Расчетно-графическое задание по теме

<u>Векторная алгебра и аналитическая геометрия</u>

1. Векторы, прямая и плоскость в пространстве.

В пространстве заданы четыре точки: A, B, C и D. Требуется выполнить следующие задания:

1. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
2. Найти, при каком значении λ вектор $\overrightarrow{m} = \{-2; \lambda; 3\}$ будет перпендикулярен вектору $\overrightarrow{AB}$.
3. Найти вектор $\vec{N}$, равный векторному произведению векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\vec{N} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.
   <u>Проверить</u>, что вектор $\vec{N}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
4. Найти S — площадь треугольника ABC (***с помощью векторного произведения***).
5. Найти V — объем пирамиды $ABCD$ (***с помощью смешанного произведения***).
6. Составить общее уравнение плоскости α, проходящей через точки A, B и C (в качестве нормали к плоскости взять вектор $\vec{N}$, найденный в пункте 3). **<u>Проверить</u>**, что все три точки A, B и C принадлежат этой плоскости.
7. Составить уравнение плоскости α в отрезках.
8. Найти расстояние от точки D плоскости α.
9. Составить общее уравнение плоскости β, проходящей через начало координат, точку A и перпендикулярной оси Oy.
10. Найти косинус угла между плоскостями α и β.
11. Составить канонические и параметрические уравнения прямой l_1, являющейся линией пересечения плоскостей α и β.
12. Найти расстояние от точки D до прямой l_1.
13. Составить уравнения прямой l_2, проходящей через точки A и B.
14. Найти расстояние от точки D до прямой l_2.
15. Указать взаимное расположение прямых l_1 и l_2 (прямые совпадают, параллельны, перпендикулярны, пересекаются или скрещиваются).

2. Прямая на плоскости.

Дано: прямая ℓ на плоскости Oxy проходит через точки A и B.

а) Составить каноническое, параметрические, общее уравнения этой прямой, ее уравнение в отрезках и уравнение с угловым коэффициентом.

б) Найти расстояние от точки $C(5; -3)$ до прямой ℓ.

в) Через точку C провести прямую $\ell_2 \parallel \ell$ и прямую $\ell_3 \perp \ell$.

Примечание. При решении задачи проверяйте, пожалуйста, что для каждого уравнения прямой точки A и B на ней лежат (т.е. при подстановке координат точек каждое из полученных уравнений обращается в верное равенство). Также проверяйте, что прямая $l_3 \perp l$.

3. Кривые второго порядка на плоскости.

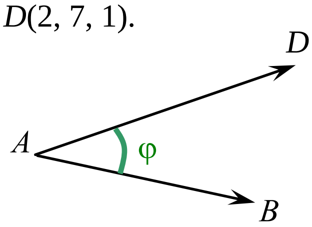
Привести заданную кривую к каноническому виду, определить тип кривой и ее эксцентриситет, изобразить кривую.

Пример решения и оформления работы

Общие правила:

1. Работа выполняется от руки на листах формата А4 с титульным листом установленного образца.
2. Номер варианта должен быть указан на титульном листе и на первой странице работы.
3. Примеры решаются по порядку. Необходимо указать данные, задание, решение полностью с указанием используемых формул, подчеркнуть или выделить ответ каждого задания.
4. Указанные проверки выполнять обязательно.
5. Если в работе есть ошибки, исправления выполняются на отдельном листе с указанием «Работа над ошибками». Неверно сделанное задание переделывается полностью.

Задание 1. Даны точки в пространстве: $A(1, 3, -5)$; $B(7, -1, 4)$; $C(8, 3, -1)$; $D(2, 7, 1)$.



1. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Решение. *Найдем координаты векторов* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AD}$ *:*

$$\overrightarrow{AB} = \{6; -4; 9\}; \quad \overrightarrow{AD} = \{1; 4; 6\}.$$

Модули векторов: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 9^2} = \sqrt{133}$; $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{53}$.

Скалярное произведение векторов: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = 6 \cdot 1 + (-4) \cdot 4 + 9 \cdot 6 = 44$.

Косинус угла между векторами $\cos\varphi = \dfrac{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|} = \dfrac{44}{\sqrt{133}\sqrt{53}} = \dfrac{44}{\sqrt{7049}} \approx 0{,}524$.

<u>Ответ:</u> $\cos\varphi = \dfrac{44}{\sqrt{7049}}$.

2. Найти, при каком значении λ вектор $\vec{m} = \{-2; \lambda; 3\}$ будет перпендикулярен вектору $\overrightarrow{AB}$.

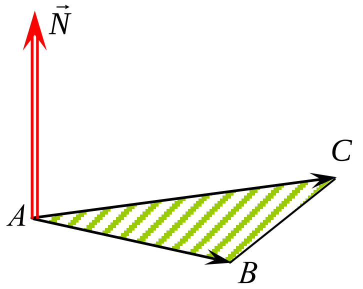
Решение. *Условие перпендикулярности векторов:* $\vec{m} \perp \overrightarrow{AB} \iff \left(\overrightarrow{AB}, \vec{m}\right) = 0$.

$$\Rightarrow \; 6 \cdot (-2) + (-4) \cdot \lambda + 9 \cdot 3 = 0 \;\Rightarrow\; 15 - 4\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{15}{4}.$$

<u>Ответ:</u> $\vec{m} \perp \overrightarrow{AB}$ *при* $\lambda = \dfrac{15}{4}$.

3. Найти вектор $\vec{N}$, равный векторному произведению векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\vec{N} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

<u>Проверить</u>, что вектор $\vec{N}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.



Решение. $\overrightarrow{AB} = \{6; -4; 9\}$; $\overrightarrow{AC} = \{7; 0; 4\}$.

$$\vec{N} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -4 & 9 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -16\vec{i} + 39\vec{j} + 28\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \{-16; 39; 28\}.$$

<u>Проверка:</u> $\left(\vec{N}, \overrightarrow{AB}\right) = -16 \cdot 6 + 39 \cdot (-4) + 28 \cdot 9 = -96 - 156 + 252 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{N} \perp \overrightarrow{AB}$;

$\left(\vec{N}, \overrightarrow{AC}\right) = -16 \cdot 7 + 39 \cdot 0 + 28 \cdot 4 = -112 + 112 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{N} \perp \overrightarrow{AC}$.

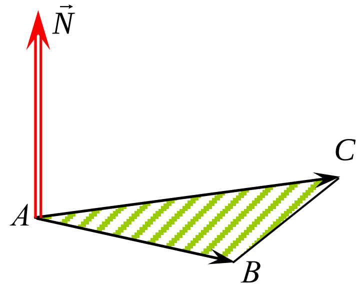
<u>Ответ:</u> $\vec{N} = \{-16; 39; 28\}$.

4. Найти S — площадь треугольника ABC (***с помощью векторного произведения***).

Решение. *Площадь треугольника, построенного на векторах* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AC}$: $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.

Так как $\vec{N} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \Rightarrow$

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{N}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2 + 39^2 + 28^2} = \frac{\sqrt{2561}}{2} \approx 25{,}303.$$

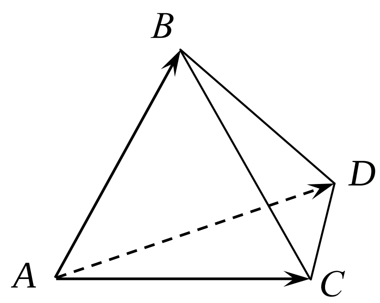


<u>Ответ:</u> $S = \frac{\sqrt{2561}}{2}$.

5. Найти V — объем пирамиды $ABCD$ (***с помощью смешанного произведения***).

Решение. $\overrightarrow{AB} = \{6; -4; 9\}$; $\overrightarrow{AC} = \{7; 0; 4\}$; $\overrightarrow{AD} = \{1; 4; 6\}$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 9 \\ 7 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (0 - 16 + 252) - (0 - 168 + 96) = 308.$$



Объем пирамиды (тетраэдра), построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *и* $\overrightarrow{AD}$:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{308}{6} = \frac{154}{3} \approx 51{,}33.$$

<u>Ответ:</u> $V = \frac{154}{3}$.

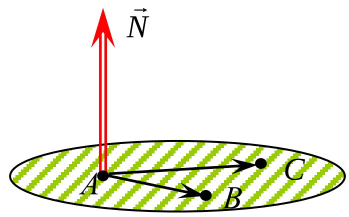
6. Составить общее уравнение плоскости α, проходящей через точки A, B308 и C (в качестве нормали к плоскости взять вектор $\vec{N}$, найденный в пункте 3). **<u>Проверить</u>**, что все три точки A, B и C принадлежат этой плоскости.

Решение. *Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору нормали* $\vec{N} = \{A; B; C\}$ *и проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Так как $\vec{N} = \{-16; 39; 28\}$, *точка* $A(1, 3, -5)$, *то*

$$-16(x-1) + 39(y-3) + 28(z+5) = 0;$$

$$-16x + 16 + 39y - 117 + 28z + 140 = 0;$$



$16x - 39y - 28z - 39 = 0$ — общее уравнение плоскости α:

<u>Проверка:</u> $A(1, 3, -5)$: $16 \cdot 1 - 39 \cdot 3 - 28 \cdot (-5) - 39 = 16 - 117 + 140 - 39 = 0 \Rightarrow (\cdot)A \in \alpha$;

$B(7, -1, 4)$: $16 \cdot 7 - 39 \cdot (-1) - 28 \cdot 4 - 39 = 112 + 39 - 112 - 39 = 0 \Rightarrow (\cdot)B \in \alpha$;

$C(8, 3, -1)$: $16 \cdot 8 - 39 \cdot 3 - 28 \cdot (-1) - 39 = 128 - 117 + 28 - 39 = 0 \Rightarrow (\cdot)C \in \alpha$.

Таким образом, найденная плоскость проходит через точки A, B и C (ч.т.д.).

<u>Ответ:</u> α: $16x - 39y - 28z - 39 = 0$.

7. Составить уравнение плоскости α в отрезках.

Решение. *Т.к. в уравнении плоскости* α *коэффициент* $D \neq 0$, *можно составить уравнение плоскости в отрезках:*

$$\alpha:\ 16x-39y-28z-39=0 \quad\Rightarrow\quad 16x-39y-28z=39\ |:39 \quad\Rightarrow\quad \frac{16}{39}x-y-\frac{28}{39}z=1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x}{39/16}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{-39/28}=1$$ – *уравнение плоскости* α *в отрезках.*

Таким образом, плоскость α *пересекает ось Ox в точке* $a=\frac{39}{16}$, *ось Oy – в точке* $b=-1$ *и ось Oz – в точке* $c=-\frac{39}{28}$.

Ответ: *Уравнение плоскости* α *в отрезках:* $\frac{x}{39/16}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{-39/28}=1$.

8. Найти расстояние от точки D плоскости α.

Решение. $\alpha:\ 16x-39y-28z-39=0$, $D(2,\ 7,\ 1)$.

По формуле расстояния от точки до плоскости $d=\frac{\left|Ax^*+By^*+Cz^*+D\right|}{\left|\vec{N}\right|}$ *получим:*

$$d=\frac{\left|16\cdot 2-39\cdot 7-28\cdot 1-39\right|}{\sqrt{2561}}=\frac{908}{\sqrt{2561}}\approx 17{,}942.$$

Ответ: $d=\frac{908}{\sqrt{2561}}$.

9. Составить общее уравнение плоскости β, проходящей через начало координат, точку A и перпендикулярной оси Oy.

Решение. *Общее уравнение плоскости имеет вид:* $Ax + By + Cz + D = 0$.

Если плоскость параллельна оси Oy, то коэффициент $B = 0$.

Если плоскость проходит через начало координат, то коэффициент $D = 0$.

Таким образом, уравнение плоскости β *будет иметь вид:* $Ax + Cz = 0$.

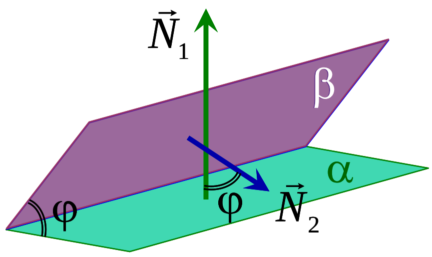
Т.к. плоскость проходит через точку $A(1,\ 3,\ -5)$, *то*

$$A\cdot 1 + C\cdot(-5) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad A - 5C = 0 \quad\Leftrightarrow\quad A = 5C.$$

Возьмем $C = 1$, *тогда* $A = 5$ *и уравнение плоскости* β *примет вид:* $5x + z = 0$.

Ответ: $\beta:\ 5x+z=0$.

10. Найти косинус угла между плоскостями α и β.



Решение. $\alpha:\ 16x-39y-28z-39=0$, $\beta:\ 5x+z=0$.

Найдем нормали к плоскостям α *и* β:

$$\vec{N}_\alpha=\{16;\ -39;\ -28\},\quad \vec{N}_\beta=\{5;\ 0;\ 1\}.$$

Косинус угла между плоскостями α *и* β*:*

$$\cos\psi = \frac{\left|\left(\vec{N}_\alpha, \vec{N}_\beta\right)\right|}{\left|\vec{N}_\alpha\right| \cdot \left|\vec{N}_\beta\right|} = \frac{|16\cdot 5 - 39\cdot 0 - 28\cdot 1|}{\sqrt{1261}\sqrt{26}} = \frac{52}{\sqrt{32786}} \approx 0{,}287\,.$$

Ответ: $\cos\psi = \dfrac{52}{\sqrt{32786}}$.

11. Составить канонические и параметрические уравнения прямой l_1, проходящей через точку D и перпендикулярной плоскости α.

Решение. α: $16x - 39y - 28z - 39 = 0$, $D(2, 7, 1)$.

Прямая $l_1 \perp$ *плоскости* $\alpha \Rightarrow l_1 \,//\, \vec{N}_\alpha$
(*т.е. нормаль к плоскости* α *является направляющим вектором прямой* l_1).

Канонические и параметрические уравнения прямой, параллельной вектору $\vec{s} = \{m;\, n;\, p\}$ *и проходящей через точку* $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$l: \ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

$\vec{s} = \vec{N}_\alpha = \{16;\, -39;\, -28\}$, *таким образом, получаем канонические и параметрические уравнения прямой* l_1*:*

$$l_1: \ \frac{x - 2}{16} = \frac{y - 7}{-39} = \frac{z - 1}{-28} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + 16t; \\ y = 7 - 39t; \\ z = 1 - 28t. \end{cases}$$

12. Найти точку пересечения прямой l_1 и плоскости α (проекцию точки D на плоскость α).

Решение. *Пусть M – точка пересечения прямой* l_1 *и плоскости* α*. Тогда координаты точки должны удовлетворять и уравнениям прямой* l_1*, и уравнениям плоскости* α*. Для удобства возьмем параметрические уравнения прямой. Тогда:*

$$M: \begin{cases} x = 2 + 16t; \\ y = 7 - 39t; \\ z = 1 - 28t; \\ 16x - 39y - 28z - 39 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 16(2 + 16t) - 39(7 - 39t) - 28(1 - 28t) - 39 = 0; \\ 2561t - 308 = 0; \\ t = \frac{308}{2561}. \end{aligned}$$

Таким образом, при найденном значении t прямая пересекает плоскость. Подставив t в параметрические уравнения прямой, получим координаты точки пересечения:

$$M: \begin{cases} x = 2 + 16\cdot\dfrac{308}{2561} = \dfrac{10050}{2561} \approx 3{,}92; \\ y = 7 - 39\cdot\dfrac{308}{2561} = \dfrac{5915}{2561} \approx 2{,}31; \\ z = 1 - 28\cdot\dfrac{308}{2561} = -\dfrac{6063}{2561} \approx -2{,}37. \end{cases}$$

Ответ: $M\left(\dfrac{10050}{2561}; \dfrac{5915}{2561}; -\dfrac{6063}{2561}\right)$.

13. Составить уравнения прямой l_2, проходящей через точки A и B.

Решение. *Если прямая проходит через точки А и В, то вектор* $\overrightarrow{AB}$ *является направляющим вектором этой прямой. Тогда:* $\vec{s}=\overrightarrow{AB}=\{6;-4;9\}$, $A(1,\ 3,\ -5)$ $\Rightarrow$ *канонические и параметрические уравнения прямой* l_2*:*

$$l_2:\ \frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{9}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=1+6t;\\ y=3-4t;\\ z=-5+9t.\end{cases}$$

14. Найти расстояние от точки $D(2,\ 7,\ 1)$. до прямой l_2.

Решение. *По формуле расстояния от точки до прямой:* $d=\dfrac{\left|\left[\vec{s},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{|\vec{s}\,|}$ *получим:*

$$\vec{s}=\overrightarrow{AB}=\{6;-4;9\},\ \overrightarrow{AD}=\{1;4;6\}\quad\Rightarrow\quad|\vec{s}\,|=\sqrt{36+16+81}=\sqrt{133},$$

$$\left[\vec{s},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 6&-4&9\\ 1&4&6\end{vmatrix}=\{60;-27;28\}\quad\Rightarrow\quad\left|\left[\vec{s},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\sqrt{3600+729+784}=\sqrt{5113}.$$

<u>Ответ:</u> $d=\dfrac{\sqrt{5113}}{\sqrt{133}}\approx 6{,}2$.

15. Указать взаимное расположение прямых l_1 и l_2 (прямые совпадают, параллельны, пересекаются или скрещиваются).

$$l_1:\ \frac{x-2}{16}=\frac{y-7}{-39}=\frac{z-1}{-28};\qquad\qquad l_2:\ \frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{9};$$

$$\vec{s}_1=\{16;-39;-28\};\ M_1(2;7;1).\qquad\qquad \vec{s}_2=\{6;-4;9\};\ M_2(1;3;-5).$$

Если прямые параллельны (или совпадают), то $\vec{s}_1\,//\,\vec{s}_2$. *Условие коллинеарности векторов:* $\vec{s}_1\,//\,\vec{s}_2\ \Leftrightarrow\ \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$. *Так как* $\dfrac{16}{6}\neq\dfrac{-39}{-4}\neq\dfrac{-28}{9}$, *то прямые не параллельны и не совпадают.*

Если прямые перпендикулярны, то $\vec{s}_1\perp\vec{s}_2$. *Условие перпендикулярности векторов:* $\vec{s}_1\perp\vec{s}_2\ \Leftrightarrow\ (\vec{s}_1,\vec{s})=0$. *Так как* $(\vec{s}_1,\vec{s})=16\cdot6-39\cdot(-4)-28\cdot9=0$, *то* $\vec{s}_1\perp\vec{s}_2\ \Leftrightarrow\ l_1\perp l_2$.

Если прямые пересекаются, то векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ *и* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *компланарны и их смешанное произведение* $\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2\right)=0$.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1;-4;-6\};\ \left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2\right)=\begin{vmatrix}-1&-4&-6\\ 16&-39&-28\\ 6&-4&9\end{vmatrix}=691\neq0.$$

Так как $\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2\right)\neq0\ \Rightarrow$ *прямые не пересекаются и являются скрещивающимися.*

<u>Ответ:</u> *прямые* l_1 *и* l_2 *перпендикулярны и являются скрещивающимися.*

Задание 2.

Прямая ℓ на плоскости Oxy проходит через точки $A(-1;\ 4)$ и $B(6;\ -7)$.

а) Составить каноническое, параметрические, общее уравнение этой прямой, ее уравнение в отрезках и уравнение с угловым коэффициентом.

б) Найти расстояние от точки $C(5;\ -3)$ до прямой ℓ.

в) Через точку C провести прямую $\ell_2 \parallel \ell$ и прямую $\ell_3 \perp \ell$.

Решение. а) Уравнение прямой, проходящей ***через две заданные точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. $\Rightarrow$ $\dfrac{x+1}{6+1}=\dfrac{y-4}{-7-4}$

получаем **каноническое уравнение прямой:** $\boxed{\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-4}{-11}.}$

Приравняв каждую дробь к параметру t и выразив x и y, получим:

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y-4}{-11}=t \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{x+1}{7}=t\\ \dfrac{y-4}{-11}=t\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x+1=7t\\ y-4=-11t\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{cases}x=7t-1\\ y=4-11t\end{cases}} \text{ — }$$

параметрические уравнения прямой.

Замечание: из этих уравнений можно найти направляющий вектор прямой: $\vec{s}=\{7;-11\}$.

Домножим в каноническом уравнении правую и левую часть на 77 и перенесем все слагаемые в левую часть, тогда получим

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y-4}{-11}\ \Big|\cdot 77 \quad\Rightarrow\quad 11(x+1)=-7(y-4) \quad\Rightarrow\quad 11x+11+7y-28=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{11x+7y-17=0} \text{ — }$$

общее уравнения прямой.

Замечание: из общего уравнения можно найти нормаль к прямой: $N=\{11;\ 7\}$.

Для проверки: $\vec{N}\cdot\vec{s}=7\cdot 11+(-11)\cdot 7=0 \ \Rightarrow\ \vec{N}\perp\vec{s}$.

Преобразуем общее уравнение прямой:

$$11x+7y-17=0 \quad\Rightarrow\quad 11x+7y=17\ \big|:17 \quad\Rightarrow\quad \frac{11}{17}x+\frac{7}{17}y=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{x}{17/11}+\frac{y}{17/7}=1} \text{ — }$$

уравнение прямой в отрезках, где $a=\dfrac{17}{11}$ и $b=\dfrac{17}{7}$ — точки пересечения прямой с Ox и Oy.

И наконец, выразив из общего уравнения прямой y, получим:

$$11x+7y-17=0 \quad\Rightarrow\quad 7y=-11x+17\ \big|:7 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y=-\frac{11}{7}x+\frac{17}{7}} \text{ — }$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом.

б) Найдем расстояние от точки $C(5;\ -3)$ до найденной прямой:

$$d=\frac{|Ax^*+By^*+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|11\cdot 5+7\cdot(-3)-17|}{\sqrt{11^2+7^2}}=\frac{17}{\sqrt{170}}\approx 1{,}30.$$

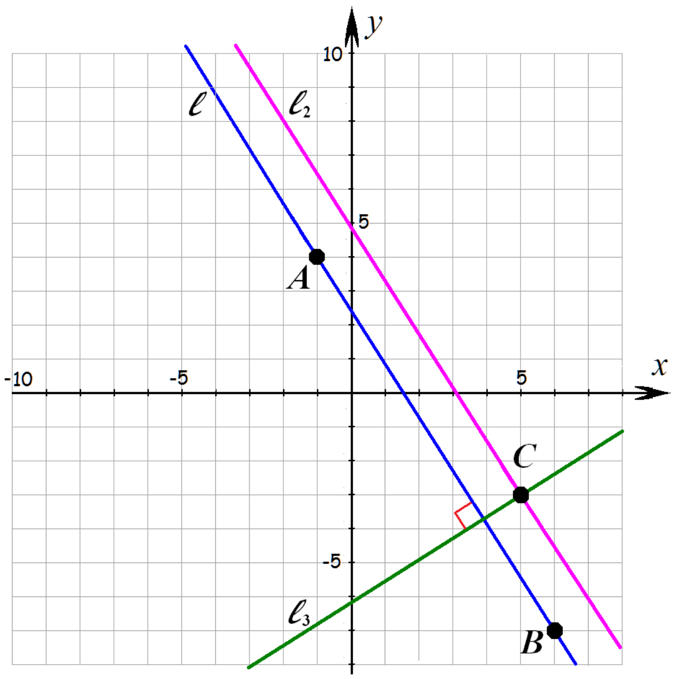


Рис. 5.

в) Если прямая $\ell_2 \parallel \ell$, то их нормали совпадают. Тогда можно составить общее уравнение прямой ℓ_2, учитывая, что она проходит через точку $C(5;\,-3)$:

$$11(x-5)+7(y+3)=0 \quad \Rightarrow$$
$$11x-55+7y+21=0 \quad \Rightarrow$$
$$11x+7y-34=0$$

— **общее уравнения прямой ℓ_2.**

Если прямая $\ell_3 \perp \ell$, то нормаль к ℓ_3 совпадает с направляющим вектором прямой ℓ. Тогда:

$$7(x-5)-11(y+3)=0 \quad \Rightarrow$$
$$7x-35-11y-33=0 \quad \Rightarrow$$
$$7x-11y-68=0$$

— **общее уравнения прямой ℓ_3.**

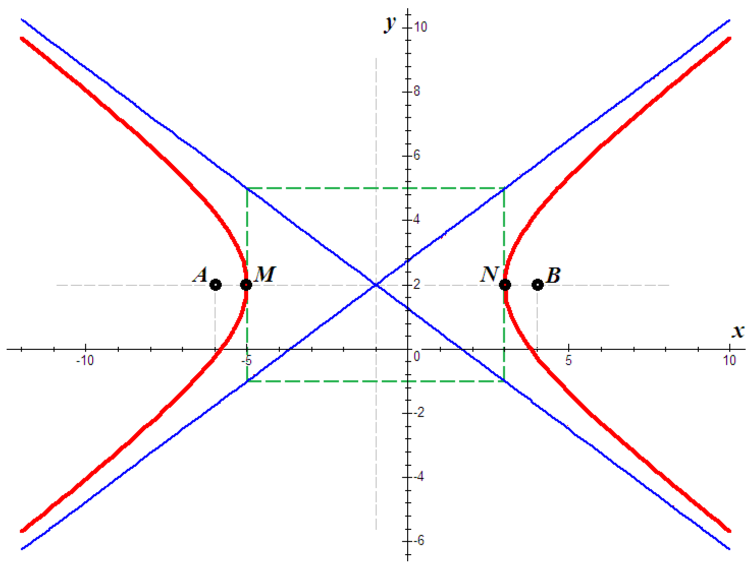
Прямые ℓ, ℓ_2 и ℓ_3 изображены на рис. 5.

<u>Задание 3.</u> Привести заданную кривую к каноническому виду, определить тип кривой и ее эксцентриситет, изобразить кривую.

а) $9x^2-16y^2+18x+64y-199=0$.

Сгруппируем слагаемые и выделим полные квадраты:

$$9(x^2+2x)-16(y^2-4y)-199=0;$$
$$9(x^2+2x+1-1)-16(y^2-4y+4-4)-199=0;$$
$$9(x^2+2x+1)-9-16(y^2-4y+4)+64-199=0;$$
$$9(x^2+2x+1)-16(y^2-4y+4)=144 \quad \Big|\, :144$$



$$\boxed{\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1}$$

— каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола имеет вершины в точках $M(-5;\,2)$ и $N(3;\,2)$, центр находится в точке $(-1,\,2)$, полуоси: вещественная $a=4$; мнимая: $b=3$. Половина расстояния между фокусами $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$.

Асимптоты гиперболы проходят через вершины прямоугольника со сторонами $x=-5$, $x=3$, $y=-1$ и $y=5$ и задаются уравнениями $y=2\pm\frac{3}{4}(x+1)$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{3}{4}x+\frac{11}{4} \quad \text{и} \quad y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}.$$

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}=1{,}25$.

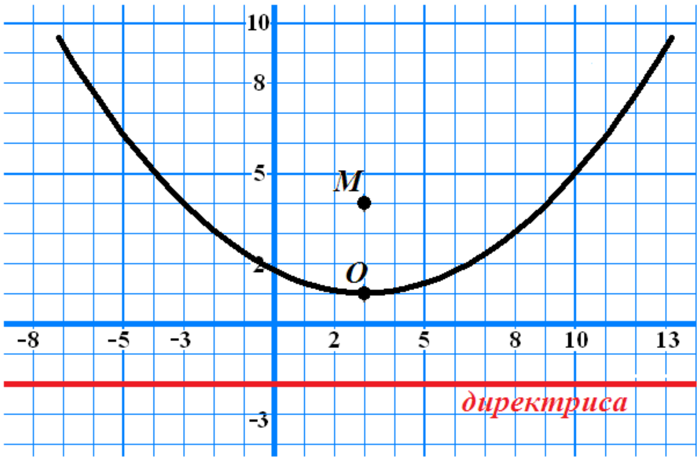
б) $x^2-6x-12y-3=0$.

Приведем уравнение к каноническому виду:

$$(x^2-6x+9)-9-12y-3=0;$$

$$\boxed{(x-3)^2=12(y-1)}$$

— *каноническое уравнение параболы.*



Вершина параболы расположена в точке $O(3;\,1)$, расстояние между фокусом и директрисой $p=6$, директриса параллельна оси Ox. Т.к. $p>0$, ветви параболы направлены вверх, фокус находится в точке с координатами $x_c=x_0=3;\ y_c=y_0+p/2=4$ $\Rightarrow$ $M(3,4)$. Директриса определяется уравнением $y=y_0-p/2\ \Rightarrow\ y=-2$.

Эксцентриситет параболы $\varepsilon=1$.

в) $25x^2+9y^2+400x-108y+1699=0$.

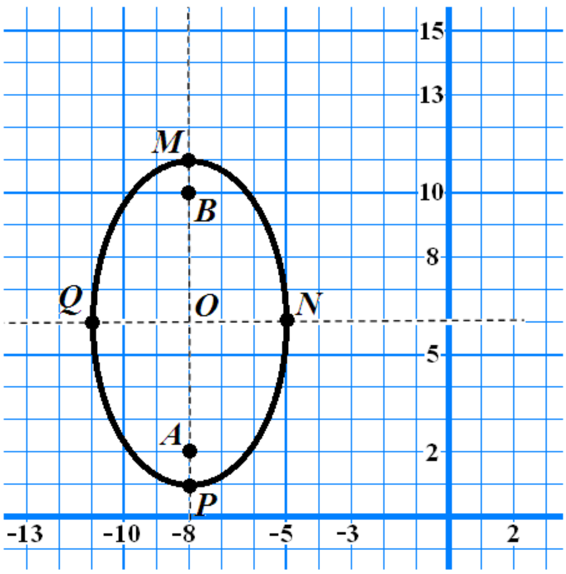
Приведем уравнение к каноническому виду:

$$25(x^2+16x+64)-64\cdot25+9(y^2-12y+36)-36\cdot9+1699=0$$

$$25(x+8)^2-64\cdot25+9(y-6)^2=225\ \Big|:225$$

$$\boxed{\frac{(x+8)^2}{3^2}+\frac{(y-6)^2}{5^2}=1}$$

— *каноническое уравнение эллипса.*



Центр эллипса находится в точке $O(-8,\,6)$, большая полуось $b=5$, малая полуось $a=3$.

Т.к. $b>a$, фокусы эллипса находятся в точках с координатами $(x_0,\,y_0\pm c)$, где c — половина расстояния между фокусами, $c=\sqrt{b^2-a^2}=4$. Таким образом, фокусы эллипса: $A(2,-8);\ B(10,-8)$.

Вершины эллипса находятся в точках $(x_0,\,y_0\pm b)$ и $(x_0\pm a,\,y_0)$ — это точки $M(-8,11)$; $P(-8,1)$; $N(-5,6)$ и $Q(-11,6)$.

Эксцентриситет эллипса равен отношению расстояния между фокусами к большей оси:

$$\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{4}{5}=0{,}8.$$