

## ЗАДАНИЕ 2

### Расчет коленчатого стержня на прочность и жесткость

На рис. 11 показан коленчатый стержень, состоящий из двух участков. Сечения участков имеют разную форму: на первом участке круглое, на втором – прямоугольное. Одним концом стержень жестко защемлен. Материал стержня – сталь,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 200$  ГПа. Исходные данные для расчета выбираются из таблицы 3.

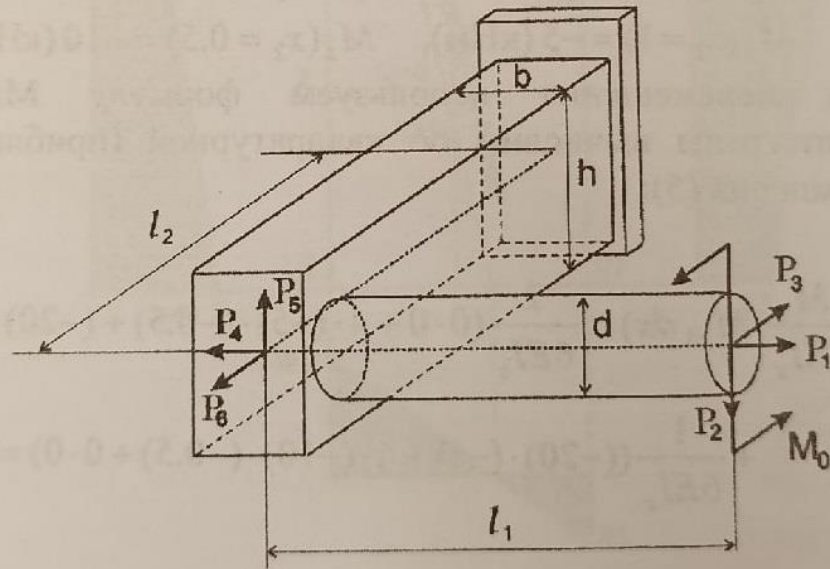


Рис. 11. Схема нагружения коленчатого стержня

- Для каждого участка коленчатого стержня (рис. 11):
1. Построить эпюры внутренних усилий: продольной силы  $N_x$ , крутящего момента  $M_x$ , изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ .
  2. Определить положение опасного сечения и подобрать его размеры с помощью условия прочности, отвечающего критерию наибольших касательных напряжений.
  3. Определить положение нейтральной линии в опасном сечении участка, найти отрезки, отсекаемые ею на осях координат.
  4. Определить положение опасной точки (точек) в опасном сечении.
  5. Построить эпюры распределения нормальных и касательных напряжений в плоскости опасного сечения участка.
  6. Найти перемещение конца стержня по направлению указанной силы  $P_i$  (см. строку «i» в таблице 3).

Примечание: знак «-» перед величиной внешней нагрузки показывает, что она направлена в сторону, противоположную изображенной на рис. 11.

Таблица 3

<b>A</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_1$ , кН	80	90	45	60	50	-90	-55	70	-60	-80
$P_2$ , кН	20	50	30	15	40	30	40	50	-20	40
$P_3$ , кН	30	20	30	30	40	50	20	-30	20	30
$M_0$ , кНм	40	50	60	70	-60	80	-40	-50	20	-30
<b>B</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_4$ , кН	40	30	30	35	-50	20	-45	30	10	20
$P_5$ , кН	20	50	-10	20	40	-60	20	35	20	-40
$P_6$ , кН	30	60	-40	30	20	40	50	40	-20	30
<b>C</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$l_1$ , м	2.0	1.2	1.8	1.6	2.0	1.5	1.4	1.0	1.6	2.0
$l_2$ , м	3.0	2.0	2.4	2.0	2.0	1.8	2.2	2.0	2.4	2.6
<b>D</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h/b$	2	1.5	3.0	1.5	2.0	2.5	3.0	1.5	2.5	2.0
<b>i</b>	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

## ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЯ 2

Заданы длины участков  $l_1 = 2$  м,  $l_2 = 3$  м,  $h/b=2$  и внешние активные силы, действующие на стержень:  $P_1=100$  кН,  $P_2=20$  кН,  $P_3=30$  кН,  $P_4=40$  кН,  $P_5=80$  кН,  $P_6=150$  кН,  $M_0=50$  кНм. Длины участков и точки приложения сил задаются на осях стержней, т.е. не используются размеры поперечных сечений.

Требуется подобрать размеры сечений из условия прочности и определить перемещение свободного конца стержня в направлении силы  $P_3$ .

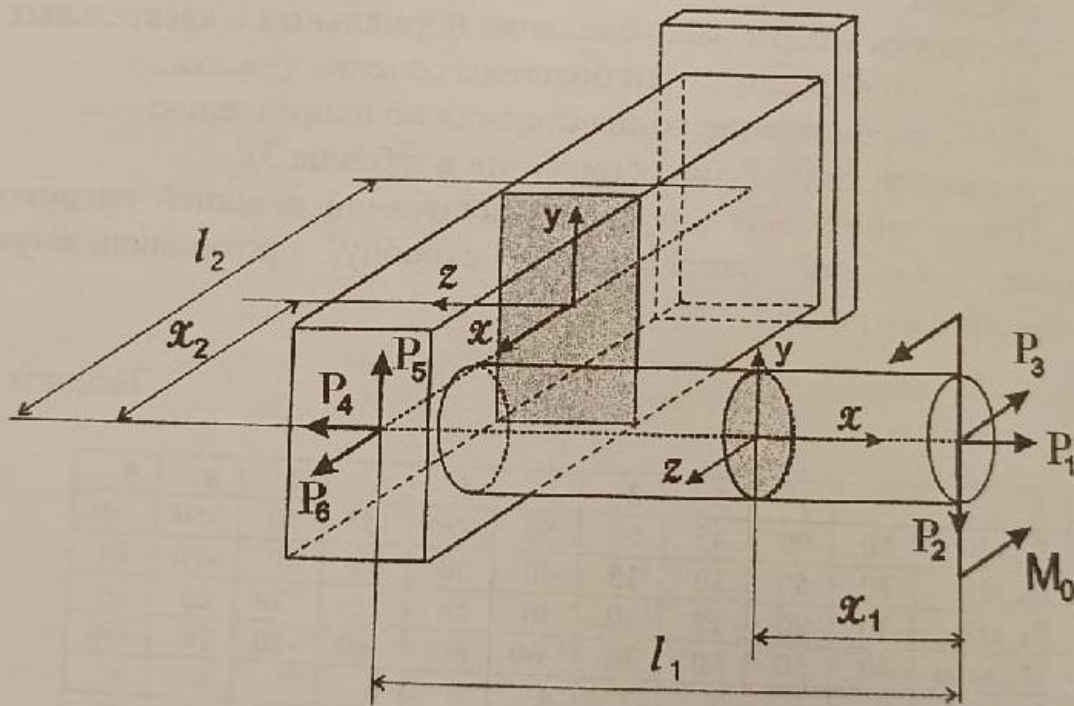


Рис. 12. Выбор локальных систем координат на участках стержня

Сначала построим эпюры внутренних усилий на участках стержня. В пространственном случае, как известно, имеется шесть внутренних усилий ( $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ), однако мы ограничимся четырьмя ( $N_x$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ), поскольку поперечные

силы  $Q_1$ ,  $Q_2$  и связанные с ними касательные напряжения в данном случае не оказывают существенного влияния на прочность и не вносят заметного вклада в потенциальную энергию деформации, то есть в перемещения.

Для построения эпюр по алгоритму метода сечений выберем на каждом участке произвольное сечение (рис. 12). Их положение определяется расстояниями от концов участков, эти расстояния обозначим  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. С каждым сечением свяжем локальную систему координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Ось  $x$  этой системы будем направлять всегда вдоль оси стержня на данном участке к свободному концу стержня, а оси  $y$  и  $z$  будут лежать в плоскости поперечного сечения, образуя вместе с осью  $x$  так называемую *правую тройку* (это значит, что, например, с конца оси  $x$  поворот от оси  $y$  к оси  $z$  виден против часовой стрелки — рис. 13).

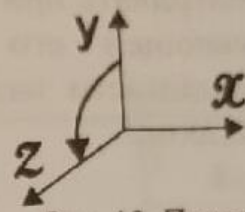


Рис. 13. Правая система координат

При построении эпюр будем руководствоваться следующим **правилом знаков**, справедливым для правого конца стержня: усилие (сила или момент, рассматриваемый как вектор) положительно, если совпадает по направлению с одноименной осью. Для момента это означает, что создающая его сила или пара с конца соответствующей оси видна вращающейся против часовой стрелки. Например, на первом участке  $M_x = +M_0$ .

При определении моментов сил следует также помнить, что момент относительно оси создает та сила, которая не пересекает эту ось и ей не параллельна. В геометрии такие прямые называются *скрещивающимися*. Прямые АВ и CD являются скрещивающимися, если одна из них (прямая АВ) лежит в плоскости, а другая (прямая CD) пересекает эту плоскость, то есть имеет с ней одну общую точку O (рис. 14).

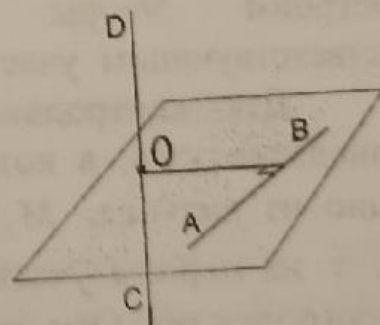


Рис. 14. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстоянием между скрещивающимися прямыми АВ и CD является длина перпендикуляра, опущенного из точки О на прямую АВ. Именно это расстояние и будет плечом силы относительно оси в пространстве.

Запишем выражения для внутренних усилий, находя их каждый раз как алгебраическую сумму соответствующих внешних сил или их моментов, находящихся с одной стороны от произвольного сечения, взятых со знаками по правилу знаков. Рассматривать при этом будем силы, приложенные к части стержня, включающей его свободный конец. Это избавляет нас от необходимости находить реактивные силы и моменты в жестком заземлении.

$$1) 0 \leq x_1 \leq l_1 = 2 \text{ м} :$$

$$N_x = P_1 = 100 \text{ (кН)}, M_x = M_0 = 50 \text{ (кНм)};$$

$$M_y(x_1) = P_3 \cdot x_1 = 30x_1, M_y(0) = 0, M_y(2) = 60 \text{ (кНм)};$$

$$M_z(x_1) = -P_2 \cdot x_1 = -20x_1, M_z(0) = 0, M_z(2) = -40 \text{ (кНм)}.$$

$$2) 0 \leq x_2 \leq l_2 = 3 \text{ м} :$$

$$N_x = P_6 - P_3 = 120 \text{ (кН)}, M_x = -P_2 l_1 = -40 \text{ (кНм)};$$

$$M_y(x_2) = (P_1 - P_4) \cdot x_2 + P_3 l_1 = 60 + 60x_2,$$

$$M_y(0) = 60 \text{ (кНм)}, M_y(3) = 240 \text{ (кНм)};$$

$$M_z(x_2) = -M_0 + (P_5 - P_2) \cdot x_2 = -50 + 60x_2,$$

$$M_z(0) = -50 \text{ (кНм)}, M_z(3) = 130 \text{ (кНм)}.$$

Построим эпюры на линиях отсчета, параллельных соответствующим участкам стержня (см. рис. 15).

Для контроля правильности эпюр можно использовать равновесие узла, в котором соединяются участки. Например, как видно из рисунка,  $M_x(x_1 = l_1) = -M_z(x_2 = 0) = 50 \text{ (кНм)}$ , поскольку ось  $x$  на первом участке направлена противоположно оси  $z$  для второго участка. Оси  $y$  для первого и второго участков совпадают, поэтому  $M_y(x_1 = l_1) = M_y(x_2 = 0) = 60 \text{ (кНм)}$ . Аналогично,  $M_z(x_1 = l_1) = M_x(x_2) = -40 \text{ (кНм)}$ , потому что ось  $z$  на первом участке сонаправлена оси  $x$  на втором участке.

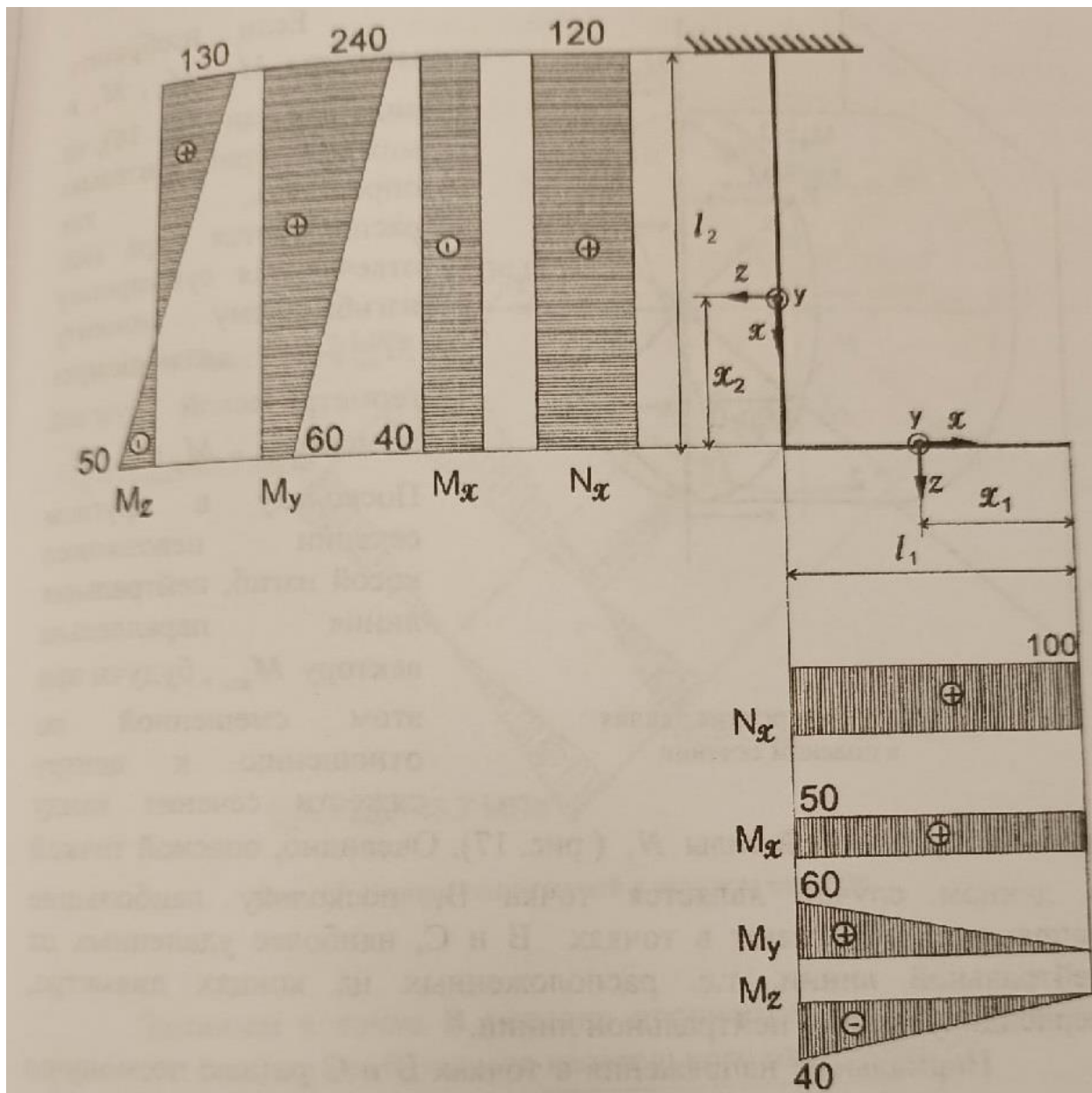


Рис. 15. Эпюры внутренних усилий в коленчатом стержне

Как видно из рис. 15, опасное сечение на первом участке  $0 \leq x_1 \leq l_1 = 2$  м, находится в точке  $x_1 = 2$  м. Внутренние усилия в этом сечении:  $N_x = 100$  (кН),  $M_x = 50$  (кНм),  $M_y(2) = 60$  (кНм),  $M_z(2) = -40$  (кНм).

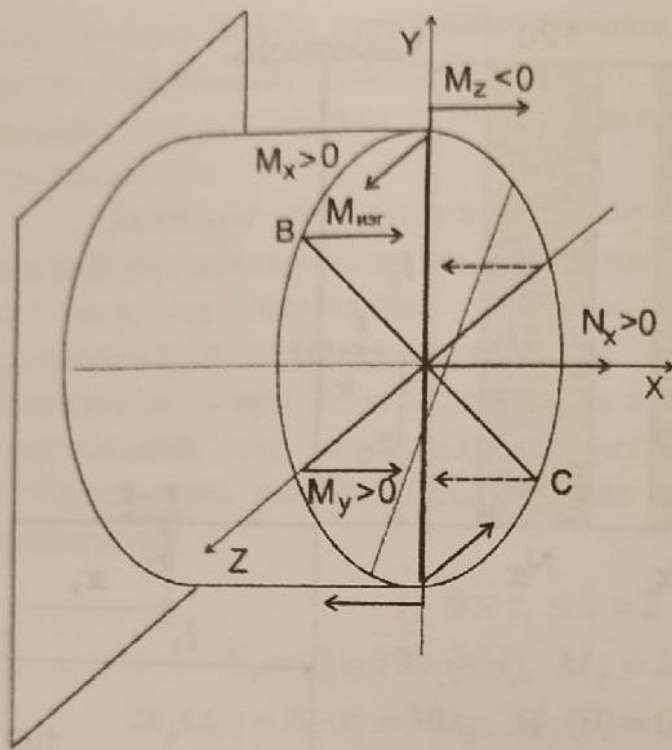


Рис. 16. Внутренние усилия в опасном сечении

Если изобразить моменты  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  в виде пар сил (рис. 16), то можно приблизительно определить, как располагается пара сил, отвечающая суммарному изгибающему моменту  $M_{изг}$ , являющемуся геометрической суммой моментов  $M_y$  и  $M_z$ . Поскольку в круглом сечении невозможен кривой изгиб, нейтральная линия параллельна вектору  $M_{изг}$ , будучи при этом смещенной по отношению к центру тяжести сечения ввиду

наличия продольной силы  $N_x$  (рис. 17). Очевидно, опасной точкой в данном случае является точка В, поскольку наибольшие напряжения возникают в точках В и С, наиболее удаленных от нейтральной линии, т.е. расположенных на концах диаметра, перпендикулярного нейтральной линии.

Нормальные напряжения в точках В и С разные по модулю ввиду наличия продольной силы

$$\sigma_B = \frac{N_x}{A} + \frac{M_{изг}}{W}, \quad \sigma_C = \frac{N_x}{A} - \frac{M_{изг}}{W},$$

и, если  $N_x > 0$ , то  $|\sigma_B| > |\sigma_C|$ , а касательные напряжения одинаковы во всех точках контура сечения, и в том числе  $\tau_B = \tau_C = \tau_{max} = M_x / W_p$ .

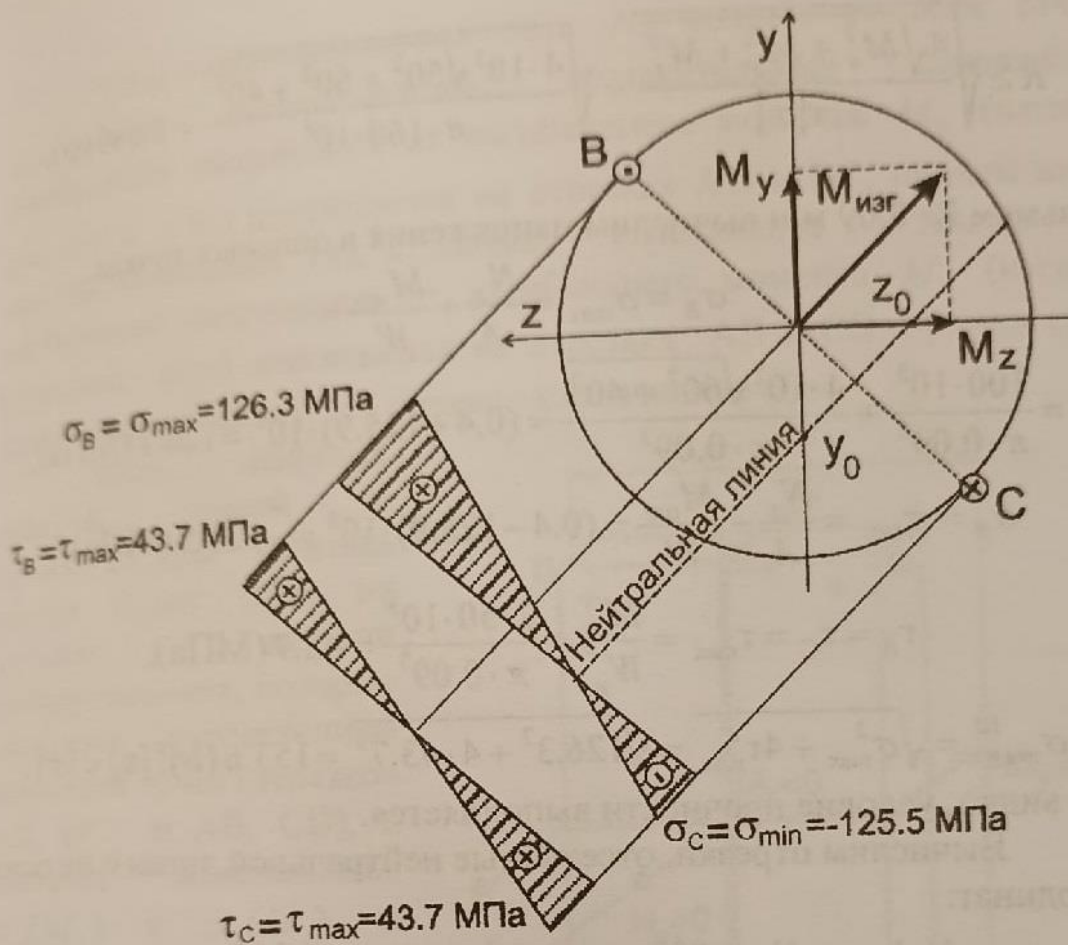


Рис. 17. Эпюры напряжений в круглом сечении

Запишем в точке В условие прочности по третьей теории прочности (теории наибольшего касательного напряжения):

$$\sigma_{\text{экв В}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 4\tau_{\text{max}}^2} = \sqrt{\left(\frac{|N_x|}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W}\right)^2 + 4 \cdot \frac{M_x^2}{W_p^2}} \leq [\sigma].$$

Учитывая, что для круглого сечения  $A = \pi R^2$ ,  $W_p = \pi R^3/2$ ,  $W = W_y = W_z = \pi R^3/4$ , а суммарный изгибающий момент  $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ , и пренебрегая вначале первым слагаемым в выражении для  $\sigma_{\text{max}}$ , получим неравенство для определения радиуса сечения:

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{4\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 10^3 \sqrt{50^2 + 60^2 + 40^2}}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0.089 \text{ (м)}.$$

Возьмем  $R=0.09$  м и вычислим напряжения в опасных точках:

$$\sigma_B = \sigma_{\max} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_{изг}}{W} =$$

$$= \frac{100 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0.09^2} + \frac{4 \cdot 10^3 \sqrt{60^2 + 40^2}}{\pi \cdot 0.09^3} = (0.4 + 125.9) \cdot 10^6 = 126.3 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_B = \sigma_{\min} = \frac{N_x}{A} - \frac{M_{изг}}{W} = (0.4 - 125.9) \cdot 10^6 = -125.5 \text{ (МПа)},$$

$$\tau_B = \tau_C = \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0.09^3} = 43.7 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_{экв}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} = \sqrt{126.3^2 + 4 \cdot 43.7^2} = 153.6 \text{ (МПа)} < [\sigma].$$

Как видно, условие прочности выполняется.

Вычислим отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат:

$$y_0 = \frac{N_x I_z}{M_z A} = \frac{N_x \cdot \pi R^4}{M_z \cdot 4 \cdot \pi R^2} = \frac{N_x \cdot R^2}{4 M_z} = \frac{100 \cdot 0.09^2}{4 \cdot (-40)} = -5 \cdot 10^{-3} \text{ (м)},$$

$$z_0 = -\frac{N_x I_y}{M_y A} = -\frac{N_x \cdot \pi R^4}{M_y \cdot 4 \cdot \pi R^2} = -\frac{N_x \cdot R^2}{4 M_y} = -\frac{100 \cdot 0.09^2}{4 \cdot 60} = -3.4 \cdot 10^{-3} \text{ (м)},$$

Таким образом,  $y_0 = -5 \text{ (мм)} < 0$ ,  $z_0 = -3.4 \text{ (мм)} < 0$  (рис.17).

На втором участке  $0 \leq x_2 \leq l_2 = 3$  м опасное сечение находится в заделке  $x_2 = 3$  м. Внутренние усилия там равны  $N_x = 120$  (кН),  $M_x = -40$  (кНм),  $M_y(3) = 240$  (кНм),  $M_z(3) = 130$  (кНм).

В сечении имеет место пространственный изгиб с кручением и растяжением-сжатием. На рис. 18 указаны знаки нормальных напряжений  $\sigma_x(N_x)$ ,  $\sigma_x(M_y)$ ,  $\sigma_x(M_z)$  в каждой из четырех четвертей координатной плоскости.

Например, продольная сила  $N_x$  создает во всех точках одинаковые растягивающие, положительные напряжения. Наибольшие напряжения от изгибающего момента  $M_y$  (изгиб в плоскости  $xOz$ ) достигаются на отрезках AD и BC, причем внизу они растягивающие (+), а наверху - сжимающие (-). Аналогично, наибольшие напряжения от изгибающего момента  $M_z$  (изгиб в плоскости  $xOy$ ) достигаются на отрезках AB и CD, причем слева они растягивающие (+), а справа - сжимающие (-).

Итак, наиболее опасной точкой в прямоугольном сечении всегда будет одна из четырех вершин прямоугольника, которые являются пересечением множеств точек (отрезков AD, BC и AB, CD), в которых максимальны  $\sigma_x(M_y)$  и  $\sigma_x(M_z)$ , а именно та, в которой знаки всех трех

слагаемых  $\sigma_x(N_x), \sigma_x(M_y), \sigma_x(M_z)$  совпадают. В данном случае это точка A. Запишем для нормальных напряжений в этой точке условие прочности по формуле (6):

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{N_x}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma].$$

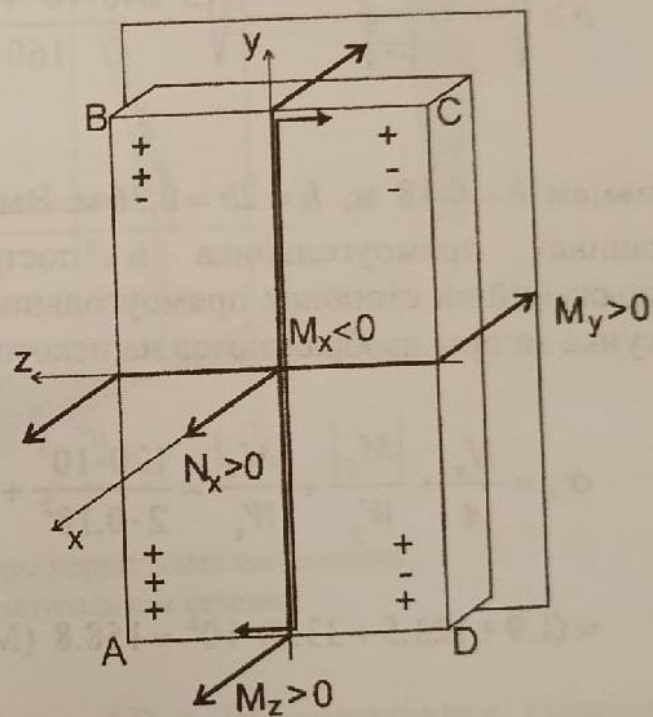


Рис. 18. Внутренние усилия и знаки нормальных напряжений в прямоугольном сечении

Если задано соотношение сторон прямоугольника, например,  $h = 2b$ , то его геометрические характеристики можно выразить через размер одной из сторон:  $A = bh = 2b^2$ ,  $W_y = b^2h/6 = 2b^3/6 = b^3/3$ ,  $W_z = bh^2/6 = 2^2 \cdot b^3/6 = 2b^3/3$ . Тогда из условия прочности, пренебрегая на первом этапе слагаемым  $N_x/A$ , получим неравенство:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3|M_y| + \frac{3}{2}|M_z|}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 240 \cdot 10^3 + 1.5 \cdot 130 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 0.179 \text{ (м)}.$$

Возьмем  $b = 0.18$  м,  $h = 2b = 0.36$  м. Вычислим теперь напряжения в вершинах прямоугольника и построим эпюры нормальных напряжений на сторонах прямоугольника (для графической ясности рисунка эпюры изображаются на некотором расстоянии – рис. 19)

$$\sigma_A = \frac{N_x}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = \frac{120 \cdot 10^3}{2 \cdot 0.18^2} + \frac{240 \cdot 10^3}{0.18^3/3} + \frac{130 \cdot 10^3}{2 \cdot 0.18^3/3} =$$

$$= (1.9 + 123.5 + 33.4) \cdot 10^6 = 158.8 \text{ (МПа)} < [\sigma] = 160 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_B = \frac{N_x}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} - \frac{|M_z|}{W_z} = 1.9 + 123.5 - 33.4 = 92 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_C = \frac{N_x}{A} - \frac{|M_y|}{W_y} - \frac{|M_z|}{W_z} = 1.9 - 123.5 - 33.4 = -155 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_D = \frac{N_x}{A} - \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = 1.9 - 123.5 + 33.4 = -88.2 \text{ (МПа)}.$$

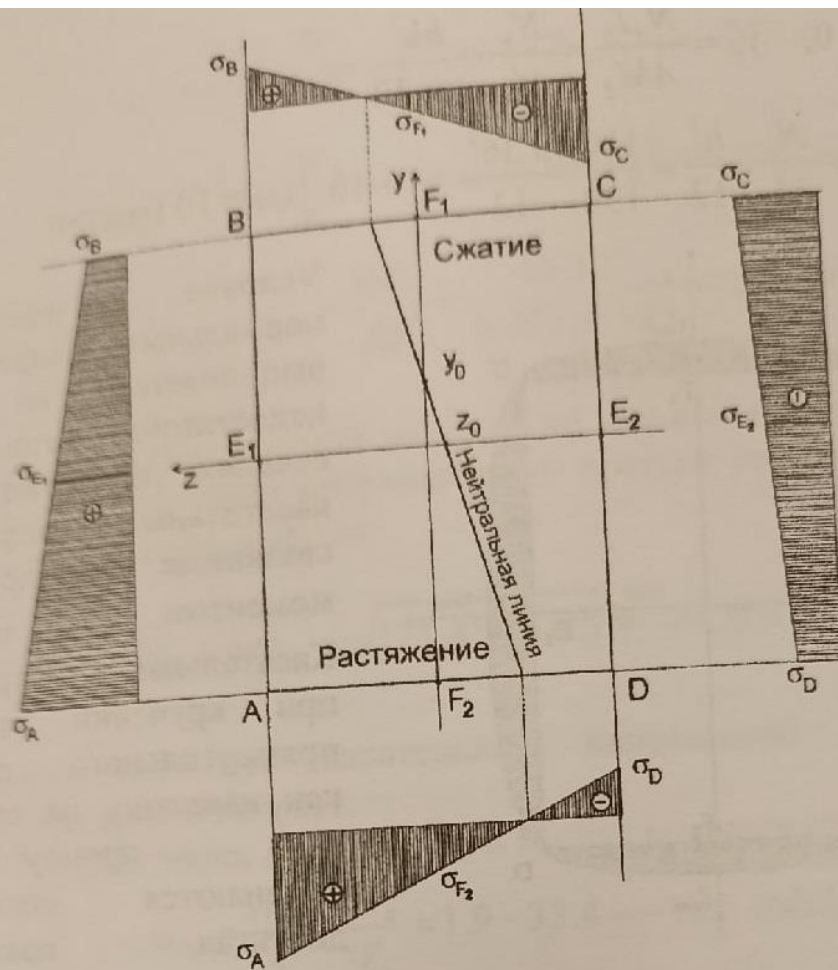


Рис. 19. Эпюры нормальных напряжений в прямоугольном сечении

Как видно, на сторонах AD и BC нормальные напряжения меняют знак, и там имеются точки, в которых  $\sigma_x = 0$ . Через эти две точки можно провести нейтральную линию, которая пересекает оси координат в точках (формула (2)):

$$y = 0, \quad z_0 = -\frac{N_x I_y}{A M_y} = -\frac{N_x}{M_y} \cdot \frac{b^3 h}{bh \cdot 12} =$$

$$= -\frac{N_x}{M_y} \cdot \frac{b^2}{12} = -\frac{120}{240} \cdot \frac{0.18^2}{12} = -1.35 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -1.35 \text{ (мм)} < 0;$$

$$z=0, \quad y_0 = \frac{N_x I_z}{AM_z} = \frac{N_x}{M_z} \cdot \frac{bh^3}{bh \cdot 12} =$$

$$= \frac{N_x}{M_z} \cdot \frac{h^2}{12} = \frac{120}{130} \cdot \frac{0.36^2}{12} \approx 10 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = 10 (\text{мм}) > 0.$$

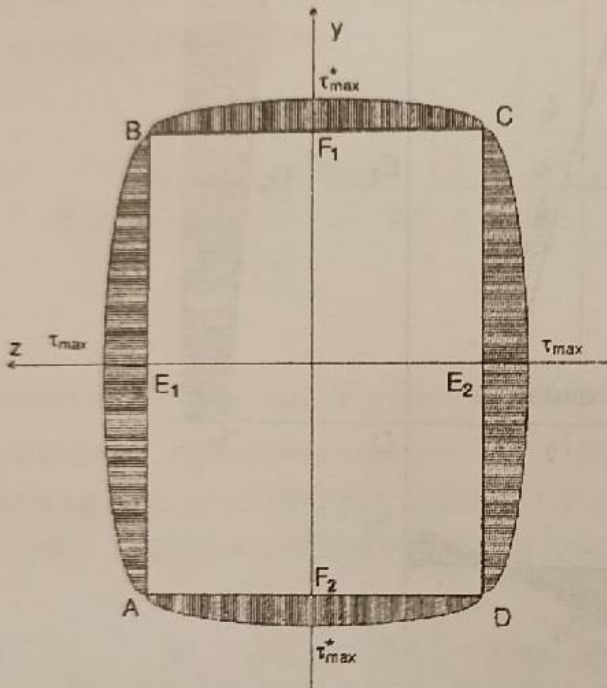


Рис. 20. Эпюры касательных напряжений в прямоугольном сечении

Условие прочности по нормальным напряжениям выполняется, но этого недостаточно, потому что в сечении действуют также касательные напряжения, связанные с крутящим моментом  $M_x$  (рис.20). Касательные напряжения при кручении стержней прямоугольного сечения, как известно, на сторонах прямоугольника изменяются нелинейно, достигая максимума в серединах сторон:

$$\tau_{E_1} = \tau_{E_2} = \tau_{\max} = \frac{M_x}{\beta b^3},$$

$$\tau_{F_1} = \tau_{F_2} = \tau_{\max}^* = \gamma \tau_{\max}.$$

Коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  определяются по табл. 1 (стр. 6) в зависимости от соотношения  $\lambda = h/b$ . В данном случае они равны  $\beta(2) = 0.493$ ,  $\gamma(2) = 0.795$ .

Сделаем в точках, где максимальны касательные напряжения. Полную проверку прочности с учетом касательных напряжений. Определим напряжения в серединах сторон прямоугольника. Т.к. у точек  $E_1$  и  $E_2$  координата  $y=0$ , то, исходя из общей формулы для нормальных напряжений

$$\sigma_{E_1} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{W_y} = 1.9 + 123.5 = 125.4 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_{E_2} = \frac{N_x}{A} - \frac{M_y}{W_y} = 1.9 - 123.5 = -121.6 \text{ (МПа)},$$

$$|\tau_{E_1}| = |\tau_{E_2}| = \tau_{\max} = \frac{|M_x|}{\beta b^3} = \frac{40 \cdot 10^3}{0.493 \cdot 0.18^3} = 13.9 \text{ (МПа)}.$$

В точке  $E_1$ , более опасной из двух по нормальным напряжениям, найдем эквивалентное напряжение по третьей теории прочности и сравним его с допускаемым:

$$\sigma_{E_1}^{III} = \sqrt{\sigma_{E_1}^2 + 4\tau_{\max}^2} = \sqrt{125.4^2 + 4 \cdot 13.9^2} = 128.4 \text{ (МПа)} \leq [\sigma].$$

Отметим, что знак касательных напряжений для проверки прочности роли не играет.

Аналогично, для точек  $F_1$  и  $F_2$ , для которых  $z=0$ :

$$\sigma_{F_1} = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{W_z} = 1.9 - 33.4 = -31.5 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_{F_2} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{W_z} = 1.9 + 33.4 = 35.3 \text{ (МПа)},$$

$$|\tau_{F_1}| = |\tau_{F_2}| = \tau_{\max}^* = \gamma \tau_{\max} = 0.795 \cdot 13.9 \approx 11 \text{ (МПа)},$$

$$\sigma_{F_1}^{III} = \sqrt{\sigma_{F_1}^2 + 4\tau_{\max}^2} = \sqrt{35.3^2 + 4 \cdot 11^2} = 40.1 \text{ (МПа)} \leq [\sigma].$$

Таким образом, условия прочности выполняются во всех опасных точках, и подбор сечения закончен.

Теперь определим перемещение конца стержня в направлении силы  $P_3$ , то есть проекцию пространственного вектора полного перемещения конца стержня на направление силы  $P_3$ .

Для нашей стержневой системы, состоящей из двух участков, воспользуемся теоремой Кастильяно (3):

$$\delta_{P_3} = \frac{\partial U}{\partial P_3} = \sum_{i=1}^2 \left( \int_{l_i} \frac{N_x}{EA} \cdot \frac{\partial N_x}{\partial P_3} dx + \int_{l_i} \frac{M_x}{GI_p} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P_3} dx + \right. \\ \left. + \int_{l_i} \frac{M_y}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial P_3} dx + \int_{l_i} \frac{M_z}{EI_z} \cdot \frac{\partial M_z}{\partial P_3} dx \right)$$

Вспользуемся ранее записанными выражениями внутренних усилий и возьмем производные:

$$1) 0 \leq x_1 \leq l_1 = 2 \text{ м} :$$

$$N_x = P_1 \Rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial P_3} = 0, \quad M_x = M_0 \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial P_3} = 0;$$

$$M_y(x_1) = P_3 \cdot x_1 \Rightarrow \frac{\partial M_y}{\partial P_3} = x_1, \quad M_z(x_1) = -P_2 \cdot x_1 \Rightarrow \frac{\partial M_z}{\partial P_3} = 0.$$

$$2) 0 \leq x_2 \leq l_2 = 3 \text{ м} :$$

$$N_x = P_6 - P_3 \Rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial P_3} = -1, \quad M_x = -P_2 l_1 \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial P_3} = 0;$$

$$M_y(x_2) = (P_1 - P_4) \cdot x_2 + P_3 l_1 \Rightarrow \frac{\partial M_y}{\partial P_3} = l_1,$$

$$M_z(x_2) = -M_0 + (P_5 - P_2) \cdot x_2 \Rightarrow \frac{\partial M_z}{\partial P_3} = 0.$$

Следовательно

$$\delta_{P_3} = \int_0^{l_1} \frac{30x_1 \cdot x_1}{EI_{y1}} dx_1 + \int_0^{l_2} \frac{120 \cdot (-1)}{EA_2} dx_2 + \int_0^{l_2} \frac{(60 + 60x_2) \cdot 2}{EI_{y2}} dx_2 = \\ = \frac{10l_1^3}{EI_{y1}} - \frac{120l_2}{EA_2} + \frac{120l_2(1 + 0.5l_2)}{EI_{y2}}$$

Чтобы вычислить перемещение  $\delta_{P_3}$ , необходимы значения геометрических характеристик сечений, которые были найдены ранее из условий прочности:

$$\delta_B = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 0.09^4} - \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 0.09^2} + \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot (1 + 0.5 \cdot 3) \cdot 12}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0.18^3 \cdot 0.36} =$$

$$= (7.76 - 0.07 + 25.72) \cdot 10^{-3} = 33.41 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 33.41 \text{ (мм)}.$$

Значение перемещения получилось положительным, и это означает, что оно направлено в одну сторону с силой  $P_3$ . Как видно, наибольший вклад в него вносит изгиб второго участка. Второе же слагаемое, связанное с растяжением первого участка, пренебрежимо мало по сравнению с первым и третьим слагаемыми, и может не учитываться при вычислении перемещений.

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Машины, механизмы, приборы, аппараты, приспособления, инструменты и другие конструкции состоят из деталей. **Деталь** – это элемент (часть) конструкции, изготовленный из одного материала без применения сборочных операций (например, вал, болт, гайка).

Совокупность деталей, соединенных посредством сборочных операций (завинчиванием, сваркой и др.) и предназначенных для совместной работы, называют **сборочной единицей (узлом)**. Простейший узел включается как составная часть в более сложный узел. Например, подшипник включается в узел опоры, а последний – в редуктор и т.д.

Несмотря на различное конструктивное оформление и назначение машин, большинство деталей и узлов в них является **типовыми (стандартными)**. К их числу относятся различные соединения (резьбовые, сварные, шлицевые и др.), передачи (зубчатые, ременные), валы, муфты и опоры, корпуса и др.

Большинство деталей машин находится под действием не статических, а переменных – систематически меняющих свою величину или величину и знак – внешних нагрузок, приводящих к возникновению переменных внутренних усилий и напряжений.

Из различных видов установившихся переменных напряжений выделяются **циклические** напряжения. Циклом изменения напряжения называют однократную смену напряжения от наименьшего значения к наибольшему и обратно. Цикл характеризуется наибольшим и наименьшим напряжениями  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  или, по-другому, средним и амплитудным напряжениями  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$  (рис.21, а). Введя понятие **коэффициента асимметрии**  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ , можно также описать параметры цикла парой  $R$  и  $\sigma_{\max}$ . Если  $R = -1$ , т.е.  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$  (или, по-другому,  $\sigma_a = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_m = 0$ ) цикл называется **симметричным**, если же  $\sigma_m \neq 0$ , то цикл называется несимметричным.

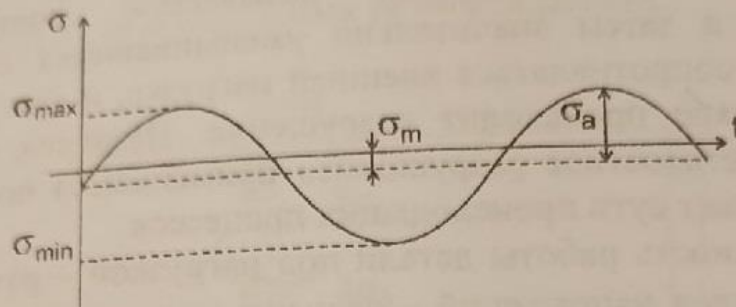
Примеры.

1) Закрепленный в опорах вал, который вращается, будучи изогнутым (рис. 21, б). Эюра нормальных напряжений при изгибе является знакопеременной, и при вращении произвольная точка попеременно попадает то в сжатую, то в растянутую зону. Таким образом, напряжения в каждой точке контура сечения изменяются циклически даже при постоянных внешних нагрузках. Если имеются продольные внешние силы, то цикл напряжений несимметричный ( $\sigma_{\max} \neq -\sigma_{\min}$ ).

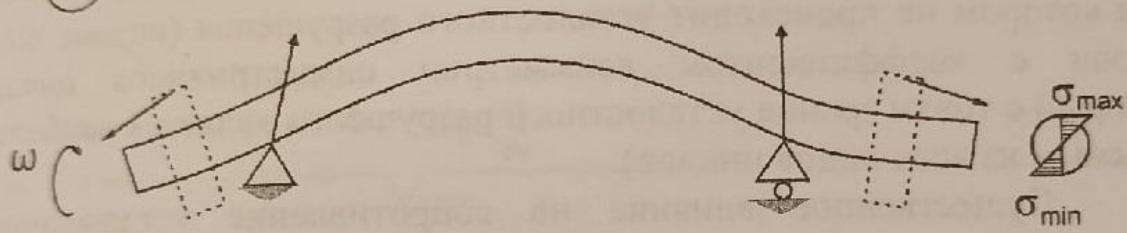
2) Тела качения и кольца в подшипнике качения в зоне контакта также испытывают циклические напряжения по так называемому отнулевому или пульсационному циклу (рис.21, в).

Еще в первой половине XIX века было замечено, что при действии циклических напряжений детали зачастую разрушаются при  $\sigma_{\max}$  значительно меньших, чем допускаемые напряжения при статических нагрузках, причем разрушение происходит внезапно, без сколько-нибудь заметных пластических деформаций, т.е. пластический материал (металл), казалось бы, ведет себя, как хрупкий. Поскольку это происходит после того, как деталь отработает некоторый срок, тогда первоначально считалось, что материал «устает», и его структура меняется, «охрупчается». Впоследствии было установлено, что причина такого разрушения –

а



б



в

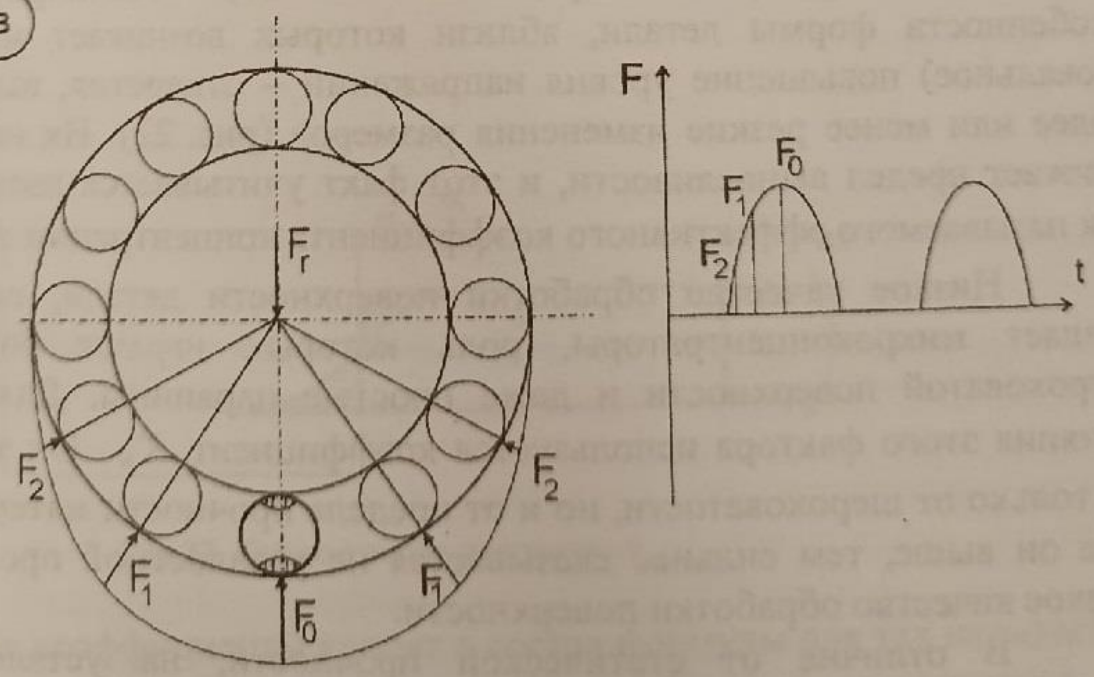


Рис.21. Примеры действия циклических напряжений

развитие трещин, которые, как правило, возникают в зонах повышенных напряжений (так называемой **концентрации напряжений**), а затем значительно уменьшившееся сечение не может больше сопротивляться внешней нагрузке, и при случайном толчке или ударе происходит разрушение. Названия «усталость материала», «усталостное разрушение» применяются по традиции, хотя и не отражает сути происходящих процессов.

Длительность работы детали под нагрузкой – разрушающее количество циклов напряжений – зависит от  $\sigma_{\max}$ . Для некоторых материалов (например, стали) существует **абсолютный предел выносливости**  $\sigma_{-1}$  (предел усталости) – такой уровень напряжений, при котором не происходит усталостного разрушения (индекс «-1» связан с коэффициентом асимметрии симметричного цикла, который с точки зрения усталостного разрушения является наиболее опасным из всех видов циклов).

Существенное влияние на сопротивление усталостному разрушению оказывают следующие факторы: наличие и характер концентраторов напряжений, качество обработки поверхности детали, абсолютные размеры детали.

Концентраторы напряжений – это геометрические особенности формы детали, вблизи которых возникает местное (локальное) повышение уровня напряжений – отверстия, выточки, более или менее резкие изменения размеров (рис. 22). Их наличие снижает предел выносливости, и этот факт учитывается введением так называемого эффективного коэффициента концентрации  $K_{\sigma}$ .

Низкое качество обработки поверхности детали, по сути создает микроконцентраторы, роль которых играют бороздки шероховатой поверхности и даже простые царапины. Для учета влияния этого фактора используется коэффициент  $K_F$ . Он зависит не только от шероховатости, но и от предела прочности материала – чем он выше, тем сильнее сказывается на усталостной прочности низкое качество обработки поверхности.

В отличие от статической прочности, на усталостную прочность увеличение размеров детали влияет отрицательно, потому что в вероятность попадания микродефектов, которые могут стать

концентраторами напряжений, в бóльший объем выше. Этот так называемый масштабный эффект учитывается коэффициентом  $K_d$ , который зависит от абсолютных размеров детали.

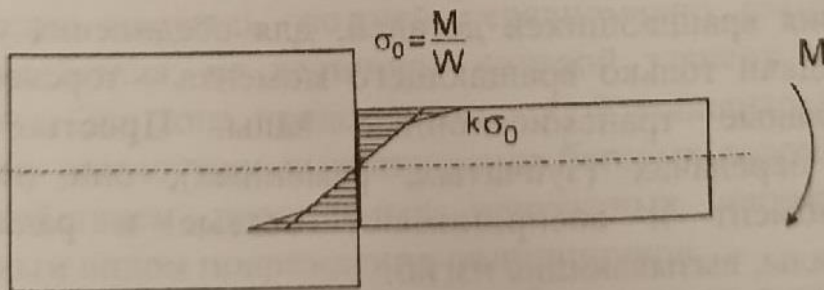
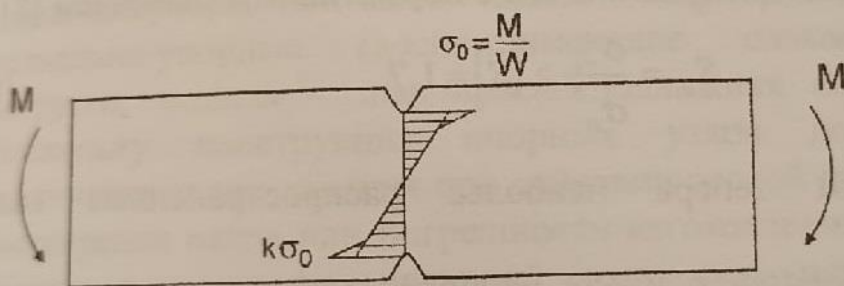
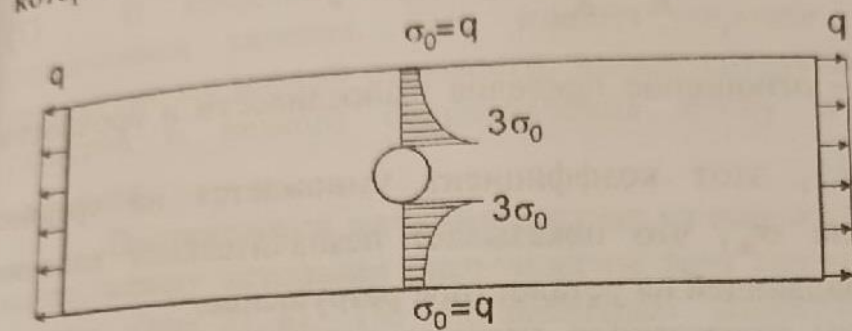


Рис.22. Концентрация напряжений

Все эти коэффициенты входят в состав формулы для так называемой приведенной амплитуды, в которой они умножаются на

амплитудное напряжение цикла  $\sigma_a$ , поскольку именно переменная составляющая напряжений приводит к развитию трещин усталости:

$$\sigma_a^* = \frac{K_\sigma}{K_F \cdot K_d} \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m. \quad (7)$$

Здесь  $\psi_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_u}$  - отношение пределов выносливости и прочности материала,  $\psi_\sigma < 1$ , этот коэффициент умножается на среднее напряжение цикла  $\sigma_m$ , что показывает незначительное влияние постоянной составляющей на усталостное разрушение.

Рассмотрим упрощенное условие усталостной прочности, основанное на вычислении коэффициента запаса  $S_\sigma$  относительно предела выносливости и сравним его с нормативным значением  $[S]$ :

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a^*} \geq [S] = 1.7. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь наиболее распространенные виды деталей машин.

**Валы** относятся к числу наиболее ответственных деталей машин. Зачастую в конструкциях используют прямые валы в форме тел вращения (гладкие или ступенчатые, сплошные или полые), устанавливаемые в подшипниковых опорах. Различают простые валы, оси, торсионные и трансмиссионные валы. Оси используются для поддержания вращающихся деталей, для соединения узлов и деталей и передачи только вращающего момента – торсионные и длинные составные трансмиссионные валы. **Простые валы** применяют в передачах (зубчатых, ременных), они передают вращающий момент и воспринимают осевые и радиальные (поперечные) силы, вызывающие изгиб.

Для обеспечения работоспособности валы и оси должны удовлетворять условиям прочности и жесткости. Для таких расчетов необходимо уметь вычислять внутренние усилия, возникающие в сечениях вала от внешних нагрузок (постоянных и переменных), которые передаются от сопряженных деталей (зубчатых колес, шкивов и др.). Расчетная схема вала обычно

представляет собой балку, шарнирно закрепленную в двух жестких опорах. Таким образом, вал работает на изгиб с растяжением-сжатием и кручением.

В качестве опорных узлов чаще всего применяют подшипники качения. Они имеют широкое распространение вследствие их низкой стоимости, взаимозаменяемости, небольших размеров и низкого сопротивления пуску и вращению под нагрузкой.

Подшипники качения состоят из наружного и внутреннего колец, между которыми расположены тела качения – шарики или ролики (рис. 21, в). По направлению относительно оси вала воспринимаемых сил подшипники делят на радиальные (воспринимают только радиальные нагрузки, действующие перпендикулярно оси вала, модель – шарнирно-подвижная опора), радиально-упорные (воспринимающие одновременно осевые нагрузки, модель – шарнирно-неподвижная опора) и упорные. Поскольку конструкция опорных узлов должна исключать заклинивания тел качения при действии осевой нагрузки, теплового расширения валов или погрешности изготовления, одна опора вала обычно делается фиксирующей (радиально-упорной), а другая – плавающей (радиальной).

При взаимодействии тела качения и кольца подшипника возникают значительные переменные контактные напряжения (рис. 21, в). Зона контакта тела качения о кольца имеет некоторую площадь, по ней неравномерно распределяется сила взаимодействия, от величины которой зависит и площадь зоны контакта. Эта зона представляет собой концентратор напряжений. Поэтому усталостное выкрашивание беговых дорожек и тел качения под действием переменных контактных напряжений является основным видом повреждения подшипников.

Узел подшипника должен обеспечивать восприятие осевых и радиальных сил, а также исключать осевое смещение вала, нарушающее нормальную работу сопряженных деталей. Это достигается за счет крепления подшипников на валах и фиксированием их в корпусе. При этом наружное кольцо устанавливается в корпус по посадке с зазором, а соединение вала с

внутренним кольцом подшипника осуществляется по посадке с натягом (механической напрессовкой или тепловым способом, при котором при сборке создается значительная разница температур вала и кольца). Такая посадка - сильный концентратор напряжений, обуславливающий пониженную усталостную прочность.

Для передачи механической энергии (движения) от двигателя к исполнительному органу машины или прибора обычно применяют передаточные механизмы. Среди них ведущее место занимают **механические передачи**. В зависимости от метода силового «замыкания» звеньев различают передачи зацеплением и трением.

В число передач зацеплением входят **зубчатые передачи**, в которых движение между звеньями (зубчатыми колесами) передается с помощью последовательно зацепляющихся зубьев. Рассмотрим, например, косозубую (линии зубьев наклонны) цилиндрическую (оси колес параллельны) зубчатую передачу (рис. 23, а). Колесо, насаженное на вал (здесь также возможна посадка с натягом или иной способ стопорения), зацепляется с другим, входящим в другой узел.

Колеса вращаются в разных направлениях, передаточное отношение угловых скоростей вращения обратно отношению количества зубьев на колесах. В каждый момент контактирует между собой только пара зубьев, принадлежащих разным колесам. На рис. 23, б показано плоское сечение зоны контакта, в котором точка касания контуров рабочих поверхностей зубьев обозначена буквой П (в реальности касание происходит по отрезку прямой, перпендикулярной плоскости чертежа). В точке П приложена нормальная сила взаимодействия между парой зубьев  $P_n$  - равнодействующая контактных усилий, в реальности распределенных по небольшой площадке. В плоскости чертежа она направлена по общей нормали к контурам рабочих поверхностей зубьев в точке П, так что ее момент относительно оси колеса численно равен передаваемому им внешнему моменту  $M$ . Силу  $P_n$  раскладывают на составляющие - окружную (тангенциальную)  $P_t$ , радиальную  $P_r$  и осевую  $P_x$ .

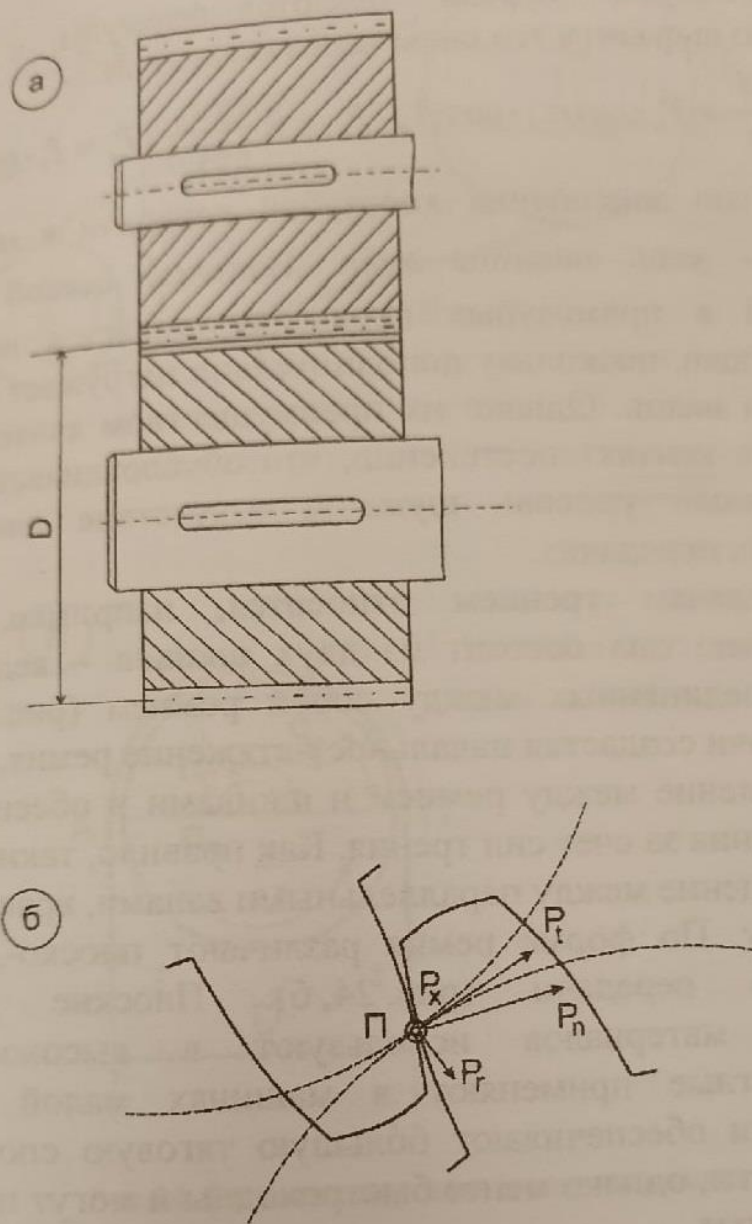


Рис.23. Зубчатая передача и возникающие в ней силы

Сила  $P_t$  направлена по касательной к расположенной в плоскости чертежа так называемой начальной окружности, имеющей центр в центре колеса и проходящей через точку зацепления П, сила  $P_r$  - по радиусу этой окружности, а сила  $P_x$  - перпендикулярно плоскости чертежа вдоль оси вала.

Для косозубых передач имеются формулы, с помощью которых можно выразить эти силы через момент  $M$ :

$$P_t = \frac{2M}{D} = P_n \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \beta, \quad P_r = P_t \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta}, \quad P_x = P_t \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Здесь  $\alpha_n$  - угол зацепления косозубой передачи в нормальном сечении,  $\beta$  - угол наклона зуба. Наличие осевой сила  $P_x$ , отсутствующей в прямозубых передачах, является недостатком косозубых передач, поскольку дополнительно нагружает радиально-упорные опоры валов. Однако их преимуществом является то, что зубья входят в контакт постепенно, что обуславливает плавность хода, пониженный уровень шума и отсутствие динамических нагрузок в таких передачах.

К передачам трением относится, например, ременная передача. Обычно она состоит из двух шкивов - ведущего 1 и ведомого 2, соединенных между собой ремнем (рис. 24, а). При монтаже передачи создается начальное натяжение ремня, создающее контактное давление между ремнем и шкивами и обеспечивающее передачу вращения за счет сил трения. Как правило, таким способом передается вращение между параллельными валами, вращающимися в одну сторону. По форме ремня различают плоско-, кругло- и клиноременную передачи (рис. 24, б). Плоские ремни из синтетических материалов используют в высокоскоростных передачах, круглые применяют в машинах малой мощности. Клиновые ремни обеспечивают большую тяговую способность и меньшие габариты, однако менее быстроходны и могут применяться лишь как открытые.

Достоинства ременной передачи - простота, дешевизна, способность передавать движение на большие расстояния и работать с высокими скоростями, плавность работы, отсутствие смазки. Недостатки - невысокая долговечность ремня, большие габариты, значительные нагрузки на валы и опоры.

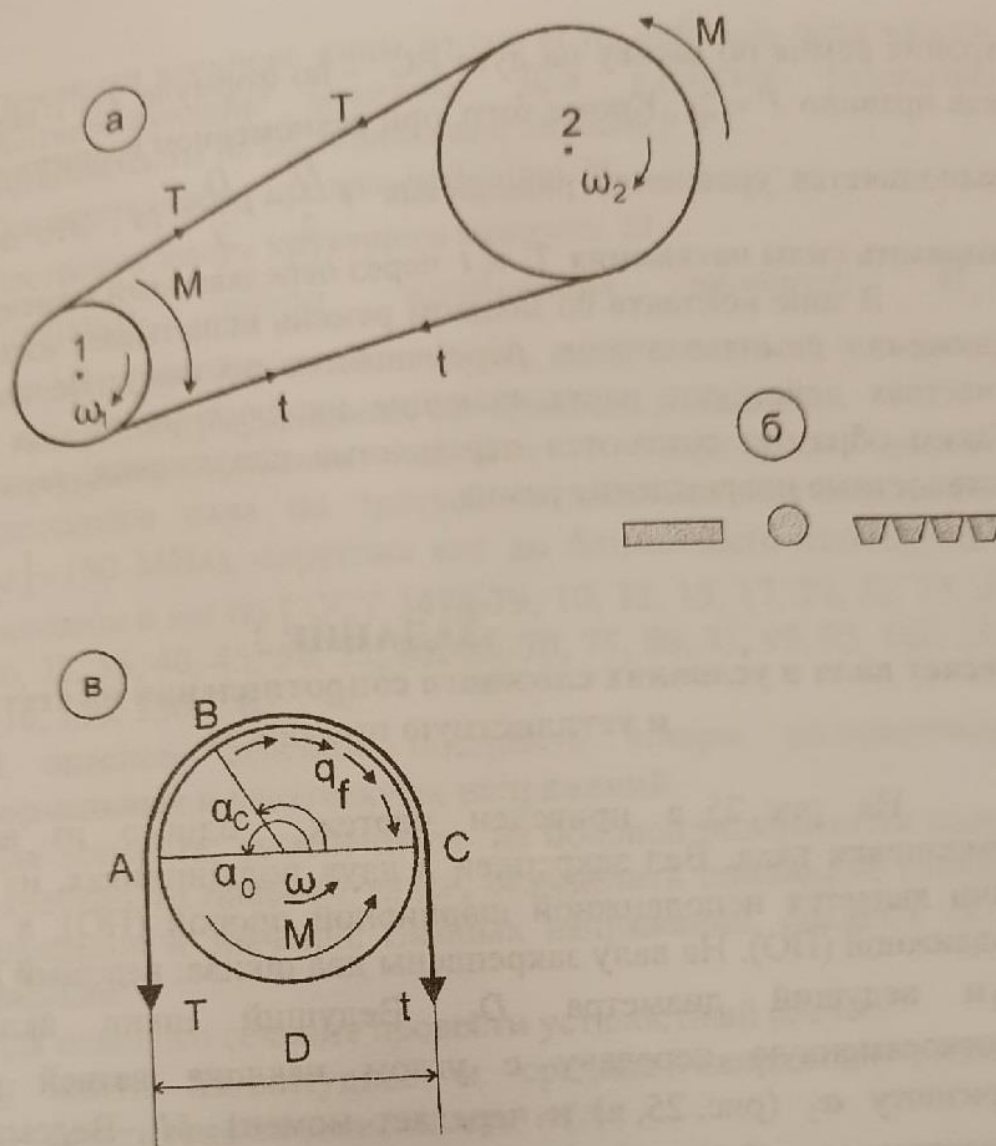


Рис.24. Ременная передача и возникающие в ней силы

Силы натяжения набегающей и сбегающей ветвей ремня -  $T$  и  $t$  - отличаются за счет наличия силы трения на некоторой части дуги  $AC$ , определяемой так называемым углом охвата  $\alpha_0$  (рис. 24, в). На дуге  $AB$  ремень находится в покое, на дуге  $BC$ , определяемой углом скольжения  $\alpha_c$ , скользит. Это происходит вследствие разницы деформаций  $\varepsilon(T) - \varepsilon(t)$ , которая распространяется вдоль ремня по дуге обхвата. Соотношение сил натяжения определяется через  $f^*$  - приведенный коэффициент

трения ремня по шкиву на дуге ВС – по формуле  $T = t \cdot \exp(f^* \alpha_c)$ , как правило  $T = 2t$ . Кроме того, при равномерном вращении шкивов выполняется уравнение равновесия  $T \frac{D}{2} - t \frac{D}{2} = M$ . Это позволяет выразить силы натяжения  $T$  и  $t$  через передаваемый момент  $M$ .

В зоне контакта со шкивом ремень испытывает изгиб, и при движении ремня эта зона перемещается по нему. На свободных участках действуют растягивающие напряжения от сил  $T$  и  $t$ . Таким образом, создаются переменные напряжения, вызывающие усталостные повреждения ремня.

### ЗАДАНИЕ 3

#### Расчет вала в условиях сложного сопротивления на статическую и усталостную прочность

На рис. 25, а приведен чертеж одного из вариантов компоновки вала. Вал закреплен в двух подшипниках, из которых один является неподвижной шарнирной опорой (НО), а другой – подвижной (ПО). На валу закреплены два шкива: ведомый диаметра  $D_1$  и ведущий диаметра  $D_2$ . Ведущий шкив включен в плоскоремennую передачу с углом наклона ветвей ремня к горизонту  $\alpha_2$  (рис. 25, в) и передает момент  $M$ . Ведомый шкив представляет собой зубчатое колесо, находящееся в зацеплении с другим зубчатым колесом в точке, определяемой углом  $\alpha_1$  (рис. 25, б). Исходные данные выбираются по таблицам 4 - 6 в соответствии с шифром, определенным студенту.

1. Начертить в аксонометрии схему вала, соблюдая масштаб.
2. Определить силы давления шкивов на вал, приняв
  - а) для зубчатого колеса радиальная сила  $P_r = 0.4 \cdot P_t$ , осевая сила  $P_x = 0.3 \cdot P_t$ , где  $P_t$  – окружная сила;
  - б) для плоскоремennой передачи  $T = 2t$ .