circ} = 0,1 \sqrt{3+9+2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0,1\sqrt{21} \cdot 1 = 0,45 \text{ м/с}$ .

**Пример 2.3.** Кривошип  $OA$  нецентрального кривошипно-шатунного механизма (рис.5.5) имеет в данный момент угловую скорость  $\omega_0$ . Пусть  $r = 0,2 \text{ м}$ ;  $AB = l = 0,6 \text{ м}$ ;  $h = 0,2\sqrt{2} \text{ м}$ ;  $AM = 0,4 \text{ м}$ ;  $\omega_0 = 6 \text{ рад/с}$ ;  $\varphi = \pi/4$ ; кривошип вращается равноускоренно.

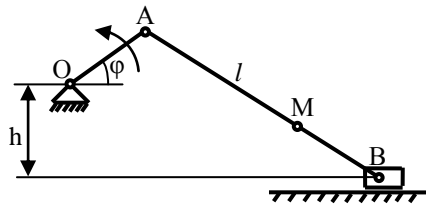


Рис.2.5

**Решение.** Найдем сначала угол  $\psi$  (рис.2.6). Величину отрезка  $AK$  можно подсчитать двумя способами:

$$AK = r \sin 45^\circ + h, \quad AK = l \sin \psi.$$

Тогда

$$\sin \psi = (r \sin 45^\circ + h) / l = (10\sqrt{2} + 20\sqrt{2}) / 0,6 = \sqrt{2} / 2; \quad \psi = 45^\circ.$$

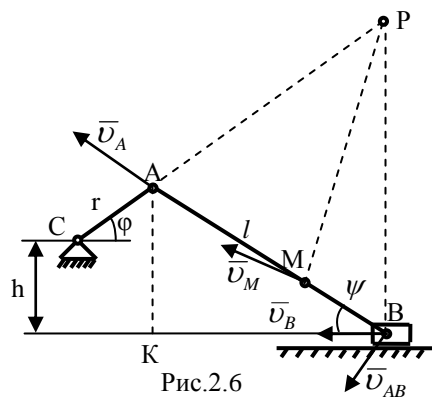


Рис.2.6

Скорость точки  $A$   $v_A = r\omega_0 = 0,2 \cdot 6 = 1,2 \text{ м/с}$ . Вектор скорости точки  $B$  направлен горизонтально. Мгновенный центр скоростей шатуна находится в точке  $P$  на пересечении перпендикуляров к векторам  $\bar{v}_A$  и  $\bar{v}_B$ , проходящих соответственно через точки  $A$  и  $B$ .

Нетрудно найти расстояние  $PA$ .

Действительно, треугольник  $ABP$  –прямоугольный и равнобедренный (углы при основании равны  $45^\circ$ ). Значит,  $AP = l = 0,6 \text{ м}$ . Для скорости точки  $A$  можно записать  $v_A = PA\omega$ , откуда угловая скорость шатуна  $\omega = r\omega_0 / PA = 0,2 \cdot 6 / 0,6 = 2 \text{ рад/с}$ .

Теперь по формуле  $v_B = PB\omega$  можно определить скорость точки  $B$ . Заметим, что  $PB = l\sqrt{2}$ . Следовательно,  $v_B = l\sqrt{2}\omega = 0,6\sqrt{2} \cdot 2 = 1,2\sqrt{2} = 1,7 \text{ м/с}$ .

Шатун вращается по часовой стрелке. Направление вектора  $\bar{v}_{AB}$  показано на рис.2.6.

Для определения скорости точки  $M$  необходимо найти расстояние

$$PM = \sqrt{AP^2 + AM^2} = 20\sqrt{9+4} = 0,2\sqrt{13} \text{ см}. \quad \text{Тогда } v_M = PM\omega = 0,2\sqrt{13} \cdot 2 = 0,4\sqrt{13} \approx 1,44 \text{ м/с}.$$

Задачи 2.1-2.10. Диск радиуса  $R$  (см.рис.2.1) катится без скольжения по плоскости (см.пример 2.1). Задачи решить для момента времени  $t_1$ . Данные приведены в табл.2.1.

Таблица 2.1

Номер задачи	$R$ , см	$f(t)$ , см	$AM$ , см	$\beta$ , рад	$t_1$ , с
2.1	2	$7\sqrt{3}t - 3t^2 / 2$	1	$\pi/3$	$\sqrt{2}$
2.2	$\sqrt{3}$	$3t^2 / 2 - 2\sqrt{3}t$	0,5	$\pi/6$	$2\sqrt{2}$
2.3	$2\sqrt{2}$	$t^2$	$\sqrt{3}/2$	$\pi/4$	1

2.4	2	$\sqrt{3}t^2 - 4t$	1	$5\pi/6$	$\sqrt{3}$
2.5	$2\sqrt{2}$	$3t^2 - 2t$	1	$4\pi/3$	1
2.6	2	$3t^2 / 2$	$\sqrt{2}$	$5\pi/6$	$2\sqrt{2}$
2.7	2	$3t^2 / 2 + (\sqrt{3-3})t$	$2\sqrt{2}$	$7\pi/4$	$\sqrt{2}$
2.8	$\sqrt{3}$	$t^2 \sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	$7\pi/6$	1
2.9	2	$t^2 \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\pi/3$	$\sqrt{2}$
2.10	$\sqrt{3}$	$t^2 \sqrt{3}$	1	$3\pi/4$	1

Задачи 2.11-2.20. Шестеренка I радиуса  $r$  приводится в движение кривошипом  $OA$ , вращающимся вокруг оси  $O$  неподвижной шестеренки II радиуса  $R$  (см.рис.2.3, пример 2.2). Данные приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Номер задачи	$r$ , см	$R$ , см	$AM$ , см	$\beta$ , рад	$\omega_0$ , рад/с
2.11	30	44	10	$\pi/3$	$5/12$
2.12	4	60	3	$\pi/2$	$2/3$
2.13	20	20	6	$\pi/6$	$3/5$
2.14	20	15	15	$3\pi/2$	$5/8$
2.15	20	$20/3$	$5\sqrt{2}$	$3\pi/6$	$1/4$
2.16	10	$4/3$	$10\sqrt{3}$	$\Pi$	$3\sqrt{3}/4$
2.17	30	114	5	$5\pi/4$	$\sqrt{3}/3$
2.18	$20\sqrt{3}$	60	$10\sqrt{2}$	$2\pi/3$	$1/4$
2.19	10	$40\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$5\pi/6$	$5/12$
2.20	10	20	$10\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}/3$

Задача 2.21-2.30. Кривошип  $OA$  нецентрального кривошипно-шатунного механизма (см.рис.2.5, пример 2.3). Данные приведены в табл.2.3.

Таблица 2.3

Номер задачи	$r$ , $10^{-2}$ м	$l$ , $10^{-2}$ м	$h$ , $10^{-2}$ м	$\varphi$ , рад	$\omega_0$ , рад/с
2.21	10	80	$30\sqrt{2}$	$\pi$	4
2.22	10	40	50	$\pi$	2
2.23	$10\sqrt{3}$	40	$20\sqrt{3}$	$\pi$	2
2.24	10	60	$50\sqrt{2}$	$\pi$	4
2.25	$10\sqrt{2}$	100	$20\sqrt{3}$	$7\pi/4$	6
2.26	$10\sqrt{2}$	100	$40\sqrt{2}$	$3\pi/4$	6
2.27	$10\sqrt{3}$	60	55	$\pi/2$	10
2.28	$10\sqrt{3}$	80	$33\sqrt{2}$	0	6
2.29	20	80	$40\sqrt{3}$	0	4
2.30	$10\sqrt{3}$	40	30	$3\pi/2$	4