Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

Кафедра математики

# МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания 5 и 6 для студентов
заочной формы обучения направлений:
15.03.02 – Технологические машины и оборудование;
15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств

Составитель
Г. П. Мещерякова

Санкт-Петербург
2016

Утверждено

на заседании кафедры
10.02.2016 г., протокол № 5

Рецензент А. В. Марковец

Оригинал-макет подготовлен составителем
Подписано в печать 27.06.16.Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 1,9. Тираж 100 экз. Заказ 587/16.
http://publish.sutd.ru

Отпечатано в типографии ФГБОУВО «СПбГУПТД»
191028, С.-Петербург, ул. Моховая, 26

При выполнении контрольной работы на титульном листе указывается:

**Фамилия, имя, отчество;**

**номер студенческого билета;**

**институт (факультет), группа**

**название дисциплины, номер контрольной работы, номер варианта.**

При интернет - проверке присылать необходимо **только отсканированные рукописные** работы, собранные в один файл с последовательной нумерацией страниц.

Номер варианта соответствует последней цифре номера студенческого билета. Например, номер кончается на 5, то номера примеров 1.5, 2.5, 3.5, 4.5.

## ЛИТЕРАТУРА

### Учебники

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов / *Н. С. Пискунов*. – М.: Интеграл-Пресс, 2009, т. 2.

### Сборники задач

2. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. *Ф. Филиппов*. – М.: Наука, 2009.

3. Высшая математика в упражнениях и задачах / *П. Е. Данко и др*. – М.: Мир и Образование, 2014.

**Контрольная работа 5**

1. **Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия**

   [1, гл. XIII, § 16, 17, упр. 118 – 124].

2. **Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка**

   [1, гл. XIII, § 20, 21, упр. 129 – 137].

**Пример 1**. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$.

**Решение**. Ищем решение уравнения в виде $y = e^{kx}$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ и, подставляя в исходное уравнение, получим $k^2e^{kx} - 4ke^{kx} + 3e^{kx} = 0.$ Так как $e^{kx} \neq 0,$ то на него можно сократить и мы получим $k^2 - 4k + 3 = 0.$

Находим его корни:

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1;$$

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 1.$$

Корни характеристического уравнения вещественные, различные, значит, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$$

или

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{x}.$$

**Пример 2**. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

**Решение**. Ищем решение уравнения в виде $y = e^{kx}$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Решаем его

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2.$$

Корни характеристического уравнения вещественные равные. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{kx}$$

или

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2 x).$$

**Пример 3**. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

**Решение**. Ищем решение уравнения в виде $y = e^{kx}$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = 2 \pm 3i = \alpha \pm i\beta.$$

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, значит общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

или

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x).$$

**3. Линейные, неоднородные уравнения второго порядка**

[1, гл. ХШ, § 23, 24, упр. 148 – 157].

**Пример 4**. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y = xe^{-x}.$$

**Решение**. Находим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y = 0.$$

Ищем решение уравнения в виде $y = e^{kx}$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2 = 0.$ Его корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$

Общее решение однородного уравнения

$$\mathrm{Y} = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Теперь следует найти частное решение $\overline{y}$ неоднородного уравнения. Правая часть уравнения $f(x)=xe^{-x}$, так как $k=-1$ не является корнем характеристического уравнения, то $\overline{y}$ ищем в форме $\overline{y}=(Ax+B)\,e^{-x}$.

Требуется найти неизвестные коэффициенты A и B. Для определения A и B дифференцируем дважды $\overline{y}$ по формуле производной произведения

$$\overline{y'}=Ae^{-x}-(Ax+B)\,e^{-x},\ \overline{y}$$

$$\overline{y''}=-2Ae^{-x}+(Ax+B)\,e^{-x}$$

и подставляем это в данное неоднородное дифференциальное уравнение

$$-2Ae^{-x}+(Ax+B)\,e^{-x}-2(Ax+B)\,e^{-x}\equiv xe^{-x}.$$

Так как $e^{-x}\neq 0,$ то, сократив $e^{-x}$, получим тождественное равенство двух полиномов, стоящих слева и справа от знака равно:

$$-2A-Ax-B\equiv x\Rightarrow -Ax+(-B-2A)\equiv x.$$

Значения A и B найдем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях

при $x$ : $\quad -A=1\Rightarrow A=-1;$

при $x^0$: $\quad -2A-B=0\Rightarrow B=-2A=2.$

Подставляем найденные A и B в $\overline{y}$

$$\overline{y}=(x+2)\,e^{-x}=-(x-2)\,e^{-x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$y=\mathrm{Y}+\overline{y}=c_1e^{x\sqrt{2}}+c_2e^{-x\sqrt{2}}-(x-2)\,e^{-x}.$$

**Пример 5**. Найти общее решение уравнения

$$y''+y'-2y=8\sin 2x.$$

**Решение**. Соответствующее однородное уравнение

$$y''+y'-2y=0.$$

Ищем решение уравнения в виде $y=e^{kx}$, тогда $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$.

Характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 2 = 0; \quad k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = -2;$$

$$\mathrm{Y} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Правая часть данного неоднородного уравнения

$f(x) = 8\sin 2x.$

Следовательно, так как $k = 2$ не является решением характеристического уравнения, то частное решение $\overline{y}$ ищем в виде

$$\overline{y} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Дифференцируем и подставляем это решение в неоднородное уравнение

$$\overline{y'} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;$$

$$\overline{y''} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2B\sin 2x - 2A\cos 2x \equiv 8\sin 2x.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой частях тождества

при $\sin 2x$: $\quad -4B - 2A - 2B = 8;$

при $\cos 2x$: $\quad -4A + 2B - 2A = 0.$

Из этой системы находим A и B

$$-6B - 2A = 8; \quad 3B + A = -4; \quad B = 3A; \quad A = -\frac{2}{5};$$

$$-6A + 2B = 0; \quad 3A - B = 0; \quad B = -\frac{6}{5};$$

$$\overline{y} = -\frac{2}{5}\cos 2x - \frac{6}{5}\sin 2x.$$

Общее решение

$$y = \mathrm{Y} + \overline{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}(\cos 2x + 3\sin 2x).$$

**Пример 6**. Найти частное решение уравнения $y'' + 4y = \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 1.$

**Решение**. Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, необходимо получить сначала общее решение данного неоднородного уравнения. Решаем однородное уравнение $y''+4y=0$. Ищем решение уравнения в виде $y=e^{kx}$, тогда $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$.

$$k^2+4=0,\quad k_{1,2}=\pm 2i,\quad \mathrm{Y}=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x;$$

Правая часть уравнения $f(x)=\sin x$, следовательно, ищем частное решение в виде

$$\bar{y}=A\sin x+B\cos x\,.$$

Берем первую и вторую производные

$$\overline{y'}=A\cos x-B\sin x;$$

$$\overline{y''}=-A\sin x-B\cos x.$$

Подставляем $\bar{y}$ в исходное дифференциальное уравнение

$$-A\sin x-B\cos x+4A\sin x+4B\cos x=\sin x.$$

Приравниваем коэффициенты отдельно при синусе и косинусе

при $\sin x$ $\qquad -A+4A=1,\quad 3A=1,\quad A=\frac{1}{3};$

при $\cos x$ $\qquad -B+4B=0,\quad 3B=0,\quad B=0;$

$$\bar{y}=\frac{1}{3}\sin x.$$

Общее решение неоднородного уравнения равно

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x;$$

Искомое частное решение будем находить из общего. Берем первую производную

$$y'=-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x+\frac{1}{3}\cos x.$$

Подставляем начальные условия в решение $y|_{x=0}=1,\quad y'|_{x=0}=1.$ При $x=0$ $y=1$, получим

$1 = c_1 \cos 0 \Rightarrow c_1 = 1$ .

При $x = 0$ $y' = 1$

$1 = 2c_2 + \frac{1}{3}; \quad c_2 = \frac{1}{3}.$

Найденные постоянные подставляем в общее решение неоднородного уравнения

$y = \cos 2x + \frac{1}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$ – искомое частное решение.

## 4. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

[1, гл. XIII, §29, §30, упражнения].

Линейной системой двух дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{ij}$ – постоянные величины; $t$ – аргумент (независимая переменная), $x(t)$ и $y(t)$ – искомые функции. Часто используются следующие обозначения: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, а $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$.

Эту систему можно решать двумя методами:

1) сведением к одному уравнению второго порядка;
2) с помощью характеристического уравнения.

Рассмотрим метод сведения к уравнению второго порядка. Дифференцируем по $t$ первое уравнение системы (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_{11}\frac{dx}{dt} + a_{12}\frac{dy}{dt}. \tag{2}$$

Заменим в равенстве (2) производную $\frac{dy}{dt}$ ее выражением из системы (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_{11}\frac{dx}{dt} + a_{12}\left(a_{21}x + a_{22}y\right). \tag{3}$$

Выразим в первом уравнении системы (1) $y$ через $\frac{dx}{dt}$ и $x$ и подставим в уравнение (3):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_{11}\frac{dx}{dt} + a_{12}\left(a_{21}x + a_{22}\frac{1}{a_{12}}\left(\frac{dx}{dt} - a_{11}x\right)\right). \qquad (4)$$

Таким образом, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $x(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}(a_{11} + a_{22}) - (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x = 0. \qquad (5)$$

Мы получили обычное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решая это уравнение, определим $x(t)$:

$$x(t) = f_1(t, C_1, C_2). \qquad (6)$$

Подставляя эту функцию в первое уравнение системы (1), определим $y(t)$.

**Пример 1:**

Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

Дифференцируя по $t$ первое уравнение, будем иметь

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}.$$

Подставляя сюда $\frac{dy}{dt}$ из второго уравнения, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 2(x + 3y) = 2\frac{dx}{dt} + 2x + 6y.$$

Из первого уравнения системы находим

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}-2x\right).$$

Тогда окончательно получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\frac{dx}{dt}+2x+6\,\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}-2x\right).$$

Приводя подобные слагаемые в последнем уравнении, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $x(t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-5\frac{dx}{dt}+4x=0.$$

Ищем решение уравнения в виде $y=e^{kx}$, тогда $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2-5k+4=0,$$

а его решения $k_1=\frac{5-\sqrt{25-16}}{2}=1$ , $k_2=4.$

Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t)=C_1e^t+C_2e^{4t}.$$

Отсюда находим

$$\frac{dx}{dt}=C_1e^t+4C_2e^{4t} \text{ и } y=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}-2x\right)=\frac{1}{2}\left(C_1e^t+4C_2e^{4t}-2\left(C_1e^t+C_2e^{4t}\right)\right).$$

Решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^t+C_2e^{4t} \\ y(t)=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}. \end{cases}$$

Рассмотрим метод решения системы (1) с помощью характеристического уравнения.

Будем искать решение системы в виде

$$\begin{cases} x(t)=\alpha_1 e^{kt} \\ y(t)=\alpha_2 e^{kt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=\alpha_1 k e^{kt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt}=\alpha_2 k e^{kt}. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $k$, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ постоянные величины.

Необходимо определить постоянные k, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ таким образом, чтобы функции (7) удовлетворяли системе уравнений (1):

$$\begin{cases} \alpha_1 k e^{kt} = a_{11}\alpha_1 e^{kt} + a_{12}\alpha_2 e^{kt}, \\ \alpha_2 k e^{kt} = a_{21}\alpha_1 e^{kt} + a_{22}\alpha_2 e^{kt}. \end{cases} \tag{8}$$

Сокращая на $e^{kt} \neq 0$, переносим все члены в одну сторону и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Это система однородных алгебраических уравнений. Для нахождения нетривиального (не нулевого) решения ее определитель должен быть равен нулю

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = (a_{11}-k)(a_{22}-k) - a_{12}a_{21} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) называется характеристическим уравнением для системы (1), а его корни называются корнями характеристического уравнения. Уравнение (10) дает нам значения k.

Рассмотрим два случая корней характеристического уравнения.

1. *Корни характеристического уравнения действительные и различные.* $(k_1, k_2 \in R,\ k_1 \neq k_2)$

Для каждого из корней $k_1$ и $k_2$ напишем систему (9) и определим коэффициенты $\alpha_1^1, \alpha_2^1$ и $\alpha_1^2, \alpha_2^2$.

Таким образом, получаем, что для корня $k_1$ решение системы (1)

$$x^1 = \alpha_1^1 e^{k_1 t}, \qquad y^1 = \alpha_2^1 e^{k_1 t},$$

для корня $k_2$ решение системы (1)

$$x^2 = \alpha_1^2 e^{k_2 t}, \qquad y^2 = \alpha_2^2 e^{k_2 t}.$$

Путем непосредственной подстановки в уравнения можно убедится, что система функций

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \alpha_1^1 e^{k_1 t} + C_2 \alpha_1^2 e^{k_2 t} \\ y(t) = C_1 \alpha_2^1 e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2^2 e^{k_2 t}, \end{cases} \tag{11}$$

где $C_1, C_2$ – произвольные постоянные, также является решением системы дифференциальных уравнений (1).

**Пример 2.** Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Будем искать решение системы в виде

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 e^{kt} \\ y(t) = \alpha_2 e^{kt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha_1 k e^{kt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = \alpha_2 k e^{kt} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha_1 k e^{kt} = 2\alpha_1 e^{kt} + 2\alpha_2 e^{kt}, \\ \alpha_2 k e^{kt} = \alpha_1 e^{kt} + 3\alpha_2 e^{kt}. \end{cases}$$

Приведем подобные члены

$$\begin{cases} (2-k)\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + (3-k)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Не нулевое решение системы можно получить только в том случае, если определитель системы равен нулю. Равенство нулю определителя дает характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = (2-k)(3-k) - 2 = 0$$

или $k^2 - 5k + 4 = 0$. Его решения имеют вид $k_1 = \dfrac{5-\sqrt{25-16}}{2} = 1$, $k_2 = 4$.

Составляем систему (9) для корня $k_1 = 1$, подставив $k_1$ в систему, и определяем $\alpha_1^1, \alpha_2^1$:

$$\begin{cases}(2-1)\alpha_1^1+2\alpha_2^1=0\\ \alpha_1^1+(3-1)\alpha_2^1=0\end{cases},$$

или

$$\begin{cases}\alpha_1^1+2\alpha_2^1=0\\ \alpha_1^1+2\alpha_2^1=0\end{cases}.$$

Получим два одинаковых уравнения. Следовательно, $\alpha_2^1=-\frac{1}{2}\alpha_1^1$.

В качестве $\alpha_1^1$ можно взять любое число, например, возьмем $\alpha_1^1=1$, тогда $\alpha_2^1=-\frac{1}{2}$.

Получили решение системы $x^1=e^t$, $y^1=-\frac{1}{2}e^t$.

Аналогично, составляем систему (9) для $k_2=4$:

$$\begin{cases}(2-4)\alpha_1^2+2\alpha_2^2=0,\\ \alpha_1^2+(3-4)\alpha_2^2=0.\end{cases}$$

и определяем $\alpha_1^2$, $\alpha_2^2$:

$$\begin{cases}-2\alpha_1^2+2\alpha_2^2=0,\\ \alpha_1^2-\alpha_2^2=0.\end{cases}$$

Тогда $\alpha_2^2=\alpha_1^2$ и $\alpha_2^2=\alpha_1^2=1$. Получаем второе решение системы: $x^2=e^{4t}$, $y^2=e^{4t}$. Общее решение системы, согласно выражению (10), будет иметь вид

$$\begin{cases}x(t)=C_1e^t+C_2e^{4t},\\ y(t)=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}.\end{cases}$$

*2. Корни характеристического уравнения комплексные*

Пусть корнями характеристического уравнения (10) являются два комплексно-сопряженных числа:

$$k_1 = \alpha + i\beta,$$
$$k_2 = \alpha - i\beta. \tag{12}$$

Этим корням будут соответствовать решения

$$x^1 = \alpha_1^1 e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad y^1 = \alpha_2^1 e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad x^2 = \alpha_1^2 e^{(\alpha-i\beta)t}, \quad y^2 = \alpha_2^2 e^{(\alpha-i\beta)t}. \tag{13}$$

Коэффициенты $\alpha_1^1, \alpha_2^1$ и $\alpha_1^2, \alpha_2^2$ определяются из системы уравнений (9). Так как действительные и мнимые части комплексного решения также являются решениями, то соотношения (13) представимы в виде

$$x^1 = e^{\alpha t}\left(\lambda_1^1 \cos\beta t + \lambda_1^2 \sin\beta t\right), \qquad y^1 = e^{\alpha t}\left(\lambda_1^1 \cos\beta t + \lambda_1^2 \sin\beta t\right),$$

$$x^2 = e^{\alpha t}\left(\lambda_2^1 \cos\beta t + \lambda_2^2 \sin\beta t\right), \qquad y^2 = e^{\alpha t}\left(\lambda_2^1 \cos\beta t + \lambda_2^2 \sin\beta t\right), \tag{14}$$

где $\lambda_1^1, \lambda_2^1$ и $\lambda_1^2, \lambda_2^2$ – вещественные числа, определяемые через $\alpha_1^1, \alpha_2^1$ и $\alpha_1^2, \alpha_2^2$.

Соответствующие комбинации функций (14) войдут в общее решение системы дифференциальных уравнений (1).

**Пример 3.** Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Будем искать решение системы в виде

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 e^{kt} \\ y(t) = \alpha_2 e^{kt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha_1 k e^{kt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = \alpha_2 k e^{kt} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_1 k e^{kt} = -7\alpha_1 e^{kt} + \alpha_2 e^{kt}, \\ \alpha_2 k e^{kt} = -2e^{kt} - 5\alpha_2 e^{kt}. \end{cases}$$

Приведем подобные члены

$$\begin{cases} \left(-7 - k\right)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -2\alpha_1 + \left(-5 - k\right)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Не нулевое решение системы можно получить только в том случае, если определитель системы равен нулю. Равенство нулю определителя дает характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = (-7-k)(-5-k)+2=0$$

или $k^2+12k+37=0$.

Его решения имеют вид $k=\dfrac{-12+\sqrt{144-148}}{2}=-6+i$ , $k_2=-6-i$.

Составляем систему (9) для корня $k_1=-6+i$ и определяем $\alpha_1^1,\alpha_2^1$:

$$\begin{cases} (-7+6-i)\alpha_1^1+\alpha_2^1=0, \\ -2\alpha_1^1+(-5+6-i)\alpha_2^1=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (-1-i)\alpha_1^1+\alpha_2^1=0, \\ -2\alpha_1^1+(1-i)\alpha_2^1=0. \end{cases}$$

Находим коэффициенты $\alpha_1^1,\alpha_2^1$:

$\alpha_1^1=1$, $\alpha_2^1=1+i$.

Записываем решение (13):

$$x^1=e^{(-6+i)t}, \qquad y^1=(1+i)e^{(-6+i)t}.$$

Подставляя $k_2=-6-i$ в систему (9), находим $\alpha_1^2=1$, $\alpha_2^2=1-i$. получим вторую систему (13):

$$x^2=e^{(-6-i)t}, \qquad y^2=(1-i)e^{(-6-i)t}.$$

Перепишем решения, используя формулу Эйлера $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=\cos x-\mathrm{i}\sin x$.

$$x^1=e^{-6t}\left(\cos t+i\sin t\right),$$
$$y^1=(1+i)e^{-6t}\left(\cos t+i\sin t\right)=e^{-6t}\left(\left(\cos t-\sin t\right)+i\left(\cos t+\sin t\right)\right),$$

$$x^2=e^{-6t}\left(\cos t-i\sin t\right),$$
$$y^2=(1-i)e^{-6t}\left(\cos t-i\sin t\right)=e^{-6t}\left(\left(\cos t-\sin t\right)-i\left(\cos t+\sin t\right)\right).$$

За системы частных решений можно взять отдельно вещественные и мнимые части:

$$x^1 = e^{-6t}\cos t,$$
$$y^1 = e^{-6t}(\cos t - \sin t),$$

$$x^2 = e^{-6t}\sin t,$$
$$y^2 = e^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

Общим решением представленной системы будет

$$x(t) = C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\sin t,$$
$$y(t) = C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

**Контрольная работа 5. Задания**

**1. Найти общее решение дифференциального уравнения**

| | |
|---|---|
| 1.1 | $y'' - 5y' + 6y = -e^{5x}$. |
| 1.2 | $y'' + 2y' = 6e^{2x}$. |
| 1.3 | $y'' - 9y' + 20y = e^{9x}$. |
| 1.4 | $y'' - 7y' + 12y = e^{7x}$. |
| 1.5 | $y'' - 8y' + 15y = -2e^{8x}$. |
| 1.6 | $y'' - 11y' + 30y = -e^{11x}$. |
| 1.7 | $9y'' - 4y = 24e^{2x}$. |
| 1.8 | $y'' + 5y' = 20e^{5x}$. |
| 1.9 | $16y'' - 25y = 60e^{5x}$. |
| 1.10 | $25y'' - 9y = 120e^{3x}$. |

**2. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям**

| Номер варианта | Уравнение | Начальные условия |
|---|---|---|
| 2.1 | $y'' + 49y = 0$ | $y_0 = 7;\quad y'_0 = 35$ при $x_0 = \frac{\pi}{14}$. |
| 2.2 | $y'' + 25y = 0$ | $y_0 = -7;\quad y'_0 = 175$ при $x_0 = \frac{\pi}{5}$. |
| 2.3 | $y'' + 81y = 0$ | $y_0 = 9;\quad y'_0 = 18$ при $x_0 = \frac{\pi}{18}$. |

*Окончание таблицы*

| Номер варианта | Уравнение | Начальные условия |
|---|---|---|
| 2.4 | $y'' + 4y = 0$ | $y_0 = -9;\quad y_0' = 36$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. |
| 2.5 | $y'' + y = 0$ | $y_0 = 1;\quad y_0' = 3$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. |
| 2.6 | $y'' + 9y = 0$ | $y_0 = -1;\quad y_0' = 9$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$. |
| 2.7 | $y'' + 9y = 0$ | $y_0 = 3;\quad y_0' = 6$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$. |
| 2.8 | $y'' + 4y = 0$ | $y_0 = -3;\quad y_0' = 12$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. |
| 2.9 | $y'' + 25y = 0$ | $y_0 = 5;\quad y_0' = 15$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{10}$. |
| 2.10 | $y'' + 9y = 0$ | $y_0 = -5;\quad y_0' = 45$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$. |

**3. Решить систему линейных дифференциальных уравнений**

1) методом сведения к уравнению второго порядка;
2) методом характеристического уравнения.

3.01 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$$

3.06 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 6y. \end{cases}$$

3.02 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$$

3.07 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

3.03 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$$

3.08 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

3.04 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - 2y. \end{cases}$ 3.09 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$

3.05 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$ 3.10 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 5y. \end{cases}$

## Контрольная работа 6. Ряды

### 1. Числовые ряды

[1, гл. XVI, §1– 8, 13 –15, 21, 22, упражнения].

**Основные определения теории числовых рядов**.

Пусть задана бесконечная числовая последовательность

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \qquad (1)$$

*Числовым рядом* называется бесконечная последовательность чисел, соединенная знаком плюс, т. е. выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2)$$

числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называются членами ряда и являются элементами заданной последовательности (1).

*Сходимость и сумма ряда.* Сумма первых $n$ членов называется частичной суммой ряда $S_n$ ,т. е. $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Частичные суммы ряда образуют новую последовательность - последовательность частичных сумм: $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\lim_{n\to\infty} \mathrm{S_n} = S < \infty$, то ряд (2) называется *сходящимся*, а число $S$ – *суммой ряда*. В этом случае пишут $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ .

Если предел последовательности частичных сумм бесконечен или не существует, то ряд (2) называется *расходящимся.*

Для сходящихся числовых рядов всегда выполняется одно условие – его общий член стремится к нулю, т. е., если числовой ряд сходится, то его общий член при $n \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{3}$$

**Признаки сходимости рядов с положительными членами**

Числовой ряд называется рядом с положительными членами или просто *положительным рядом*, если все числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \geq 0$. Рассмотрим некоторые достаточные признаки сходимости для положительных рядов.

1. **Предельный признак сравнения**

Пусть даны два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{4}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{5}$$

и можно указать такие постоянные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, что, начиная с некоторого достаточно большого $n$,

$$k_1 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq k_2.$$

Тогда ряды (4) и (5) одновременно сходятся или одновременно расходятся. Это же утверждение будет справедливо, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k.$$

Если выполнено неравенство $u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда (4), а из расходимости ряда (4) следует расходимость ряда (5).

Чаще всего для признака сравнения используется обобщенно-гармонический ряд.

*Обобщенным гармоническим рядом* называется ряд

$$a + \frac{a}{2^p} + \frac{a}{3^p} + \ldots + \frac{a}{n^p} + \ldots. = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^p}, \tag{6}$$

где $a$ – положительное число. Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

2. **Признак Даламбера**

Если для ряда (4) выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=p, \qquad (7)$$

то при $p<1$ ряд (4) сходится, а при $p>1$этот ряд расходится.

**Пример 1**. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$$

**Решение.** Для этого ряда $u_n=\frac{n!}{n^n}$. Используем признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами:

$$u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Найдем отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{1\cdot 2\ldots n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Здесь использовано определение $n!$: $n!=1\cdot 2\ldots n.$

Зная, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e,$$

вычислим

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1.$$

Так как $p<1$, то исследуемый ряд сходится.

## 3. Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимися рядами называются ряды вида

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\,,\quad u_n\geq 0. \qquad (8)$$

Сходимость таких рядов исследуется по *теореме Лейбница:*

если в знакочередующемся ряде (8) все члены таковы, что

1) $u_1>u_2>u_3>\ldots>u_n>\ldots\ (u_n>u_{n+1})$;

2) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$,

то ряд (8) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена ряда $u_1$.

По знакочередующемуся ряду можно построить соответствующий ему положительный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если такой положительный ряд сходится, то знакочередующийся ряд называют *абсолютно сходящимся*, в противном случае ряд называют *условно сходящимся*.

**Пример**. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{\ln n} + \ldots$$

По теореме Лейбница ряд сходится, если выполнены два условия:

1) $u_n > u_{n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Проверим, выполнены ли эти условия для нашего ряда:

$$u_n = \frac{1}{\ln n}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)};$$

$$\ln n < \ln(n+1) \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Первое условие выполнено.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Второе условие выполнено, следовательно, ряд сходится по Лейбницу.

Проверим, есть ли абсолютная сходимость, т. е. сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots.$$

Используем признак сравнения сходимости рядов с положительными членами и сравним наш ряд с гармоническим рядом (6), $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ($p = 1$)который расходится.

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ тоже расходится и, следовательно, исходный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ абсолютно расходится, а сходится условно.

## 4. Степенные ряды

*Степенным рядом* по степеням $(x-a)$ называется ряд вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \tag{9}$$

где $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ – постоянные, не зависят от переменной $x$ и называются коэффициентами степенного ряда.

Степенной ряд (9) всегда сходится, по крайней мере, в единственной точке $\mathrm{x} = \mathrm{a}$. При любых конкретных $x = x_0$ ряд (9) превращается в числовой ряд

$$c_0 + c_1(x_0 - a) + c_2(x_0 - a)^2 + c_3(x_0 - a)^3 + \ldots + c_n(x_0 - a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_0 - a)^n. \quad (10)$$

Степенной ряд (10) сходится в точке $x_0$ *абсолютно*, если сходится ряд, образованный из модулей членов числового ряда

$$|c_0| + |c_1(x_0 - a)| + |c_2(x_0 - a)^2| + |c_3(x_0 - a)^3| + \ldots + |c_n(x_0 - a)^n| + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x_0 - a)^n|. \quad (11)$$

Найдем область сходимости ряда (11), используя признак сходимости Даламбера для положительных числовых рядов. Ряд (11) сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| = |x-a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд (11) заведомо сходится при

$$|x-a| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (12)$$

и расходится при

$$|x-a| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}. \quad (13)$$

Величина

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (14)$$

называется *радиусом сходимости* ряда (11). Ряд заведомо сходится в интервале $|x-a| < R$ или $a - R < x < a + R$, который называется интервалом сходимости.

Признак Даламбера ничего не говорит о сходимости ряда в точках $x = a \pm R$. В этих точках сходимость ряда исследовать отдельно.

*Исследовать степенной ряд на сходимость означает найти его интервал сходимости и установить сходимость или расходимость ряда в граничных точках интервала*, т. е. $x = a \pm R$.

*Степенным рядом* по степеням $x$ называется ряд вида

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ... + c_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n , \tag{15}$$

где $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ – постоянные, не зависят от переменной $x$ и называются коэффициентами степенного ряда.

Степенной ряд (15) всегда сходится, по крайней мере, в единственной точке $x = 0$. При любых конкретных $x = x_0$ ряд (15) превращается в числовой ряд

$$c_0 + c_1 x_0 + c_2 {x_0}^2 + c_3 {x_0}^3 + ... + c_n {x_0}^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n {x_0}^n . \tag{16}$$

Степенной ряд (15) сходится в точке $x_0$ *абсолютно*, если сходится ряд образованный из модулей членов числового ряда (15)

$$|c_0| + |c_1 x_0| + |c_2 {x_0}^2| + |c_3 {x_0}^3| + ... + |c_n {x_0}^n| + ... = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n {x_0}^n| . \tag{17}$$

Найдем область сходимости ряда (15), используя признак Даламбера для положительных числовых рядов. По этому признаку ряд сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x_n} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1$$

Следовательно, ряд (15) заведомо сходится при

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

и расходится при

$$|x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| .$$

Величина

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}. \qquad (18)$$

называется *радиусом сходимости* ряда (15). Ряд заведомо сходится в интервале $|x| < R$ или $-R < x < R$, который называется интервалом сходимости.

Признак Даламбера ничего не говорит о сходимости ряда в точках $x = \pm R$. В этих точках сходимость ряда исследовать отдельно.

*Исследовать степенной ряд на сходимость означает найти его интервал сходимости и установить сходимость или расходимость ряда в граничных точках интервала*, т. е. $x = \pm R$.

**Пример.** Определить интервал сходимости ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}x^n + \ldots \quad .$$

**Решение**. Коэффициенты ряда $c_n = \frac{1}{1+n}$; $c_{n+1} = \frac{1}{n+2}$.

Ищем радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. Исследуем отдельно точки $x = \pm 1$.

1) $x = 1$. В этой точке ряд равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{1+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots \quad .$$

Используем предельный признак сравнения: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ эквивалентен гармоническому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится, тогда и исходный ряд расходится.

2) $x = -1$. В этой точке ряд равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{1+n} + \ldots \quad ,$$

т. е. ряд знакочередующийся. По теореме Лейбница он сходится, действительно, здесь

$$u_n = \frac{1}{1+n}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{1+(1+n)} = \frac{1}{2+n}.$$

**1.** $\frac{1}{1+n} > \frac{1}{2+n}$, т. е. $u_n > u_{n+1}$.

**2.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Ряд сходится по признаку Лейбница. Интервал сходимости данного ряда $-1 \le x < 1$ или $x \in [-1,1)$.

## 5. Ряды Тейлора и Маклорена. Вычисление определенных интервалов с помощью рядов

**Пример**. Вычислить с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$ интеграл

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4},$$

используя разложение в ряд.

**Решение**. Используем стандартное разложение

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + .$$

При $m = -1$ получим

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \quad .$$

Этот ряд сходится при $|x|<1$. Заменяя $x$ на $x^4$, получим

$$(1+x^4)^{-1} = \frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{4n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}.$$

Проинтегрируем ряд

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} dx = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)\Bigg|_0^{0,5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^5\cdot 5} + \frac{1}{2^9\cdot 9} - \frac{1}{2^{13}\cdot 13} + \ldots \quad .$$

Это знакочередующийся ряд, так как отброшенный остаток ряда меньше модуля первого отброшенного члена, то надо найти такой член ряда, чтобы $|U_n|<\varepsilon$. У нас $\varepsilon = 0{,}001$, $\left|\frac{1}{2^9\cdot 9}\right|<0{,}001$, то

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{160} \approx \frac{79}{160} \approx 0{,}494.$$

## 6. Ряды Фурье

[1, гл. XVII, §1– 4, упражнения].

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+...=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad (19)$$

называется *тригонометрическим рядом*, постоянные числа $a_0, a_n$ и $b_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ называются *коэффициентами тригонометрического ряда.* Если ряд (19) сходится, то его сумма есть периодическая функция $f(x)$ с периодом $2\pi$, так как $\cos nx$ и $\sin nx$ являются $2\pi$-периодическими функциями.

Для определения коэффициентов ряда воспользуемся формулами Фурье. Дана функция $f(x)$ с периодом $2\pi$, которая представляется тригонометрическим рядом (19), сходящимся к данной функции в интервале $(-\pi; \pi)$, т. е. является суммой этого ряда

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx\,. \qquad (20)$$

Тогда коэффициенты данного ряда определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\,, \qquad (21)$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx, \qquad (22)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx\,. \qquad (23)$$

Коэффициенты, определяемые формулами (21)-(23), называются *коэффициентами Фурье*, а тригонометрический ряд (20) с такими коэффициентами называется *рядом Фурье.*

**Пример.** Разложить периодическую функцию f(x) в ряд Фурье

$$f(x)=\begin{cases}\pi-2x, & -\pi<x<0,\\ \pi & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

**Решение**

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi-2x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx-\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xdx=x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{x^2}{\pi}\Big|_{0}^{\pi}=2\pi-\pi=\pi\,,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi-2x)\cos kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\, dx - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos kx\, dx\,.$$

Первый интеграл равен нулю, второй вычислим методом интегрирования по частям, учтя что $\cos k\pi = (-1)^k$, $\sin k\pi = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx = 0$ $(k \neq 0)$

$$\int_{-\pi}^{0} x\cos kx\, dx = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos kx & v = \int\cos kx dx = \dfrac{\sin kx}{k} \end{bmatrix} = x\cdot\frac{\sin kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx dx = 0 + \frac{\cos kx}{k^2}\bigg|_{-\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1-(-1)^k}{k^2},$$

$$a_k = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos kx\, dx = -\frac{2}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right).$$

Аналогично вычислим $b_k$:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi-2x)\sin kx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi\sin kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\, dx - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin kx\, dx\,.$$

Первый интеграл равен нулю, второй вычислим методом интегрирования по частям:

$$\int_{-\pi}^{0} x\sin kx\, dx = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin kx & v = \int\sin kx dx = \dfrac{-\cos kx}{k} \end{bmatrix} = -\frac{x\cdot\cos kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\cos kx dx = -\frac{\pi}{k}(-1)^k + \frac{\sin kx}{k^2}\bigg|_{-\pi}^{0} =$$

$$= -\frac{\pi}{k}(-1)^k,$$

$$b_k = -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}(-1)^k\right) = \frac{2}{k}(-1)^k\,.$$

Итого $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\left((-1)^k - 1\right)\cos kx + \dfrac{2}{k}(-1)^k\sin kx\right).$

Если в ряд Фурье разлагается *нечетная* функция $f(x)$, то произведение $f(x)\cos kx$ есть также нечетная функция, а $f(x)\sin kx$ – четная, следовательно,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \tag{24}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = 0, \tag{25}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kxdx, \qquad (26)$$

т. е. ряд Фурье нечетной функции является разложением по синусам:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \qquad (27)$$

Если в ряд Фурье разлагается *четная* функция $f(x)$, то произведение $f(x)\cos kx$ есть также четная функция, а $f(x)\sin kx$ – нечетная, следовательно,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \qquad (28)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kxdx, \qquad (29)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = 0, \qquad (30)$$

т. е. ряд Фурье четной функции является разложением только по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \qquad (31)$$

**Пример**

Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[0;\ \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} \pi - 2x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2} - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

и продолжена четным образом на промежуток $[-\pi;\ 0]$, а затем продолжена $2\pi$-периодически. Сделать чертеж функции $y = f(x)$ и написать ее разложение в ряд Фурье.

Сделаем чертеж функции $y = f(x)$ (*рис. 1*).

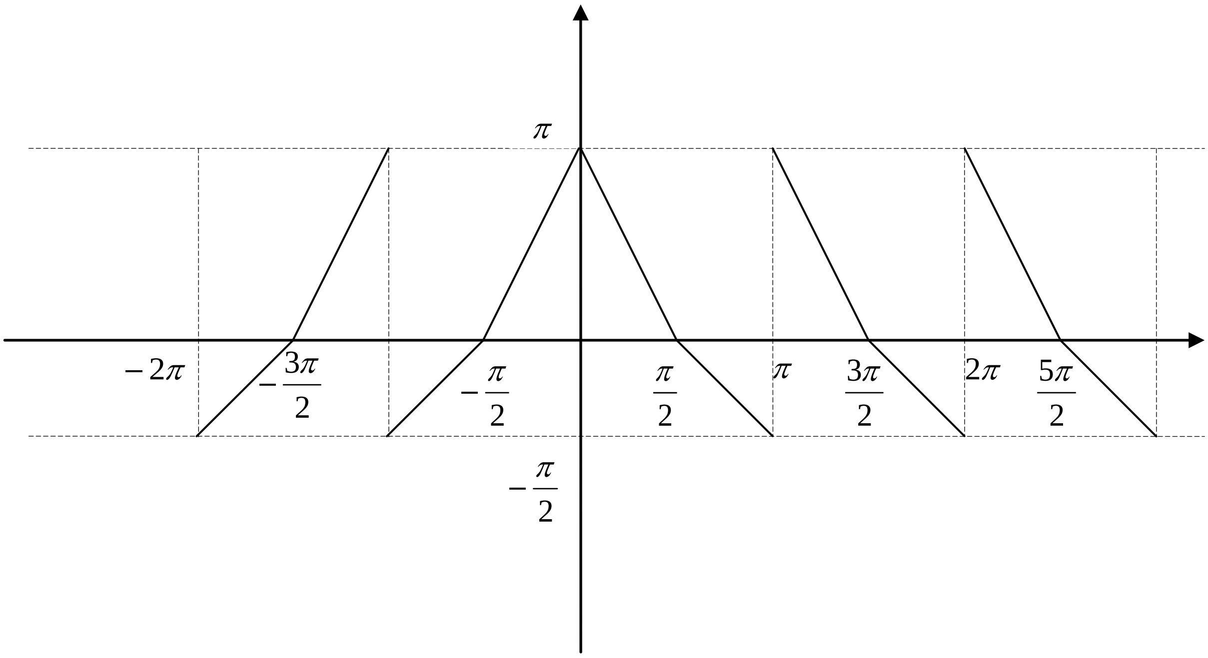


Рис. 1. Функция продолжена четным образом с периодом $2\pi$

Определим коэффициенты $a_0$, $a_n$ и $b_n$ разложения функции в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right).$$

Так как функция $y=f(x)$ четным образом продолжена на промежуток $[-\pi;\,0]$, то ряд Фурье является разложением только по косинусам:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,$$

а коэффициенты определяются по формулам (28) – (30):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\left[\pi x-x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}\right]+\left[\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{8}\right]\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\cos kxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos kxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos kxdx-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos kxdx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos kxdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos kxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\sin kx\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-2\left(\frac{x}{k}\sin kx\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{k}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin kxdx\right)+\frac{\pi}{2k}\sin kx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\left(\frac{x}{k}\sin kx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin kxdx\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\sin\frac{k\pi}{2}-2\left(\frac{\pi}{2k}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)+\frac{\pi}{2k}\sin k\pi-\frac{\pi}{2k}\sin\frac{k\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\pi}{k}\sin k\pi-\frac{\pi}{2k}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)\right)=$$

(воспользуемся тем, что $\sin k\pi=0$)

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\sin\frac{k\pi}{2}-2\left(\frac{\pi}{2k}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{k^2}\right)-\frac{\pi}{2k}\sin\frac{k\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{\pi}{2k}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k^2}\cos k\pi-\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi}{2}\right)\right)=\frac{2}{\pi}\left(-2\left(\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{1}{k^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{k^2}\cos k\pi-\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi}{2}\right)\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{2}{k^2}-\frac{1}{k^2}\cos k\pi\right).$$

Так как $\cos k\pi=(-1)^k$ и $\cos\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^n, & k=2n\\ 0, & k=2n-1\end{cases},\quad n=1,2,\dots$, то

$$\begin{cases}a_{2n}=\dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{1}{4n^2}(-1)^n+\dfrac{1}{2n^2}-\dfrac{1}{4n^2}(-1)^{2n}\right)=\dfrac{1}{2\pi n^2}\left((-1)^{n+1}+1\right),\\ a_{2n-1}=\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{2}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n-1)^2}(-1)^{2n-1}\right)=\dfrac{6}{\pi(2n-1)^2}.\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=0.$$

Функция разложима в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx=\frac{\pi}{8}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi k^2}\left((-1)^{k+1}+1\right)\cos 2kx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$$

## Контрольная работа 6. Задания

## 1. Определить интервал сходимости степенного ряда

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.1 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}x^n;$ | 1.6 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}x^n;$ |
| 1.2 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2^n}}x^n;$ | 1.7 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n}x^n;$ |
| 1.3 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+n)^2}{n}x^n;$ | 1.8 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n;$ |
| 1.4 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n;$ | 1.9 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{7^n}x^n.$ |
| 1.5 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}x^n;$ | 1.10 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n.$ |

## 2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:

| | |
|---|---|
| 2.1. $\int_0^1 \frac{\sin x^2 dx}{x^2};$ | 2.6. $\int_0^{0,5} x\ln\left(1+x^2\right)dx;$ |
| 2.2. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx;$ | 2.6. $\int_0^1 x\sin x^2 dx;$ |
| 2.3. $\int_0^1 \sqrt{x}\cos x dx;$ | 2.8. $\int_{0,5}^{0,5} \sqrt{x}e^{-x}dx;$ |
| 2.4. $\int_0^{0,5} arctgx^2 dx;$ | 2.9. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}dx;$ |
| 2.5. $\int_0^1 \cos\sqrt[3]{x}dx;$ | 2.10. $\int_0^{0,5} x^2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx.$ |

**3. Разложить в ряд Фурье функцию**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3.1 | $f(x)=x-1;\quad (-\pi,\pi];$ | 3.6 | $f(x)=1-x;\quad -\pi< x\le\pi;$ |
| 3.2 | $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x<0 \\ -x, & 0\le x<\pi \end{cases}$ | 3.7 | $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4};\ -\pi< x\le\pi;$ |
| 3.3 | $f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x\le 0 \\ x & 0<x\le\pi \end{cases}$ | 3.8 | $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2};-\pi< x\le\pi;$ |
| 3.4 | $f(x)=x^2+1;\quad -\pi< x\le\pi;$ | 3.9 | $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi<x\le 0 \\ 2 & 0<x\le\pi \end{cases}$ |
| 3.5 | $f(x)=\begin{cases} 2 & -\pi<x\le 0 \\ 1 & 0<x\le\pi \end{cases}$ | 3.10 | $f(x)=\begin{cases} x & -\pi<x\le 0 \\ -x & 0<x\le\pi \end{cases}$ |

**4. Функция** $y=f(x)$ **задана на промежутке** $[0;\pi]$**.** Разложить в ряд Фурье по косинусам (примеры 4.1 – 4.5) или по синусам (4.6 – 4.10), Сделать чертеж функции $y=f(x)$.

| Разложить в ряд Фурье по косинусам | | Разложить в ряд Фурье по синусам | |
|---|---|---|---|
| 4.1 | $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ | 4.6 | $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ |
| 4.2 | $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}-x, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ | 4.7 | $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}-x, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ x-\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ |
| 4.3 | $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ | 4.8 | $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}+x, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2}-x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ |
| 4.4 | $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ | 4.9 | $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}-2x, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ |
| 4.5 | $f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ x-\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ | 4.10 | $f(x)=\begin{cases} \pi-x, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$ |