

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

Кафедра механики

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

*Методические указания к расчетно-графическим заданиям для  
студентов специальностей 130501 и 130503 очной формы обучения*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2012

## ВВЕДЕНИЕ

Курс «Строительная механика» для студентов специальности 130501(ТНГ) и 130503(НГ) является специальной дисциплиной, призванной дать будущим горным инженерам-строителям знания и умения рассчитывать элементы строительных конструкций газонефтепроводов, газонефтехранилищ и других сооружений.

Целью преподавания дисциплины для студентов горного университета является отработка навыков выбора расчетных схем, анализа их статической и кинематической определенности, расчета элементов строительных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. В настоящих «Методических указаниях» рассматриваются способы решения задач строительной механики применительно к расчету балок, поскольку именно они являются наиболее распространенной расчетной схемой для проектирования газонефтепроводов и других сооружений.

Теоретической и практической базой курса являются дисциплины «Математика», «Теоретическая механика», «Сопроотивление материалов».

В соответствии с учебным планом специальности изучение курса предполагает самостоятельную работу по выполнению расчетно-графических заданий.

Настоящие методические указания включают два расчетно-графических задания:

1. Расчет многопролетной балки.
2. Расчет балки на упругом основании.

Студенты выполняют работы на листах бумаги формата А4, оформляя текст и рисунки при помощи персонального компьютера. Вариант задания устанавливается преподавателем при выдаче его студенту.

# 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ МНОГОШАРНИРНЫХ БАЛОК

## 1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАСЧЕТНЫХ СХЕМАХ СООРУЖЕНИЙ

**Строительная механика** – наука о принципах и методах расчета сооружений и конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

**Основной задачей** строительной механики является определение внутренних усилий и напряжений, соответствующих им деформаций и перемещений, возникающих в элементах сооружений.

Наиболее часто встречаются в инженерной практике следующие **типы сооружений**: балки, рамы, арки фермы.

**Опоры**, изображаемые на расчетных схемах плоских стержневых систем, относятся к следующим типам (см. рис.1.1), где:

а) шарнирно-подвижная опора – одна связь, две степени свободы;

б) шарнирно-неподвижная опора (полная опорная реакция, действующая на сооружения в центре шарнира, при расчете обычно представляется двумя составляющими) – две связи, одна степень свободы;

в) заземляющая опора – заделка – эквивалентна трем связям, не пересекающимся в одной точке - ни одной степени свободы;

Здесь связи считаются жесткими (недеформируемыми),  $V$ ,  $H$  - реактивные силы,  $M$  - реактивный момент, возникающие в опорах.

Усилие в опорной связи действует на основание (передает давление со стороны сооружения) и на само сооружение (передает силу давления основания, называемое реакцией опоры), эти силы равны по модулю и противоположно направлены. В зависимости от объекта проектирования (сооружение или фундамент) расчетчика интересует та или другая сила.

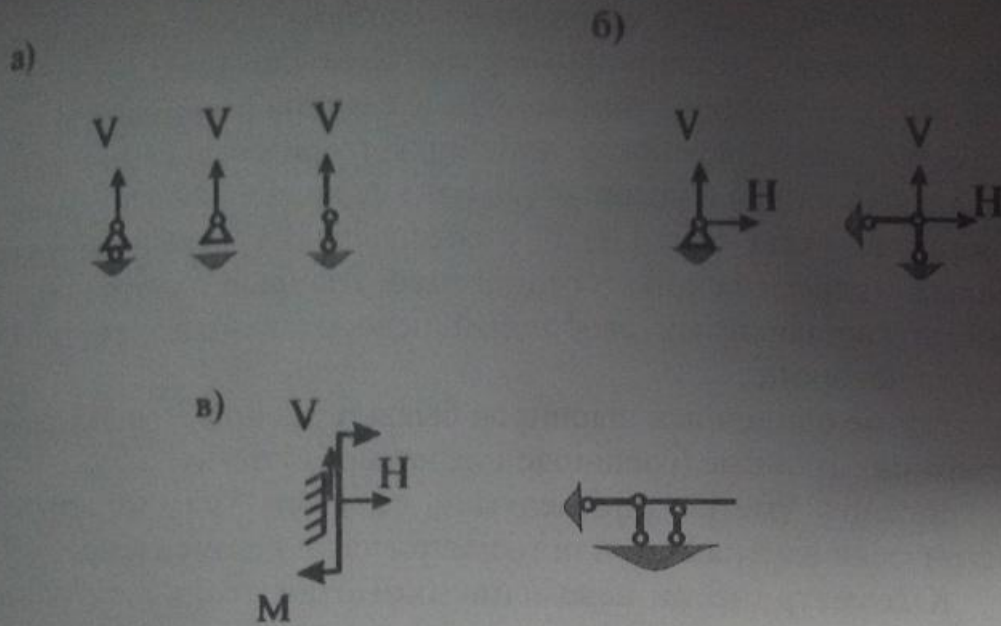


Рис.1.1. Типы опор стержневых систем.

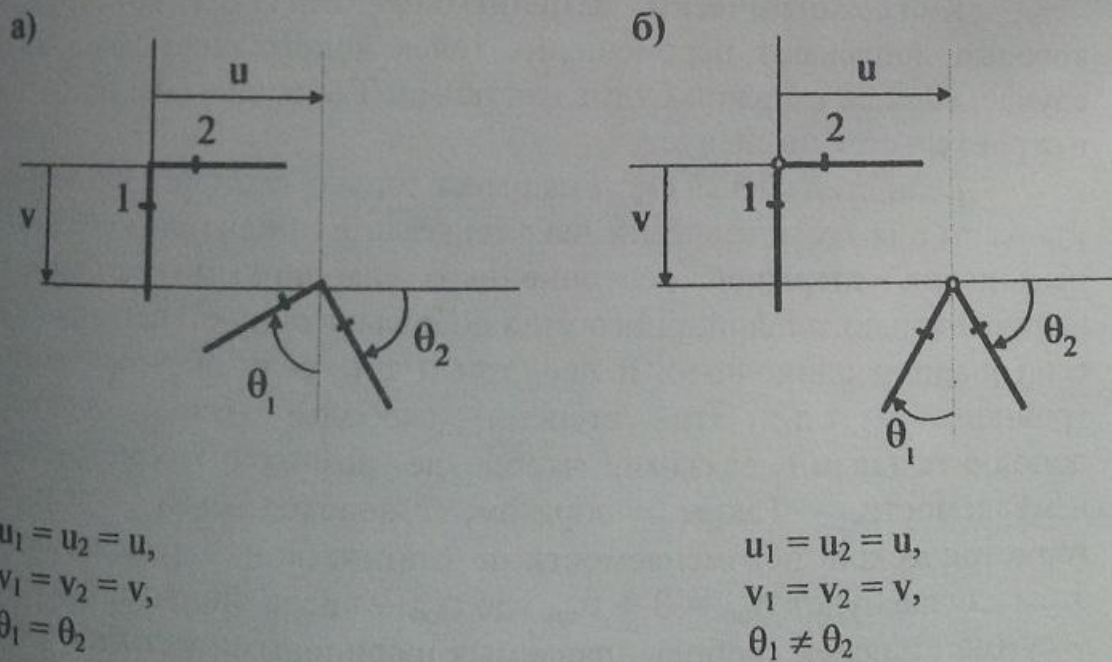


Рис. 1.2. Типы узлов стержневых систем

Стержни соединяются в стержневые системы посредством узлов. Различают жесткие и шарнирные узлы. Жесткие узлы (рис.1.2, а) соединяют подходящие к ним концевые сечения стержней 1 и 2 так, что обеспечивают равенство линейных (горизонтальных  $u_1, u_2$  и вертикальных  $v_1, v_2$ ) и угловых ( $\theta_1$  и  $\theta_2$ ) перемещений этих сечений. Шарнирные узлы (рис.1.2, б) обеспечивают равенство только линейных перемещений соединяемых концов стержней, но разрешают независимый свободный поворот каждого стержня на свой угол поворота.

Кроме одиночных шарниров бывают двойные (соединяющие три стержня), тройные (соединяющие четыре стержня) и т.д.

Важно уметь определять, является ли конструкция геометрически изменяемой или геометрически неизменяемой.

К геометрически неизменяемым относятся конструкции, в которых при пренебрежении упругими деформациями стержней расстояние между любыми точками конструкции будет неизменным.

К геометрически изменяемым относятся конструкции, которые допускают перемещения точек конструкции даже в том случае, если ее стержни будут жесткими. Такие системы применять в строительстве не следует.

Если стержневая система имеет только жесткие соединения в узлах, то она геометрически неизменяема. Если система состоит из нескольких стержней, соединенных шарнирными узлами, то наличие каждого шарнирного узла добавляет одну степень свободы, если шарнир одиночный, и две, три и т.д., если шарнир двойной, тройной и т.д. Эти степени свободы нужно закрепить дополнительными связями, чтобы не возникло геометрической изменяемости. Таким образом, необходимым условием геометрической неизменяемости и статической определимости в этом случае будет  $n_{оп} = 3 + n_{ш}$ , где  $n_{оп}$  – число опорных связей,  $n_{ш}$  – сумма степеней свободы, даваемых шарнирными узлами с учетом их кратности. Если все шарниры одиночные, то это просто число шарниров.

Итак, возможны три варианта:

1)  $n_{оп} < 3 + n_{ш}$  – система статически определима, но явно геометрически изменяема;

2)  $n_{оп} = 3 + n_{ш}$  – необходимое условие выполнено, но проверка правильности постановки связей должна проводиться для установления его достаточности;

3)  $n_{оп} > 3 + n_{ш}$  – система очевидно статически неопределима. Разность  $n_{сн} = n_{оп} - (3 + n_{ш})$  называется степенью статической неопределимости.

Примеры (рис.1.3).

а) Шарнирная балка,  $n_{сн} = 5 - 3 - 2 = 0$ . Структурный анализ выполняется путем построения так называемой «этажной» схемы. При этом балка разделяется на звенья (участки между шарнирами). Каждое звено должно иметь две опоры, чтобы быть статически определимым и геометрически неизменяемым (для закрепления линейного горизонтального перемещения достаточно одной горизонтальной связи на всю балку, т.е. всего лишь одна опора должна иметь такую связь).

б) В этой балке построение «этажной» схемы выявляет неправильную расстановку связей – избыток связей в одной части системы (статически неопределимой) компенсируется их недостатком в другой части (геометрически изменяемой), что и приводит к выполнению необходимого условия геометрической неизменяемости ( $n_{сн} = 5 - 3 - 2 = 0$ ), которое в данном случае не является достаточным.

Таким образом, система не является ни статически определимой, ни геометрически неизменяемой.

в) Неразрезная балка является статически неопределимой, поскольку  $n_{сн} = 5 - 3 = 2$ .

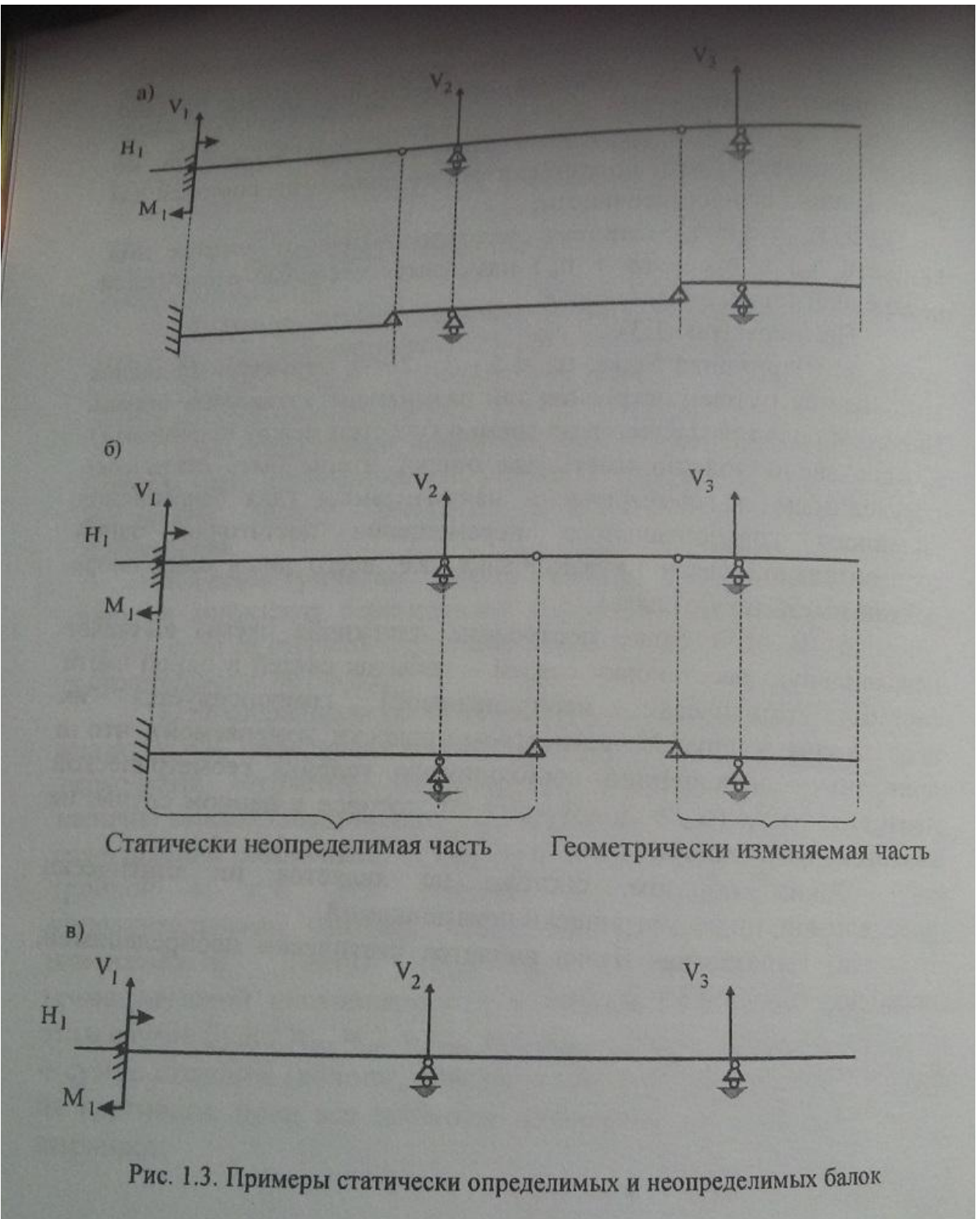


Рис. 1.3. Примеры статически определимых и неопределимых балок

## 1.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

Строительная механика изучает методы построения эпюр внутренних усилий, по которым затем по формулам сопротивления материалов можно определить напряжения, перемещения и деформации. Для балок рассматриваются два вида внутренних усилий: изгибающий момент  $M$  и перерезывающая (поперечная) сила  $Q$ .

С помощью метода сечений устанавливается связь внутренних усилий (которые, по сути, являются силами упругости, т.е. силами межмолекулярного взаимодействия) с внешними силами. При этом используется правило знаков (см. рис. 1.4).

В любом сечении:

-изгибающий момент  $M$  численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести этого сечения, взятых со знаками по правилу знаков; найденное значение откладывается от оси стержня в некотором масштабе со стороны растянутого волокна;

-перерезывающая сила  $Q$  численно равна сумме проекций внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, на нормаль к оси стержня, взятых со знаками по правилу знаков.

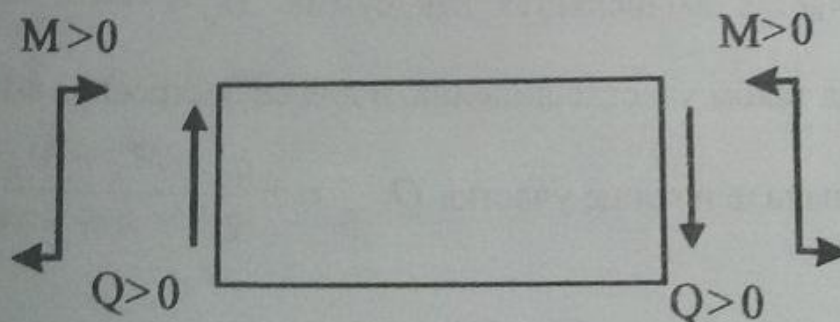


Рис. 1.4. Правило знаков внутренних усилий



Для балки положительные ординаты эпюры  $M$ , будучи отложенными на растянутом волокне, окажутся снизу. Положительные ординаты эпюры  $Q$  откладываются сверху от балки.

Для построения эпюр в строительной механике применяются некоторые приемы, позволяющие обойтись без записи аналитических выражений, принятых в сопротивлении материалов.

Так, если на участке стержня не приложена распределенная нагрузка, эпюра  $Q$  на нем постоянная, эпюра  $M$  - линейная (см. рис. 1.5, а). Для построения этой прямой линии достаточно вычислить значения  $M$  в двух точках - в начале ( $n$ ) и в конце ( $к$ ) участка -  $M_n$  и  $M_k$ . Для вычисления  $Q$  используем

$$\text{дифференциальную зависимость } Q = \frac{dM}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_k - M_n}{l}.$$

Для построения эпюр на участке с равномерно распределенной нагрузкой  $q$  используются стандартные эпюры  $Q$  и  $M$  для простой двухопорной балки (см. рис. 1.5, б). Эпюра  $M$  строится по принципу суперпозиции: вычисляются  $M_n$  и  $M_k$ , эти ординаты откладываются на растянутом волокне (см. рис. 1.5, в) и через них проводится прямая - линия опорных моментов (ЛОМ). К ней присоединяется эпюра для простой балки. Ордината в середине участка вычисляется как сумма  $M_c = \frac{M_k - M_n}{2} + \frac{ql^2}{8}$ .

Эпюра  $Q$  на таком участке линейна, и для ее построения вычисляем ординаты в начале и конце участка  $Q_{n;к} = \pm \frac{ql}{2} + \frac{M_k - M_n}{l}$ .

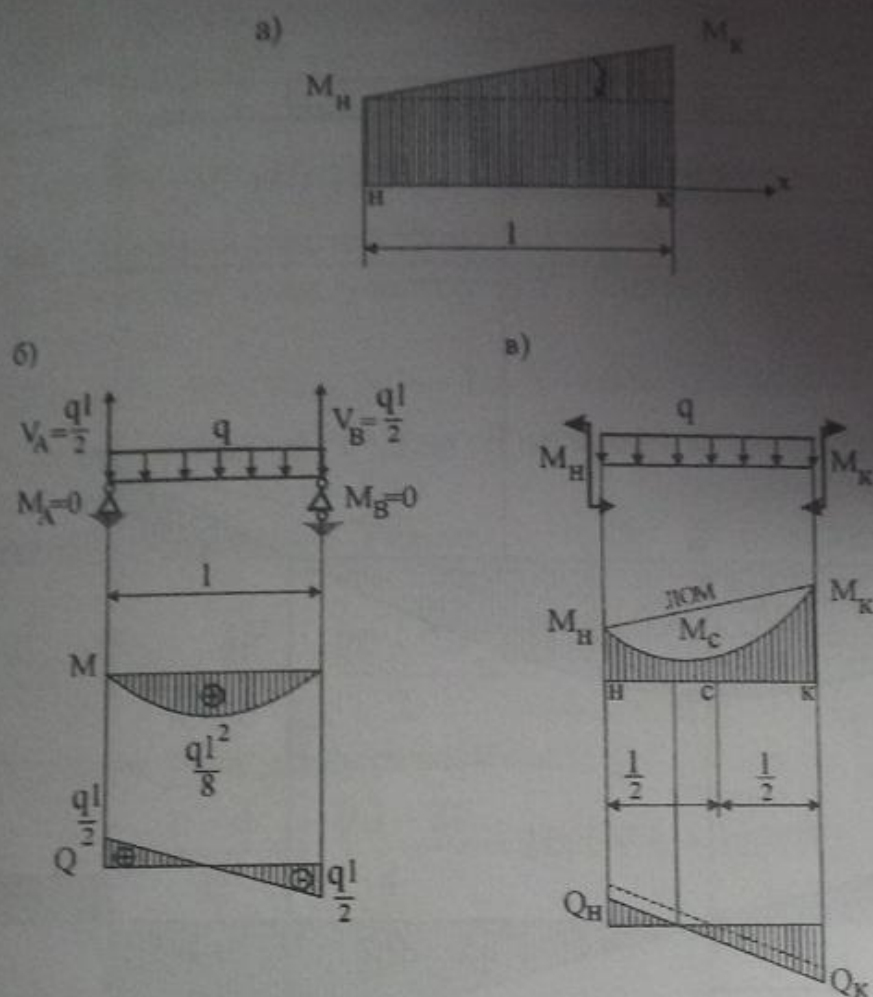


Рис.1.5. Вычисление перерезывающей силы  $Q$

Рассмотрим пример ( рис. 1.6.). Определим реакции из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = V_B \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 - 20 - 10 \cdot 5 - 10 = 0 \Rightarrow V_B = 40(\kappa H);$$

$$\sum M_B = -V_A \cdot 4 - 20 + 10 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 1 - 10 = 0 \Rightarrow V_A = 10(\kappa H).$$

Сделаем проверку:  $\sum F_y = V_A + V_B - 10 \cdot 4 - 10 = 0.$

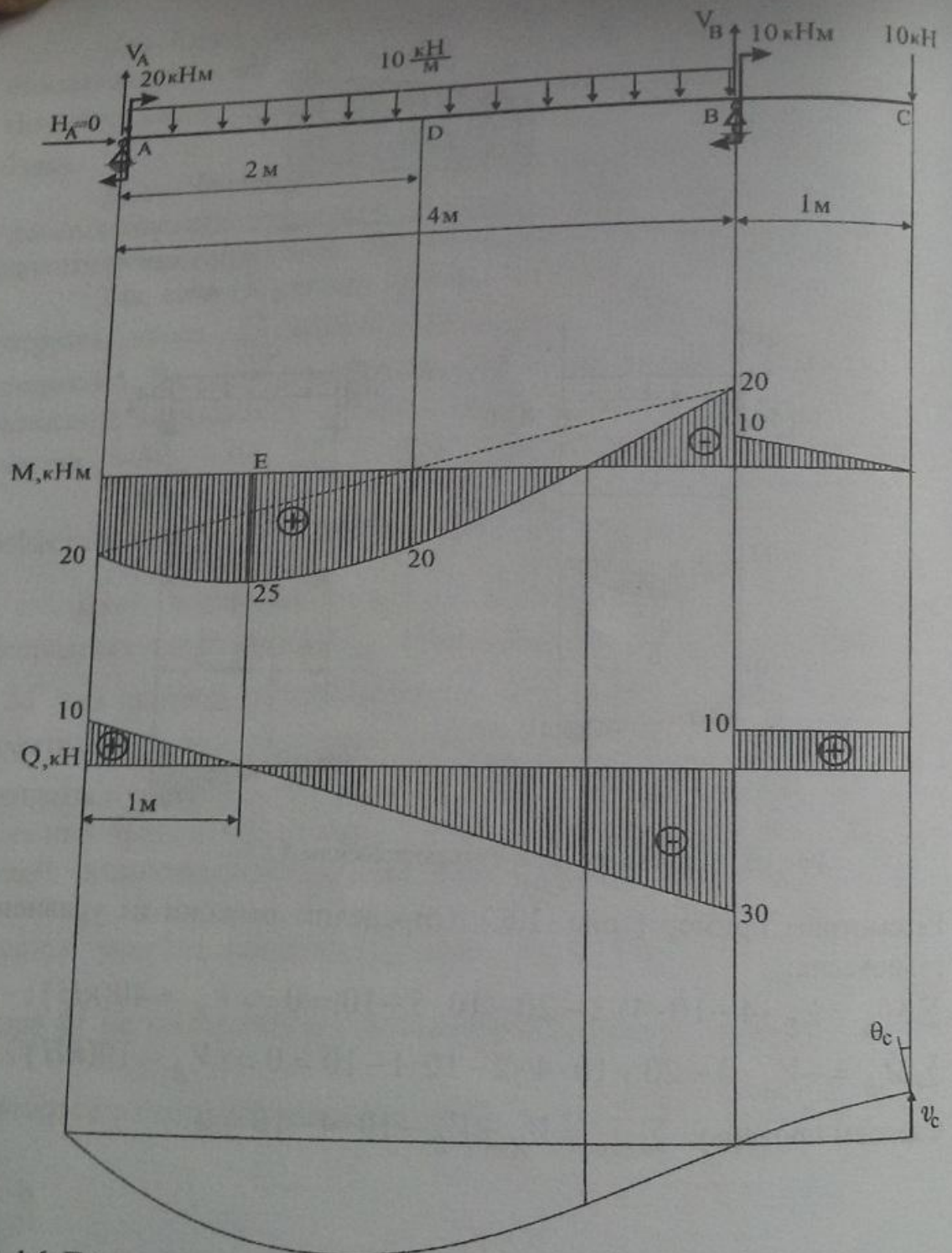


Рис. 1.6. Пример расчета статически определимой балки.

Будем строить эпюру моментов по участкам. Сначала рассмотрим участок  $BC$ . На нем эпюра моментов линейна и для ее построения нужны лишь два значения:  $M_C = 0$  и  $M_{B+0} = -10 \cdot 1 = -10(\text{кНм})$  (момент непосредственно справа от сечения  $B$  от внешних сил, находящихся справа от сечения).

Теперь рассмотрим участок  $AB$ . Сначала построим линию опорных моментов:  
 $M_A = 20(\text{кНм})$  и  $M_{B-0} = -10 \cdot 1 - 10 = -20(\text{кНм})$  (момент непосредственно слева от сечения  $B$  от внешних сил, находящихся справа от сечения).

Момент в середине участка – точке  $D$  – подсчитаем по формуле

$$M_D = \frac{M_A + M_B}{2} + \frac{ql^2}{8} = \frac{20 - 20}{2} + \frac{10 \cdot 4^2}{8} = 20(\text{кНм}).$$

Построим эпюру поперечной силы  $Q$ :

$$Q_{A;B} = \pm \frac{10 \cdot 4}{2} + \frac{-20 - 20}{4} = 10(\text{кН}); -30(\text{кН});$$

$$Q_{B-C} = \frac{0 - (-10)}{1} = 10(\text{кН}).$$

В данном случае  $Q_E = 0$  ( $E$  – середина участка  $AD$ .)

Найдем экстремальное значение момента

$$M_E = \frac{20 + 20}{2} + \frac{10 \cdot 2^2}{8} = 25(\text{кНм}).$$

### 1.3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ МНОГОШАРНИРНЫХ БАЛОК С ПОМОЩЬЮ ЭТАЖНОЙ СХЕМЫ

Чтобы построить эпюры внутренних усилий в балке, необходимо сначала определить реакции закрепления. При записи уравнений равновесия в традиционной форме получится система уравнений, порядок которой равен числу реакций. Более удобен другой способ записи уравнений равновесия, приводящий на каждом этапе к решению двух уравнений с одним неизвестным каждое. Этот способ основан на построении так называемой **этажной схемы**.

При этом балка разделяется на звенья (участки между шарнирами). Если у звена есть две шарнирные опоры или одна жесткая заделка, оно называется **основным**. Если же у звена есть только одна шарнирная опора или их нет вообще, оно называется **прикрепленным**, потому что опорами ему в «этажной» схеме будут служить шарниры, которыми оно соединяется или «прикрепляется» к другим звеньям, чтобы оставаться геометрически неизменяемым.

Итак, каждое звено, чтобы быть статически определимым и геометрически неизменяемым, должно иметь две опоры или заделку. Если удастся создать этажную схему, в которой все звенья обладают такими свойствами, то балка в целом является геометрически неизменяемой.

Нагрузка, действующая на звенья, расположенные на верхних этажах схемы, передается на нижележащие этажи через шарниры, которые для вышележащих звеньев рассматриваются как опоры. Ясно, что передачи нагрузки в обратном направлении (т.е. снизу вверх) не происходит, поэтому расчет «этажной» схемы ведется сверху вниз.

Каждое звено фактически представляет собой статически определимую балку. Если это двухопорная балка, наиболее целесообразно записать уравнения, выражающие равенство нулю моментов, относительно обеих опор, тогда каждое уравнение будет содержать только одну реакцию. Часть неизвестных будет представлять собой реакции в опорах балки, часть – промежуточные

неизвестные – так называемые давления в шарнирах. Для нижерасположенных этажей эти неизвестные выступают как внешние силы, направленные по третьему закону Ньютона в сторону, противоположную той, в которую действуют реакции на вышележащие этажи.

После расчета отдельных этажей окончательные эпюры строятся путем простого суммирования уже построенных для каждого звена эпюр. Необходимо провести также статическую проверку для балки в целом.

Пример расчета. Для балки, изображенной на рис.1.7,а, построим «этажную» схему (см. рис. 1.7, б). Рассчитаем отдельные звенья, начиная с верхнего этажа (см. рис. 1.7, в).

Рассмотрим верхний этаж 1:

$$\sum M_C = -20 + V_F \cdot 1 = 0 \Rightarrow V_F = 20 \text{ (кН)}$$

$$\sum M_F = V_C \cdot 1 - 20 = 0 \Rightarrow V_C = 20 \text{ (кН)}$$

$$\text{Проверка: } \sum F_y = V_C - V_F = 0.$$

Далее рассмотрим следующий по порядку этаж 2:

$$\sum M_B = V_E \cdot 1 + 10 \cdot 1 \cdot 0.5 - 40 \cdot 4 + 20 \cdot 7 = 0 \Rightarrow V_E = 15 \text{ (кН)},$$

$$\sum M_E = V_B \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 0.5 - 40 \cdot 5 + 20 \cdot 8 = 0 \Rightarrow V_B = 45 \text{ (кН)}.$$

$$\text{Проверка: } \sum F_y = V_B - V_E - 40 - 10 \cdot 1 + 20 = 0.$$

Переходим к нижнему этажу 3:

$$\sum F_y = V_A - 10 \cdot 5 + 15 = 0 \Rightarrow V_A = 35 \text{ (кН)},$$

$$\sum M_A = M_A - 10 \cdot 5 \cdot 2.5 + 15 \cdot 5 = 0 \Rightarrow M_A = 50 \text{ (кНм)}.$$

Строим окончательную эпюру моментов (рис.1.8).

Вычислим ординату в точке D – середине первого пролета:

$$M_D = \frac{M_A + M_B}{2} + \frac{ql^2}{8} = \frac{-50 - 20}{2} + \frac{10 \cdot 6^2}{8} = 10 \text{ (кНм)}.$$

По окончательной эпюре моментов дифференцированием строим эпюру  $Q$  (рис. 1.8):

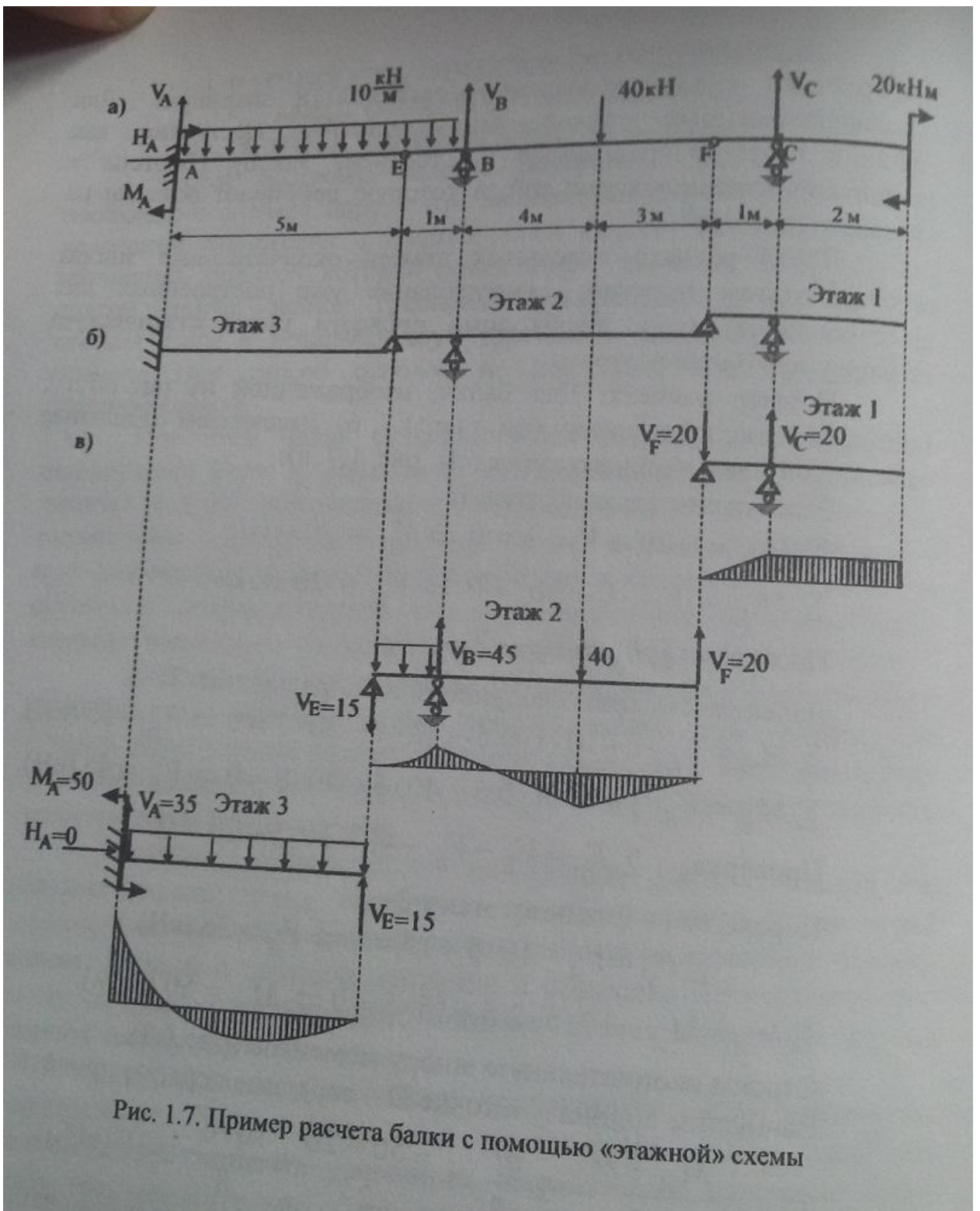


Рис. 1.7. Пример расчета балки с помощью «этажной» схемы

$$Q_{A,B} = \pm \frac{10 \cdot 6}{2} + \frac{-20 - (-50)}{6} = 35(\text{кН}); -25(\text{кН})$$

$$Q_{B-O} = \frac{60 - (-20)}{4} = 20(\text{кН}), \quad Q_{O-C} = \frac{-20 - 60}{4} = -20(\text{кН}).$$

Статическая проверка для балки в целом (рис. 1.8):

$$\sum F_y = V_A + V_B + V_C - 10 \cdot 6 - 40 = 35 + 45 + 20 - 60 + 40 = 0;$$

$$\sum M_A = M_A - 10 \cdot 6 \cdot 3 + V_B \cdot 6 - 40 \cdot 10 + V_C \cdot 14 - 20 = 0.$$

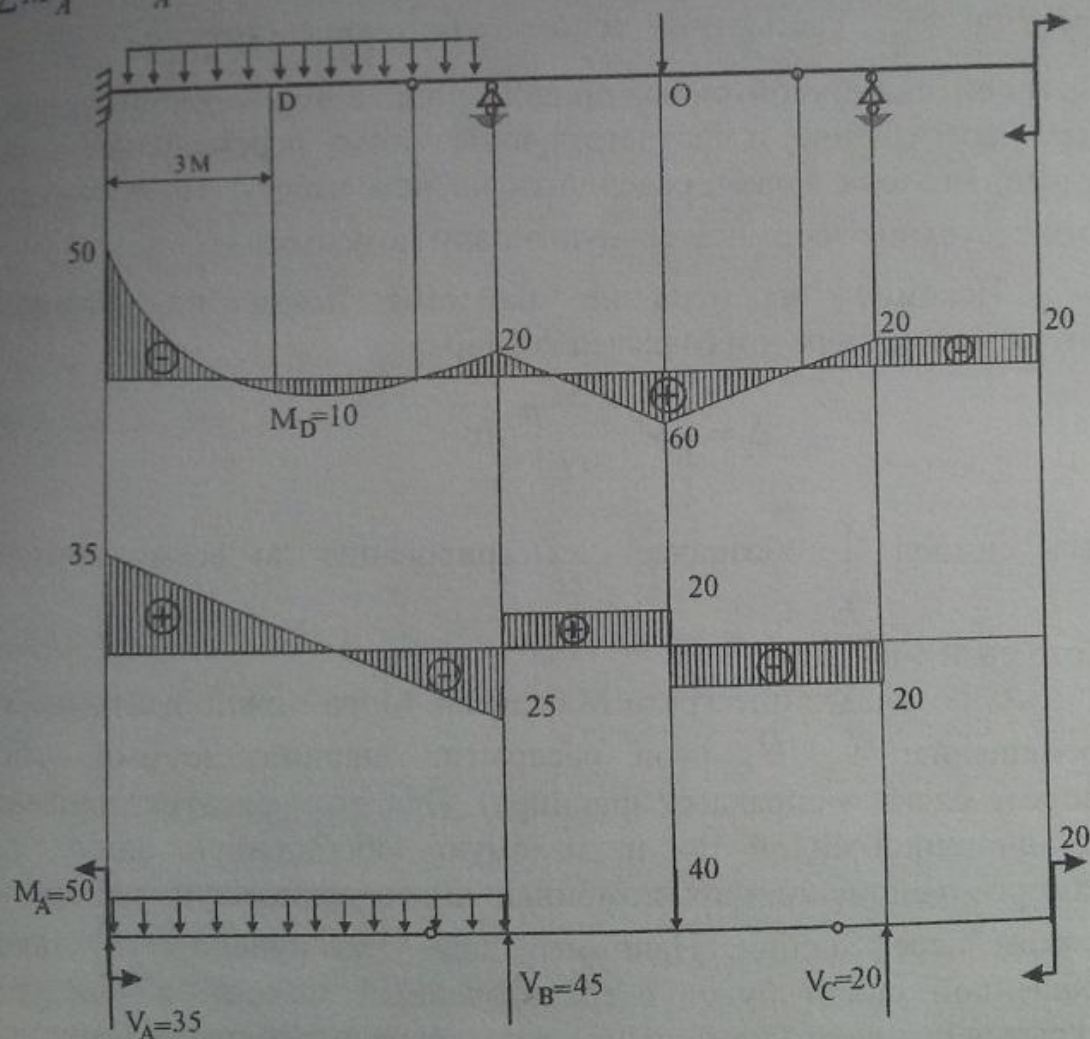


Рис.1.8. Эпюры внутренних усилий и статическая проверка реакций для балки в целом



## 2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

### 2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ

Ориентируясь на эпюру  $M$  и наложенные на систему связи, можно изобразить примерный вид изогнутой оси балки (см. рис. 1.6). Любое сечение балки получило некоторые перемещения.

Допустим, нужно найти некоторое перемещение  $\Delta$ , возникающее под действием заданной внешней нагрузки. Назовем это состояние балки **грузовым** и построим для него эпюру моментов  $M_P$ . Рассмотрим **вспомогательное состояние** балки под действием единичной силы, приложенной в том сечении, где мы ищем перемещение, и соответствующее этому перемещению в том смысле, что она может совершить на нем работу. Построим для этого состояния вспомогательную эпюру моментов  $M_1$ .

Искомое перемещение найдется тогда по формуле, называемой интегралом Максвелла-Мора:

$$\Delta = \int_L M_1 \cdot \frac{M_P}{EI} dx.$$

Здесь символ  $\int_L$  обозначает интегрирование по всему контуру стержневой системы.

С помощью интеграла Максвелла-Мора можно найти любое перемещение:  $v$ ,  $\theta$ , угол раскрытия шарнира (сумму углов поворота слева и справа от шарнира). При этом следует понимать под единичной силой так называемую «обобщенную силу», т.е. некоторое усилие или их комбинацию, совершающую работу на искомом перемещении. Например, для угла поворота  $\theta$  такой обобщенной силой будет сосредоточенный момент, а для угла раскрытия шарнира - комбинация двух сосредоточенных единичных моментов слева и справа от шарнира.

Вычисление интегралов Максвелла-Мора аналитическим способом требует записи аналитических выражений для внутренних усилий. Однако использование формул численного интегрирования позволяет этого избежать.

Воспользуемся известной квадратичной формулой – формулой Симпсона (называемой так же формулой парабол, поскольку для аппроксимации подинтегральной функции в ней используется полином второго порядка). Результат вычислений по ней совпадает с точным значением интеграла, если подинтегральная функция – полином степени не выше третьей. Для рассматриваемых нагрузок формула Симпсона будет точной, поскольку аналитическое выражение для  $M_1$  – полином степени не выше первой, а для  $M_p$  – не выше второй (при равномерно распределенной нагрузке).

Для вычисления интеграла по формуле Симпсона необходимы значения подинтегральной функции в трех точках: в начале ( $f^H$ ), в середине ( $f^c$ ) и в конце ( $f^K$ ) участка интегрирования длины  $l$ :

$$\int_0^l f(x) dx = \frac{l}{6} (f^H + 4 \cdot f^c + f^K).$$

В случае интеграла Максвелла-Мора, в котором подинтегральная функция представляет собой произведение двух выражений для  $M_1$  и  $M_p$ , формула Симпсона принимает вид:

$$\int_0^l \frac{M_1 \cdot M_p}{EI} dx = \frac{l}{6EI} \cdot (M_1^H \cdot M_p^H + 4 \cdot M_1^c \cdot M_p^c + M_1^K \cdot M_p^K).$$

Вычисление ординат эпюр моментов в середине участка, если известны значения в начале и в конце, не представляет трудностей. Как было установлено выше,

а)  $M^c = \frac{M^H + M^K}{2}$ , если эпюра линейная;

$$б) \quad M^c = \frac{M'' + M^k}{2} + \frac{ql^2}{8}, \text{ если эпюра параболическая.}$$

Пример. Вычислим значения перемещений в сечении  $C$  для балки, эпюра  $M$  для которой была построена ранее (см. рис. 1.6). Для определения вертикального перемещения  $v_c$  используется эпюра  $M_1$  от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения (см. рис. 2.1):

$$v_c = \int_L \frac{M \cdot M_1}{EI} dl = \frac{4}{6EI} (20 \cdot 0 + 4 \cdot 20 \cdot 0.5 - 20 \cdot 1) - \\ - \frac{1}{6EI} (10 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0) = \frac{10}{EI}.$$

Если известна жесткость  $EI$ , то можно вычислить значение  $v_c$ . Например,  $EI = 10^4$  кНм<sup>2</sup>, тогда  $v_c = 10^{-3}$  м = 1 мм. Отметим, что знак перемещения, вычисленного по формуле Максвелла-Мора, говорит о совпадении или несовпадении направления этого перемещения с выбранным направлением единичной силы. Таким образом, то, что  $v_c > 0$ , означает, что сечение  $C$  перемещается вверх.

Найдем теперь угол поворота сечения  $C$ . Для этого построим эпюру  $M_2$  от единичного момента, приложенного в этом сечении (см. рис. 2.1). Вычислим интеграл Максвелла-Мора

$$\theta_c = \int_L \frac{M \cdot M_2}{EI} dl = \\ = \frac{4}{6EI} \cdot (20 \cdot 0 + 4 \cdot 20 \cdot 0.5 - 20 \cdot 1) - \frac{1}{6EI} (10 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = \frac{8.3}{EI} = \\ = \frac{8.3}{10^4} = 0.83 \cdot 10^{-3} \text{ (рад).}$$

Поскольку  $\theta_c > 0$ , поворот сечения  $C$  происходит против часовой стрелки (см. рис. 1.6)

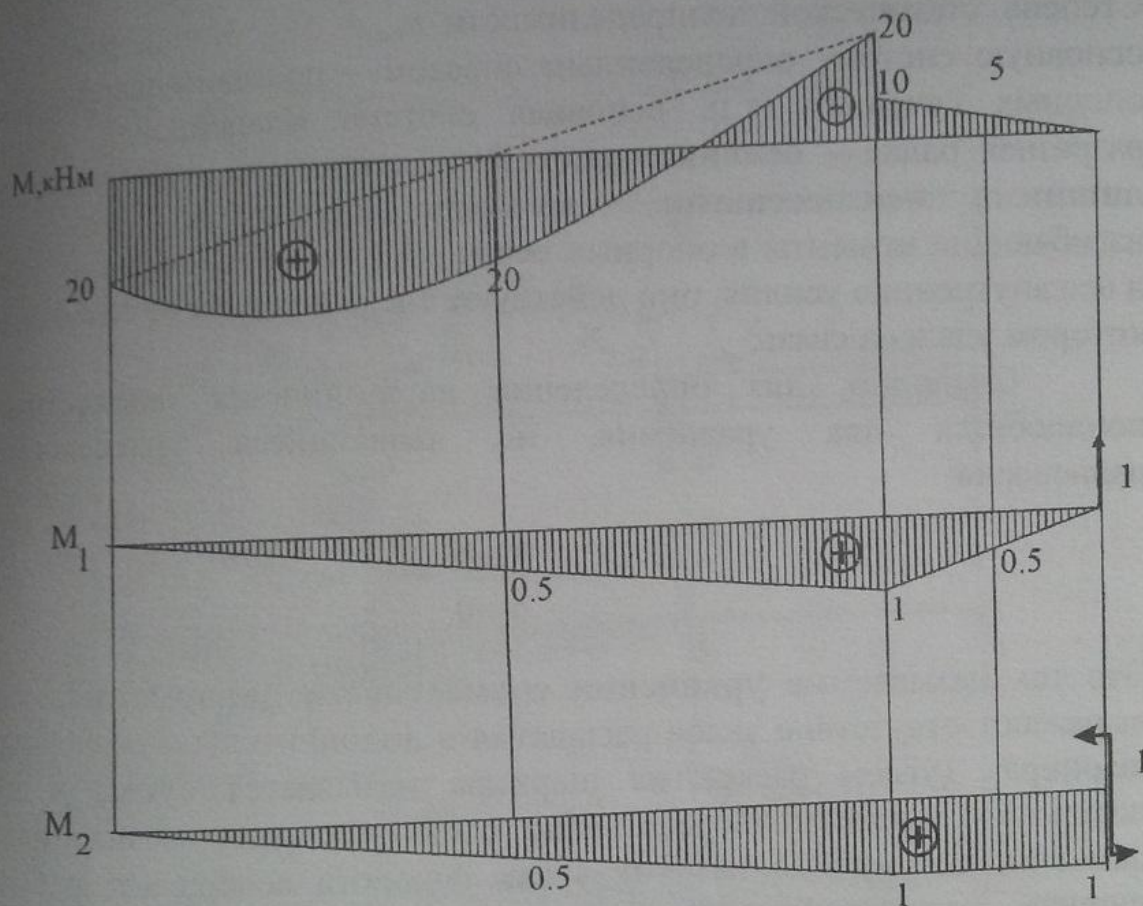


Рис. 2.1. Эпюры моментов в грузовом и вспомогательных состояниях для определения перемещений в балке

## 2.2. МЕТОД СИЛ ДЛЯ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК (УРАВНЕНИЯ ТРЕХ МОМЕНТОВ)

Рассмотрим статически неопределимую балку (см. рис. 2.2). Степень статической неопределимости  $n_{ст} = 5 - 3 = 2$ . Выберем основную систему определенным образом – поставим шарниры в опорных сечениях (т.н. основная система Клапейрона). Такая разрезная балка – основная система – статически определима, а лишними неизвестными являются внутренние усилия – изгибающие моменты в опорных сечениях (опорные моменты). Как и все внутренние усилия, они действуют слева и справа от сечения, в котором удалена связь.

Очевидно, для определения двух лишних неизвестных понадобятся два уравнения, не являющиеся уравнениями равновесия:

$$\delta_1=0$$

$$\delta_2=0$$

Это так называемые уравнения совместности деформаций, они выражают отсутствие углов раскрытия в дополнительно введенных шарнирах (углом раскрытия шарнира называется сумма углов поворота сечений непосредственно слева и справа от шарнира). Заметим, что именно на этих углах поворота совершают работу лишние неизвестные – моменты, и, следовательно, для их определения по формуле Максвелла-Мора нужно приложить единичные моменты слева и справа от дополнительно введенных шарниров.

Далее действуем по принципу суперпозиции. Строим вспомогательные эпюры моментов  $M_1$  и  $M_2$  от действия на основную систему единичных моментов  $X_1 = 1$  и  $X_2 = 1$ , а также грузовую эпюру  $M_p$  от действия заданной нагрузки (см. рис. 2.2).

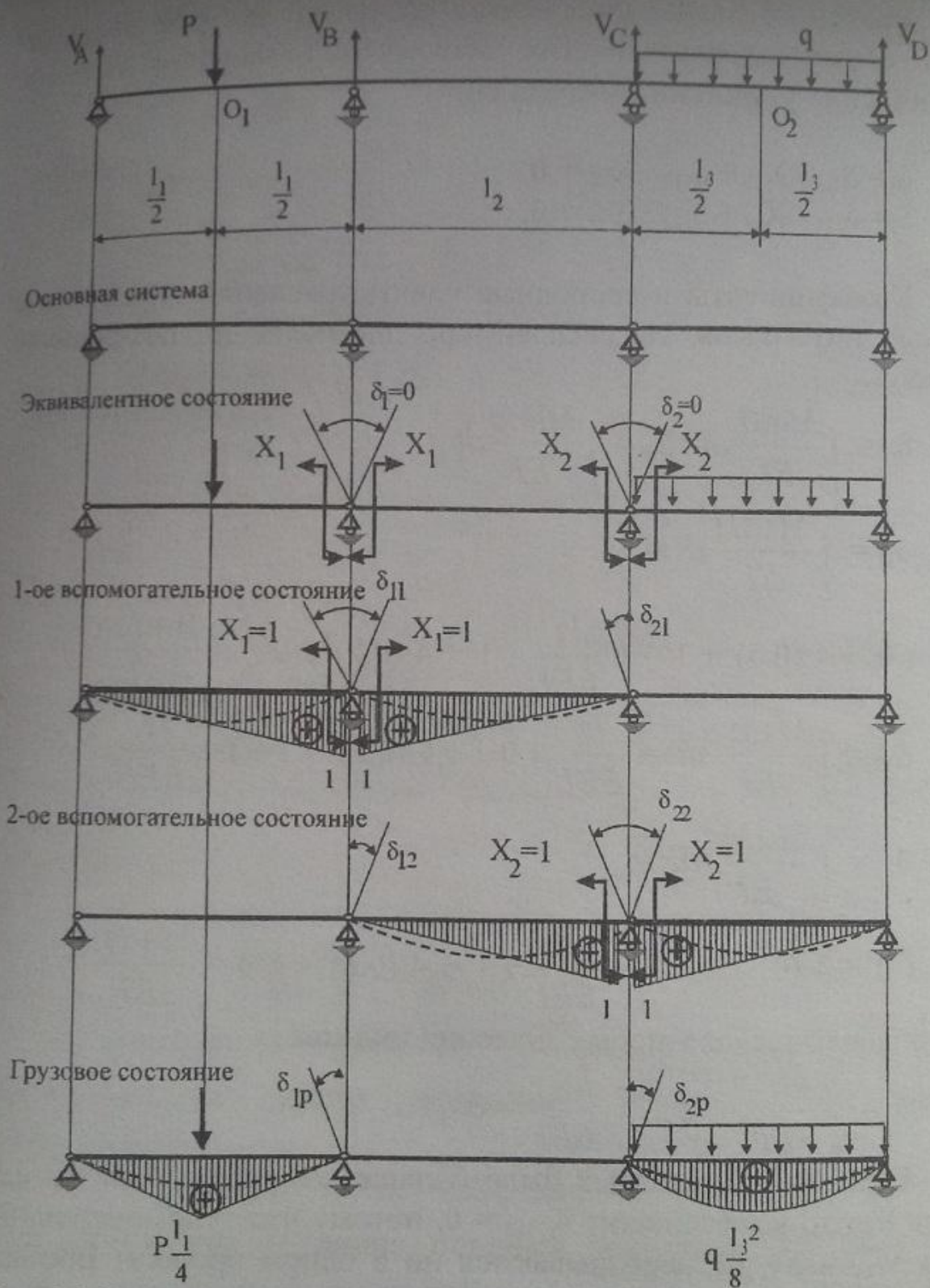


Рис. 2.2. Порядок расчета статически неопределимой балки методом сил

Введем обозначения  $\delta_{ij}$  — угол раскрытия на  $i$ -той опоре от  $X_j = 1$ , с использованием этих обозначений запишем систему канонических уравнений метода сил

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0 \\ \delta_2 &= \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0.\end{aligned}$$

Коэффициенты и свободные члены уравнений определим с помощью интегралов Максвелла-Мора, вычисляя их по формуле Симпсона

$$\delta_{ij} = \int_L \frac{M_i M_j}{EI} dl, \quad \delta_{ip} = \int_L \frac{M_i M_p}{EI} dl$$

$$\delta_{11} = \int_L \frac{M_1 M_1}{EI} dl =$$

$$= \frac{l_1}{6EI} \cdot (0^2 + 4 \cdot (0.5)^2 + 1^2) + \frac{l_2}{6EI} \cdot (1^2 + 4 \cdot (0.5)^2 + 0^2) = \frac{l_1 + l_2}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \int_L \frac{M_1 M_2}{EI} dl = \frac{l_2}{6EI} \cdot (0 \cdot 1 + 4 \cdot (0.5)^2 + 1 \cdot 0) = \frac{l_2}{6EI}$$

$$\delta_{22} = \int_L \frac{M_2 M_2}{EI} dl =$$

$$= \frac{l_2}{6EI} \cdot (0^2 + 4 \cdot (0.5)^2 + 1^2) + \frac{l_3}{6EI} \cdot (1^2 + 4 \cdot (0.5)^2 + 0^2) = \frac{l_2 + l_3}{3EI}$$

Или в общем виде, для любых значений индекса  $i$

$$\delta_{ii} = \frac{l_i + l_{i+1}}{3EI}, \quad \delta_{i, i+1} = \frac{l_{i+1}}{6EI} = \delta_{i+1, i}.$$

Если бы неизвестных было больше, например, был бы еще момент  $X_3$ , то коэффициент  $\delta_{i, i+2} = 0$ , потому что вспомогательные эпюры  $M_1$  и  $M_3$  не перекрываются ни в одном пролете. Вообще, любой коэффициент  $\delta_{i, i+n} = 0$ , если  $n > 1$ . Таким образом, в  $i$ -тое уравнений входит только три момента:  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  и  $M_{i+1}$ , отсюда и название этого метода для неразрезных балок на жестких опорах.

Свободные члены вычисляем по формулам

$$\delta_{1p} = \int_L \frac{M_1 M_p}{EI} dl = \frac{0.5 \cdot l_1}{6EI} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0.25 \cdot \frac{Pl_1}{8} + 0.5 \cdot \frac{Pl_1}{4}) +$$

$$+ \frac{0.5 \cdot l_1}{6EI} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0.75 \cdot \frac{Pl_1}{8} + 0.5 \cdot \frac{Pl_1}{4}) = \frac{Pl_1^2}{16EI}$$

$$\delta_{2p} = \int_L \frac{M_2 M_p}{EI} dl = \frac{l_3}{6EI} \cdot (1 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \cdot \frac{ql_3^2}{8} + 0 \cdot 0) = \frac{ql_3^3}{24EI}$$

Предположим теперь, что  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ , тогда получается система уравнений

$$\frac{2}{3} \frac{l}{EI} \cdot X_1 + \frac{l}{6EI} \cdot X_2 + \frac{Pl^2}{16EI} = 0,$$

$$\frac{l}{6EI} \cdot X_1 + \frac{2}{3} \frac{l}{EI} \cdot X_2 + \frac{ql^3}{24EI} = 0.$$

### 2.3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Решим численный пример для  $q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ,  $l = 6 \text{ м}$ ,

$P = 60 \text{ кН}$ :

$$4X_1 + X_2 + 135 = 0$$

$$X_2 + 4X_1 + 90 = 0$$

Решение системы  $X_1 = -30 \text{ кНм}$ ,  $X_2 = -15 \text{ кНм}$ .

Окончательная эпюра моментов получается по принципу суперпозиции

$$M = X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 + M_p.$$

Сначала строится линия опорных моментов (см. рис. 2.3) по значениям  $X_1$  и  $X_2$ , а к ней пристраиваются грузовые эпюры в соответствующих пролетах.



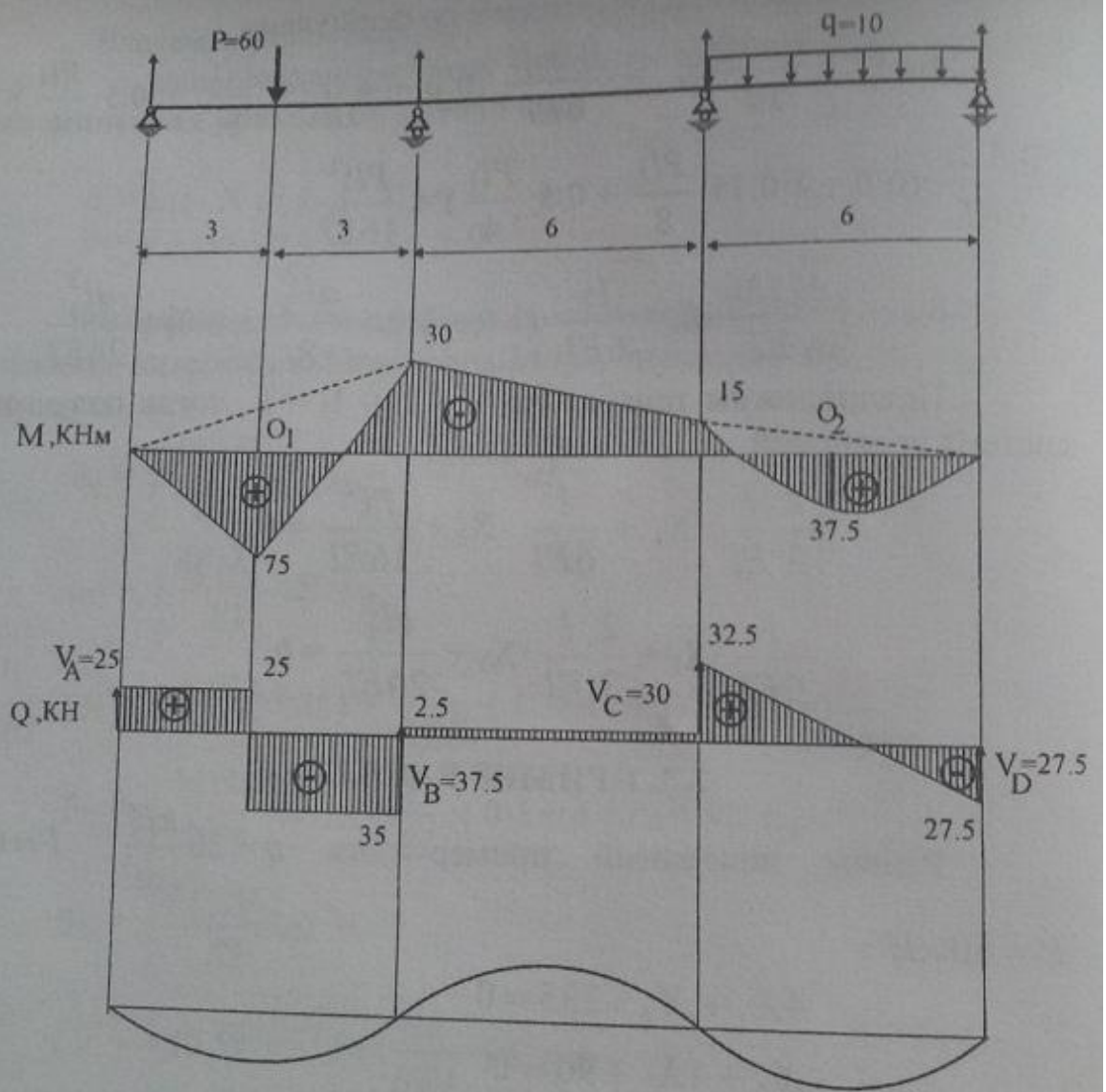


Рис.2.3. Построение эпюр внутренних усилий и примерный вид изогнутой оси для числового примера расчета

Для построения эпюры  $Q$  дифференцируем эпюру  $M$ :

$$Q_{A-O} = \frac{75-0}{3} = 25(\text{кН}), \quad Q_{O-B} = \frac{-30-75}{3} = -35(\text{кН}),$$

$$Q_{B-C} = \frac{-15-(-30)}{6} = 2.5(\text{кН}),$$

$$Q_{C,D} = \pm \frac{10 \cdot 6}{2} + \frac{0-(-15)}{6} = 32.5(\text{кН}); \quad -27.5(\text{кН}).$$

По эпюре  $Q$  можно определить реакции опор как скачки в соответствующих сечениях:  $V_A = 25 \text{ кН}$ ,  $V_B = 37.5 \text{ кН}$ ,

$V_C = 30 \text{ кН}$ ,  $V_D = 27.5 \text{ кН}$ . Сделаем статическую проверку:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= V_A + V_B + V_C + V_D - P - ql = \\ &= 25 + 37.5 + 30 + 27.5 - 60 - 10 \cdot 6 = 0. \end{aligned}$$

Если одна из опор представляет собой жесткую заделку, то следует привести такую балку к стандартному виду, добавив вместо заделки пролет нулевой длины и, следовательно, бесконечной жесткости. Этот фиктивный пролет включается в общую нумерацию (см. рис. 2.4).

Консольный участок балки отбрасывается, а момент приложенной к ней нагрузки относительно крайней опоры включается в состав внешней нагрузки как сосредоточенный момент  $M_0$ . Желательно строить грузовую эпюру  $M_{p0}$  от момента  $M_0$  отдельно (см. рис. 2.5), тогда:

$$\delta_{ip} = \int_L \frac{M_i * (M_p + M_{p0})}{EI} dl = \int_L \frac{M_i M_p}{EI} dl + \int_L \frac{M_i M_{p0}}{EI} dl.$$

При построении окончательной эпюры моментов просто добавляется консольный участок с эпюрой моментов на ней (см. рис. 2.5).

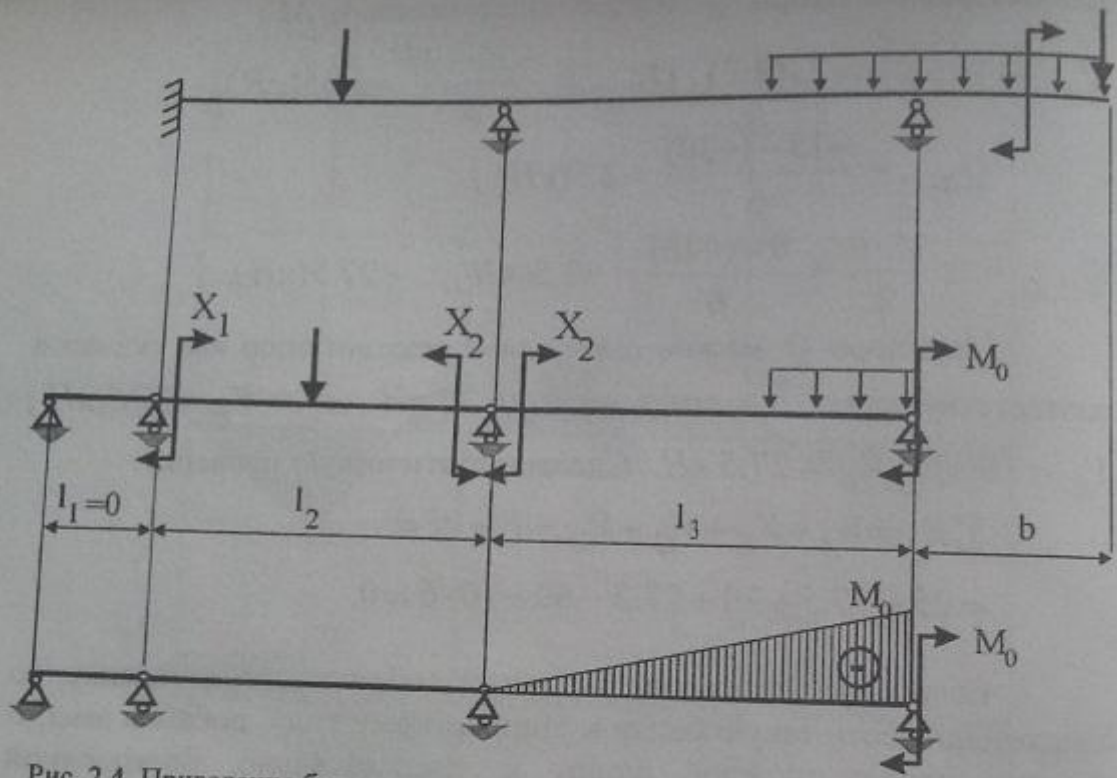


Рис. 2.4. Приведение балки к стандартному виду.

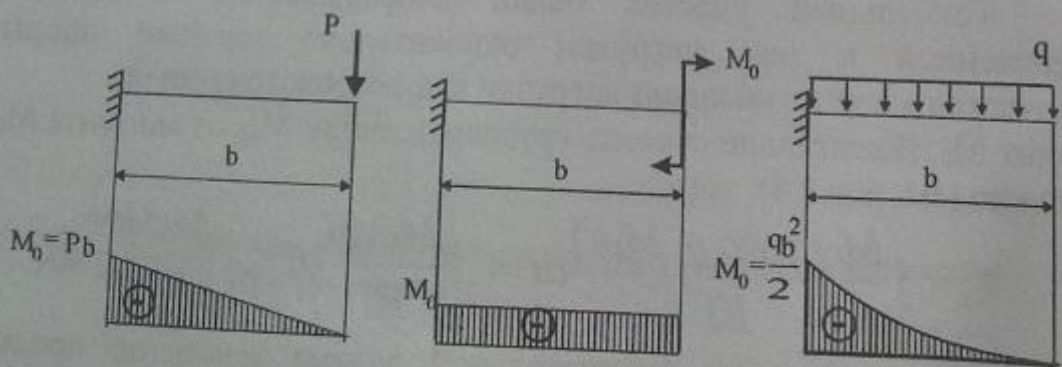


Рис. 2.5. Эпюры моментов от нагрузки на консолях

## 2.4. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО РАСЧЕТУ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК

### 1. Расчет статически определимой шарнирной балки

а) провести структурный анализ системы, установив ее статическую определимость и геометрическую неизменяемость (с помощью построения этажной схемы);

б) провести расчет отдельных звеньев этажной схемы с построением

эпюр  $M$  и  $Q$ ;

в) построить эпюры  $M$  и  $Q$  для балки в целом;

г) сделать статическую проверку решения.

### 2. Расчет статически неопределимой балки методом сил

а) исключив шарниры из заданной схемы балки, определить степень ее статической неопределимости;

б) выбрать основную систему, лишние неизвестные, записать канонические уравнения метода сил (уравнения трех моментов);

в) построить эпюры моментов для вспомогательных состояний и грузового состояния основной системы;

г) вычислить коэффициенты и решить систему канонических уравнений, определить лишние неизвестные;

д) построить окончательную эпюру  $M$  и по ней, путем дифференцирования, эпюру  $Q$ ;

е) определить реакции опор и сделать статическую проверку.

Исходные данные для выполнения задания выбираются студентами из таблиц 2.1 и 2.2, схема балки – по рис.2.6 в соответствии со своим шифром. Шифр студента состоит из четырех цифр ABCD. Например, если шифр 0123, то  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 2$ ,  $D = 3$ .

2643

Таблица 2.1.

A	№ схемы	a, м	b, м	B	l <sub>1</sub> , м	l <sub>2</sub> , м	l <sub>3</sub> , м	c, м	d, м
0	1	2	0	0	10	8	9	1.0	0.6
1	2	0	1	1	6	12	8	0.8	1.0
2	3	2	0	2	8	9	8	0.6	0.8
3	4	0	2	3	12	8	8	1.0	0.6
4	5	0	2	4	10	6	8	0.8	1.0
5	1	0	1	5	9	8	10	1.2	0.8
6	2	1	0	6	9	8	6	0.8	1.0
7	3	0	2	7	8	8	10	1.0	0.6
8	4	0	2	8	9	6	12	0.8	1.2
9	5	0	1	9	6	10	9	1.2	1.0

Таблица 2.2

C	$P_0$ , кН	$q_0$ , кН/м	$M_0$ , кНм	D	$P_1$ , кН	$q_1$ , кН/м	$P_2$ , кН	$q_2$ , кН/м	$P_3$ , кН	$q_3$ , кН/м
0	80	20	0	0	80	0	0	24	100	0
1	0	25	100	1	0	20	80	0	90	0
2	70	15	0	2	100	0	80	0	0	18
3	0	24	80	3	90	0	0	30	120	0
4	90	18	0	4	0	24	100	0	70	0
5	0	22	90	5	70	0	120	0	0	24
6	100	28	0	6	100	0	0	28	80	0
7	0	30	70	7	0	16	90	0	70	0
8	90	16	0	8	120	0	80	0	0	30
9	0	32	60	9	80	0	0	25	100	0

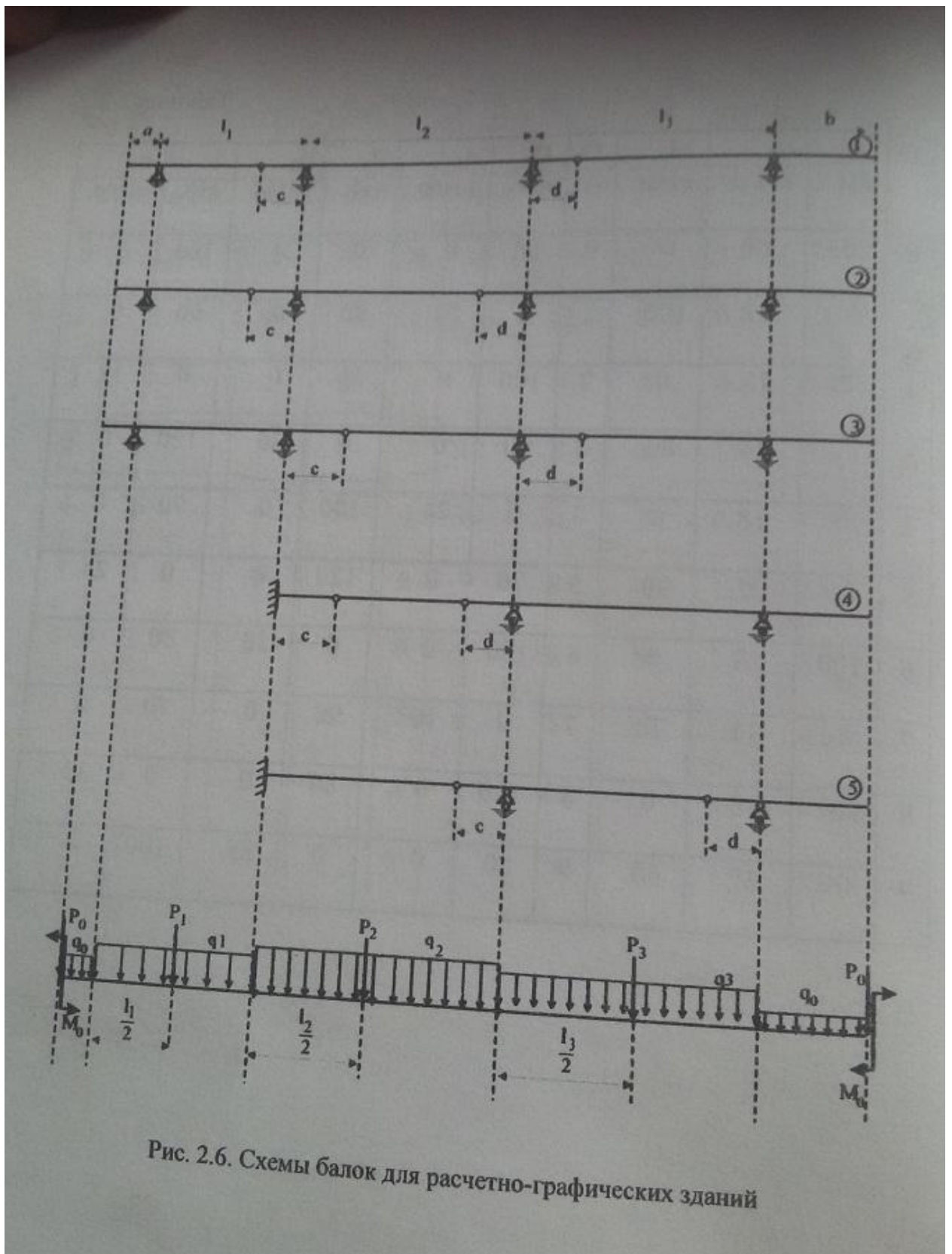


Рис. 2.6. Схемы балок для расчетно-графических зданий

## 3. РАСЧЕТ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

### 3.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАСЧЕТА

В практике инженера-строителя часто приходится встречаться с расчетом элементов сооружений, опирающихся на сплошное основание и соприкасающихся с этим основанием по всей длине. При расчете таких элементов принимается, что грунт обладает упругими свойствами и его деформация пропорциональна приложенной нагрузке.

Кроме этой предпосылки, при расчете балок на упругом основании принимаются следующие допущения:

- трение между основанием и балкой отсутствует;
- между опорной поверхностью балки и основанием имеется неразрывная связь, вследствие чего в основании могут возникнуть растягивающие усилия;
- упругое основание по всей длине балки однородно, и ширина постели балки постоянна;
- реактивные силы, возникающие в каждой точке основания, пропорциональны упругим осадкам в этих точках.

Бесконечно длинной балкой считается балка, у которой длина  $l \geq 3\pi S = 3\pi^4 \sqrt{\frac{4EI}{cb}}$ , где  $S$  – сокращающий коэффициент, м;  $c$  – коэффициент постели грунта, Н/см<sup>3</sup>;  $b$  – ширина балки ( $b = const$ ), м;  $E$  – модуль упругости материала балки при растяжении-сжатии, Па;  $I$  – момент инерции сечения балки, м<sup>4</sup>.

Для такой балки при действии на нее некоторой сосредоточенной силы  $F$  расстояние от точки приложения силы до края балки должно быть равно или более  $1,5\pi S$  (рис.3.1, а).

Такая балка представляет собой статически неопределимую систему. Интенсивность реакции в каждой точке связана с прогибом балки в этих точках, и для решения задачи сначала необходимо найти уравнение изогнутой оси балки, а затем по найденному уравнению установить закон распределения реактивных сил.



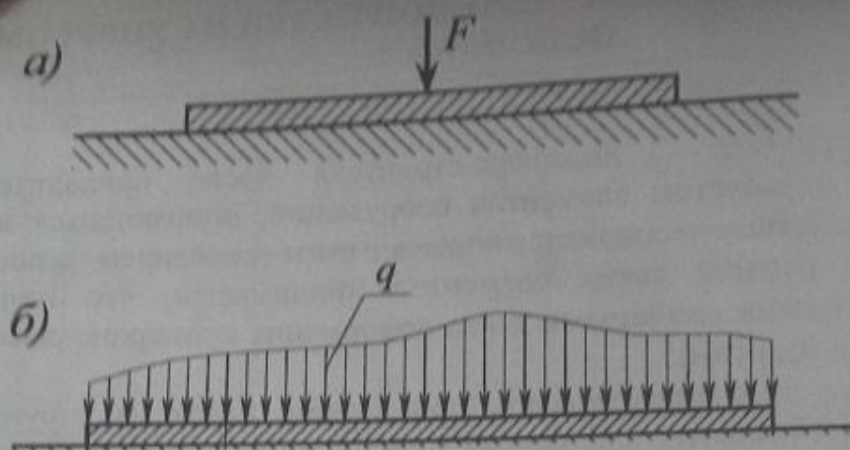


Рис.3.1. Балка на упругом основании

Рассмотрим свободно лежащую на упругом основании с коэффициентом постели  $c$  балку прямоугольного сечения, нагруженную в середине пролета сосредоточенной силой (рис.3.1,а). Начало координат совместим с точкой приложения силы.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид (здесь  $y$  – прогиб балки, м):

$$EIy^{(IV)} + cby = 0, \quad (3.1)$$

Для балки (рис.3.1, б) с распределенной нагрузкой  $q$  уравнение (3.1) имеет вид:

$$EIy^{(IV)} + cby = q. \quad (3.2)$$

Общий интеграл уравнения (3.1) или уравнения (3.2) без правой части может быть найден, как

$$y = e^{-\alpha x} (C_1 \cdot \sin \alpha x + C_2 \cdot \cos \alpha x) + e^{\alpha x} (C_3 \cdot \sin \alpha x + C_4 \cdot \cos \alpha x), \quad (3.3)$$

где  $\alpha = \frac{1}{S} = \sqrt[4]{\frac{cb}{4EI}}$ , м<sup>-1</sup>.

Если имеется распределенная нагрузка ( $q$ ), то к общему интегралу (3.3) следует добавить частное решение, соответствующее правой части уравнения (3.2). При  $q = \text{const}$  частное решение равно

$$y'' = q/(cb). \quad (3.4)$$

При свободных концах балки  $M$  и  $Q$  на них равны нулю, тогда к решению (3.4) не требуется добавлять общее решение (3.3). Первый член в (3.3) соответствует правой части балки:

$$y = e^{-\alpha x} (C_1 \cdot \sin \alpha x + C_2 \cdot \cos \alpha x), \quad (3.5)$$

а второй член – левой части балки:

$$y = e^{\alpha x} (C_3 \cdot \sin \alpha x + C_4 \cdot \cos \alpha x). \quad (3.6)$$

В выражении (3.6) слагаемые в скобках становятся очень большими при  $x \rightarrow \infty$ , но в действительности деформации и внутренние силы имеют конечные величины, значит, коэффициенты  $C_3$  и  $C_4$  должны быть очень малыми, или нулевыми. Тогда общим решением уравнения (3.1) будет выражение (3.5). Но можно использовать и решение (3.6). Поэтому балку длиной  $l = 3\pi\delta$  рассчитывают как бесконечно длинную.

Постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4$  можно определить из следующих граничных условий:

- 1) в середине пролета ( $x=0$ ) угол поворота сечения  $y'_0 = 0$ , а перерезывающая сила  $Q = F/2$ ;
- 2) на концах балки ( $x=l/2$ ):  $M = -EIy'' = 0$  и  $Q = -EIy''' = 0$ .

### 3.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Определить минимальную длину бруса (рис.3.2), найти его максимальный прогиб и проверить прочность под сосредоточенной нагрузкой  $F$ , если брус используется как фундамент - подкладка под

трубопровод на грунте и т. д., коэффициент постели которого равен  $c$ ; сечение бруса —  $b \times h$ ,  $\text{м}^2$ ; модуль упругости деревянного бруса —  $E$ , допускаемое напряжение —  $[\sigma]$ . Пусть заданы величины:  $F=20$  кН;  $b=0,3$  м;  $h=0,1$  м;  $c=2,5$  Н/см<sup>3</sup>;  $E=1 \cdot 10^4$  МПа;  $[\sigma]=15$  МПа.

Построим эпюры  $y, M, Q$ . За решение возьмем уравнения (3.5) для правой части бруса и (3.6) — для левой. Постоянные интегрирования определим из граничных условий.

Углы поворота для правой части бруса

$$\theta = y' = -ae^{-\alpha x} \sin \alpha x (C_1 + C_2) - ae^{-\alpha x} \cos \alpha x (C_2 - C_1), \quad (3.7)$$

при  $x=0$   $\theta = y' = 0$ , тогда  $C_1 = C_2$ .

Для левой части бруса

$$\theta = y' = ae^{\alpha x} \sin \alpha x (C_3 - C_4) + ae^{\alpha x} \cos \alpha x (C_3 + C_4), \quad (3.8)$$

при  $x=0$   $\theta = y' = 0$ , тогда  $C_3 = -C_4$  или  $|C_3| = |C_4|$ .

Теперь используем граничное условие, в котором при  $x=0$   $Q = -F/2$ . Вычислим вторую и третью производные от прогиба  $y$ . Используя выражение (3.7), для правой части бруса и (3.8) для левой части, получим

$$y'' = 2\alpha^2 e^{-\alpha x} C_1 (\sin \alpha x - \cos \alpha x). \quad (3.9)$$

$$y'' = 2\alpha^2 e^{\alpha x} C_3 (\sin \alpha x + \cos \alpha x). \quad (3.10)$$

Используя формулы (3.9) и (3.10) для правой и левой части бруса соответственно, получим:

$$y''' = 4\alpha^3 e^{-\alpha x} C_1 \cos \alpha x; \quad (3.11)$$

$$y''' = 4\alpha^3 e^{\alpha x} C_3 \cos \alpha x. \quad (3.12)$$

С учетом (3.11) и (3.12) будем иметь для правой части

$$Q = -Ely''' = -4EI\alpha^3 e^{-\alpha x} C_1 \cos \alpha x \quad (3.13)$$

и аналогично для левой части бруса

$$Q = -EIy'' = -4EI\alpha^3 e^{\alpha x} C_3 \cos \alpha x. \quad (3.14)$$

Подставим в выражения (3.13) и (3.14)  $x=0$ , при котором  $Q=-F/2$ , и получим для правой части бруса

$$C_1 = C_2 = \frac{F}{8EI\alpha^3}; y = \frac{F}{8EI\alpha^3} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x), \quad (3.15)$$

для левой части  $y = \frac{F}{8EI\alpha^3} e^{\alpha x} (-\sin \alpha x + \cos \alpha x).$  (3.16)

Для построения эпюр  $y, M, Q$  возьмем из выражений (3.15) и (3.16) соответствующие производные, и запишем для правой части

$$M = -EIy'' = \frac{F}{4\alpha} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x), \quad (3.17)$$

$$Q = -EIy''' = -\frac{F}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x; \quad (3.18)$$

для левой части

$$M = \frac{F}{4\alpha} e^{\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x), \quad (3.19)$$

$$Q = -\frac{F}{2} e^{\alpha x} \cos \alpha x. \quad (3.20)$$

Для построения эпюр  $y, M, Q$  нужно также определить экстремумы функций в точках перегибов: для  $y$  при  $x=\pm x_1$ ; для  $M$  при  $x=\pm x_2$ ; для  $Q$  при  $x=\pm x_3$  (рис.3.2). Границы полуволн определяются точками, где  $y=0, M=0, Q=0$ . Определим

координаты точек, где  $y=0$ :  $y = \frac{F}{8EI\alpha^3} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x) = 0,$

следовательно,  $\sin \alpha x = -\cos \alpha x$ . Значит,  $\alpha x = x/S = 3\pi/4; 7\pi/4$ .

Координаты точек, где будут вторичные экстремумы функции  $y(x)$ , будут равны  $x_1 = \pm 5\pi S/4 = \pm 4,2$  м, при этом  $\alpha x_1 = 3,92$  рад. Тогда экстремум  $y_1 = 4,9 \cdot 10^{-4}$  м.

Из выражения (3.17), приняв  $M=0$ , или  $M = \frac{F}{4\alpha} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) = 0$ , найдем, что  $\sin \alpha x = \cos \alpha x$ ;  $\alpha x = x/S = \pi/4; 7\pi/4$ . Точки экстремумов  $x_2 = \pm \pi S = \pm 3,4$  м при  $\alpha x_2 = 3,14$  рад, вторичные экстремумы  $M_2 = 0,23$  кН·м.

Для перерезывающих сил нулевые точки определятся из выражения  $Q = -Fe^{\alpha x} \cos \alpha x / 2$ , откуда следует, что  $\cos \alpha x = 0$ , следовательно,  $\alpha x = \pi/2; 7\pi/4$ . Точки экстремумов  $x_3 = \pm 9\pi S/8 = \pm 3,8$  м при  $\alpha x_3 = 3,52$  рад. Для этих значений экстремумы  $Q_3 = \pm 0,296$  кН.

Эпюры  $y, M, Q$  для рассмотренной задачи приведены на рис.3.2.

Определим геометрические характеристики сечения нашего бруса:  $I = bh^3/12 = 0,3 \cdot 0,1^3/12 = 25 \cdot 10^{-6}$  м<sup>4</sup> и  $W = bh^2/6 = 0,3 \cdot 0,1^2/6 = 5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>4</sup>. Тогда значения  $\alpha$  и  $S$  будут равны  $\alpha = \sqrt[4]{cb/(4EI)} = 9,3 \cdot 10^{-4}$  м<sup>-1</sup> и  $S = 1/\alpha = 0,1 \cdot 10^{-4}$  м. Необходимая длина бруса определяется из условия, при котором  $y=0$  при минимальном расстоянии от точки приложения силы, т.е. на расстоянии  $x = 3\pi S/4 = 2,6$  м. Тогда минимальная длина бруса будет  $l = 4x = 5,2$  м. Из выражений (3.15) и (3.16) следует, что максимальный прогиб в середине балки будет равен  $y_{\max} = y|_{x=0} = F/(8EI\alpha^3) = 1,24 \cdot 10^{-2}$  м. Максимальный изгибающий момент, согласно выражению (3.17), при  $x=0$  будет равен  $M_{\max} = M|_{x=0} = F/4\alpha = 5,37$  кН·м. Максимальные напряжения  $\sigma = M_{\max}/W = 10,74$  МПа  $< 15$  МПа  $= [\sigma]$ , т.е. условие прочности удовлетворяется.

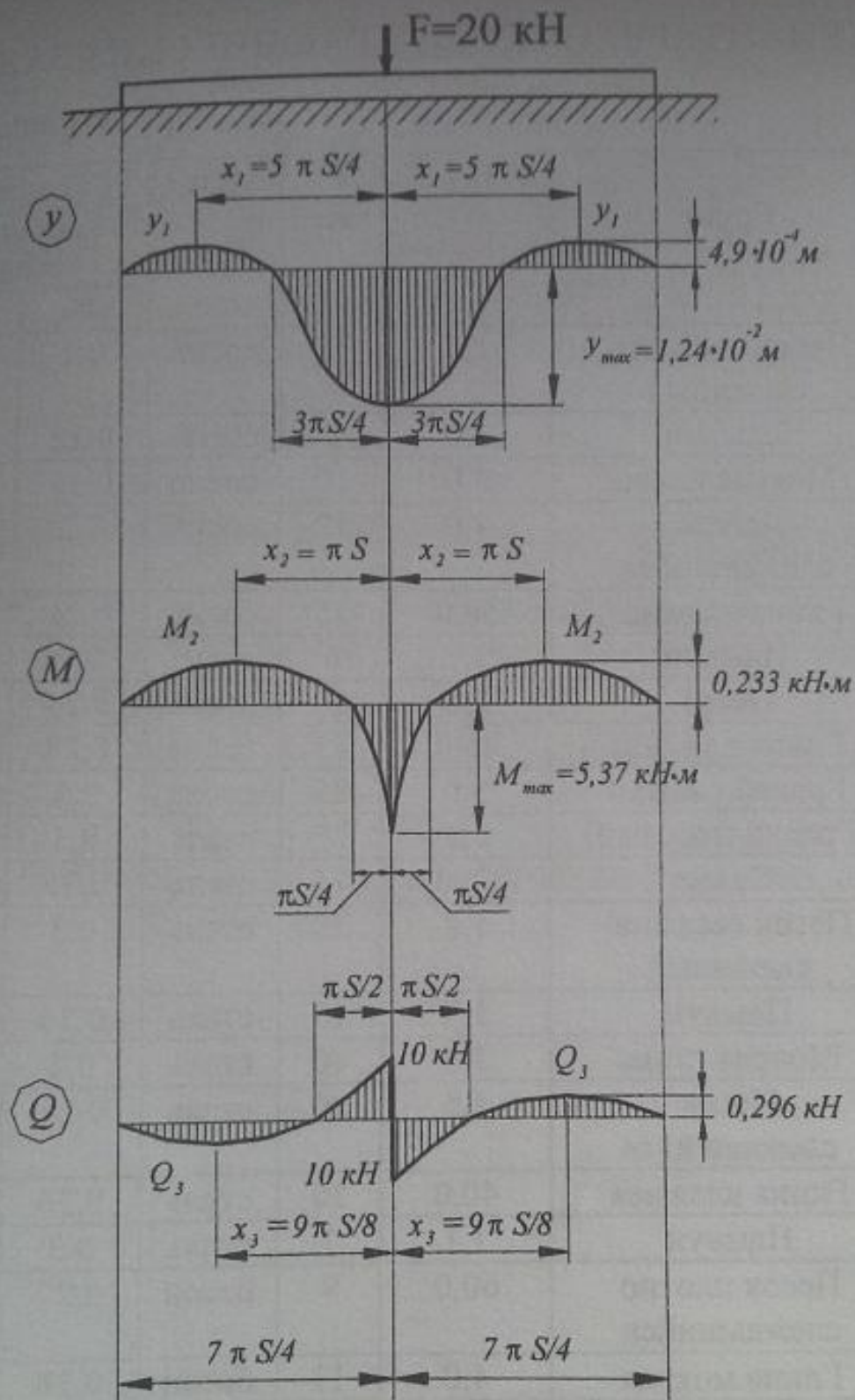


Рис.3.2. Эпюры внутренних усилий в балке

### 3.3. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Таблица 3.1.

№	Грунт	c, Н/см <sup>2</sup>	F, кН	Материал	Размеры сечений бруса, м	
					b	h
1	Песок свежена-сыпанный	1,5	5	сосна	0,1	0,03
2	Плывун	1,0	5	сосна	0,12	0,04
3	Мокрая глина	3,0	10	сосна	0,16	0,05
4	Песок слежавшийся	4,0	12	сосна	0,2	0,06
5	Глина влажная	50,0	15	сосна	0,24	0,06
6	Плывун	1,2	6	сосна	0,2	0,08
7	Песок	2,0	20	сосна	0,24	0,1
8	Глина влажная	45,0	25	сосна	0,28	0,08
9	Гравий свежий	5,0	25	сосна	0,3	0,1
10	Гравий плотный	6,0	25	сталь	0,3	0,08
11	Скала	10000,0	15	сталь	0,25	0,07
12	Песок свежена-сыпанный	1,8	20	сталь	0,3	0,05
13	Плывун	1,3	15	сталь	0,24	0,07
14	Мокрая глина	3,5	10	сталь	0,2	0,04
15	Песок слежавшийся	5,5	20	сталь	0,21	0,06
16	Глина влажная	40,0	30	сталь	0,26	0,08
17	Плывун	1,1	7	сталь	0,3	0,1
18	Песок плотно слежавшийся	60,0	9	бетон	0,27	0,09
19	Глина мокрая	4,0	11	бетон	0,28	0,08
20	Гравий свежий	5,0	8	бетон	0,3	0,1
21	Гравий плотный	6,0	17	бетон	0,3	0,08
22	Скала	12000,0	21	бетон	0,25	0,07
23	Глина влажная	8,5	23	бетон	0,3	0,05
24	Скала	11000,0	4	бетон	0,24	0,07
25	Песок	2,3	5	бетон	0,2	0,05

Построить эпюры  $y$ ,  $M$ ,  $Q$ , определить минимальную длину бруса, найти его максимальный прогиб и проверить прочность под сосредоточенной нагрузкой  $F$ , если брус используется как подкладка под трубопровод.

Варианты заданий и исходные данные приведены в табл. 3.1. Для деревянных (сосновых) брусьев  $E=1 \cdot 10^4$  МПа;  $[\sigma]=12$  МПа; для стальных балок  $E=2 \cdot 10^5$  МПа;  $[\sigma]=160$  МПа; для бетонных балок  $E=0,16 \cdot 10^5$  МПа;  $[\sigma]=20$  МПа.

### РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.В. Строительная механика. Учебник для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, В.Б. Землев. - Часть 1. М: «Высшая школа», 2007, 703 с.
2. Горшков Л.К. Основы строительной механики: Учебн. пособие / Л.К.Горшков, В.Г.Гореликов, Г.Г.Зарецкий-Феоктистов, Н.И.Слюсарев. - СПб.: СПбГИ (ТУ), 2002, 84 с.
3. Дарков А.В. Строительная механика: Учебник для вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. - Изд. 9-е, испр. М: изд-во «Лань», 2005, 655 с.