

## Задание № 5

## Задача 5.1. Внецентренное сжатие

**Исходные данные:** короткий чугунный брус, поперечное сечение которого изображено на схеме, сжимается внецентренно продольной силой  $F$ , приложенной в  $i$ -той точке ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

**Требуется:**

- 1) определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в поперечном сечении, выразив их через  $F$  и размеры сечения;
- 2) найти допустимую нагрузку  $[F]$  из условия прочности бруса при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на растяжение  $[\sigma_{рас}] = 50 \text{ МПа}$  и сжатие  $[\sigma_{сж}] = 160 \text{ МПа}$ .

## Схемы к задаче 5.1

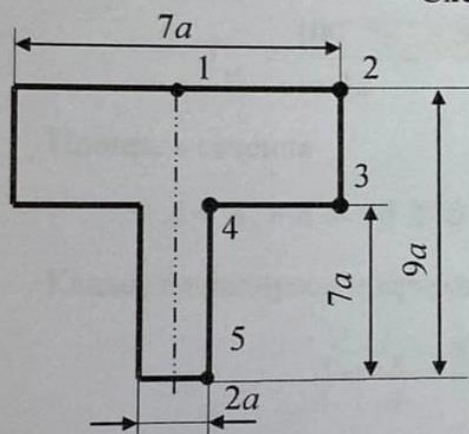


Рис. 5.1.1

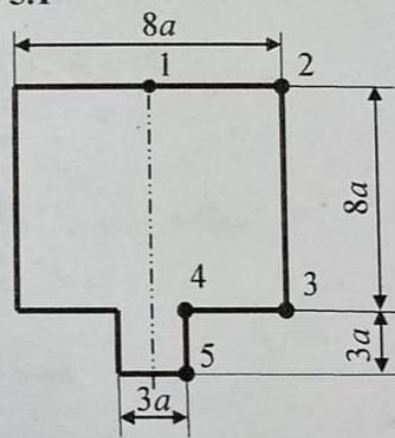


Рис. 5.1.2

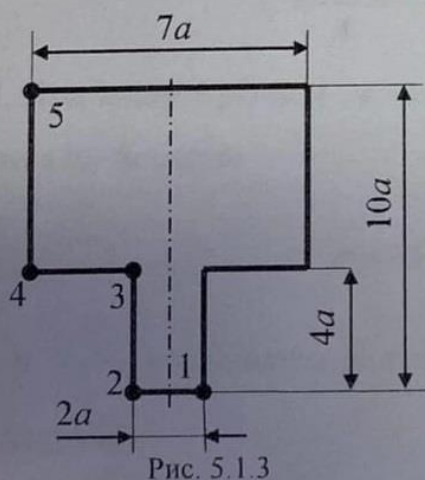


Рис. 5.1.3

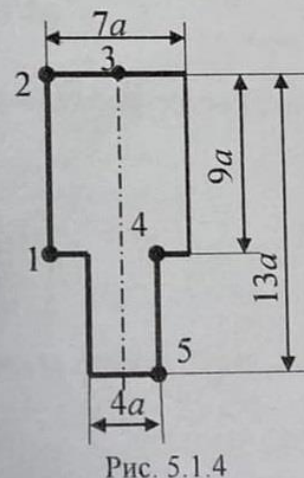


Рис. 5.1.4

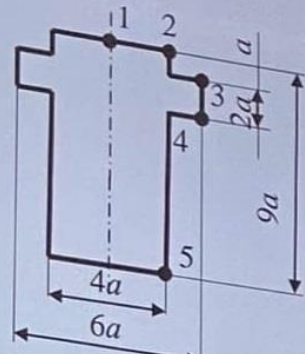


Рис. 5.1.21

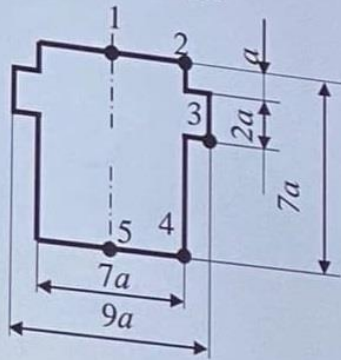


Рис. 5.1.23

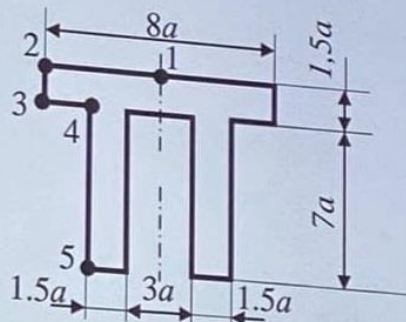


Рис. 5.1.25

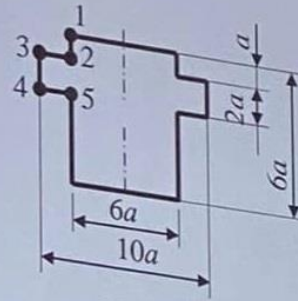


Рис. 5.1.22

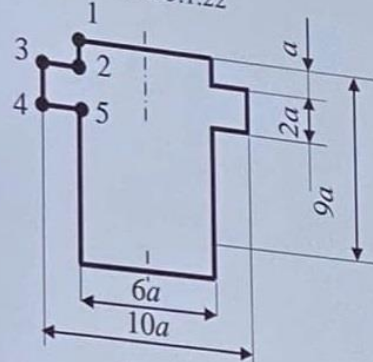


Рис. 5.1.24

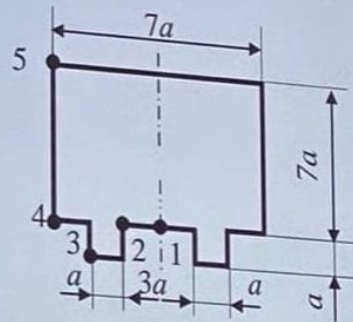


Рис. 5.1.26

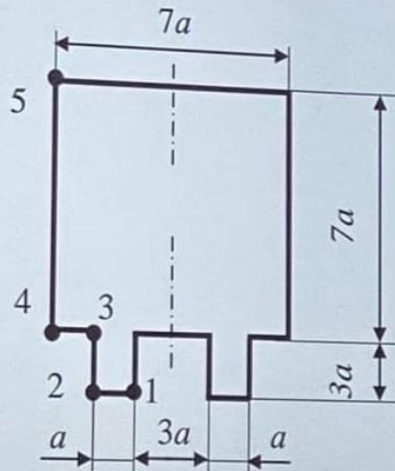


Рис. 5.1.27

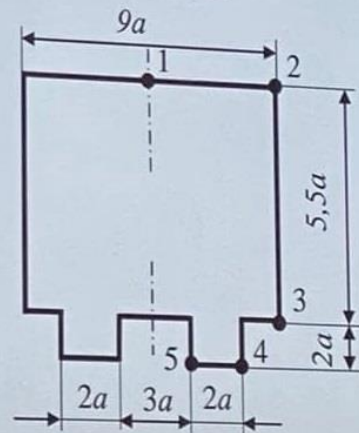


Рис. 5.1.28

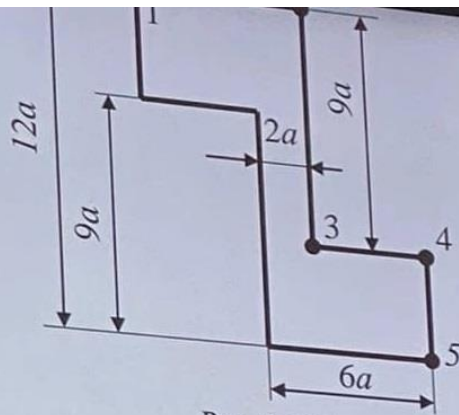


Рис. 5.1.29

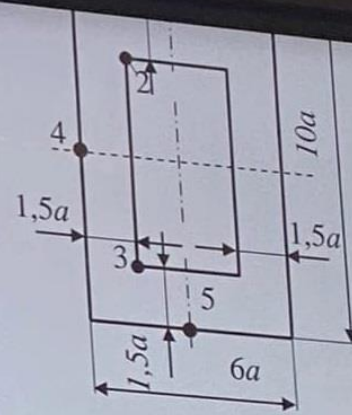


Рис. 5.1.30

Данные для вариантов

Таблица 5.1

Номер варианта (рисунка)	$a, \text{ мм}$	Расположение полюса в точке	Номер варианта (рисунка)	$a, \text{ мм}$	Расположение полюса в точке
1 (5.1.1)	10	1	16 (5.1.16)	16	1
2 (5.1.2)	12	2	17 (5.1.17)	18	2
3 (5.1.3)	14	3	18 (5.1.18)	20	3
4 (5.1.4)	16	4	19 (5.1.19)	10	4
5 (5.1.5)	18	5	20 (5.1.20)	12	5
6 (5.1.6)	20	1	21 (5.1.21)	14	1
7 (5.1.7)	10	2	22 (5.1.22)	16	2
8 (5.1.8)	12	3	23 (5.1.23)	18	3
9 (5.1.9)	14	4	24 (5.1.24)	20	4
10 (5.1.10)	16	5	25 (5.1.25)	10	5
11 (5.1.11)	18	1	26 (5.1.26)	12	1
12 (5.1.12)	20	2	27 (5.1.27)	14	2
13 (5.1.13)	10	3	28 (5.1.28)	16	3
14 (5.1.14)	12	4	29 (5.1.29)	18	4
15 (5.1.15)	14	5	30 (5.1.30)	20	5

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 5.1 варианту 9 соответствует рис. 5.1.9).

### Методические указания к решению задачи

1. Определить положение главных центральных осей инерции сечения.
2. Вычислить геометрические характеристики сечения: площадь, главные центральные моменты инерции, квадраты радиусов инерции.
3. Определить положение нейтральной линии в сечении, вычислив отрезки, отсекаемые нейтральной линией на координатных осях. Изобразить нейтральную линию в сечении.
4. Записать выражения для напряжений при внецентренном сжатии.
5. Установить положение опасных точек по растягивающим и сжимающим напряжениям, вычислить напряжения в опасных точках  $\sigma_{рас}^{max}$  и  $\sigma_{сж}^{max}$ .
6. Составить условия прочности и определить допускаемую нагрузку из условия прочности по растягивающим  $[F_{рас}]$  и сжимающим  $[F_{сж}]$  напряжениям.
7. Сформулировать окончательный вывод относительно значения допускаемой нагрузки  $[F]$ .

### Пример решения задачи

#### Исходные данные

Точка  $A$  — полюс силы;

$$[\sigma_{рас}] = 50 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{сж}] = 160 \text{ МПа (см. рис. 5.1.31).}$$

#### Решение

1. Для определения положения главных центральных осей инерции используем свойства симметрии сечения бруса. В системе координатных

осей  $Z$  и  $Y$  одна из координат центра тяжести принимает значения  $z_c = 45$  мм. Для определения другой координаты  $y_c$  используем формулу

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 c_1 + A_2 c_2}{A_1 + A_2} = \frac{100 \cdot 90 \cdot 100 + 60 \cdot 50 \cdot 25}{100 \cdot 90 + 60 \cdot 50} \approx 81,25 \text{ мм.}$$

Проведем главные центральные оси инерции  $Z_c$  и  $Y_c$ .

2. Значения главных центральных осей инерции  $J_{z_c}$  и  $J_{y_c}$  определяем согласно выражениям

$$\begin{aligned} J_{z_c} &= J_{z_1}^I + A_1 (c_1 + y_c)^2 + J_{z_2}^{II} + A_2 (y_c - c_2)^2 = \frac{90 \cdot 100^3}{12} + \\ &+ 90 \cdot 100 \cdot (100 - 81,25)^2 + \frac{60 \cdot 50^3}{12} + 60 \cdot 50 (81,25 - 25)^2 \approx 0,208 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-4}; \\ J_{y_c} &= \frac{100 \cdot 90^3}{12} + \frac{50 \cdot 60^3}{12} \approx 0,0698 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-4}. \end{aligned}$$

Площадь сечения

$$A = A_1 + A_2 = 90 \cdot 100 + 60 \cdot 50 = 12000 \text{ мм}^2 = 0,012 \text{ м}^2.$$

Квадраты радиусов инерции

$$\begin{aligned} i_y^2 &= \frac{J_{y_c}}{A} = \frac{0,0698 \cdot 10^{-4}}{0,012} \approx 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \\ i_z^2 &= \frac{J_{z_c}}{A} = \frac{0,208 \cdot 10^{-4}}{0,012} \approx 17,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2. \end{aligned}$$

3. При внецентренном сжатии напряжения в произвольной точке вычисляются по формуле

$$\sigma = -F \left( \frac{1}{A} - \frac{z_p z}{J_{y_c}} - \frac{y_p y}{J_{z_c}} \right),$$

где  $z_p$  и  $y_p$  — координаты полюса силы, в нашем случае  $z_p = -45$  мм;

$$y_p = -31,25 \text{ мм};$$

$z$  и  $y$  — координаты произвольной точки сечения.

4. Наиболее нагруженными являются точки, максимально удаленные от нейтральной линии. Найдем положение нейтральной линии, вычислив отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях  $y_c$  и  $z_c$ :

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{17,3 \cdot 10^{-4}}{-3,125 \cdot 10^{-2}} \approx 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{-4,5 \cdot 10^{-2}} \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

откладываем полученные отрезки и стоим нейтральную линию.

Теперь видно, что в растянутой зоне наиболее нагруженной является точка  $C$ , а в сжатой зоне — точка  $B$  либо точка  $A$ .

5. Исходя из условия прочности бруса определяем значение допустимых нагрузок  $[F_{сж}]$  и  $[F_{рас}]$ .

На условия прочности по сжимающим напряжениям

$$|\sigma_B| = F \left( \frac{1}{A} - \frac{z_p z_B}{J_{y_c}} - \frac{y_p y_B}{J_{z_c}} \right) \leq [\sigma_{сж}].$$

Для точки  $B$  имеем  $z_B = -30 \text{ мм}$  и  $y_B = -81,25 \text{ мм}$ , тогда

$$[F_{сж}]' = \frac{[\sigma_{сж}]}{\frac{1}{A} - \frac{z_p z_B}{J_{y_c}} - \frac{y_p y_b}{J_{z_c}}} = \frac{160 \cdot 10^6}{\frac{1}{0,012} + \frac{0,045 \cdot 0,03}{0,0698 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,03125 \cdot 0,08125}{0,2078 \cdot 10^{-4}}} =$$

$$\approx 0,401 \cdot 10^6 \text{ Н} = 401 \text{ кН};$$

$$|\sigma_A| = F \left( \frac{1}{A} - \frac{z_p z_A}{J_{y_c}} - \frac{y_p y_A}{J_{z_c}} \right) \leq [\sigma_{сж}],$$

где  $z_A = -45 \text{ мм}$ ;  $y_A = -31,25 \text{ мм}$ .

Тогда