

§ 2. Метрические пространства

9. Найти расстояния между числовыми векторами x и y в пространстве R^n с тремя разными метриками $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$. В какой метрике расстояние наибольшее, в какой наименьшее?

1. $n = 3, x = \left(\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{4}\right), y = \left(-\frac{\pi}{3}, \pi, \pi\right)$
2. $n = 5, x = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2}, 0, 2\right), y = \left(0, 0, 2, -\frac{2}{3}, 2\right)$
3. $n = 4, x = (3, -2, \pi, 1), y = (5, -1, 2\pi, 0)$
4. $n = 5, x = (3, 3, -1, 0, 2), y = (0, 5, 4, -5, -2)$
5. $n = 3, x = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}\right), y = \left(-3, -2, -\frac{4}{5}\right)$
6. $n = 6, x = (-1, -1, 3, 4, 2, 1), y = (2, -1, 0, 0, 1, 2)$
7. $n = 4, x = (-\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0, 0), y = (-2, 1, \sqrt{2}, 0)$
8. $n = 3, x = (\sqrt{10}, \sqrt{2}, 2), y = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{8})$
9. $n = 6, x = (1, -1, 2, 0, 0, 1), y = (-2, 1, 1, 0, 2, 3)$
10. $n = 3, x = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{5}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right), y = \left(-1, \frac{2}{5}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
11. $n = 7, x = (1, 3, -1, 5, 0, 1, 1), y = (2, 3, 1, 0, 4, 2, 1)$
12. $n = 6, x = (1, -1, 2, 0, 0, 1), y = (-2, 1, 1, 0, 2, 3)$
13. $n = 4, x = (1, -1, 2, 1), y = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$
14. $n = 3, x = \left(-1, \frac{\sqrt{5}}{4}, 1\right), y = \left(-2, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
15. $n = 4, x = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}), y = (0, \sqrt{2}, 0, \sqrt{3})$
16. $n = 3, x = \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{4}\right), y = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, -2\pi\right)$
17. $n = 7, x = (0, 0, 7, 5, 1, -3, 0), y = (1, 2, 1, -3, 1, -5, -1)$
18. $n = 5, x = \left(\frac{3}{2}, 3, -1, \frac{1}{2}, 0\right), y = \left(\frac{1}{2}, -1, 4, \frac{5}{2}, 1\right)$
19. $n = 3, x = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 1, 0\right), y = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, 1\right)$
20. $n = 6, x = (0, 0, 0, 2, 2, 2), y = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, -1, -1, -1)$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать формулы для вычисления расстояний $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$, которые приведены в конспекте лекций, §2, пункт 2.2.

10. Найти расстояние между функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ в указанном пространстве.

1. a) $x(t) = 3$, $y(t) = \sqrt[3]{2(t+2)^2(4-t)}$, $C[-4;2]$

b) $x(t) = \ln t$, $y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, $L^2(0;1)$

2. a) $x(t) = t + 8$, $y(t) = 4\sqrt{t+2}$, $C[-2;7]$

b) $x(t) = t$, $y(t) = \sqrt{3-t^2}$, $L^2(-1;1)$

3. a) $x(t) = (t^2 - 2t)\ln t$, $y(t) = \frac{3}{2}t^2 - 4t$, $C\left[\frac{1}{2};3\right]$

b) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \frac{1}{\sin t}$, $L^2\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$

4. a) $x(t) = \frac{16}{t-1}$, $y(t) = 15 + 2t - t^2$, $C[2;4]$

b) $x(t) = \frac{1}{1-t}$, $y(t) = \frac{1}{1+t}$, $L^2\left(0;\frac{1}{2}\right)$

5. a) $x(t) = \frac{t}{2}$, $y(t) = \sin t \cos t$, $C\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

b) $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$, $L^2(0;\pi)$

6. a) $x(t) = \frac{8}{t} + 8$, $y(t) = \frac{t^2}{2}$, $C[-3;-1]$

b) $x(t) = \sin 2t$, $y(t) = \cos 2t$, $L^2\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

7. a) $x(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1)\operatorname{arctg}(t)$, $y(t) = \frac{\pi}{8}t^2 + \frac{t-1}{2}$, $C[-1;1]$

b) $x(t) = \sqrt{1+t^2}$, $y(t) = t$, $L^2(-1;1)$

8. a) $x(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)\arcsin t$, $y(t) = \frac{\pi}{12}t^2 - \frac{1}{4}t\sqrt{1-t^2}$, $C[-1;1]$

b) $x(t) = t$, $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $L^2(0;1)$

9. a) $x(t) = 8t$, $y(t) = 15 - \frac{4}{t^2}$, $C\left[\frac{2}{3};2\right]$

b) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $L^2(-\pi;\pi)$

10. a) $x(t) = t^5 + 5t^3$, $y(t) = 5t^4 - 1$, $C[-1;2]$

- b) $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-t}$, $L^2(0;1)$
11. a) $x(t) = 2t^2 + 5$, $y(t) = t^4$, $C\left[0; \frac{3}{2}\right]$
 b) $x(t) = \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$, $y(t) = \sqrt{t}$, $L^2(1;e)$
12. a) $x(t) = t$, $y(t) = e^t$, $C[-1;1]$
 b) $x(t) = t$, $y(t) = \ln t$, $L^2(0;1)$
13. a) $x(t) = \sin 2t$, $y(t) = t$, $C\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
 b) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin 2t$, $L^2(0;\pi)$
14. a) $x(t) = t$, $y(t) = \ln(t^2 + 1)$, $C[-1;3]$
 b) $x(t) = te^t$, $y(t) = e^{-t}$, $L^2(-1;0)$
15. a) $x(t) = \frac{6t}{t^2 + 3}$, $y(t) = \frac{6}{t^2 + 3}$, $C[-4;2]$
 b) $x(t) = t$, $y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, $L^2(0;1)$
16. a) $x(t) = \frac{8}{t-2} + 2t + 5$, $y(t) = \frac{t^2}{2}$, $C\left[-1; \frac{1}{2}\right]$
 b) $x(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$, $y(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$, $L^2(2;4)$
17. a) $x(t) = 3 - t$, $y(t) = \frac{4}{(t+2)^2}$, $C[-1;2]$
 b) $x(t) = \ln t$, $y(t) = 2$, $L^2(0;1)$
18. a) $x(t) = 2 \sin t$, $y(t) = \cos 2t$, $C[0;\pi]$
 b) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$, $y(t) = t$, $L^2(-1;1)$
19. a) $x(t) = 9 - \frac{16}{t+2}$, $y(t) = t^2 + 4t - 2$, $C[-1;1]$
 b) $x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}}$, $y(t) = \frac{t}{2}$, $L^2(0;1)$
20. a) $x(t) = tg^2t$, $y(t) = 2tgt$, $C\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$
 b) $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = 2e^{1-t}$, $L^2(0;1)$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать формулы для вычисления расстояний в пространстве непрерывных функций $C[a; b]$ и в пространстве квадратично суммируемых функций $L^2(a; b)$, которые приведены в конспекте лекций, §2, пункт 2.2.

Образец решения для задания а)

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2 \cos t, \quad C[0; 2\pi]$$

Вычислим расстояние между функциями x и y в пространстве $C[0; 2\pi]$:

$$\rho_{C[0; 2\pi]}(x, y) = \max_{t \in [0; 2\pi]} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in [0; 2\pi]} |t - 2 \cos t|.$$

Найдем наибольшее абсолютное значение функции $\varphi(t) = t - 2 \cos t$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Как известно, наибольшее значение непрерывной функции следует искать среди ее значений на концах отрезка и локальных экстремумов внутри отрезка. Вычисляем $\varphi'(t) = 1 + 2 \sin t$. Из условия $\varphi'(t) = 0, t \in [0; 2\pi]$, находим точки, в которых могут быть локальные экстремумы:

$$t_1 = \frac{7\pi}{6}, \quad t_2 = \frac{11\pi}{6}.$$

Сравним абсолютные значения функции φ в точках t_1, t_2 и на концах отрезка:

$$|\varphi(t_1)| = \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 5.4;$$

$$|\varphi(t_2)| = \frac{11\pi}{6} - \sqrt{3} \approx 4;$$

$$|\varphi(0)| = 2;$$

$$|\varphi(2\pi)| = 2\pi - 2 \approx 4.3.$$

Выбираем среди этих значений наибольшее и получаем расстояние между функциями x и y в пространстве $C[0; 2\pi]$:

$$\rho_{C[0; 2\pi]}(x, y) = \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 5.4.$$

11. Найти расстояние между бесконечными числовыми последовательностями x и y в пространстве l^1 .

$$1. \quad x = \left(\frac{3}{1!}, \frac{3^2}{2!}, \frac{3^3}{3!}, \frac{3^4}{4!}, \dots \right), \quad y = \left(\frac{1}{1!}, \frac{3}{2!}, \frac{3^2}{3!}, \frac{3^3}{4!}, \dots \right)$$

$$2. \quad x = \left(\frac{\ln 1}{1}, \frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 4}{4}, \dots \right), \quad y = \left(\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 4}{4}, \frac{\ln 5}{5}, \dots \right)$$

$$3. \quad x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right), \quad y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \dots \right)$$

4. $x = \left(\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{6}, \frac{16}{24}, \frac{32}{120}, \dots \right), y = \left(\frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{16}{6}, \frac{32}{24}, \frac{64}{120}, \dots \right)$
5. $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots \right), y = \left(1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{64}, \dots \right)$
6. $x = \left(\frac{\ln 2}{1}, \frac{\ln^2 2}{2}, \frac{\ln^3 2}{6}, \frac{\ln^4 2}{24}, \dots \right), y = \left(\frac{\ln 2}{3}, \frac{\ln^2 2}{6}, \frac{\ln^3 2}{18}, \frac{\ln^4 2}{72}, \dots \right)$
7. $x = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{27}, -\frac{4}{81}, \frac{2}{243}, \dots \right), y = \left(0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \dots \right)$
8. $x = \left(\frac{2}{1!}, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^4}{4!}, \dots \right), y = \left(\frac{1}{1!}, \frac{2}{2!}, \frac{2^2}{3!}, \frac{2^3}{4!}, \dots \right)$
9. $x = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{32}, 0, \dots \right), y = \left(0, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{9}, 0, -\frac{1}{27}, \dots \right)$
10. $x = \left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \dots \right), y = \left(\frac{1}{2!}, \frac{2}{3!}, \frac{3}{4!}, \frac{4}{5!}, \frac{5}{6!}, \dots \right)$
11. $x = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots \right), y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{48}, \frac{1}{240}, \dots \right)$
12. $x = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \dots \right), y = \left(\frac{2}{1}, 0, \frac{8}{9}, 0, \frac{32}{81}, 0, \dots \right)$
13. $x = \left(\frac{\ln 2}{1!}, \frac{\ln^2 2}{2!}, \frac{\ln^3 2}{3!}, \frac{\ln^4 2}{4!}, \dots \right), y = \left(\frac{\ln 2}{2 \cdot 1!}, \frac{\ln^2 2}{2 \cdot 2!}, \frac{\ln^3 2}{2 \cdot 3!}, \frac{\ln^4 2}{2 \cdot 4!}, \dots \right)$
14. $x = \left(3, \frac{3}{2^1}, \frac{3}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{3}{2^4}, \frac{3}{2^5}, \frac{3}{2^6}, \dots \right), y = \left(1, 0, \frac{1}{2^2}, 0, \frac{1}{2^4}, 0, \frac{1}{2^6}, \dots \right)$
15. $x = \left(\frac{2^3}{2^2}, \frac{3^3}{2^3}, \frac{4^3}{2^4}, \frac{5^3}{2^5}, \dots \right), y = \left(\frac{1^3}{2^1}, \frac{2^3}{2^2}, \frac{3^3}{2^3}, \frac{4^3}{2^4}, \dots \right)$
16. $x = \left(\frac{\ln^2 1}{1}, \frac{\ln^2 2}{4}, \frac{\ln^2 3}{9}, \frac{\ln^2 4}{16}, \dots \right), y = \left(\frac{\ln^2 2}{4}, \frac{\ln^2 3}{9}, \frac{\ln^2 4}{16}, \frac{\ln^2 5}{25}, \dots \right)$
17. $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots \right), y = \left(1, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{64}, \dots \right)$
18. $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \dots \right), y = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{60}, \frac{1}{360}, \dots \right)$
19. $x = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots \right), y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{243}, \frac{1}{243}, \dots \right)$
20. $x = \left(\frac{1^2}{2^1}, \frac{2^2}{2^2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{4^2}{2^4}, \frac{5^2}{2^5}, \dots \right), y = \left(0, \frac{1^2}{2^1}, \frac{2^2}{2^2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{4^2}{2^4}, \dots \right)$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать формулу для вычисления расстояния в пространстве суммируемых числовых последовательностей l^1 , которая приведена в конспекте лекций, §2, пункт 2.2. Вычисление расстояния между последовательностями x и y в пространстве l^1 сводится к вычислению суммы числового ряда. Сумма числового

ряда может быть найдена непосредственно по определению (как предел последовательности частичных сумм) либо с использованием известных формул. В данной задаче может понадобиться формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии и стандартные разложения функций (например, экспоненты) в ряд Тейлора.

12. Даны функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Определить, принадлежит ли функция u шару $B_r(x)$ в указанном пространстве.

1. a) $x(t) = t, \quad y(t) = e^t, \quad r = 2, \quad C[-1;1]$
 b) $x(t) = \sin 2t, \quad y(t) = \cos 2t, \quad r = 1, \quad L^2\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
2. a) $x(t) = tg^2 t, \quad y(t) = 2tgt, \quad r = 2, \quad C\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$
 b) $x(t) = \frac{\ln t}{\sqrt{t}}, \quad y(t) = \sqrt{t}, \quad r = 2, \quad L^2(1;e)$
3. a) $x(t) = \frac{t}{t+1}, \quad y(t) = \frac{1}{t+1}, \quad r = \frac{2}{3}, \quad C[0;4]$
 b) $x(t) = t, \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad r = 4, \quad L^2(-1;1)$
4. a) $x(t) = t^3 + 6t, \quad y(t) = 3t^2 + 2, \quad r = 10, \quad C[-1;1]$
 b) $x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, \quad y(t) = t, \quad r = 1, \quad L^2(0;1)$
5. a) $x(t) = \frac{8}{t-2} + 2t + 5, \quad y(t) = \frac{t^2}{2}, \quad r = 2, \quad C\left[-1; \frac{1}{2}\right]$
 b) $x(t) = \sin t, \quad y(t) = \sin 2t, \quad r = 1, \quad L^2(0;\pi)$
6. a) $x(t) = 2\sqrt{t-1}, \quad y(t) = 2-t, \quad r = 10, \quad C[1;5]$
 b) $x(t) = te^t, \quad y(t) = e^{-t}, \quad r = 2, \quad L^2(-1;0)$
7. a) $x(t) = (t^2 - 2t)\ln t, \quad y(t) = \frac{3}{2}t^2 - 4t, \quad r = 2, \quad C\left[\frac{1}{2};3\right]$
 b) $x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, \quad y(t) = \ln t, \quad r = 2, \quad L^2(0;1)$
8. a) $x(t) = 3-t, \quad y(t) = \frac{4}{(t+2)^2}, \quad r = 4, \quad C[-1;2]$
 b) $x(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}, \quad y(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}, \quad r = 1, \quad L^2(2;4)$

9. a) $x(t) = 2 \sin t$, $y(t) = \cos 2t$, $r = \frac{5}{2}$, $C[0; \pi]$
 b) $x(t) = \ln t$, $y(t) = t$, $r = 2$, $L^2(0; 1)$
10. a) $x(t) = \frac{16}{t-1}$, $y(t) = 15 + 2t - t^2$, $r = 5$, $C[2; 4]$
 b) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$, $y(t) = t$, $r = 1$, $L^2(-1; 1)$
11. a) $x(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1) \operatorname{arctg}(t)$, $y(t) = \frac{\pi}{8}t^2 + \frac{t-1}{2}$, $r = 1$, $C[-1; 1]$
 b) $x(t) = \frac{t}{2}$, $y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}}$, $r = 2$, $L^2(0; 1)$
12. a) $x(t) = \sqrt[3]{2(t-2)^2(8-t)}$, $y(t) = 1$, $r = 4$, $C[0; 6]$
 b) $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = 2e^{1-t}$, $r = 3$, $L^2(0; 1)$
13. a) $x(t) = 2t^3 + 7$, $y(t) = 6t^2 + 18t$, $r = 50$, $C[-2; 4]$
 b) $x(t) = \ln t$, $y(t) = 2$, $r = 3$, $L^2(0; 1)$
14. a) $x(t) = \frac{8}{t} + 8$, $y(t) = \frac{t^2}{2}$, $r = 1$, $C[-3; -1]$
 b) $x(t) = \sqrt{1+t^2}$, $y(t) = t$, $r = 2$, $L^2(-1; 1)$
15. a) $x(t) = 9 - \frac{16}{t+2}$, $y(t) = t^2 + 4t - 2$, $r = 2$, $C[-1; 1]$
 b) $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$, $r = 4$, $L^2(0; \pi)$
16. a) $x(t) = 8t$, $y(t) = 15 - \frac{4}{t^2}$, $r = 4$, $C\left[\frac{1}{2}; 2\right]$
 b) $x(t) = t$, $y(t) = \sqrt{3-t^2}$, $r = 3$, $L^2(-1; 1)$
17. a) $x(t) = \frac{t}{2}$, $y(t) = \sin t \cos t$, $r = 1$, $C\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
 b) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \frac{1}{\sin t}$, $r = 1$, $L^2\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$
18. a) $x(t) = t^5 + 5t^3$, $y(t) = 5t^4 - 1$, $r = 8$, $C[-1; 2]$
 b) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $r = 4$, $L^2(-\pi; \pi)$
19. a) $x(t) = 2t + 5$, $y(t) = t^4$, $r = 10$, $C[0; 2]$
 b) $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-t}$, $r = 2$, $L^2(0; 1)$
20. a) $x(t) = t + 8$, $y(t) = 4\sqrt{t+2}$, $r = 5$, $C[-2; 7]$

$$\text{b) } x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad y(t) = \frac{1}{1+t}, \quad r=1, \quad L^2\left(0; \frac{1}{2}\right)$$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на сведения, которые предоставляет §2 конспекта лекций: определение шара в метрическом пространстве, формулы для вычисления расстояния в пространстве непрерывных функций $C[a; b]$ и в пространстве квадратично суммируемых функций $L^2(a; b)$.