Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Факультет городского строительства
и жилищно-коммунального хозяйства

Кафедра математики

СПбГАСУ
1832

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В СЛУЧАЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Санкт-Петербург
2012

Министерство образования и науки
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Факультет городского строительства
и жилищно-коммунального хозяйства

Кафедра математики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В СЛУЧАЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рабочая программа, методические указания
и контрольные задания

Санкт-Петербург
2012

УДК 517.22 + 517.968+519.95 (075.8)

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доцент Е. К. Ершов (СПбГАСУ)

Дифференциальное и интегральное исчисление в случае функции одной переменной: рабочая программа, методические указания и контрольные задания / сост.: Г. В. Красоленко, Н. В. Сванидзе, Г. В. Якунина; СПбГАСУ. – СПб., 2012. – 44 с.

Даются методические рекомендации по выполнению индивидуального домашнего задания (третьей и четвертой контрольных работ) по курсу высшей математики «Дифференциальное и интегральное исчисление в случае функции одной переменной». Приводятся варианты контрольных работ.

Предназначены для студентов факультета безотрывной формы обучения.

Ил. 4. Библиогр.: 9 назв.

Введение

Прежде чем приступать к выполнению контрольных работ, необходимо ознакомиться с «Рабочей программой» и изучить соответствующий теоретический материал по учебникам, указанным в разделе «Рекомендуемая литература».

Во время экзаменационной сессии для студентов безотрывной формы обучения читаются установочные лекции и проводятся практические занятия, которые носят обзорный характер.

К сдаче экзамена или зачета допускаются студенты, контрольные работы которых проверены и зачтены преподавателями кафедры математики.

Следует обратить внимание на оформление контрольной работы. На титульном листе должны быть указаны:

- фамилия, имя, отчество;
- номер студенческого билета (или зачетной книжки);
- специальность;
- название дисциплины и номер контрольной работы;
- номер варианта.

Номер варианта, который должен выполнять студент, соответствует ***последней цифре*** номера студенческого билета (или зачетной книжки). Цифре 0 (ноль) соответствует вариант № 10.

1. Рабочая программа курса высшей математики

Дифференциальное исчисление в случае функции одной переменной

1. Геометрическая и механическая задачи, приводящие к понятию производной (задача о построении касательной к кривой и задача о вычислении скорости материальной точки).

2. Производная функции. Ее геометрическая и механическая трактовки.

3. Непрерывность функции, имеющей производную. Необходимое условие существования производной и его недостаточность.

4. Основные правила нахождения производных (суммы и произведения нескольких функций, частного двух функций, сложной функции, обратной функции). Производная постоянной. Производные основных элементарных функций. Таблица производных. Производная неявно заданной функции и функции, заданной в параметрической форме.

5. Касательная и нормаль к плоской кривой и их уравнения.

6. Производные высших порядков. Механическая трактовка второй производной.

7. Теоремы о средних значениях дифференцируемых функций (теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).

8. Основные виды неопределенностей. Раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ с помощью правила Лопиталя.

9. Возрастание и убывание функции. Необходимые и достаточные условия возрастания, убывания и постоянства функции.

10. Экстремум функции (локальный максимум и локальный минимум). Необходимое условие существования экстремума дифференцируемой функции и его недостаточность. Острый экстремум. Два варианта достаточных условий существования экстремума дифференцируемой функции.

11. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на замкнутом промежутке.

12. Выпуклость вверх и выпуклость вниз плоской кривой. Необходимые и достаточные условия выпуклости вверх и выпуклости вниз плоской кривой. Точки перегиба. Необходимое условие существования точки перегиба дифференцируемой функции и его недостаточность. Достаточные условия существования точки перегиба кривой.

13. Асимптота кривой. Нахождение вертикальных и наклонных асимптот.

14. Исследование функций, заданных в явной аналитической форме, и построение их графиков.

15. Дифференциал функции. Дифференциал как главная линейная часть приращения функции. Геометрическая трактовка дифференциала функции. Основные правила вычисления дифференциалов суммы и произведения нескольких функций, частного двух функций, сложной функции. Дифференциал постоянной функции. Инвариантность формы дифференциала функции.

16. Приближенные вычисления с помощью дифференциалов.

17. Понятие о длине дуги плоской кривой. Дифференциал длины дуги плоской кривой, его выражение в декартовой и полярной системах координат.

18. Кривизна плоской кривой. Вычисление кривизны плоской кривой в декартовой системе координат.

19. Окружность кривизны, ее центр и радиус. Выражение радиуса кривизны и координат центра кривизны в декартовой системе координат. Эволюта плоской кривой и ее свойства.

20. Понятие вектор-функции скалярного аргумента. Годограф вектор-функции скалярного аргумента.

21. Уравнения пространственной кривой в векторно-параметрической и параметрической формах. Винтовая линия и ее параметрические уравнения.

22. Предел, приращение, производная и дифференциал вектор-функции скалярного аргумента. Орт касательной к годографу. Основные правила дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента.

23. Уравнение касательной к пространственной кривой.

24. Вторая производная вектор-функции скалярного аргумента. Соприкасающаяся плоскость. Главная нормаль к годографу и ее орт. Кривизна годографа. Выражение кривизны годографа через первую и вторую производные вектор-функции скалярного аргумента.

Интегральное исчисление в случае функции одной переменной. Формулы Тейлора и Маклорена. Гиперболические функции

1. Понятие о первообразной функции и неопределенном интеграле.
2. Основные свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Интегрирование методом замены переменной.
5. Интегрирование по частям.
6. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе.
7. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.
8. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.
9. Интегрирование рациональных дробей.
10. Интегралы от произведения синуса и косинуса различных аргументов.
11. Интегралы от произведения степеней синуса и косинуса одного аргумента.
12. Вычисление интегралов от иррациональных функций вида $\int R(x, \sqrt[\alpha]{ax+b}, \sqrt[\beta]{ax+b}, ..., \sqrt[\gamma]{ax+b})\,dx$.
13. Вычисление интегралов от иррациональных функций вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+b})\,dx$ с помощью тригонометрических подстановок Эйлера.
14. О функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции.
15. Геометрическая задача, приводящая к понятию об определенном интеграле. Определенный интеграл от непрерывной функции по конечному промежутку как предел интегральной суммы Римана. Геометрическая трактовка определенного интеграла.
16. Основные свойства определенного интеграла.
17. Теорема Барроу. Дифференцирование определенного интеграла по параметру, от которого зависят пределы интегрирования.
18. Формула Ньютона – Лейбница.
19. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
20. Теорема о среднем значении.
21. Формулы Тейлора и Маклорена. Выражение остаточного члена формул Тейлора и Маклорена в форме Лагранжа.
22. Гиперболические функции вещественного аргумента и их свойства.
23. Несобственные интегралы.
24. Вычисление площадей плоских фигур.
25. Вычисление объемов тел вращения.
26. Вычисление длин дуг плоских кривых.
27. Вычисление площадей поверхностей вращения.

2. Примерный вариант контрольной работы № 3 по дифференциальному исчислению в случае функции одной переменной

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = 5^{\operatorname{arctg} x^2} \operatorname{tg} \sqrt{x} - \dfrac{4}{\sqrt[5]{x^2}} + 2$;

б) $y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\cos^3 \dfrac{1}{x}}$.

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos t}, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos t}, \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Показать, что функция $y = \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$ является решением дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.

4. Написать уравнение касательной к параболе $y = (x-2)^2$ в точке ее пересечения с осью Oy. Построить параболу $y = (x-2)^2$ и ее касательную в декартовой системе координат.

5. Тело движется прямолинейно по закону $s = \dfrac{4}{3}t^3 - 20t + 5$, где t измеряется в секундах, а s – в метрах. Определить скорость и ускорение в момент времени $t = 2$ с.

Решение задачи № 1

В этой задаче требуется найти производные функций, заданных явно.

В примере а) функция

$$y = 5^{\operatorname{arctg} x^2} \operatorname{tg} \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}} + 2$$

представляет собой сумму трех функций: $y = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$,

где $y_1(x) = 5^{\operatorname{arctg} x^2} \operatorname{tg} \sqrt{x}$; $y_2(x) = -\dfrac{4}{\sqrt[5]{x^2}}$; $y_3(x) = 2$.

По правилу дифференцирования суммы трех функций имеем

$$y' = y'_1 + y'_2 + y'_3.$$

Найдем производную функции $y_1(x)$. Для этого сначала воспользуемся правилом дифференцирования произведения двух функций

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

в результате получаем, что

$$y'_1(x) = (5^{\operatorname{arctg} x^2})' \operatorname{tg} \sqrt{x} + 5^{\operatorname{arctg} x^2} (\operatorname{tg} \sqrt{x})'. \qquad (1)$$

Для вычисления производных, входящих в это выражение, воспользуемся теоремой о дифференцировании сложной функции.

Теорема (цепное правило). *Пусть функция $u = g(x)$ имеет в точке x_0 производную $g'(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в точке $u_0 = g(x_0)$ производную $f'(g(x_0))$.*

Тогда сложная функция $y = F(x) = f(g(x))$ имеет в точке x_0 производную

$$F'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0).$$

Функция $y = f(u)$ называется *внешней функцией*, а $u = g(x)$ – *внутренней функцией*. (Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней функции.)

В обозначениях Лейбница эта теорема формулируется более изящно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Применим цепное правило для вычисления производной функции $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$. Для этого положим $g(x) = \sqrt{x}$ и $f(u) = \operatorname{tg} u$. Тогда

$F(x) = f(g(x)) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$. Так как $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ и $f'(u) = \dfrac{1}{\cos^2 u}$, то имеем $F'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

В обозначениях Лейбница те же вычисления принимают вид

$$\frac{d(\operatorname{tg}\sqrt{x})}{dx} = \frac{d(\operatorname{tg}\sqrt{x})}{d(\sqrt{x})} \cdot \frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad (2)$$

Здесь при вычислении производной $\dfrac{d(\operatorname{tg}\sqrt{x})}{d(\sqrt{x})}$ с функцией $\sqrt{x}$ обращаемся как с единым символом.

Конечно, цепное правило можно применять повторно. Вычисляя производную функции $y = 5^{\operatorname{arctg} x^2}$, получаем

$$\frac{d(5^{\operatorname{arctg} x^2})}{dx} = \frac{d(5^{\operatorname{arctg} x^2})}{d(\operatorname{arctg} x^2)} \frac{d(\operatorname{arctg} x^2)}{d(x^2)} \frac{d(x^2)}{dx} =$$

$$= 5^{\operatorname{arctg} x^2} \ln 5 \frac{1}{1+(x^2)^2}\, 2x. \qquad (3)$$

Подставляя вычисленные производные (2) и (3) в выражение (1), имеем

$$y_1'(x) = 5^{\operatorname{arctg} x^2} \ln 5 \frac{1}{1+x^4}\, 2x \operatorname{tg}\sqrt{x} + 5^{\operatorname{arctg} x^2} \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Для завершения решения примера а) вычисляем производные функций $y_2(x)$ и $y_3(x)$:

$$y_2'(x) = \left(-\frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}\right)' = -4(x^{-\frac{2}{5}})' = -4\left(-\frac{2}{5}\right)x^{-\frac{2}{5}-1} = \frac{8}{5}x^{-\frac{7}{5}} = \frac{8}{5x^{\frac{7}{5}}} = \frac{8}{5\sqrt[5]{x^7}};$$

$$y_3'(x) = (2)_x' = 0.$$

Окончательно получаем

$$y'(x) = 5^{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \ln 5 \cdot \frac{2x}{1+x^4} \cdot \operatorname{tg}\sqrt{x} + 5^{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} + \frac{8}{5\sqrt[5]{x^7}}.$$

В примере *б*) функция $y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\cos^3 \frac{1}{x}}$ представляет собой частное двух сложных функций. Применяя правило дифференцирования частного, получаем

$$y' = \frac{(\ln(x^2+1))' \cdot \cos^3\frac{1}{x} - \ln(x^2+1) \cdot \left(\cos^3\frac{1}{x}\right)'}{\left(\cos^3\frac{1}{x}\right)^2}. \qquad (4)$$

С помощью цепного правила вычислим производные функций, входящие в правую часть выражения (4):

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{d\ln(x^2+1)}{d(x^2+1)} \cdot \frac{d(x^2+1)}{dx} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1};$$

$$\left(\cos^3\frac{1}{x}\right)' = \frac{d\left(\cos\frac{1}{x}\right)^3}{d\left(\cos\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{d\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{d\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = 3\left(\cos\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(-\sin\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

После подстановки этих производных в формулу (4) окончательно получаем

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot \cos^3\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\ln(x^2+1) \cdot \cos^2\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}}{\cos^6\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot \cos\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\ln(x^2+1) \cdot \sin\frac{1}{x}}{\cos^4\frac{1}{x}}.$$

Решение задачи № 2

В этой задаче требуется найти производную функции $y(x)$, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) = \sqrt{\cos t}, \\ y = y(t) = \ln\cos t. \end{cases}$$

Для этого воспользуемся формулой

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)},$$

которая позволяет вычислить значение производной y'_x от функции, заданной в параметрической форме, не находя непосредственной зависимости y от x.

Вычислим производные $x'_t(t)$ и $y'_t(t)$:

$$x'_t(t) = (\sqrt{\cos t})'_t = \frac{1}{2\sqrt{\cos t}}(\cos t)'_t = \frac{1}{2\sqrt{\cos t}}(-\sin t) = -\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}};$$

$$y'_t(t) = (\ln\cos t)'_t = \frac{1}{\cos t}(\cos t)'_t = -\frac{\sin t}{\cos t}.$$

Следовательно,

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{-\dfrac{\sin t}{\cos t}}{-\dfrac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}} = \frac{\sin t \cdot 2\sqrt{\cos t}}{\cos t \cdot \sin t} = \frac{2}{\sqrt{\cos t}}.$$

Обратите внимание, что производная y'_x от функции, заданной в параметрической форме, также оказывается функцией, заданной в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos t}, \\ y'_x(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\cos t}}. \end{cases}$$

Замечание. Пусть параметр t меняется в интервале $0 \le t < \dfrac{\pi}{2}$. Тогда переменная x меняется в интервале $0 < x \le 1$ и (в нашем случае, исключая параметр t из параметрических уравнений) можно получить явное задание функции $y = 2\ln x$ и ее производной $y'_x = \dfrac{2}{x}$.

Решение задачи № 3

В этой задаче требуется показать, что функция $y = \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Для этого нужно найти ее первую и вторую производные, подставить их в левую часть уравнения и убедиться в справедливости полученного равенства.

Используя цепное правило, вычислим предварительно производные следующих сложных функций:

$$(\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}; \ (\cos 2x)' = -2\sin 2x \ \text{и} \ (\sin 2x)' = 2\cos 2x.$$

Тогда

$$y' = (\mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + \sin 2x))' = (\mathrm{e}^{-x})'(\cos 2x + \sin 2x) + \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)' =$$

$$= -\mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + \sin 2x) + \mathrm{e}^{-x}(-2\sin 2x + 2\cos 2x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x).$$

Вычислим вторую производную. По определению вторая производная есть первая производная от первой производной:

$$y'' = (y')' = (\mathrm{e}^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x))' = (\mathrm{e}^{-x})'(\cos 2x - 3\sin 2x) +$$

$$+ \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x)' = -\mathrm{e}^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x) + \mathrm{e}^{-x}(-2\sin 2x - 6\cos 2x) =$$

$$= \mathrm{e}^{-x}(-7\cos 2x + \sin 2x).$$

Подставим теперь функцию $y = \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$ и найденные ее производные в левую часть уравнения:

$$y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x}(-7\cos 2x + \sin 2x) + 2\mathrm{e}^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x) +$$

$$+ 5\mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + \sin 2x).$$

Вынесем общий множитель e^{-x} и сгруппируем слагаемые, содержащие функции $\cos 2x$ и $\sin 2x$, в результате получаем:

$$y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x}((-7 + 2 + 5)\cos 2x + (1 - 6 + 5)\sin 2x) = 0.$$

Равенство нулю значения левой части уравнения показывает, что функция $y = \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение задачи № 4

Напомним одно из определений производной и ее геометрический смысл.

Определение. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* x_0. *Функция имеет производную* k *в точке* x_0, *если она допускает следующее представление:*

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + r(x)(x - x_0),$$

где

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = 0,$$

или, что то же самое,

$$r(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \text{ и } r(x_0) = 0.$$

График ***линейной функции***

$$y = f(x_0) + k(x - x_0), \text{ где } k = f'(x_0),$$

есть прямая, которая называется ***касательной к графику функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** $(x_0, f(x_0))$.

Если касательная составляет угол α *с положительным направлением оси Ox, то число* $k = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ *называется* ***угловым коэффициентом (или наклоном) касательной*** (рис. 1).

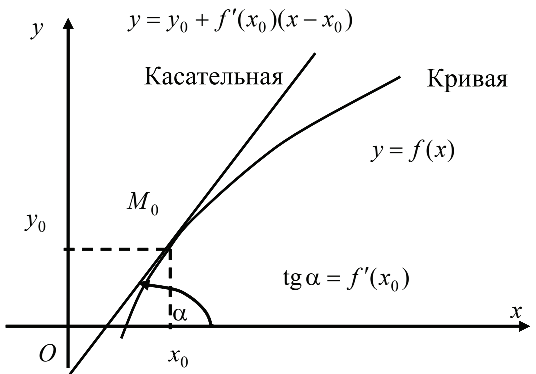

Рис. 1

Число $r(x)(x - x_0)$ указывает ошибку, которую мы допускаем, если при вычислении значения $f(x)$ в точках x, близких к x_0, заменяем график функции $y = f(x)$ ее касательной в точке $(x_0, f(x_0))$.

Приступим к решению нашей задачи. Для этого найдем координаты точки касания $M_0(x_0, f(x_0)$. Так как M_0 одновременно является точкой пересечения параболы с осью Oy, то абсцисса $x_0 = 0$ и, следовательно, ордината точки касания

$$y_0 = f(x_0) = (x_0 - 2)^2 = 4.$$

Найдем угловой коэффициент касательной $k = f'(x_0)$. Для этого вычислим производную $f'(x) = ((x-2)^2)' = 2(x-2)$ и найдем ее значение в точке $x_0 = 0$. Таким образом,

$$k = f'(x_0) = 2(x_0 - 2) = -4.$$

Уравнение касательной к параболе в точке $M_0(0;4)$с угловым коэффициентом $k = f'(x_0) = -4$ будет иметь вид

$$y = 4 - 4(x - 0) \text{ или } y = -4x + 4.$$

Осталось построить параболу $y = (x-2)^2$ и ее касательную $y = -4x + 4$ в декартовой системе координат.

Прямую $y = -4x + 4$ строим по двум точкам: $M_0(0;4)$ и $M_1(1;0)$ (рис. 2).

Парабола $y = (x-2)^2$имеет вершину в точке $A(2;0)$, и ее ветви направлены вверх. Прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы.

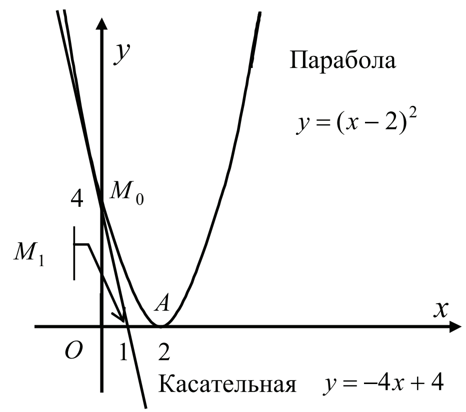

Рис. 2

Решение задачи № 5

Условимся, что при решении задач, использующих размерные величины, будем применять основные единицы измерения международной системы СИ.

Напомним механический смысл первой и второй производных.

Рассмотрим частицу, движущуюся вдоль прямой (прямолинейное движение). Под частицей понимается тело, размерами которого можно пренебречь, так что его можно считать математической точкой. Выберем на прямой, по которой движется наша точка, точку O и положительное направление. Длину будем измерять в метрах, а время в секундах. Выберем, далее, момент времени, начиная с которого отсчитывается время.

Таким образом, предполагаем, что частица движется вдоль числовой прямой и это движение описывается функцией $s = s(t)$, сопоставляющей каждому моменту времени t координату s частицы в этот момент.

Тогда

скорость $v = v(t)$ ***частицы есть первая производная пути по времени:*** $v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$;

ускорение $a = a(t)$ ***частицы есть первая производная скорости по времени:*** $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$***, или вторая производная пути по времени:***

$a(t) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{ds(t)}{dt} = \dfrac{d^2 s(t)}{dt^2}$.

Здесь использованы для производных «громоздкие» обозначения Лейбница, которые позволяют легко определить размерность скорости и ускорения при любом выборе единиц измерения, в нашем случае $[v]$ = м/с и $[a]$ = м/с^2 (квадратные скобки используются для обозначения размерности величины, стоящей внутри них). Компактные обозначения производных Лагранжа $v = s'(t)$ и $a = s''(t)$ такими достоинствами не обладают.

Приступим к решению нашей задачи. Так как тело (частица) движется прямолинейно по закону $s = \dfrac{4}{3}t^3 - 20t + 5$, то его скорость

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{4}{3}t^3 - 20t + 5\right)' = \frac{4}{3}(t^3)' - 20(t)' + (5)' =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot 3t^2 - 20 = (4t^2 - 20) \text{ м/с};$$

ускорение

$$a(t) = v'(t) = (4t^2 - 20)' = (4t^2)' - (20)' = 8t \text{ м/с}^2.$$

Вычислим скорость и ускорение в момент времени $t = 2$ с:

$$v(2) = 4\cdot 2^2 - 20 = 16 - 20 = -4 \text{ м/с}$$

(скорость есть векторная величина, отрицательное ее значение соответствует направлению, противоположному выбранному нами положительному направлению на прямой);

$$a(2) = 8\cdot 2 = 16 \text{ м/с}^2.$$

3. Примерный вариант контрольной работы № 4 по интегральному исчислению в случае функции одной переменной

Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{x+\operatorname{arctg}^3 x}{x^2+1}dx$;

б) $\int e^x \arcsin e^x \, dx$;

в) $\int \sin^2 6x \cos^2 6x \, dx$.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$ и $x + y = 6$.

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 8x - 12$ и $y = 0$.

Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Перед выполнением контрольной работы № 4 полезно ознакомиться с учебными пособиями [6 и 7], которые содержат необходимый теоретический материал и решения большого количества примеров. Задачи 2 и 3 взяты из учебного пособия [7].

Решение задачи № 1

В этой задаче требуется вычислить неопределенные интегралы, то есть найти функции, производные от которых равны подынтегральным функциям, стоящим в этих интегралах.

Основой вычисления неопределенных интегралов являются: таблица неопределенных интегралов основных элементарных функций; свойства неопределенных интегралов; теорема о замене переменной и формула интегрирования по частям [1, 2 и 6].

Решение примера а)

Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$I = \int \frac{x+\operatorname{arctg}^3 x}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{x^2+1}dx = I_1 + I_2$$

и воспользуемся теоремой о замене переменной для вычисления интегралов I_1 и I_2.

В интеграле

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

сделаем замену переменной $t = x^2+1$. Тогда $x = \pm\sqrt{t-1}$ и, вспоминая определение дифференциала функции, находим, что

$$dx = (\pm\sqrt{t-1})'\,dt = \pm\frac{1}{2\sqrt{t-1}}dt\,.$$

В результате интеграл I_1 преобразуется к виду

$$I_1 = \int \frac{\pm\sqrt{t-1}}{t}\cdot\frac{\pm 1}{2\sqrt{t-1}}dt = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C_1\,,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

В данном случае переход в подынтегральном выражении от переменной x к переменной t можно осуществить проще.

Так как в интеграле I_1 имеется выражение xdx, то после выбора подстановки $t = x^2+1$ сразу вычислим дифференциал:

$$dt = (x^2+1)'dx = 2xdx\,.$$

Отсюда $xdx = \frac{1}{2}dt$.

В результате интеграл I_1 вновь преобразуется к виду

$$I_1 = \int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C_1.$$

В последнем выражении необходимо подставить $t = x^2+1$, то есть

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln|t| + C_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1\,.$$

При определенном навыке использование теоремы о замене переменной при вычислении интеграла I_1 можно оформить указанным далее образом.

Используя определение дифференциала функции и основные правила вычисления дифференциалов, преобразуем выражение:

$$xdx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' dx = d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+1).$$

Подставляя это выражение в интеграл I_1, получаем

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x^2+1}xdx = \int \frac{1}{x^2+1}\frac{1}{2}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1.$$

Здесь выражение x^2+1 рассматривается как единый символ. Этот способ оформления принято называть способом подведения части подынтегральной функции под знак дифференциала.

Замечание. Для проверки правильности полученного результата нужно убедиться, что производная найденной функции совпадает с подынтегральной функцией:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1\right) = \frac{1}{2}\frac{d\ln(x^2+1)}{(x^2+1)} \cdot \frac{d(x^2+1)}{dx} + dC_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + 0 = \frac{x}{x^2+1}.$$

В интеграле $I_2 = \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{x^2+1}dx$ сделаем замену $z = \operatorname{arctg} x$. Тогда

$$dz = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{1}{x^2+1}dx$$

и интеграл I_1 преобразуется к виду

$$I_2 = \int \operatorname{arctg}^3 x \cdot \frac{1}{x^2+1}dx = \int z^3\, dz = \frac{z^4}{4} + C_2 = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x + C_2,$$

где C_2 – произвольная постоянная интегрирования.

Если воспользоваться способом подведения части подынтегральной функции под знак дифференциала, то, учитывая, что

$$\frac{dx}{x^2+1} = (\operatorname{arctg} x)' dx = d(\operatorname{arctg} x),$$

получаем

$$I_2 = \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{x^2+1}dx = \int (\operatorname{arctg} x)^3 d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C_2.$$

Здесь выражение $\operatorname{arctg} x$ воспринимается как единый символ.

Еще раз отметим, что, по существу, способ подведения части подынтегральной функции под знак дифференциала – это специфическая форма применения теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле.

Ответ. $I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x + C$, *где* $C = C_1 + C_2$ – *новое обозначение для произвольной постоянной интегрирования.*

Решение примера б)

Для вычисления интеграла

$$I = \int e^x \arcsin e^x\, dx$$

воспользуемся теоремой о замене переменной и формулой интегрирования по частям.

Сначала сделаем замену переменной $t = e^x$. Тогда

$$x = \ln t,\ dx = (\ln t)' dt = \frac{1}{t}dt$$

и интеграл приводится к виду

$$I = \int t \cdot \arcsin t \cdot \frac{1}{t}dt = \int \arcsin t\, dt.$$

К этому результату можно прийти и другим способом. После выбора подстановки $t = e^x$ вычислим дифференциал $dt = e^x dx$ и перегруппируем функции, стоящие в подынтегральном выражении, следующим образом:

$$I = \int \arcsin e^x\, e^x dx = \int \arcsin t\, dt.$$

Для вычисления интеграла $I=\int \arcsin t\,dt$ применим формулу интегрирования по частям.

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ – две непрерывно дифференцируемые функции на некотором промежутке. Тогда имеет место формула

$$\int u(t)\,dv(t)=u(t)\,v(t)-\int v(t)\,du(t)\,,$$

которая называется формулой интегрирования по частям.

Напомним, что $du(t)=u'(t)\,dt$ *и* $dv(t)=v'(t)\,dt$.

В нашем случае положим

$$u(t)=\arcsin t\,,\qquad du(t)=(\arcsin t)'dt=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,,$$

$$dv(t)=dt\,,\qquad v(t)=\int dt=t\,.$$

Тогда

$$I=\int \arcsin t\,dt\ =\arcsin t\cdot t-\int t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=t\arcsin t-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Интеграл $I_1=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$ вычислим с помощью подстановки $z=1-t^2$.

Тогда $dz=(1-t^2)'dt=-2t\,dt$, $t\,dt=-\frac{1}{2}dz$, и в результате получаем

$$I_1=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{-\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz=-\frac{1}{2}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C\ =$$

$$=-\sqrt{z}+C\ =-\sqrt{1-t^2}+C.$$

Таким образом,

$$I=t\arcsin t-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=t\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C=$$

$$=\mathrm{e}^x\arcsin\mathrm{e}^x+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+C\,.$$

Ответ. $I=\mathrm{e}^x\arcsin\mathrm{e}^x+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+C$.

Решение примера в)

В этом примере используются методы интегрирования тригонометрических функций [1, 2 и 6].

Для вычисления интеграла $I=\int\sin^2 6x\cos^2 6x\,dx$ применим следующие тригонометрические формулы:

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\ \text{ и }\ \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\,.$$

Тогда

$$I=\int\sin^2 6x\cos^2 6x\,dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 12x\,dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 24x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int\cos 24x\,dx=\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\int\cos 24x\,dx\,.$$

Последний интеграл $I_1=\int\cos 24x\,dx$ вычислим с помощью замены переменной $t=24x$.

Отсюда $x=\frac{1}{24}t$ и $dx=\frac{1}{24}dt$. В результате получаем

$$I_1=\int\cos 24x\,dx=\int\cos t\frac{1}{24}dt=\frac{1}{24}\int\cos t\,dt=\frac{1}{24}\sin t+C=$$

$$=\frac{1}{24}\sin 24x+C.$$

Ответ. $I=\frac{1}{8}x-\frac{1}{192}\sin 24x+C.$

Решение задачи № 2

В этой задаче нужно вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+4x$, $x+y=6.$

Построим заданную фигуру (рис. 3). Найдем точки пересечения указанных в условии линий (параболы и прямой). Решим для этого систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2+4x;\\ x+y=6.\end{cases}$$

Она равносильна системе

$$\begin{cases} x^2+5x-6=0; \\ y=6-x, \end{cases} \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1; \\ y=5; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-6; \\ y=12. \end{cases} \end{array}\right.$$

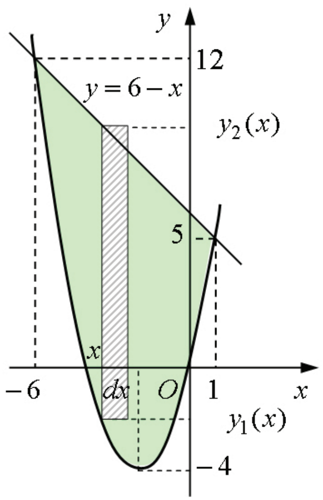

Рис. 3

Уравнение $x+y=6$ задает прямую, которая проходит через две найденные точки с координатами (1; 5) и (–6; 12).

Уравнение параболы $y=x^2+4x$ приведем к каноническому виду, выделяя полный квадрат по переменной *x*:

$$y=x^2+2x\cdot 2+2^2-4.$$

Тогда каноническое уравнение параболы имеет вид

$$(x+2)^2=y+4,$$

из которого видно, что парабола имеет осью симметрии вертикальную прямую $x=-2$, вершину в точке $(-2;-4)$, ветви параболы направлены вверх (в направлении оси *Oy*).

Для того чтобы найти площадь построенной фигуры, рекомендуют сначала составить выражение бесконечно малого элемента искомой площади, а затем проинтегрировать полученный результат в пределах изменения аргумента [7].

Обозначим бесконечно малый элемент площади через *dF*. Он равен площади прямоугольника, заштрихованного на рис. 3, со сторонами *dx* и $y_2(x)-y_1(x)$, то есть

$$dF(x)=(y_2(x)-y_1(x))dx.$$

Так как $y_2(x)=6-x$ и $y_1(x)=x^2-4x$, то

$$dF=(y_2(x)-y_1(x))\cdot dx=[(6-x)-(x^2+4x)]\,dx=(-x^2-5x+6)\,dx.$$

Искомую площадь получаем, проинтегрировав полученный результат в пределах изменения переменной *x* от –6 до 1.

Тогда

$$F=\int_{-6}^{1}(-x^2-5x+6)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_{-6}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+6\right)-(72-90-36)=57\frac{1}{6}.$$

Решение задачи № 3

В данной задаче нужно вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* плоской фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+8x-12$ и прямой $y=0$.

Чтобы построить параболу, ее уравнение

$$y=-x^2+8x-12 \quad (1)$$

приведем к каноническому виду, выделяя полный квадрат по переменной *x*:

$$y+(x^2-2\cdot x\cdot 4+16)-16+12=0,$$

$$(x-4)^2=-(y-4). \quad (2)$$

Следовательно, парабола имеет ось симметрии $x=4$, вершину в точке $(4;4)$. Ветви параболы направлены вниз (в направлении, противоположном положительному направлению оси *Oy*). Кривая пересекает ось *Ox* в точках *x* = 2 и *x* = 6. Заданная фигура заштрихована на рис. 4, *а*. Вращая ее вокруг оси Oy, получим тело с полостью.

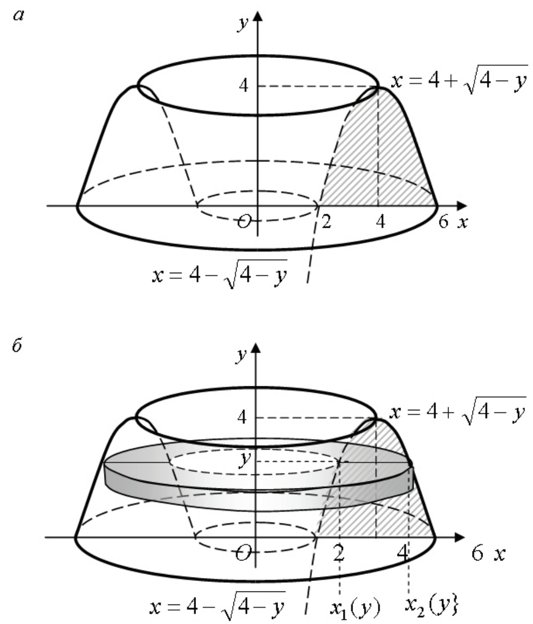

Рис. 4

Найдем объем V_y тела вращения. Для этого составим выражение бесконечно малого элемента объема dV_y, а затем проинтегрируем полученный результат в пределах изменения аргумента [7].

Бесконечно малый элемент искомого объема dV_y равен объему кольцевого цилиндра с внешним радиусом $x = x_2(y)$, внутренним радиусом $x = x_1(y)$ и высотой dy (рис. 4, *б*, на котором выделен затененный цилиндр):

$$dV_y = \pi(x_2^{\ 2}(y) - x_1^{\ 2}(y))dy. \tag{3}$$

Рассечем тело вращения плоскостью, перпендикулярной оси Oy. В сечении получим кольцо (см. рис. 4, *б*), которое является основанием нашего бесконечно тонкого кольцевого цилиндра. Чтобы определить внутренний $x_1(y)$ и внешний $x_2(y)$ радиусы этого кольца, вернемся к уравнению параболы. Из уравнения (2) найдем

$$x - 4 = \pm\sqrt{4 - y},$$

следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} x = 4 + \sqrt{4 - y}; \\ x = 4 - \sqrt{4 - y}. \end{array}\right.$$

Очевидно, что первая функция задает внешний радиус кольца, а вторая – внутренний, то есть

$$x_2(y) = 4 + \sqrt{1 - y} \text{ и } x_1(y) = 4 - \sqrt{1 - y}.$$

Найдем бесконечно малый элемент искомого объема по формуле (3):

$$dV_y = \pi(x_2^{\ 2}(y) - x_1^{\ 2}(y))dy = \pi((4 + \sqrt{4 - y})^2 - (4 - \sqrt{4 - y})^2)dy =$$

$$= 16\pi\sqrt{4 - y}dy.$$

Для вычисления объема тела вращения проинтегрируем полученный результат по переменной $y \in [0;\, 4]$. Тогда

$$V_y = 16\pi\int_0^4 \sqrt{4 - y}\, dy.$$

Для вычисления интеграла сделаем подстановку $t = 4 - y$ и используем теорему о замене переменной.

Найдем пределы интегрирования по переменной t: если $y = 0$, то $t = 4 - 0 = 4$; если $y = 4$, то $t = 4 - 4 = 0$.

Так как $y = 4 - t$, то $dy = (4 - t)'dt = -dt$ и в результате получаем

$$V_y = 16\pi\int_0^4 \sqrt{4 - y}\, dy = 16\pi\int_4^0 \sqrt{t}\,(-1)\, dt = -16\pi\int_4^0 t^{\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= 16\pi\int_0^4 t^{\frac{1}{2}}\, dt = 16\pi \left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^4 = \frac{32\pi}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 0) = \frac{256\pi}{3}.$$

Решение задачи № 4

В этой задаче требуется исследовать интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

Данный интеграл является несобственным, так как промежуток интегрирования $[0, +\infty)$ бесконечный. Напомним определение несобственного интеграла по бесконечному промежутку.

Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x \geq a$ и интегрируема на каждом конечном промежутке $[a, A]$ $(A > a)$. Рассмотрим предел

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx. \qquad (1)$$

Его называют ***несобственным интегралом по бесконечному промежутку*** *и обозначают символом*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (2)$$

Таким образом,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

Если предел (1) существует и конечен, то говорят, что интеграл (2) ***существует****, или* ***сходится****. Если же рассматриваемый предел (1) не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл (2)* ***не существует****, или* ***расходится.***

В нашем случае

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{(x^2+2x+1)+1} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{(x+1)^2+1}.$$

Для вычисления интеграла используем теорему о замене переменной в определенном интеграле, сделав подстановку $t = x+1$.

Найдем пределы интегрирования по переменной t: если $x = 0$, то $t = 0+1 = 1$; если $x = A$, то $t = A+1$.

Так как $x = t-1$, то $dx = dt$ и в результате получаем

$$I = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A+1} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} t \Big|_1^{A+1} = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg}(A+1) - \operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, данный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{4}$.

4. Контрольная работа № 3 по дифференциальному исчислению функций в случае одной переменной

Вариант № 1

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = \sqrt[9]{5x+6}\, 8^{x^3+\sqrt{x}} + \dfrac{9}{\sqrt[3]{x}} - 21;$

б) $y = \dfrac{\ln(\operatorname{arctg}(x^2))}{\sin\dfrac{1}{x^2}}.$

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = t^4 \sin^2 t, \\ y = t\cos t. \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = t^4 \sin^2 t, \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Показать, что функция $y = x\,e^{\frac{1}{x}}$ является решением дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{1}{x^3}y = 0.$$

4. Найти уравнения касательных к кривой $y = x^3 - 8$ в точках пересечения ее с осями координат. Построить кривую и касательные в декартовой системе координат.

5. Тело движется прямолинейно по закону $s = \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{4}{\pi}\cos\dfrac{\pi t}{8}$, где t измеряется в секундах, а s – в метрах. Определить скорость и ускорение тела в момент времени $t = 4$ с.

Вариант № 2

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = \sqrt[3]{\arccos x}\,\sin^3 x + \dfrac{2}{x} + 10$;

б) $y = \dfrac{\ln(\cos 5x)}{7^{\sqrt{x}}}$.

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Показать, что функция $y = \mathrm{e}^{5x}(3\cos 2x - 4\sin 2x)$ является решением дифференциального уравнения $y'' - 10y' + 29y = 0$.

4. Найти уравнения касательных к кривой $y = \dfrac{x}{x^2-8}$ в точках, ордината которых $y = -0{,}5$. Построить эти касательные в декартовой системе координат.

5. Тело движется прямолинейно по закону $s = t^3 + 3\mathrm{e}^{1-t^2}$, где t измеряется в секундах, а s – в метрах. Определить скорость и ускорение тела в момент времени $t = 1$ с.

Вариант № 3

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = \ln(1-x^2)\cos^3(2x+1) + \dfrac{3}{\sqrt{x}} + 7$;

б) $y = \dfrac{5^{\mathrm{tg}\,2x}}{1-3\sin 4x}$.

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t, \\ y = \mathrm{e}^t \sin t. \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t, \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Найти y''_x, если $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. В каких точках кривой $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{2-x}$ касательная параллельна оси Ox ?

5. Закон движения материальной точки имеет вид $s = \dfrac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$, где t измеряется в секундах, а s – в метрах. Определить скорость и ускорение материальной точки в момент времени $t = 3$ с.

Вариант № 4

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = \mathrm{tg}^3(2x-1)\arcsin 3x + \dfrac{5}{x^4} + 7$;

б) $y = \dfrac{\sin(x+\sqrt{x})}{4^{3x^2+1}}$.

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = 3t\,\mathrm{e}^{t^2}, \\ y = \ln\dfrac{3}{t}. \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = 3t\,\mathrm{e}^{t^2}, \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Показать, что функция $y = e^{-x}(\cos 3x - \sin 3x)$ удовлетворяет уравнению $y'' + 2y' + 10y = 0$.

4. Найти уравнения касательных к графику функции $y = \dfrac{1}{x^2}$ в точках, ордината которых $y = 1$. Построить график функции и касательные в декартовой системе координат.

5. По параболе $y = x\,(8 - x)$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = t\sqrt{t}$, где t измеряется в секундах, а x – в метрах. Определить скорость изменения ее ординаты в точке параболы $M(1;\,7)$.

Вариант № 5

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = \operatorname{arctg}(3x+1)\sin^3 x + \dfrac{2}{x^5} + 11;$

б) $y = \dfrac{\ln(3\sqrt[3]{x}+1)}{5^{\sqrt{x}} + 4}.$

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Показать, что функция $y = xe^{-2x}$ является решением уравнения $y'' + 2y' = -2e^{-2x}$.

4. В каких точках касательная к кривой $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ параллельна оси абсцисс Ox ?

5. Тело движется прямолинейно по закону $s = t + \sin 3t$, где время t измеряется в секундах, а расстояние s – в метрах. Определить скорость и ускорение тела в момент времени $t = \dfrac{\pi}{2}$ с.

Вариант № 6

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = \sin^3(2x-1)\ln(x^4 - \sqrt{x^2+1}) + \dfrac{5}{x^2} + 17;$

б) $y = \dfrac{\arcsin(x+\sqrt{x})}{\operatorname{tg}^3 x}.$

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = 2\cos t - 1, \\ y = 3\sin t - t. \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = 2\cos t - 1, \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Показать, что функция $y = e^{-x}(2\cos 5x - 3\sin 5x)$ удовлетворяет уравнению $y'' + 2y' + 26y = 0$.

4. Найти уравнение касательной к кривой $y = \dfrac{1}{x^2}$, где $0 < x < +\infty$, которая параллельна прямой $y = -2x$. Построить кривую и касательную в декартовой системе координат.

5. По гиперболе $y = \dfrac{4}{x}$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = t\sqrt[3]{t}$, где t измеряется в секундах, а x – в метрах. Определить скорость изменения ее ординаты в точке гиперболы $M(1;\,4)$.

Вариант № 7

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\arcsin(\sqrt{1-x^2}) + \dfrac{3}{x^5} + 13;$

б) $y = \dfrac{1+\ln(\cos x)}{e^{\sin x} + x}.$

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Показать, что функция $y = x + 2\cos 2x - 3\sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

4. Найти уравнение касательной к кривой $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ в точке, абсцисса которой $x = 1$. Построить касательную в декартовой системе координат.

5. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 м/с. С какой скоростью растут площадь поверхности шара и объем шара в момент, когда радиус его становится равным 50 м?

Вариант № 8

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = \arccos(\sqrt{x})\ \ln(\sqrt{x^2+1}) + \dfrac{3}{x} + 1;$

б) $y = \dfrac{\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3x}{e^{5x} + 1}.$

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 5t, \\ y = \operatorname{ctg} 5t. \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 5t, \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Показать, что функция $y = \arcsin x$ удовлетворяет уравнению $(1 - x^2)y'' = xy'$.

4. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 7x + 3$ параллельна прямой $5x + y - 3 = 0$? Найти ее уравнение. Построить параболу и касательную в декартовой системе координат.

5. Одна сторона прямоугольника имеет постоянную величину $a = 10$ м, а другая сторона b изменяется, возрастая с постоянной скоростью 4 м/с. С какой скоростью растут диагональ прямоугольника и его площадь в момент, когда $b = 30$ м?

Вариант № 9

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = \arcsin(\sqrt{1-x^2})\ e^{-x^2} + \dfrac{3}{x\sqrt[5]{x}} + 17;$

б) $y = \left(\dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\right)^2.$

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Показать, что функция $y = 4e^{-2x} + 3e^{5x}$ удовлетворяет уравнению $y'' - 3y' - 10y = 0$.

4. Написать уравнение касательной к параболе $y = x^2 + 2x - 1$ в точке ее пересечения с кривой $y = 2x^2$. Построить параболу $y = x^2 + 2x - 1$ и касательную в декартовой системе координат.

5. По оси Ox движутся две точки, имеющие законы движения $x = 100 + 5t$ и $x = \dfrac{1}{2}t^2$, где $t \geq 0$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи (координата x измеряется в метрах, а время t – в секундах)?

Вариант № 10

1. Найти производную по правилам и формулам дифференцирования:

а) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1})\,5^{x\sqrt{x}}$;

б) $y = \dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin(3x+1)+1}$.

2. Функция $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$$

Найти параметрическую форму ее производной $y = f'(x)$

$$\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y'_x(t) = ? \end{cases}$$

3. Показать, что функция $y = \mathrm{e}^{-x}\cos x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 2y' + 2y = 0$.

4. Найти уравнения касательных к кривой $y = 2x - x^2$ в точках пересечения ее с осями координат. Построить кривую и касательные в декартовой системе координат.

5. Тело движется прямолинейно по закону $s = \dfrac{2}{5}t^5 + \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{4}{\pi}\sin\dfrac{\pi t}{10}$, где время t измеряется в секундах, а расстояние s – в метрах. Определить скорость и ускорение тела в момент времени $t = 5$ с.

5. Контрольная работа № 4 по интегральному исчислению в случае функции одной переменной

Вариант 1

1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x+9)}dx$;

б) $\displaystyle\int x\sin 8x\,dx$;

в) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^5 x\,dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$ и $x + y = 1$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 0$ и $y = 8$.

4. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$.

Вариант 2

1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{7+3\cos x}dx$;

б) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

в) $\displaystyle\int \sin^4 3x\,dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$

4. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$.

Вариант 3

1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{3\cos x + 2}} dx$;

б) $\int (x+5) e^{3x} dx$;

в) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 2y + 1$ и $x - y + 1 = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = 4x^2$ и $y = 4x$.

4. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.

Вариант 4

1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{\arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

б) $\int \mathrm{arctg}\, 2x\, dx$;

в) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x$ и $y = 4x - x^2$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $y = x$ и $y = 3$.

4. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2} dx$.

Вариант 5

1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt{\ln^3 x}}{x} dx$;

б) $\int \arcsin 2x\, dx$;

в) $\int \mathrm{tg}^3 (7x+1)\, dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 2 - y$ и $y = -x$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 1$.

4. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} dx$. .

Вариант 6

1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int e^{\sin 2x} \cos 2x\, dx$;

б) $\int \ln(1-3x)\, dx$;

в) $\int \mathrm{ctg}^3 (2x-3)\, dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 = y + 2$ и $y = -x$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$ и $4y = x^2$.

4. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5x+4}} dx$.

Вариант 7

1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{5+2\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx$;

б) $\int x\cos 6x\,dx$;

в) $\int \cos^4 3x\,dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$ и $y = -2x$

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$ и $y = 0$.

4. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(3x^2+1)^3}}dx$.

Вариант 8

1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{1}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}dx$;

б) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$;

в) $\int \sin^2 3x\cos^2 3x\;dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$ и $x - y + 8 = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ $(x \geq 0)$.

4. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1}dx$.

Вариант 9

1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$;

б) $\int x\ln(x^2+1)\,dx$;

в) $\int \operatorname{tg}^4(3x+1)\,dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 1$ и $x + 3y - 4 = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x$, $x = 0$ и $y = 4$.

4. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}dx$.

Вариант 10

1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{3+4\operatorname{ctg}^5 x}{\sin^2 x}dx$;

б) $\int e^x\ln(1+3e^x)\,dx$;

в) $\int \sin^3(3x+1)\,dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$ и $x + 2y - 5 = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $x - y + 2 = 0$.

4. Вычислить несобственный интеграл (или доказать его расходимость) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+13}dx$.

Рекомендуемая литература

1. *Натансон, И. П.* Краткий курс высшей математики / И. П. Натансон. – СПб.: Лань, 2005.

2. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов. – СПб.: Мифрил, Физматгиз, 1996.

3. *Берс, Л.* Математический анализ. / Л. Берс. – М.: Высшая школа, 1975.

4. *Определенный* интеграл: метод. указания к выполнению задания для студентов всех специальностей ЛИСИ / сост. С. Н. Нумеров; ЛИСИ. – Л., 1984.

5. *Ивочкина, Н. М.* Дифференциальное исчисление в случае функции одного аргумента: учеб. пособие для студентов строительных вузов / Н. М. Ивочкина, Л. Б. Клебанов; СПбГАСУ. – СПб., 1993.

6. *Смирнова, В. Б.* Неопределенный интеграл: учеб. пособие для студентов всех специальностей и всех форм обучения / В. Б. Смирнова, Л. Е. Морозова; СПбГАСУ. – СПб., 2010.

7. *Морозова, Л. Е.* Определенный интеграл: учеб. пособие для студентов всех специальностей и всех форм обучения / Л. Е. Морозова, В. Б. Смирнова; СПбГАСУ. – СПб., 2011.

8. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М.: Наука, 1985.

9. *Демидович, Б. П.* Задачи и упражнения по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М.: Физматгиз, 1962.

Оглавление

Введение 3

1. Рабочая программа курса высшей математики 4

2. Примерный вариант контрольной работы № 3 по дифференциальному исчислению в случае функции одной переменной 8

3. Примерный вариант контрольной работы № 4 по интегральному исчислению в случае функции одной переменной 18

4. Контрольная работа № 3 по дифференциальному исчислению в случае функции одной переменной 29

5. Контрольная работа № 4 по интегральному исчислению в случае функции одной переменной 37

Рекомендуемая литература 42

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В СЛУЧАЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рабочая программа, методические указания
и контрольные задания

Составители: **Красоленко** Георгий Владимирович,
Сванидзе Николай Владимирович,
Якунина Галина Владимировна

Редактор А. В. Афанасьева
Корректор М. А. Молчанова
Компьютерная верстка Н. И. Печуконис

Подписано к печати 13.09.12. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 2,6. Тираж 1500 экз. Заказ 123. «С» С9.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.

Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 5.