ВВЕДЕНИЕ

Курсовая работа по математике, как завершающий этап изучения дисциплины, предусмотрена программой по математике для технических военных учебных заведений. В ВИТУ курсовая работа по математике проводится на всех факультетах и выполняется курсантами всех специальностей, начиная с 1980-1981 учебного года.

Цель курсовой работы – подведение итогов изучения математики: проверка и закрепление на завершающем этапе обучения знаний курсантов по основным разделам курса математики, умения пользоваться таблицами, справочниками, применять численные методы и доводить "ответ" до числа.

В учебном пособии изложены методические указания по выполнению первой части курсовой работы, посвящённой решению прикладной инженерной задачи с использованием одного из уравнений математической физики – волнового уравнения. Учебное пособие адресовано исполнителям курсовой работы по математике и имеет целью содействовать её сознательному и творческому выполнению.

Автор выражает глубокую признательность Беляеву А.Н., Дамаскинскому Е.В. за внимательное прочтение рукописи, указание на неточности и ряд полезных замечаний, а также Лукьянову В.Д. за помощь в написании приложения.

§1. Математическая постановка начально-краевых задач для волнового уравнения в курсовой работе

В курсовой работе предлагается найти решение однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \qquad (1.1)$$

на интервале $0 \le x \le h$ при $t \ge 0$ с неоднородными начальными условиями

$$U(x,0) = f_1(x), \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = f_2(x) \qquad (1.3)$$

и с однородными (то есть нулевыми) краевыми (или граничными) условиями

$$\alpha_1 U(0,t) + \beta_1 \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad (1.4)$$

$$\alpha_2 U(h,t) + \beta_2 \frac{\partial U(h,t)}{\partial x} = 0, \qquad (1.5)$$

где $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$, $i = 1,2$. Если $\alpha_i = \beta_i = 0$, то соответствующее условие ни каких ограничений на характер решения не налагает.

Замечание. *В частных случаях на концах интервала* $x = 0$ *и* $x = h$ *могут быть поставлены краевые условия, в которых один из параметров (*α *или* β*) равен нулю. Например, если* $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$, *то краевые условия имеют вид*

$$U(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial U(h,t)}{\partial x} = 0.$$

Если $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$, *то краевые условия имеют вид*

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad U(h,t) = 0.$$

Условие, которое задает на конце отрезка $[0,h]$ *функцию, называется условием Дирихле. Выше это условия* $U(0,t) = 0$, $U(h,t) = 0$. *В общем случае это могут быть неоднородные условия вида* $U(0,t) = \varphi_1(t)$, $U(h,t) = \varphi_2(t)$. *Условие, которое фиксирует на границе производную, называется условием Неймана. Выше условиями Неймана являются условия*

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U(h,t)}{\partial x} = 0.$$

В общем случае это могут быть неоднородные условия вида

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \psi_1(t), \qquad \frac{\partial U(h,t)}{\partial x} = \psi_2(t).$$

Начально-краевой задачей для волнового уравнения называется задача нахождения решения уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2), (1.3) и граничными условиями (1.4), (1.5).

Определение. Решением начально-краевой задачи для волнового уравнения называется функция $U = U(x,t)$, удовлетворяющая волновому уравнению (1.1), начальным условиям (1.2), (1.3) и краевым условиям (1.4), (1.5).

Существование и единственность решения начально-краевой задачи для волнового уравнения гарантирует следующая теорема.

Теорема. Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ в начальных условиях (1.2), (1.3) – непрерывны и удовлетворяют краевым условиям, то начально-краевая задача для волнового уравнения имеет единственное решение.

§2. Получение задачи Штурма - Лиувилля для волнового уравнения методом разделения переменных

Важную роль в решении начально-краевой задачи имеет так называемая задача Штурма – Лиувилля.

К этой задаче мы придем, если будем искать ненулевые решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \qquad (2.1)$$

при $0 \le x \le h$ и $t \ge 0$, удовлетворяющие только краевым условиям

$$\alpha_1 U(0,t) + \beta_1 \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad (2.2)$$

$$\alpha_2 U(h,t) + \beta_2 \frac{\partial U(h,t)}{\partial x} = 0, \qquad (2.3)$$

где $|\alpha_i| + |\beta_i| \ne 0$, и не связанные начальными условиями.

Такая задача, в отличие от начально-краевой задачи для волнового уравнения, имеет множество решений, в частности, она имеет нулевое решение $U = 0$.

Для нахождения решений, отличных от нулевого, используют метод разделения переменных: эти решения (функции двух переменных x и t) ищутся в виде произведения двух функций, каждая из которых является функций только одной переменной

$$U(x,t) = y(x)T(t). \qquad (2.4)$$

Подстановка соотношения (2.4) в уравнение (2.1) приводит к уравнению, $T''(t)y(x) = c^2 y''(x)T(t)$ которое в предположении $y(x) \ne 0$ и $T(t) \ne 0$, может быть записано в виде

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)}. \qquad (2.5)$$

Теперь учтём, что правая часть уравнения (2.5) зависит только от переменной x, а левая часть – только от переменной t. Это возможно только в одном случае, когда обе эти части уравнения (2.5) не зависят ни от t, ни от x, то есть постоянны. Действительно, если в левой части уравнения (2.5) изменять t, то правая часть не будет изменяться, так как она не зависит от t, то есть она постоянна. То же, очевидно справедливо и в отношении левой части. Обозначим эту постоянную через λ.

Таким образом, для искомой функции $y(x)$ получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y''(x) = \lambda y(x)$ при $0 < x < h$.

Подстановка функции (2.4), в краевые условия (2.2), (2.3) приводит к следующим граничным условиям на функцию:

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0,$$
$$\alpha_2 y(h) + \beta_2 y'(h) = 0.$$

Если, например, при $x = 0$ было поставлено условие Дирихле: $U(0,t) = 0$, то, подставляя (2.4) в это условие, получим $y(0)T(t) = 0$. Так как $T(t) \neq 0$, то отсюда следует, что $y(0) = 0$. Если на этом конце поставлено условие Неймана $\frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = 0$, то аналогичные выкладки приводят к условию $y'(0) = 0$.

Таким образом, попытка отыскать решения волнового уравнения в виде (2.4), удовлетворяющие краевым условиям (2.2) и (2.3), приводит нас к задаче Штурма - Лиувилля.

§3. Задача Штурма – Лиувилля

Задача Штурма – Лиувилля на отрезке $[0;h]$ имеет вид

$$y''(x) = \lambda y(x), \tag{3.1}$$
$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0, \tag{3.2}$$
$$\alpha_2 y(h) + \beta_2 y'(h) = 0. \tag{3.3}$$

Эта задача, во-первых, состоит в нахождении таких чисел λ, при которых линейное дифференциальное уравнение (3.1) имеет ненулевое (не равное тождественно нулю на отрезке $[0,h]$) решение $y(x)$, удовлетворяющее граничным (краевым) условиям (3.2) и (3.3). Во-вторых, это собственно задача об отыскании этих решений.

Такие решения следует искать среди функций $y(x)$, дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,h]$ и удовлетворяющих граничным условиям (3.2) и (3.3). Множество таких функций образует бесконечномерное линейное пространство, которое мы будем обозначать $C_*^2[0,h]$.

Введем в пространстве $C_*^2[0,h]$ скалярное произведение (y_1, y_2) по формуле:

$$(y_1, y_2) = \int_0^h y_1(x) y_2(x) dx. \tag{3.4}$$

Линейное пространство, на «векторах» (функциях $y_1(x)$, $y_2(x)$) которого определено скалярное произведение, называется евклидовым.

Задачу Штурма – Лиувилля можно сформулировать как задачу нахождения собственных функций («векторов») $y(x)$ и собственных чисел (значений) λ линейного оператора двукратного дифференцирования $\frac{d^2}{dx^2} \equiv D^2$, определённого на евклидовом пространстве $C_*^2[0,h]$:

$$D^2 y = \lambda y; \quad y \in C_*^2[0,h].$$

Напомним, что, если задача на собственные векторы линейного оператора разрешима, то её решения (собственные векторы) определены с точностью до постоянного ненулевого множителя. Таким образом, если $y(x)$ – собственная функция оператора D^2 с собственным значением λ, то $Cy(x)$ $(C \neq 0)$ также будет собственной функцией оператора D^2 с тем же собственным значением λ.

Если $\alpha_1\beta_1 \le 0$, $\alpha_2\beta_2 \ge 0$, то можно доказать, что собственные функции и собственные числа задачи Штурма - Лиувилля обладают следующими свойствами.

Свойство 1. Существует бесконечно много собственных значений λ, при которых задача Штурма – Лиувилля имеет ненулевое решение. Собственные значения образуют убывающую числовую последовательность

$$0 \ge \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots > \lambda_n > \ldots,$$

причем $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = -\infty$.

Замечание: Отметим, что собственное значение $\lambda_1 = 0$ имеет только задача Штурма - Лиувилля с граничными условия

$$y'(0) = 0, \quad y'(h) = 0.$$

При любых других граничных условиях в задаче Штурма - Лиувилля для D^2 первое, а вместе с ним и все остальные собственные значения отрицательны.

Свойство 2. Для каждого собственного значения λ_n существует единственная (с точностью до произвольного ненулевого множителя) собственная функция $y_n(x)$. Разным собственным значениям λ_n и λ_m $(n \ne m)$ соответствуют собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$, которые ортогональны друг другу, то есть скалярное произведение этих функций равно нулю:

$$(y_1, y_2) = \int_0^h y_1(x) y_2(x) dx = 0.$$

Свойство 3. Множество собственных функций

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots y_n(x),\ \ldots$$

образует (ортогональный) базис бесконечномерного евклидового пространства функций $C_*^2[0,h]$.

Напоминание: Последнее утверждение означает, что любую функцию $f(x)$ из пространства $C_*^2[0,h]$, то есть любую функцию, дважды непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0,h]$ и удовлетворяющую граничным условиям (3.2), (3.3) задачи Штурма – Лиувилля, можно единственным образом представить в виде суммы функционального ряда Фурье:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,y_n(x). \tag{3.5}$$

Коэффициенты a_n ряда Фурье в разложении (3.5) называются координатами функции $f(x)$ в ортогональном базисе $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots y_n(x)$, … Эти коэффициенты единственным образом находятся по формулам Эйлера-Фурье:

$$a_n=\frac{(f,y_n)}{(y_n,y_n)}=\frac{\int\limits_0^h f(x)\,y_n(x)\,dx}{\int\limits_0^h y_n^2(x)\,dx}.$$

Ряд Фурье в правой части формулы (3.5) сходится на отрезке $[0,h]$ абсолютно и равномерно. Этот ряд допускает почленное двукратное дифференцирование и справедлива формула

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,y_n''(x).$$

Замечание: Из свойства 3 в частности следует, что нулевая функция, то есть функция, тождественно равная нулю для всех $x\in[0,h]$, имеет нулевые коэффициенты разложения (координаты). То есть, из тожде-

...второго порядка с постоянными коэф- фициентами. Общее решение этого уравнения находится методом характеристического уравнения. Оно содержит неизвестный параметр λ (искомое собственное число задачи Штурма – Лиувилля) и две произвольные постоянные. Параметр λ и произвольные постоянные подбирают так, чтобы удовлетворить двум граничным условиям (3.2) и (3.3). В окончательное выражение для собственной функции в качестве сомножителя входит произвольная константа, значение которой выбирается произвольно, например, равным единице.

Историческая справка:

Большой вклад в развитие теории уравнений математической физики, в том числе в исследование круга вопросов, связанных с задачей Штурма – Лиувилля, внёс выдающийся российский математик, академик В.А.Стеклов (1864 – 1926). Его имя носят институты математики в Москве и в Санкт – Петербурге.

§4. Пример решения задачи Штурма – Лиувилля

<u>Задача</u>. Найти собственные числа и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля при $x \in [0,h]$

$$y''(x) = \lambda y(x), \tag{4.1}$$

$$y(0) = 0, \tag{4.2}$$

$$y(h) = 0. \tag{4.3}$$

Решение. Так как задача имеет ненулевое решение только при $\lambda < 0$, то естественно ввести обозначение $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$.

Сначала находим общее решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами (4.1). Для этого составляем характеристическое уравнение: $k^2 = \lambda = -\mu^2$. Оно имеет комплексные корни: $k_{1,2} = \pm i\mu$. Следовательно, общее решение ДУ (4.1) имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x \tag{4.4}$$

Подставляя в обе части равенства (4.4) $x = 0$, а затем $x = h$, из граничных условий (4.2) и (4.3) находим

$$\begin{cases} C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 0 \\ C_1 \sin \mu h + C_2 \cos \mu h = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Так как $\sin 0 = 0$, а $\cos 0 = 1$, то первое из уравнений системы даёт $C_2 = 0$. Тогда из второго уравнения следует, что $C_1 \sin \mu h = 0$. Последнее равенство выполняется, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Если и постоянная $C_1 = 0$, то функция $y(x)$ (4.4) тождественно равна нулю. Так как нас интересуют не нулевые решения, то следует считать, что $C_1 \neq 0$, и, следовательно,

$$\sin \mu h = 0. \tag{4.6}$$

Это уравнение часто называется **характеристическим уравнением** задачи Штурма - Лиувилля. Оно служит для нахождения собственных чисел этой задачи. Из этого уравнения определяются значения μ, а затем находят $\lambda = -\mu^2$.

Решение уравнения (4.6) имеет вид $\mu h = \pi n$, где $n \in Z$, то есть $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В результате находим $\mu_n = \pi n / h$, где индекс n, нумерует собственные значения. При фиксированном n решение задачи Штурма – Лиувилля принимает вид $y_n(x) = C_1 \sin \mu_n x$, явно указывающий на то, что собственные функции определены с точностью до постоянного ненулевого множителя. Без потери общности этот множитель можно считать, например, равным единице: $C_1 = 1$. Тогда имеем

$$y_n(x) = \sin \mu_n x, \quad \text{где } \mu_n = \pi n/h, \quad n \in Z.$$

Область изменения n следует ограничить. Во-первых, $n \neq 0$, так как в противном случае $\mu_n = 0$ и $y_0(x) = \sin 0x = 0$. Во-вторых, значения $+n$ и $-n$ дают одну и ту же (с точностью до множителя ± 1) собственную функцию

$$y_{\pm n}(x) = \sin\left(\pm\frac{\pi n}{h}x\right) = \pm \sin\frac{\pi n}{h}x.$$

Таким образом, индекс у чисел μ_n нумерует собственные функции, так что $y_n(x) = \sin \pi n/h$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Следовательно, собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля будут функции

$$y_n(x) = \sin \mu_n x = \sin\frac{\pi n}{h}x, \tag{4.7}$$

а соответствующими собственными значениями являются числа

$$\lambda_n = -\mu_n^2 = -\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2, \tag{4.8}$$

где $n \in N$.

Замечание. При других граничных условиях собственные функции имеют вид $y(x) = \cos \mu x$, где число μ находится из характеристического уравнения $\cos \mu h = 0$. Решение этого уравнения имеет вид $\mu h = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Таким образом, для собственных функций и собственных чисел получаем

$$\mu_n = \frac{\pi(n+1/2)}{h}, \qquad y_n(x) = \cos\frac{\pi(n+1/2)x}{h}.$$

Нетрудно видеть, что

$$y_{-n}(x) = \cos\frac{\pi(-n+1/2)x}{h} = \cos\left[-\frac{\pi(n-1/2)x}{h}\right] =$$

$$= \cos\frac{\pi(n-1/2)x}{h} = \cos\frac{\pi((n-1)+1/2)x}{h} = y_{n-1}(x),$$

Так как $y_{-n}(x) = y_{n-1}(x)$ одна и та же собственная функция, то область изменения номера n следует ограничить только неотрицательными целыми числами: $n = 0,1,2,\ldots$

В этом случае собственные числа и собственные функции задачи Штурма – Лиувиля можно записать так:

$$\lambda_n = -\mu_n^2, \quad \mu_n = \frac{\pi(n+1/2)}{h},$$

$$y_n(x) = \cos\mu_n x = \cos\frac{\pi(n+1/2)x}{h},$$

где $n = 0,1,2,\ldots$

§5. Решение методом Фурье начально–краевой задачи для волнового уравнения при нулевых граничных условиях

5.0 Метод Фурье: форма представления решения начально–краевой задачи. Алгоритм реализации метода Фурье

Пусть требуется найти решение $U(x,t)$ однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \tag{5.1}$$

при $0 \le x \le h$ и $t \ge 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(x,0) = f_1(x), \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = f_2(x) \tag{5.3}$$

и граничным условиям

$$\alpha_1 U(0,t) + \beta_1 \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0, \tag{5.4}$$

$$\alpha_2 U(h,t) + \beta_2 \frac{\partial U(h,t)}{\partial x} = 0, \tag{5.5}$$

Предполагается, что функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, задающие начальные условия, принадлежат пространству $C_*^2[0,h]$. Решение $U(x,t)$ ищем в классе функций, дважды непрерывно дифференцируемых по каждой из своих переменных, а по переменной x удовлетворяющим также и условиям (5.4), (5.5), то есть $U(x,t)$, как функция от x (при фиксированном t) также принадлежит $C_2^*[0,h]$.

Ещё раз подчеркнем, что решение - это функция $U(x,t)$, удовлетворяющая, во-первых, уравнению (5.1), во-вторых, начальным условиям (5.2), (5.3) и, в-третьих, граничным условиям (5.4) и (5.5).

Основная идея метода Фурье состоит в представлении искомой функции $U(x,t)$ в виде разложения в ряд Фурье

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot y_n(x) \tag{5.6}$$

по базисным функциям $y_n(x)$ задачи Штурма–Лиувилля с граничными условиями, порождёнными граничными условиями (5.4) и (5.5) начально-краевой задачи:

Отметим, что представление искомой функции $U(x,t)$ в виде ряда (5.6) позволяет "разделить переменные" - свести решение начально-краевой задачи решению двух задач:

1. нахождение базисных функций $y_n(x)$.
2. нахождение коэффициентов $T_n(t)$.

Ниже будет показано, что для решения первой задачи надо решить задачу Штурма – Лиувилля с теми же граничными условиями для функции $y_n(x)$, что и для функции $U(x,t)$. Это автоматически приведет к выполнению граничных условий, наложенных на $U(x,t)$.

Выбор начальных условий для функций $T_n(t)$ в виде

$$T_n(0) = A_{1n}, \qquad T_n{}'(0) = A_{2n}$$

обеспечивает выполнение начальных условий (5.2), (5.3) для функции $U(x,t)$. Здесь A_{1n}, A_{2n} коэффициенты разложения функций $f_1(x), f_2(x)$ по базисным функциям $y_n(x)$ задачи Штурма–Лиувилля.

Ниже также будет показано, что для того, чтобы сумма ряда (5.6) была решением волнового уравнения необходимо и достаточно, чтобы функции $T_n(t)$ были бы решениями дифференциального уравнения

$$T_n''(t) = -c^2 \mu_n^2 T_n(t).$$

Таким образом, решение начально-краевой задачи сводится к последовательному решению следующих задач.

- Во-первых, надо получить соответствующую задачу Штурма – Лиувилля и решить её, то есть найти собственные числа $\lambda_n = -\mu_n^2$ и собственные функции $y_n(x)$ этой задачи.
- Во-вторых, надо добиться выполнения начальных условий (5.2), (5.3). Для этого надо найти коэффициенты A_{1n}, A_{2n} и положить

$$T_n(0) = A_{1n},\ T_n'(0) = A_{2n}.$$

- В-третьих, надо добиться того, чтобы искомая функция $U(x,t)$ была решением уравнения (5.1). Для этого надо найти решение ОЛДУ $T_n''(t) = -c^2\mu_n^2 T_n(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $T_n(0) = A_{1n},\ T_n'(0) = A_{2n}$.

5.1. Вывод и решение задачи Штурма – Лиувилля

Сначала выводим (см. §2) и решаем (см. §4) задачу Штурма – Лиувилля, соответствующую граничным условиям (5.4), (5.5). Эта задача имеет вид:

$$y''(x) = \lambda y(x), \tag{5.7}$$

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0, \tag{5.8}$$

$$\alpha_2 y(h) + \beta_2 y'(h) = 0. \tag{5.9}$$

Ещё раз отметим, что коэффициенты α_1 и α_2 перед функциями и β_1 и β_2 перед производными в граничных условиях (5.4), (5.5) и (5.8), (5.9) одни и те же.

Пусть $\lambda_n = -\mu_n^2,\ y_n(x)$ – собственные числа и собственные функции этой задачи, то есть

$$y_n''(x) = -\mu_n^2 y_n(x), \text{ при } n = 1,2,\ldots \tag{5.10}$$

и

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0, \tag{5.11}$$

$$\alpha_2 y(h) + \beta_2 y'(h) = 0. \tag{5.12}$$

Функции $y_n(x)$ образуют базис в $C_*^2[0,h]$. Следовательно, всякую функцию из этого пространства, в том числе искомое решение начально-краевой задачи $U(x,t)$ при любом фиксированном значении переменной t можно представить в виде разложения по базису:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot y_n(x) \tag{5.13}$$

Поскольку функция $U(x,t)$ зависит также и от времени t, то коэффициенты $T_n(t)$ этого разложения тоже зависят от времени.

Ниже нам потребуются не только функция $U(x,t)$, но и её частные производные. Выражение для них нетрудно получить, дифференцируя почленно ряд (5.13). При этом, дифференцируя по «t», надо помнить, что в каждом члене ряда зависимость от времени содержит только множитель $T_n(t)$. Дифференцируя же по переменной x, будем помнить, что в каждом члене ряда от пространственной координаты зависит только множитель $y_n(x)$.

В результате дифференцирование даёт:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) y_n(x) \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) y_n(x) \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n'(x) \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n''(x) \tag{5.17}$$

Если учесть, что $y_n(x)$ удовлетворяет ДУ (5.10), то выражение для $\partial^2 U \ \partial x^2$ может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\mu_n^2 y_n(x). \tag{5.18}$$

5

Важно понимать, что поиск решения $U(x,t)$ в виде (5.13) сразу решает одну задачу. А именно, функция вида (5.13) при любой функции $T_n(t)$ удовлетворяет граничным условиям (5.4), (5.5). Действительно, из формул (5.13) и (5.16) следует, что

$$U(0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot y_n(0), \qquad U'_x(0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot y'_n(0).$$

Подставляя эти выражения в граничное условие (5.4), находим, что

$$\alpha_1 U(0,t)+\beta_1 U'_x(0,t) = \alpha_1\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,y_n(0) + \beta_1\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,y'(0).$$

Выполняя над рядами линейные операции почленно, получаем:

$$\alpha_1 U(0,t)+\beta_1 U'_x(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\left[\alpha_1 y_n(0)+\beta_1 y'_n(0)\right]. \quad (5.19)$$

Так как функции $y_n(x)$ удовлетворяют граничным условиям (5.11), то выражение в квадратных скобках при всяком значении $n\in N$, а вместе с ним и вся сумма (5.19) обращаются в ноль, то есть граничное условие (5.4) выполняется. Точно так же проверяется, что выполняется и граничное условие (5.5).

Хотелось бы, чтобы за выкладками не потерялась простая мысль. То, что функция вида (5.13) при любых $T_n(t)$ удовлетворяет граничным условиям (5.4) и (5.5), является следствием линейности граничных условий как по U, так и по $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ и того, что все функции $y_n(x)$ удовлетворяют граничным условиям (5.11) и (5.12) с теми же значениями параметров α_1, β_1 и α_2, β_2 что и в условиях (5.4) и (5.5).

Отметим также, что поиск решения задачи в виде разложения (5.13) приводит к «разделению переменных». Вместо нахождения функции $U(x,t)$ двух переменных, являющейся решением ДУ в частных производных, перед нами теперь стоит задача отыскания, хотя и бесконечного числа функций $T_n(t)$, но зависящих только от одной переменной и являющихся, как будет показано ниже, решениями обыкновенных ДУ.

5.2. Выполнение начальных условий

Выясним теперь, каким условиям должны удовлетворять неизвестные пока функции $T_n(t)$ для того, чтобы функция $U(x,t)$ удовлетворяла начальным условиям (5.2), (5.3).

Разложим функцию $f_1(x)$ из начального условия (5.2) ряд по базисным функциям $y_n(x)$ задачи Штурма – Лиувилля:

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} y_n(x) \qquad (5.20)$$

Коэффициенты A_{1n} разложения (5.20) находим по формулам Фурье – Эйлера:

$$A_{1n} = \frac{\int_0^h f_1(x)\, y_n(x)\, dx}{\int_0^h y_n^2(x)\, dx} \qquad (5.21)$$

Функция $U(x,t)$ в начальный момент времени ($t=0$) имеет вид:

$$U(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\cdot y_n(x) \qquad (5.22)$$

Следовательно, для того, чтобы функция $U(x,t)$ удовлетворяла начальному условию, необходимо и достаточно чтобы при любом $x \in [0,h]$ выполнялось тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\, y_n(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} y_n(x). \qquad (5.23)$$

Правая и левая части соотношения (5.23) суть разложения по базису одного и того же вектора линейного пространства $C_*^2[0,h]$. Так как разложение по базису единственно, то справедливость тождества (5.23) равносильна выполнению равенств

$$T_n(0) = A_{1n} \tag{5.24}$$

при $n = 1,2,\ldots$. Точно так же проверяется, что для того, чтобы функция $U(x,t)$ удовлетворяла второму из начальных условий (5.3), необходимо и достаточно выполнение равенств

$$T_n'(0) = A_{2n}, \tag{5.25}$$

$n = 1,2,3,\ldots$, где A_{2n} – коэффициенты разложения функции $f_2(x)$:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \cdot y_n(x), \tag{5.26}$$

$$A_{2n} = \frac{\int_0^h f_2(x) y_n(x) dx}{\int_0^h y_n^2(x) dx} \tag{5.27}$$

Соотношения (5.24), (5.25) представляют собой начальные условия для искомых функций $T_n(t)$.

5.3. Сведение волнового уравнения к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Выясним теперь, каким уравнениям должны удовлетворять функции $T_n(t)$ для того, чтобы функция $U(x,t)$, заданная представлением (5.13), была решением уравнения (5.1).

Для этого подставим выражения (5.15) и (5.18) для частных производных функции $U(x,t)$ в уравнение (5.1) и потребуем, чтобы оно обращалось в тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) y_n(x) \equiv -c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 T_n(t) y_n(x) \tag{5.28}$$

Так как обе части тождества (5.28) являются разложением одной и той же функции из $C_*^2[0,h]$ (вектора линейного пространства) по базису $y_n(x)$, то коэффициенты обоих разложений должны совпадать. Это приводит к обыкновенному ДУ (ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами):

$$T_n''(t) = -c^2\mu_n^2 T_n(t), \tag{5.29}$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, для того, чтобы функция (5.13) была решением волнового уравнения, необходимо и достаточно, чтобы функции $T_n(t)$ были бы решениями ДУ (5.29).

С учётом условий (5.24), (5.25) для нахождения функции $T_n(t)$ получаем задачу Коши

$$T_n''(t) = -c^2\mu_n^2 T_n(t), \tag{5.30}$$

$$T_n(0) = A_{1n} \tag{5.31}$$

$$T_n'(0) = A_{2n} \tag{5.32}$$

Решение последней задачи труда не составляет (см. §**6**).

Итак, мы показали, что решением начально–краевой задачи (5.1)-(5.5) является функция $U(x,t)$, равная сумме функционального ряда

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n(x),$$

где $y_n(x)$ – решение задачи Штурма–Лиувилля (5.10)-(5.12), $T_n(t)$ – решение задачи Коши (5.30) - (5.32).

§6. Пример решения начально–краевой задачи для волнового уравнения

<u>Постановка задачи.</u>

Решить волновое уравнение ($0 < x < h$ и $t > 0$)

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (6.1)$$

при начальных условиях:

$$U(x,0) = \frac{B}{h^2}\left(x^2 - xh\right), \ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0 \qquad (6.2)$$

и граничных условиях:

$$U(0,t) = 0, \qquad U(h,t) = 0, \qquad (6.3)$$

где $B = 8$, $c = 5$, $h = 4$.

<u>Задание:</u>

1. Методом Фурье найти точное аналитическое решение (в виде суммы ряда) начально-краевой задачи (6.1) - (6.3).
2. Построить график функции $U(x_1,t)$, где $x_1 = h/2$. Для этого, ограничиваясь тремя первыми ненулевыми членами ряда, вычислить приближённо $U(x_1,t)$, $U(x_1,t_1)$, $U(x_1,2t_1)$, $U(x_1,3t_1)$, $U(x_1,4t_1)$, где $t_1 = \dfrac{h}{4\pi c}$.
3. Оценить погрешность вычисления значения $U(x_1,t_1)$.

Приведём пример выполнения задания по курсовой работе.

6.1. Вывод методом разделения переменных задачи Штурма – Лиувилля и ее решение

Ищем частные решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \tag{6.4}$$

отличные от тождественного нуля при $0 < x < h$ и $t > 0$, удовлетворяющие только краевым условиям (6.3):

$$U(0,t) = 0, \tag{6.5}$$

$$U(h,t) = 0. \tag{6.6}$$

Частные решения ищем в виде произведения двух функций, каждая из которых является функций только одной переменной

$$U(x,t) = y(x)T(t). \tag{6.7}$$

Подстановка представления (6.7) в уравнение (6.4) приводит (см. §2) к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами для функции $y(x)$:

$$y''(x) = \lambda y(x) \tag{6.8}$$

Подстановка функции $U(x,t)$, определённой формулой (6.7), в краевые условия (6.5) и (6.6) приводит к следующим соотношениям:

$$T(t)y(0) = 0,\ T(t)y(h) = 0.$$

Если учесть, что $T(t) \neq 0$, то $y(0) = 0$ и $y(h) = 0$. Следовательно, мы приходим к задаче Штурма-Лиувилля

$$y''(x) = \lambda y(x) \tag{6.9}$$

$$y(0) = 0, \tag{6.10}$$

$$y(h) = 0. \tag{6.11}$$

Её решение подробно описано в §4. Собственные значения λ_n и собственные функции $y_n(x)$ этой задачи Штурма - Лиувилля таковы:

$$\lambda_n = -\mu_n^2,\ \mu_n = \frac{\pi n}{h},\ y_n(x) = \sin \mu_n x = \sin\frac{\pi n}{h}x,\ n = 1,2,.. \tag{6.12}$$

Следовательно, аналитическое решение $U(x,t)$ задачи (6.4) -(6.6) будем искать в виде

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n}{h}x. \tag{6.13}$$

Отметим, что функция (6.13) автоматически удовлетворяет граничным условиям (6.5), (6.6) (см. п.5.1), так как соответствующим условиям (6.10), (6.11) удовлетворяют функции $y_n(x)$.

6.2. Выполнение начальных условий

Согласно п.5.2 для того, чтобы функция $U(x,t)$ (6.13) удовлетворяла начальным условиям (5.2), (5.3), необходимо и достаточно, чтобы функции $T_n(t)$ удовлетворяли начальным условиям $T_n(0)=A_{1n}$, $T_n'(0)=A_{2n}$. Следовательно, на этом этапе нам надо найти коэффициенты разложений A_{1n}, A_{2n} функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, задающих начальные условия (6.2), по собственным функциям (6.12) $y_n(x)=\sin\mu_n x$ задачи Штурма – Лиувилля. В нашем случае

$$f_1(x)=\frac{B}{h^2}\left(x^2-xh\right), \qquad f_2(x)=0.$$

Так как нулевая функция имеет нулевые коэффициенты разложения, то $A_{2n}=0$, где $n=1,2,3\ldots$. Это следует как из определения базиса, так и непосредственно из формулы (5.27) их вычисления.

Остаётся найти по формулам (5.21) коэффициенты A_{1n} разложения функции $f_1(x)$, то есть представить функцию $f_1(x)$ в виде:

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}y_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\sin\mu_n x.$$

Для этого надо вычислить два интеграла:

$$\int_0^h y_n^2(x)=\int_0^h \sin^2\frac{\pi n}{h}x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^h\left(1-\cos\frac{2\pi n}{h}x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{h}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n}{h}x\right)\Bigg|_0^h=\frac{1}{2}\left[\left(h-\frac{h}{2\pi n}\sin 2\pi n\right)-\left(0-\frac{h}{2\pi n}\sin 0\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(h-0)-(0-0)\right]=\frac{h}{2}. \qquad (6.14)$$

При вычислении мы воспользовались формулой «понижения степени» $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ и тем, что $\sin 2\pi n=0$, а*

$$\int \cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+C.$$

Интеграл, стоящий в числителе формулы (5.21), вычисляется стандартным образом (путём двукратного применения формулы интегрирования по частям $\int\limits_a^b u dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v du$):

$$\int\limits_0^h \frac{B}{h^2}\left(x^2-xh\right)\sin\frac{\pi n}{h}xdx \;=\; \frac{B}{h^2}\int\limits_0^h\left(x^2-xh\right)\sin\frac{\pi n}{h}xdx \;=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x^2-xh, & du=(2x-h)dx \\ dv=\sin\frac{\pi n}{h}xdx, & v=-\frac{h}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{h}x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{B}{h^2}\left[-\left(x^2-xh\right)\cdot\frac{h}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{h}x\Bigg|_0^h+\frac{h}{\pi n}\int\limits_0^h(2x-h)\cos\frac{\pi n}{h}xdx\right]=$$

$$=\frac{B}{h^2}\left[-\left(h^2-h\cdot h\right)\frac{h}{\pi n}\cos\pi n+\left(0^2-0\cdot h\right)\frac{h}{\pi n}\cos 0+\right.$$

$$\left.+\frac{h}{\pi n}\int\limits_0^h(2x-h)\cos\frac{\pi n}{h}xdx\right]=\frac{B}{h^2}\cdot\frac{h}{\pi n}\int\limits_0^h(2x-h)\cos\frac{\pi n}{h}xdx=$$

---

* Полезно помнить следующие значения тригонометрических функций ($n\in Z$):

$\sin\pi n=0$, $\sin\pi(1/2+n)=(-1)^n$, $\cos\pi n=(-1)^n$, $\cos\pi(1/2+n)=0$.

$$
= \left| \begin{array}{ll} u = 2x - h, & du = 2dx \\ dv = \cos\frac{\pi n}{h} x dx, & v = \frac{h}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{h}x \end{array} \right| =
$$

$$
= \frac{B}{h\pi n}\left[(2x-h)\frac{h}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{h}x \Big|_0^h - 2\frac{h}{\pi n}\int_0^h \sin\frac{\pi n}{h}x dx \right] =
$$

$$
= \frac{2Bh}{(\pi n)^3}(\cos\pi n - \cos 0) = \frac{2Bh}{\pi^3 n^3}\left[(-1)^n - 1\right] \qquad (6.15)
$$

Согласно формуле (5.27), значение коэффициента A_{1n} равно отношению интеграла (6.15) к "нормировочному" интегралу (6.14), то есть

$$
A_{1n} = \frac{\frac{2Bh}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right)}{h/2} = \frac{4B}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right) \qquad (6.16)
$$

Таким образом, начальные условия для функций $T_n(t)$, обеспечивающие выполнение начальных условий (6.2) для функции $U(x,t)$ имеют вид

$$
\begin{cases} T_n(0) = A_{1n} = \dfrac{4B}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right) \\ T_n'(0) = A_{2n} = 0 \qquad n = 1,2,3,\dots \end{cases} \qquad (6.17)
$$

6.3. Сведение волнового уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению и решение задачи Коши

Согласно п. 5.3 для того, чтобы функция (5.13), (6.13) была решением начально-краевой задачи для волнового уравнения, необходимо и достаточно, чтобы функции $T_n(t)$ были бы решениями следующих задач Коши:

$$
T_n''(t) = -c^2\mu_n^2 T_n(t), \qquad (6.18)
$$

$$
T_n(0) = A_{1n} \qquad (6.19)
$$

$$
T_n'(0) = A_{2n} \qquad (6.20)
$$

Для их решения сначала находим общее решение ДУ (6.18), являющегося ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, а затем из начальных условий (6.19), (6.20) определяем произвольные постоянные.

Характеристическое уравнение для ДУ (6.18) имеет вид $k^2 = -c^2\mu_n^2$, а его корни равны $k = \pm ic\mu_n$. Следовательно, общее решение $T_n(t)$ определяется формулой

$$T_n(t) = C_{1n}\sin c\mu_n t + C_{2n}\cos c\mu_n t. \tag{6.21}$$

Дифференцируя (6.21), получаем

$$T_n'(t) = c\mu_n\left(C_{1n}\cos c\mu_n t - C_{2n}\sin c\mu_n t\right).$$

Из начальных условий (6.19), (6.20) следует, что

$$\begin{cases} C_{1n}\sin 0 + C_{2n}\cos 0 = A_{1n} \\ c\mu_n\left(C_{1n}\cos 0 - C_{2n}\sin 0\right) = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим, что $C_{1n} = 0$, $C_{2n} = A_{2n}$, то есть решение задачи Коши имеет вид

$$T_n(t) = A_{1n}\cos c\mu_n t = \frac{4B}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right)\cos c\frac{\pi n}{h}t \tag{6.22}$$

Так как отличен от нуля только один из коэффициентов A_{in}, а именно A_{1n}, то, упрощая обозначения, далее полагаем $A_{1n} \equiv A_n$.

Подставляя (6.22) в формулу (6.13), заключаем, что (аналитическим) решением начально-краевой задачи (6.1) - (6.3) будет функция $U(x,t)$, равная сумме следующего ряда:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos c\mu_n t \cdot \sin \mu_n x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4B}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right)\cos\frac{\pi n}{h}t \cdot \sin\frac{\pi n}{h}x. \tag{6.23}$$

6.4. Получение приближённого решения начально-краевой задачи для волнового уравнения и построение графика

Завершающий этап выполнения курсовой работы состоит в построении графика решения и оценки точности полученных результатов.

Позволим себе дать несколько полезных советов. Первый из них: не спешите подставлять в формулу (6.23) числовые значения параметров B, c, h Вашего варианта. Пытайтесь настолько, насколько это возможно, проводить необходимые выкладки в общем виде (с буквенными "значениями" параметров).

В задании сказано, что Вы должны построить по точкам график функции $U(x_1,t)$ при $x_1 = h/2$, то есть график зависимости $U(x_1,t)$ от одного из аргументов (времени) при фиксированном втором аргументе (координате).

Подставляя $x = h/2$ в формулу (6.23) и учитывая, что $\mu_n = \pi n/h$, имеем

$$U(h/2,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos c\mu_n t \sin \mu_n \frac{h}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos c\mu_n t \sin \frac{\pi}{2} n. \quad (6.24)$$

Так как $\sin\frac{\pi}{2}n = 0$ при чётных "n", то вклад в сумму ряда (6.24) дают лишь слагаемые с нечётными номерами $n = 2k-1$, $(k = 1,2,3\ldots)$. Заметим (6.16), что в этой задаче и коэффициенты $A_n \equiv A_{1n} \neq 0$ также лишь при нечётных "n". Следовательно,

$$U(h/2,t) = A_1 \cos c\mu_1 t \sin\frac{\pi}{2} + A_3 \cos c\mu_3 t \sin\frac{3\pi}{2} + A_5 \cos c\mu_5 t \sin\frac{5\pi}{2} + \ldots =$$
$$= A_1 \cos \mu_1 t - A_3 \cos \mu_3 t + A_5 \cos \mu_5 t + \ldots \quad (6.25)$$

Так как в задании сказано, что при вычислении функции $U(x,t)$ достаточно ограничиться тремя первыми ненулевыми членами ряда, то слагаемые, соответствующие $n=7$ и все последующие следует опустить.

По условию задачи требуется построить график $U(h/2,t)$ по пяти точкам: $t=mt_1$, где $t_1=\dfrac{h}{4\pi c}$, $m=0,1,2,3,4$*. Подставляя $t=mt_1$ в формулу (6.25)

$$U(h/2,mt_1)=A_1\cos c\mu_1 mt_1-A_3\cos c\mu_3 mt_1+A_5\cos c\mu_5 mt_1+\ldots$$

и учитывая, что $\mu_n=\pi n/h$, получаем следующую формулу для вычисления значения функции в точке графика с номером "m":

$$U(h/2,mt_1)=A_1\cos\frac{m}{4}-A_3\cos\frac{3m}{4}+A_5\cos\frac{5m}{4}+\ldots \quad (6.26)$$

Наконец, вычисляя коэффициенты A_n по формуле (6.16):

$$A_1=-\frac{8B}{\pi^3},\quad A_3=-\frac{8B}{27\pi^3},\quad A_5=-\frac{8B}{125\pi^3},$$

и подставляя A_1,A_3,A_5 в (6.26), получаем расчётную формулу для вычисления значения исследуемой функции в точке графика с номером "m":

$$U(h/2,mt_1)\approx\frac{8B}{\pi^3}\left(-\cos\frac{m}{4}+\frac{1}{27}\cos\frac{3m}{4}-\frac{1}{125}\cos\frac{5m}{4}\right)(6.27)$$

Для нахождения искомых значений функции в формулу (6.27) надо последовательно подставлять $m=0,1,2,3,4$.

Отметим, что, следуя данному выше совету, мы до последнего момента воздерживались от подстановки численных значений параметров задачи (B, c, h) и на этом пути получили достаточно простую расчётную формулу (6.27).

---

*Очевидно, что t_1 это шаг, с которым мы двигаемся вдоль оси переменной t при построении графика по точкам, а m - номер шага (точки графика).

Однако, проводя расчёты даже по этой простой формуле, будьте внимательны: следите за тем, чтобы Ваш калькулятор находился в режиме "RAD" (радианы).

Так как $B = 8$, то при $m = 0$ имеем

$$U(h/2,0) \approx \frac{64}{\pi^3}\left(-\cos 0 + \frac{1}{27}\cos 0 - \frac{1}{125}\cos 0\right) =$$

$$= \frac{64}{\pi^3}\left(-1 + \frac{1}{27} - \frac{1}{125}\right) = -2{,}004162908\ldots$$

Замечание. Правильность расчётов при $t = 0$ можно легко проконтролировать. Действительно, согласно начальным условиям (6.2)

$$U(h/2,0) = \frac{B}{h^2}\left[(h/2)^2 - h \cdot h/2\right] = -\frac{B}{4} = -2.$$

Видно, что имеется хорошее совпадение: разность между точным и приближённым значениями $U(h/2,0)$ невелика.

Для вычисления $U(h/2,t_1)$ подставляем $m = 1$ в формулу (6.27) и находим, что

$$U(h/2,t_1) \approx \frac{8B}{\pi^3}\left(-\cos\frac{1}{4} + \frac{1}{27}\cos\frac{3}{4} - \frac{1}{125}\cos\frac{5}{4}\right) =$$

$$= -1{,}949201029 \qquad (6.28)$$

Затем, найдя $U(h/2,2t_1)$, $U(h/2,3t_1)$, $U(h/2,4t_1)$, строим график.

6.5. Оценка погрешности

Оценим теперь погрешность вычисления значения $U(h/2,t_1)$. Это значение мы получили, найдя частичную сумму трёх членов ряда.

Напомним, что сумму сходящегося ряда S можно представить в виде двух слагаемых: $S = S_N + R_N$, где S_N – частичная сумма ряда, а R_N – остаток ряда, причём $\lim\limits_{N\to\infty} R_N = 0$. Следовательно, если N достаточно велико, то величина $|R_N|$ мала, и справедливо приближённое равенство $S \approx S_N$. Погрешность R_N этого приближённого равенства можно оценить, не вычисляя величину остатка ряда, а только оценив его: $|R_N| < \varepsilon$.

Таким образом, нам необходимо оценить $|R_3|$. Для того, чтобы оценить остаток, найдём сначала выражение для его общего члена.

Для этого сначала найдём выражение для общего члена числового ряда, сумма которого равна $U(h/2, t_1)$.

Общий член этого ряда может быть угадан по первым трём слагаемым ряда (6.28) и строго получен из формулы (6.24) при подстановке в неё значений $x = h/2$, $t = t_1 = h/4\pi c$:

$$U(h/2, t_1) = \frac{8B}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^3}\cos\frac{2k-1}{4} \qquad (6.29)$$

При написании формулы (6.29) мы учли, что ненулевыми членами ряда будут слагаемые только с нечётными номерами $n = 2k-1$(см. выше).

Очевидно ($|\cos z| \le 1$), что знакопеременный ряд (6.29) мажорируется* сходящимся рядом

---

* Говорят, что положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, мажорирует, вообще говоря, знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, если $|b_n| \le \alpha_n \ \forall n$. В этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ называется мажорантой.

$$\frac{8B}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3} \qquad (6.30)$$

Так как сходимость ряда (6.30) можно установить с помощью интегрального признака Коши, то его остаток r_N оценивается следующим образом:

$$r_N \le \frac{8B}{\pi^3}\int_N^{\infty}\frac{dk}{(2k-1)^3} = \frac{8B}{\pi^3}\cdot\frac{(2k-1)^{-2}}{-2\cdot 2}\Bigg|_N^{\infty} = \frac{2B}{\pi^3(2N-1)^2}$$

Так как абсолютная величина остатка R_N мажорируемого ряда не превосходит остатка r_N его мажоранты ($|R_N| \le r_N$), то

$$0 \le |R_3| \le r_3 = \frac{2B}{\pi^3(2\cdot 3-1)^2} = 0{,}0206...$$

Таким образом, погрешность при вычислении $U(h/2, t_1)$ (6.28) не превосходит 0,02, то есть достоверным является следующий результат:

$$U(h/2, t_1) = -1{,}95 \pm 0{,}02.$$

§7. Оформление курсовой работы и порядок ее выполнения

Курсовая работа должна содержать *титульную страницу* и *страницу с постановкой задачи*.

На титульной странице указывается:

- место выполнения работы

Военный инженерно-технический университет;

- название работы

Курсовая работа по математике

«Использование математических методов в решении прикладных инженерных задач»

(часть 1)

«Применение уравнений математической физики

в решении инженерных задач»

Волновое уравнение

- название факультета, номер группы, фамилия и инициалы курсанта, выполнившего курсовую работу, фамилия и инициалы преподавателя, под руководством которого эта работа выполнялась;
- год выполнения курсовой работы.

На ***первой странице*** курсовой работы приводится текст задания и формулировка соответствующей прикладной инженерной задачи (см. Приложение).

Начиная со ***второй страницы*** курсовой работы, приводится подробное решение задачи. Решение должно содержать следующие пункты:

1. Получение методом разделения переменных задачи Штурма - Лиувилля для волнового уравнения (проверяется преподавателем).
2. Решение задачи Штурма – Лиувилля: нахождение собственных чисел и собственных функций (проверяется преподавателем).
3. Разложение по базису собственных функций задачи Штурма - Лиувилля функций, задающих начальные условия. Преподавателем проверяются коэффициенты этого разложения.
4. Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения (проверяется преподавателем).
5. Ответ: аналитическое решение начально-краевой задачи для волнового уравнения в виде суммы ряда (проверяется преподавателем).
6. Получение приближённого решения начально-краевой задачи для волнового уравнения. Численные расчёты по приближённым формулам и построение графика согласно заданию в курсовой работе (преподавателем проверяются результаты вычислений).
7. Оценка погрешности приближённого решения

ПРИЛОЖЕНИЕ

Постановка начально-краевых задач для волнового уравнения

Условия задач

Задача 1

1.1. При расчетах свайных фундаментов на вертикальные колебания принимается следующая расчетная модель. Свая моделируется упругим стержнем длиною h. Ось ОХ параллельна стержню. Пусть стержень в положении равновесия "рассечён" плоскостью $x = const$. При этом будем также говорить, что сечение имеет координату x. Концы ($x = 0$ и $x = h$) стержня неподвижны. Поперечные сечения стержня совершают малые колебания. Продольное смещение от положения равновесия сечения стержня с координатой x в момент времени t обозначим $U(x;t)$. Функция $U(x;t)$удовлетворяет волновому уравнению. Найти распределение смещений $U(x;t)$ по свае, если в начальный момент точки сваи выведены из состояния равновесия на величину $U(x,0) = f_1(x)$ и им придана скорость $\partial U(x,0)/\partial t = f_2(x)$.

1.2. Колебания внутренних перекрытий дома под внешним воздействием описывают следующей математической моделью: внутренние перекрытие – это упругий стержень длиною h, совершающий поперечные колебания. Смещение точек стержня с координатой x от положения равновесия в момент времени t задаётся функцией $U = U(x;t)$, которая удовлетворяет волновому уравнению. Концы стержня $x = 0$ и $x = h$ зажаты в опорах. Найти смещение стержня $U(x;t)$, если в начальный момент точки перекрытия выведены из состояния равновесия на величину $U(x,0) = f_1(x)$ и им придана скорость $\partial U(x,0)/\partial t = f_2(x)$.

1.3. На практике широкое применение находят вантовые перекрытия. Математическая модель, описывающая динамику используемых при этом металлических нитей, это модель, которая использует уравнение колебаний струны. Натяжение нити T, ее длина h, линейная плотность ρ. На систему воздействует ударная волна, которая вызывает начальное смещение $U(x,0) = f_1(x)$ и придает ей начальную скорость $\partial U(x,0)/\partial t = f_2(x)$. Найти колебания вантового перекрытия $U(x;t)$, если концы нити $x=0$ и $x=h$ зажаты.

1.4. Линия электропередач длиной h соединяет электростанцию и потребителя. Линия характеризуется постоянными параметрами: емкостью – C и индуктивностью – L на единицу длины линии. Найти распределение электрического напряжения в линии $U=U(x;t)$, удовлетворяющее волновому уравнению, x – координата точки линии, t – время. В начальный момент времени в линии созданы распределения напряжения $U(x,0)=f_1(x)$ и тока, так что $\partial U(x,0)/\partial t = f_2(x)$. Система защиты электростанции и потребителя заземляет линию на обоих концах ($x=0$ и $x=h$) и поддерживает на концах линии нулевое напряжение.

1.5. Горизонтальный трубопровод длиною h постоянного сечения заполнен покоящейся жидкостью. Распределение давления в жидкости описывается функцией $U=U(x;t)$, удовлетворяющей волновому уравнению и нулевым условиям на концах трубопровода $x=0$ и $x=h$ (на концах трубопровода поверхность жидкости просто контактирует с атмосферой), x – координата точки линии, t – время. В начальный момент времени в линии созданы распределения давления $U(x,0)=f_1(x)$ и скорости, так что $\partial U(x,0)/\partial t = f_2(x)$. Найти распределение давления в трубопроводе в зависимости от времени, начиная с момента $t=0$.

Математическая формулировка задачи 1

Найти решение $U(x;t)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x;t) = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x;t)$$

при $0 \le x \le h$, $t \ge 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(x;0) = f_1(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x;0) = f_2(x) \text{ при } 0 \le x \le h$$

и граничным условиям

$$U(0;t) = 0, \qquad U(h;t) = 0 \text{ при } t \ge 0.$$

Примечание: *В задачах 1.1, 2.1 и 3.1 имеем $c^2 = E/\rho$, где c - скорость распределения продольных волн в свае; E - модуль упругости материала сваи; ρ - объемная плотность материала сваи.*

В задачах 1.2, 1.3, 2.2 и 3.2 имеем $c^2 = T/\rho$, где T - натяжение перекрытия; ρ - линейная плотность перекрытия.

В задачах 1.4, 2.3, 3.3 и 3.2 имеем $c^2 = 1/(LC)$.

В задачах 1.5, 2.3, 3.3 и 3.2 имеем $c^2 = k/\rho$, где k - модуль упругости жидкости; ρ - плотность жидкости.

Задача 2

2.1. При расчетах свайных фундаментов на вертикальные колебания принимается следующая расчетная модель: свая моделируется упругим стержнем длиною h, один конец которого ($x = 0$) неподвижен, а другой ($x = h$) свободен. Поперечные сечения стержня совершают малые колебания, продольное смещение сечения стержня с координатой x от положения равновесия в момент времени t описывается функцией $U(x;t)$, удовлетворяющее волновому уравнению. Найти распределение смещений $U(x;t)$ по сваe, если в начальный момент точки сваи выведены из состояния равновесия на величину $U(x,0) = f_1(x)$ и им придана скорость $f_2(x)$.

2.2. Колебания внутренних перекрытий дома под внешним воздействием описывают математической моделью: внутренние перекрытие – это упругий стержень длиною h, совершающий поперечные колебания. Смещение точек стержня с координатой x в момент времени t задаётся функцией $U = U(x;t)$, которая удовлетворяет волновому уравнению. Один конец стержня зажат в опоре, другой – свободен. Найти смещение стержня, если в начальный момент точки перекрытия выведены из состояния равновесия на величину $U(x,0) = f_1(x)$ и им придана скорость $f_2(x)$.

2.3. На практике широкое применение находят вантовые перекрытия. Математической модель, описывающая динамику используемых при этом металлических нитей – модель, которая использует уравнение колебания струны. Натяжение нити T, ее длина h, линейная плотность ρ. На систему воздействует ударная волна, которая вызывает начальное смещение $U(x,0) = f_1(x)$ и придает ей начальную скорость $f_2(x)$. Найти колебания вантового перекрытия, если один конец нити зажат, а другой – свободен.

2.4. Линия электропередач длиной h соединяет электростанцию и потребителя. Линия характеризуется постоянными параметрами: емкостью – C и индуктивностью – L на единицу длины линии. Найти распределение электрического напряжения в линии $U = U(x;t)$, удовлетворяющее волновому уравнению, x – координата точки линии, t – время. В начальный момент времени в линии созданы распределения напряжения $U(x,0) = f_1(x)$ и тока, так что $\partial U(x,0)/\partial t = f_2(x)$. Система защиты электростанции и потребителя заземляет линию на одном конце, а другой конец линии разомкнут.

2.5. Горизонтальный трубопровод длиною h постоянного сечения заполнен покоящейся жидкостью. Распределение давления в жидкости описывается функцией $U = U(x;t)$ удовлетворяющей волновому уравнению. На одном конце трубопровода жидкости просто контактирует с атмосферой (давление в жидкости на этом конце поддерживается нулевым), а на другом конце трубопровода стоит заглушка (здесь равна нулю частная производная давления по координате x), x – координата точки линии, t – время. В начальный момент времени в линии созданы распределения давления $U(x,0) = f_1(x)$ и скорости, так что $\partial U(x,0)/\partial t = f_2(x)$. Найти распределение давления в трубопроводе после начального времени.

Математическая формулировка задачи 2

Найти решение $U(x;t)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x;t) = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x;t)$$

при $0 \le x \le h$, $t \ge 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(x;0) = f_1(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x;0) = f_2(x) \text{ при } 0 \le x \le h;$$

и граничным условиям

$$U(0;t) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(h;t) = 0 \text{ при } t \ge 0$$

Задача 3

3.1. При расчетах свайных фундаментов на вертикальные колебания принимается следующая расчетная модель: свая моделируется упругим стержнем длиною h, один конец ($x=0$) которого свободен, а другой ($x=h$) – неподвижен. Поперечные сечения стержня совершают малые колебания, продольное смещение сечения стержня с координатой x от положения равновесия в момент времени t описывается функцией $U(x;t)$, удовлетворяющее волновому уравнению. Найти распределение смещений $U(x;t)$ по свае, если в начальный момент точки сваи выведены из состояния равновесия на величину $U(x,0)=f_1(x)$ и им придана скорость $\partial U(x,0)/\partial t=f_2(x)$.

3.2. Колебания внутренних перекрытий дома под внешним воздействием описывают математической моделью: внутренние перекрытие – это упругий стержень длиною h, совершающий поперечные колебания. Смещение точек стержня с координатой x в момент времени t задаётся функцией $U=U(x;t)$, которая удовлетворяет волновому уравнению. Один конец ($x=0$) стержня свободен, другой ($x=h$) – зажат в опоре. Найти смещение стержня, если в начальный момент точки перекрытия выведены из состояния равновесия на величину $U(x,0)=f_1(x)$ и им придана скорость $\partial U(x,0)/\partial t=f_2(x)$.

3.3. На практике широкое применение находят вантовые перекрытия. Математической модель, описывающая динамику используемых при этом металлических нитей – модель, которая использует уравнение колебания струны. Натяжение нити T, ее длина h, линейная плотность ρ. На систему воздействует ударная волна, которая вызывает начальное смещение $U(x,0)=f_1(x)$ и придает ей начальную скорость $\partial U(x,0)/\partial t=f_2(x)$. Найти колебания вантового перекрытия, если один конец нити ($x=0$) свободен, а другой ($x=h$) – зажат.

3.4. Линия электропередач длиной h соединяет электростанцию и потребителя. Линия характеризуется постоянными параметрами: емкостью – C и индуктивностью – L на единицу длины линии. Найти распределение электрического напряжения в линии $U=U(x;t)$, удовлетворяющее волновому уравнению, x – координата точки линии, t – время. В начальный момент времени в линии созданы распределения напряжения $U(x,0)=f_1(x)$ и тока, так что $\partial U(x,0)/\partial t = f_2(x)$. Система защиты электростанции и потребителя заземляет линию на одном конце, а другой конец линии разомкнут.

3.5. Горизонтальный трубопровод длиною h постоянного сечения заполнен покоящейся жидкостью. Распределение давления в жидкости описывается функцией $U=U(x;t)$ удовлетворяющей волновому уравнению. На одном конце трубопровода жидкости просто контактирует с атмосферой (давление в жидкости на этом конце поддерживается нулевым), а на другом конце трубопровода стоит заглушка (здесь равна нулю частная производная давления по координате x), x – координата точки линии, t – время. В начальный момент времени в линии созданы распределения давления $U(x,0)=f_1(x)$ и скорости, так что $\partial U(x,0)/\partial t = f_2(x)$. Найти распределение давления в трубопроводе после начального времени.

Математическая формулировка задачи 3

Найти решение $U(x;t)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x;t) = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x;t)$$

при $0 \le x \le h$, $t \ge 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U(x;0)=f_1(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x;0)=f_2(x) \text{ при } 0 \le x \le h;$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0;t)=0, \quad U(h;t)=0 \text{ при } t \ge 0.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ