



СМК-УМК 4.4.2-32-16

МЧС России

Санкт-Петербургский университет Государственной  
противопожарной службы

Учебно-методический комплекс по дисциплине  
«Математика»

Управление документацией

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой высшей  
математики и системного моделирования  
сложных процессов

\_\_\_\_\_ С.П. Еременко

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2016 года

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**«МАТЕМАТИКА»**

Направление подготовки  
**38.03.03 Управление персоналом**

Квалификация  
**Бакалавр**

Обсуждены на заседании  
ПМК-2 (Высшая математика)  
Протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 2016 г.

Санкт-Петербург

	<i>Должность</i>	<i>Фамилия/ Подпись</i>	<i>Дата</i>
<i>Разработал</i>	<i>Заместитель начальника кафедры ВМиСМСП</i>	<i>Крюкова М.С./</i>	
<i>Проверил</i>	<i>Председатель ПМК-2 «Высшая математика»</i>	<i>Медведева О.М./</i>	
			<i>Стр. 1 из 24</i>

## **Введение**

Настоящие методические рекомендации разработаны на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика» по направлению подготовки 38.03.03 «Управление персоналом» и предназначены для самостоятельного выполнения контрольных работ обучающимися.

Дисциплина «Математика» изучается на кафедре высшей математики и системного моделирования сложных процессов.

Целью дисциплины является овладение комплексом математических знаний, умений и навыков, позволяющих успешно решать современные проблемы науки и техники.

## 1. Цели и задачи дисциплины «Математика»

### *Цели освоения дисциплины «Математика»:*

- овладение комплексом математических знаний, умений и навыков, позволяющих успешно решать современные проблемы науки и техники;
- развитие научного, логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для профессиональной деятельности специалиста;
- формирование целостного мировоззрения и развитие системно-эволюционного стиля мышления;
- формирование и выработка навыков построения математических моделей, как средств описания и исследования окружающего мира и его закономерностей;
- реализация возможностей математики в формировании научного мировоззрения, в освоении научной картины мира.

В результате освоения дисциплины «Математика» обучающийся формирует и демонстрирует

#### *общекультурные компетенции:*

- способность к самоорганизации и самообразованию (ОК – 7);

#### *общепрофессиональные компетенции:*

- способность анализировать результаты исследований в контексте целей и задач своей организации (ОПК – 5);
- владение культурой мышления, способность к восприятию, обобщению и анализу информации, постановке цели и выбору путей ее достижения; способностью отстаивать свою точку зрения, не разрушая отношения (ОПК – 6).

### *Задачи дисциплины «Математика»*

В процессе освоения дисциплины обучающиеся изучают понятия, методы и теоремы курса математики, их применение к решению профессионально-ориентированных задач. Основу дисциплины составляют элементы линейной алгебры и геометрии, элементы дискретной математики, теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной.

## 2. Место дисциплины «Математика» в структуре ОПОП

Дисциплина «Математика» относится к базовой части ОПОП по специальности 38.03.03 «Управление персоналом» (квалификация – бакалавр) (Б2.Б.1).

Изучение данной дисциплины базируется на школьной подготовке курсантов, студентов и слушателей по математике.

Дисциплина «Математика» обеспечивает фундаментальные знания и формирует умения и навыки, необходимые для изучения:

- учебных дисциплин базовой части (Б2.Б): «Статистика», «Информационные технологии в управлении персоналом»;
- учебной дисциплины вариативной части (Б2.В): «Теория вероятностей и математическая статистика»;
- дисциплины по выбору (Б2.В.ДВ): «Теория игр и исследование операций».

## 3. Требования к результатам освоения дисциплины «Математика»

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**знать:** основные понятия математики, методы математического анализа, сущность и этапы метода математического моделирования.

**уметь:** использовать методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры и дискретной математики.

**владеть:** математическими методами решения типовых управленческих задач.

#### 4. Методические указания по выбору варианта контрольной работы и ее оформлению

Контрольные работы, предлагаемые для самостоятельного решения слушателям института заочного и дистанционного обучения, составлены по двадцативариантной системе. Варианты контрольных работ приведены в таблицах 1, 2, 3 и 4. На первом курсе обучения слушатели-заочники выполняют контрольные работы № 1, 2, на втором курсе обучения – контрольные работы № 3, 4.

К выполнению каждой контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующей литературы и разбора решения типовых задач. При этом следует руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждую работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть указаны фамилия и инициалы слушателей, полный шифр, номер контрольной работы и дата ее отправки в университет. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. При необходимости следует делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении данной задачи. Все вычисления (в том числе и вспомогательные) необходимо делать полностью. Чертежи и графики должны быть выполнены (желательно на миллиметровой бумаге) аккуратно и четко с указанием единиц масштаба, координатных осей и других элементов чертежа. Объяснения к задачам должны соответствовать тем обозначениям, которые даны на чертеже.

Для замечаний преподавателя необходимо на каждой странице оставлять поля шириной 3 – 4 см.

2. После получения работы (как зачтенной, так и незачтенной) слушатель должен исправить в ней все отмеченные рецензентом недостатки. В случае незачета слушатель обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

3. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Если будет установлено, что та или иная контрольная работа выполнена не самостоятельно, то она не будет зачтена, даже если в этой работе все задачи решены верно.

4. Слушатель выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом если предпоследняя цифра учебного шифра число нечетное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблицах 1 и 3, если же предпоследняя цифра учебного шифра число четное или ноль (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблицах 2 и 4.

Если в процессе изучения материала или при решении той или иной задачи у слушателя возникают вопросы, на которые он не может ответить сам, то можно обратиться к преподавателю для получения письменной

консультации. В запросе следует возможно более точно указать характер затруднения. При этом обязательно следует указать полное название книги, год издания и страницу, где трактуется непонятный для слушателя вопрос или помещена соответствующая задача.

### Варианты контрольных работ

Таблица 1

Номер варианта	Задачи для выполнения контрольной работы № 1			Задачи для выполнения контрольной работы № 2		
1	1	21	41	61	81	101
2	2	22	42	62	82	102
3	3	23	43	63	83	103
4	4	24	44	64	84	104
5	5	25	45	65	85	105
6	6	26	46	66	86	106
7	7	27	47	67	87	107
8	8	28	48	68	88	108
9	9	29	49	69	89	109
0	10	30	50	70	90	110

Таблица 2

Номер варианта	Задачи для выполнения контрольной работы № 1			Задачи для выполнения контрольной работы № 2		
1	11	31	51	71	91	111
2	12	32	52	72	92	112
3	13	33	53	73	93	113
4	14	34	54	74	94	114
5	15	35	55	75	95	115
6	16	36	56	76	96	116
7	17	37	57	77	97	117
8	18	38	58	78	98	118
9	19	39	59	79	99	119
0	20	40	60	80	100	120

Таблица 3

Номер варианта	Задачи для выполнения контрольной работы № 3			Задачи для выполнения контрольной работы № 4			
1	121	141	161	181	201	221	241
2	122	142	162	182	202	222	242
3	123	143	163	183	203	223	243
4	124	144	164	184	204	224	244
5	125	145	165	185	205	225	245
6	126	146	166	186	206	226	246
7	127	147	167	187	207	227	247
8	128	148	168	188	208	228	248
9	129	149	169	189	209	229	249
0	130	150	170	190	210	230	250

Таблица 4

Номер варианта	Задачи для выполнения контрольной работы № 3			Задачи для выполнения контрольной работы № 4			
1	131	151	171	191	211	231	251
2	132	152	172	192	212	232	252
3	133	153	173	193	213	233	253
4	134	154	174	194	214	234	254
5	135	155	175	195	215	235	255
6	136	156	176	196	216	236	256
7	137	157	177	197	217	237	257
8	138	158	178	198	218	238	258
9	139	159	179	199	219	239	259
0	140	160	180	200	220	240	260

## 5. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы

### Контрольная работа № 1 «Элементы линейной алгебры»

В задачах **1 – 20** найти матрицу  $D = AB - 2C$ .

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ .

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

3.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ .

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 14 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

5.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

6.  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

7.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

8.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

9.  $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

10.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

11.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .



$$12. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$14. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$15. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$16. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$17. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$18. \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$19. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$20. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

В задачах **21 – 40** дана невырожденная матрица  $A$ . Найти обратную матрицу  $A^{-1}$  и пользуясь правилом умножения матриц, показать, что  $A \cdot A^{-1} = E$ , где  $E$  – единичная матрица.

$$21. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad 22. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 5 & -8 & 2 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}. \quad 23. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$24. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \quad 25. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 26. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

27.	$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$	28.	$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	29.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$
30.	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	31.	$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 13 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	32.	$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
33.	$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	34.	$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	35.	$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
36.	$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	37.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	38.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
39.	$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix}$	40.	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$		

В задачах 41 – 60 решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными.

41.	$\begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ 3x + 2y - 3z = 3 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$	42.	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y - z = 6 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$	43.	$\begin{cases} -5x + 4y + 5z = -6 \\ -4x + 6y + 3z = -3 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$
44.	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y = 4 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$	45.	$\begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$	46.	$\begin{cases} 2x - y + 3z = -3 \\ -x - y + z = -2 \\ 3x + y - 2z = 6 \end{cases}$
47.	$\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 2x - y + 6z = 7 \\ 4x + 2y - z = 5 \end{cases}$	48.	$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 4 \\ 3x - 2y + z = -6 \\ 2x - z = 6 \end{cases}$	49.	$\begin{cases} 3x - 8y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ -x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$
50.	$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 4x + y + 4z = 2 \end{cases}$	51.	$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x + 5y - 8z = 8 \end{cases}$	52.	$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$
53.	$\begin{cases} 3x + 4y + 9z = 31 \\ x + 2y - z = -1 \\ 5x + 11y = 33 \end{cases}$	54.	$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y + 2z = 8 \\ 2x - 3y - z = -1 \end{cases}$	55.	$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 8x + 3y - 6z = -4 \\ -4x - y + 3z = 5 \end{cases}$
56.	$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 8y + 5z = 3 \\ 2x + 7y + 6z = 3 \end{cases}$	57.	$\begin{cases} x + z = 7 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = 11 \end{cases}$	58.	$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ x - 3y - 4z = -5 \\ -2x - y = 2 \end{cases}$

$$59. \begin{cases} x+2z=5 \\ 3x-5y+2z=7 \\ 4x+5y-z=2 \end{cases} \quad 60. \begin{cases} 3x+y+z=21 \\ x-4y-2z=-16 \\ -3x+5y+6z=41 \end{cases}$$

## Контрольная работа № 2 «Элементы аналитической геометрии»

В задачах **61 – 80** построить треугольник, вершины которого находятся в точках  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ . Найти:

1. уравнения сторон треугольника  $ABC$ ;
2. координаты точки пересечения медиан;
3. длину и уравнение высоты, опущенной из вершины  $A$ ;
4. площадь треугольника.

<b>61.</b> $A(-1; 2)$ , $B(5; 1)$ , $C(1; -2)$ . <b>63.</b> $A(-2; 1)$ , $B(2; 4)$ , $C(-2; -2)$ . <b>65.</b> $A(-3; 1)$ , $B(-2; -4)$ , $C(2; -1)$ . <b>67.</b> $A(2; 0)$ , $B(1; -2)$ , $C(-5; 6)$ . <b>69.</b> $A(4; 1)$ , $B(-1; -2)$ , $C(2; 2)$ . <b>71.</b> $A(-3; 0)$ , $B(3; -4)$ , $C(6; 8)$ . <b>73.</b> $A(2; 6)$ , $B(2; -6)$ , $C(10; 0)$ . <b>75.</b> $A(-3; 0)$ , $B(2; 4)$ , $C(-4; -4)$ . <b>77.</b> $A(3; 0)$ , $B(2; -6)$ , $C(8; 2)$ . <b>79.</b> $A(-2; -3)$ , $B(5; 1)$ , $C(2; -3)$ .	<b>62.</b> $A(-2; 1)$ , $B(5; -2)$ , $C(-1; -2)$ . <b>64.</b> $A(-4; 2)$ , $B(8; 2)$ , $C(-4; -3)$ . <b>66.</b> $A(1; 3)$ , $B(-5; -2)$ , $C(-5; 3)$ . <b>68.</b> $A(0; 4)$ , $B(-2; 4)$ , $C(-2; -2)$ . <b>70.</b> $A(-2; 2)$ , $B(-8; -5)$ , $C(4; 0)$ . <b>72.</b> $A(2; 1)$ , $B(1; -2)$ , $C(-3; -2)$ . <b>74.</b> $A(2; -3)$ , $B(2; 3)$ , $C(-4; 3)$ . <b>76.</b> $A(-1; 2)$ , $B(-6; -3)$ , $C(6; 2)$ . <b>78.</b> $A(2; 4)$ , $B(-3; 2)$ , $C(-3; -4)$ . <b>80.</b> $A(-3; 2)$ , $B(1; 7)$ , $C(-4; -5)$ .
--	--

В задачах **81 – 100** даны координаты точек  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $C(x_3, y_3, z_3)$ ,  $D(x_4, y_4, z_4)$ . Найти:

1. найти длину ребра  $AB$ ;
2. уравнение плоскости, проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ ;
3. уравнение высоты опущенной из точки  $D$  на плоскость  $ABC$ ;
4. площадь грани  $ABC$ ;
5. объем пирамиды  $ABCD$ .

<b>81.</b> $A(2; 3; 2)$ , $B(4; -1; -2)$ , $C(6; 3; -2)$ , $D(-5; -4; 8)$ . <b>82.</b> $A(3; 1; 4)$ , $B(-1; 6; 1)$ , $C(-1; 1; 6)$ , $D(0; 4; -1)$ . <b>83.</b> $A(0; 7; 1)$ , $B(4; 1; 5)$ , $C(4; 6; 3)$ , $D(3; 9; 8)$ .	
--	--

84.  $A(1;0;2)$ ,  $B(2;1;1)$ ,  $C(-1;2;0)$ ,  $D(-2;-1;-1)$ .  
 85.  $A(-1;2;1)$ ,  $B(1;0;2)$ ,  $C(2;-1;3)$ ,  $D(1;1;0)$ .  
 86.  $A(2;1;1)$ ,  $B(-1;2;-1)$ ,  $C(1;0;-2)$ ,  $D(3;-1;2)$ .  
 87.  $A(2;0;3)$ ,  $B(-1;3;2)$ ,  $C(3;2;0)$ ,  $D(-2;1;1)$ .  
 88.  $A(5;1;0)$ ,  $B(1;5;4)$ ,  $C(2;-1;0)$ ,  $D(2;4;7)$ .  
 89.  $A(3;-1;3)$ ,  $B(4;5;-2)$ ,  $C(2;7;1)$ ,  $D(2;3;5)$ .  
 90.  $A(0;2;4)$ ,  $B(4;-1;2)$ ,  $C(5;1;-3)$ ,  $D(3;2;6)$ .  
 91.  $A(6;2;0)$ ,  $B(-3;3;4)$ ,  $C(4;1;2)$ ,  $D(2;2;5)$ .  
 92.  $A(5;0;2)$ ,  $B(0;4;1)$ ,  $C(9;1;-2)$ ,  $D(4;2;6)$ .  
 93.  $A(0;1;4)$ ,  $B(2;0;-3)$ ,  $C(5;1;6)$ ,  $D(5;2;8)$ .  
 94.  $A(3;2;5)$ ,  $B(4;5;2)$ ,  $C(6;-3;0)$ ,  $D(5;-1;3)$ .  
 95.  $A(0;3;1)$ ,  $B(3;-2;3)$ ,  $C(5;0;-1)$ ,  $D(6;5;4)$ .  
 96.  $A(3;3;2)$ ,  $B(4;1;0)$ ,  $C(2;0;1)$ ,  $D(4;3;6)$ .  
 97.  $A(1;6;0)$ ,  $B(3;0;-4)$ ,  $C(5;3;2)$ ,  $D(2;3;2)$ .  
 98.  $A(2;0;2)$ ,  $B(5;6;5)$ ,  $C(3;3;0)$ ,  $D(4;2;4)$ .  
 99.  $A(3;2;0)$ ,  $B(1;1;3)$ ,  $C(0;3;2)$ ,  $D(2;2;6)$ .  
 100.  $A(6;-1;1)$ ,  $B(2;3;4)$ ,  $C(3;-3;0)$ ,  $D(4;4;7)$ .

В задачах **101 – 120** необходимо установить какие кривые описываются следующими уравнениями:

101.  $9x^2 - 36x + 4y^2 + 24y + 36 = 0$ .  
 103.  $x^2 - 6x + 9y^2 - 18y + 9 = 0$ .  
 105.  $8x - y^2 + 6y - 17 = 0$ .  
 107.  $2x - y^2 + 8y - 10 = 0$ .  
 109.  $8x - y^2 - 4y + 28 = 0$ .  
 111.  $9x^2 + 36x + y^2 + 8y + 43 = 0$ .  
 113.  $x - y^2 - 8y - 16 = 0$ .  
 115.  $9x^2 - 90x + y^2 - 2y + 217 = 0$ .  
 117.  $9x^2 - y^2 - 10y - 34 = 0$ .  
 119.  $9x^2 - 4y^2 - 16y - 52 = 0$ .

102.  $4x - y^2 + 2y - 25 = 0$ .  
 104.  $6x - y^2 + 6y - 15 = 0$ .  
 106.  $9x^2 - 18x + 4y^2 - 32y - 27 = 0$ .  
 108.  $y^2 + 2y - 3x + 7 = 0$ .  
 110.  $4x^2 - 25y^2 - 200y - 500 = 0$ .  
 112.  $8x - y^2 + 6y + 47 = 0$ .  
 114.  $36x^2 - y^2 - 6y - 45 = 0$ .  
 116.  $6x + y^2 + 10y + 25 = 0$ .  
 118.  $2x - y^2 + 4y - 2 = 0$ .  
 120.  $25x^2 - 9y^2 - 18y - 234 = 0$ .

**Контрольная работа № 3**  
**«Производная и дифференциал»**

В задачах **121 – 140** найти производные заданных функций.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 121. а) $y = x^2 \cdot \ln x$ ;                                | б) $y = \operatorname{arctg} e^x$ ;    | $y = \sin^2 \frac{1-x}{1+x}$ .   |
| 122. а) $y = \frac{3x-7}{x^2+2}$ ;                             | б) $y = \sin^2 \operatorname{tg} x$ ;  | $y = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3}$ .                                |
| 123. а) $y = (x^3+1) \cdot \cos x$ ;                           | б) $y = \ln(1+\sin^2 x)$ ;             | $y = \cos^2 \frac{4x-1}{x^2}$ .  |
| 124. а) $y = \frac{3 \cos x}{2x+1}$ ;                          | б) $y = 4^{\operatorname{arctg} 3x}$ ; | $y = \frac{\ln \cos x}{\ln \sin x}$ .                                  |
| 125. а) $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$ ;                  | б) $y = \arccos(2e^{2x}-1)$ ;          | $y = \ln \left( \frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x} \right)$ .                 |
| 126. а) $y = \frac{\log_5 x}{5^x}$ ;                           | б) $y = \cos \ln(2x-x^2)$ ;            | $y = \ln^2 \frac{x^2}{x^2-1}$ .  |
| 127. а) $y = \sin x \cdot \ln x$ ;                             | б) $y = e^{x^4+\cos^2 x}$ ;            | $y = x \cdot \arcsin(3 \ln^2 x)$ .                                     |
| 128. а) $y = \frac{6^x}{\cos x}$ ;                             | б) $y = \ln \arcsin(1-x^2)$ ;          | $y = \left( \frac{\sin x}{1+\cos x} \right)^2$ .                       |
| 129. а) $y = e^x \cdot (x^3+1)$ ;                              | б) $y = \ln(1+\sqrt{x})$ ;             | $y = \sin 3^x \cdot \cos^2 3^x$ .                                      |
| 130. а) $y = \frac{\arcsin x}{x^2}$ ;                          | б) $y = \sin^3(4x^3+1)$ ;              | $y = \ln^3 \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .                               |
| 131. а) $y = \frac{x \cdot \operatorname{ctg} x}{x^2+2x^2}$ ;  | б) $y = \ln \sin 5x$ ;                 | $y = 3^{2x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \ln x}{\sqrt{1-\sin 2x}}$ . |
| 132. а) $y = \frac{3-4x}{3-4x}$ ;                              | б) $y = \ln \operatorname{tg} x^3$ ;   | $y = \ln \sqrt{1+\sin 2x}$ .   |
| 133. а) $y = x^2 \cdot (\sin x+1)$ ;                           | б) $y = \arccos(x^3+4^x)$ ;            | $y = \ln \sin \frac{x+2}{x}$ .   |
| 134. а) $y = \frac{\arcsin x}{e^x}$ ;                          | б) $y = 2^{\cos 2x}$ ;                 | $y = e^{-x^2} \cdot \ln x$ .   |
| 135. а) $y = \frac{e^x \cdot \operatorname{tg} x}{4 \cos x}$ ; | б) $y = \ln \sin \ln x$ ;              | $y = \cos \frac{x}{x+1}$ .   |
| 136. а) $y = \frac{4 \cos x}{\operatorname{tg} x - 2x}$ ;      | б) $y = 6^{\sin^2 x + 4 \sin x}$ ;     | $y = \ln^2 \frac{x}{x-1}$ .  |
| 137. а) $y = x^2 \cdot 3^x$ ;                                  | б) $y = \sin^3(e^x - x^2)$ ;           | $y = \frac{\ln \cos x}{x^2+1}$ .                                       |
| 138. а) $y = \sqrt{x} \cdot e^x$ ;                             | б) $y = \ln^3(x^2 - 2 \ln x)$ ;        | $y = \frac{\sin^2 x}{2+3 \cos^2 x}$ .                                  |
| 139. а) $y = \frac{\ln x}{\sin x}$ ;                           | б) $y = \arccos \sqrt{1-2^x}$ ;        | $y = e^{-x} \cdot \ln \operatorname{tg} x$ .                           |

$$140. \text{ а) } y = \frac{\cos x}{e^x}; \quad \text{б) } y = tg^4(x^2 + 1); \quad \text{в) } y = \ln\left(\frac{x^2 + 3}{x^3 + 9x}\right).$$

В задачах 141 – 160 найти дифференциалы второго порядка.

$$\begin{array}{lll}
 141. & y = \frac{1}{x-1}. & 142. & y = \cos^2 x. & 143. & y = e^{-x^2}. \\
 144. & y = e^x \cdot \cos x. & 145. & y = ctgx. & 146. & y = \sqrt{1+x^2}. \\
 147. & y = \frac{x^2 \cdot \ln x}{x+1}. & 148. & y = x \cdot \sin x. & 149. & y = x \cdot e^{-x}. \\
 150. & y = \frac{x^2}{x-1}. & 151. & y = x^3 \cdot e^x. & 152. & y = x^2 \cdot \sin x. \\
 153. & y = x^3 \cdot 2^x. & 154. & y = \sin^2 x. & 155. & y = \frac{x-2}{x+2}. \\
 156. & y = \ln(1+x^2). & 157. & y = e^x \cdot \sin x. & 158. & y = 2^x \cdot \sin x. \\
 159. & y = \sqrt{x^3 + 2}. & 160. & y = x^2 \cdot 3^x. & & 
 \end{array}$$

В задачах 161 – 180 исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики.

$$\begin{array}{lll}
 161. & y = \frac{x^3}{(x+1)^2}. & 162. & y = \frac{2x+1}{x+5}. & 163. & y = \frac{x^2 - x + 2}{x+1}. \\
 164. & y = \frac{x^2}{x-1}. & 165. & y = \frac{8}{16-x^2}. & 166. & y = \frac{x}{1-x^2}. \\
 167. & y = x+6 + \frac{9}{x+2}. & 168. & y = \frac{x^2+3}{x+1}. & 169. & y = \frac{4x}{4+x^2}. \\
 170. & y = \frac{2x+3}{x+6}. & 171. & y = \frac{2x^2}{x^2-4}. & 172. & y = \frac{x^2}{x-3}. \\
 173. & y = \frac{x}{x^2+1}. & 174. & y = \frac{1}{x^2+9}. & 175. & y = \frac{x}{x^2-4}. \\
 176. & y = \frac{x^2+6}{x^2-1}. & 177. & y = x^2 - \frac{8}{x}. & 178. & y = \frac{x^2+1}{x^2-1}. \\
 179. & y = \frac{3x+1}{x+4}. & 180. & y = \frac{x^2-1}{x^2+1}. & & 
 \end{array}$$

**Контрольная работа № 4**  
**«Техника интегрирования и приложения определенного интеграла»**

В задачах **181 – 200** найти неопределенные интегралы.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| <p><b>181.</b> а) <math>\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx</math> ;</p>  | <p>б) <math>\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx</math> ;</p>             | <p>в) <math>\int x^3 \ln x dx</math> .</p>                |
| <p><b>182.</b> а) <math>\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx</math> ;</p>         | <p>б) <math>\int \frac{x^3 dx}{(x^4+1)^3}</math> ;</p>                | <p>в) <math>\int (x-1)e^x dx</math> .</p>                 |
| <p><b>183.</b> а) <math>\int \left( x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx</math> ;</p>                               | <p>б) <math>\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx</math> ;</p>       | <p>в) <math>\int x \operatorname{arctg} x dx</math> .</p> |
| <p><b>184.</b> а) <math>\int \frac{(x-4)(x+6)}{x^2} dx</math> ;</p>  | <p>б) <math>\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}</math> ;</p>      | <p>в) <math>\int \ln(5x-1) dx</math> .</p>                |
| <p><b>185.</b> а) <math>\int \left( x^3 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{x^2-4} \right) dx</math> ;</p>        | <p>б) <math>\int \frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}} dx</math> ;</p>             | <p>в) <math>\int \operatorname{arctg} 2x dx</math> .</p>  |
| <p><b>186.</b> а) <math>\int \frac{x^3 + x \sin x}{x} dx</math> ;</p>  | <p>б) <math>\int \frac{x^2 dx}{(x^3-1)^3}</math> ;</p>                | <p>в) <math>\int \sqrt{x} \ln x dx</math> .</p>           |
| <p><b>187.</b> а) <math>\int \left( e^x + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \right) dx</math> ;</p> | <p>б) <math>\int x \cos(x^2-4) dx</math> ;</p>                        | <p>в) <math>\int x \cdot 2^{-x} dx</math> .</p>           |
| <p><b>188.</b> а) <math>\int \frac{x^2(x-2)}{x^3} dx</math> ;</p>  | <p>б) <math>\int \frac{dx}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}</math> ;</p> | <p>в) <math>\int x \cos 3x dx</math> .</p>                |
| <p><b>189.</b> а) <math>\int \left( x^5 - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{x^2+16} \right) dx</math> ;</p>     | <p>б) <math>\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}</math> ;</p>               | <p>в) <math>\int \ln 4x dx</math> .</p>                   |
| <p><b>190.</b> а) <math>\int \frac{\sqrt{x} + xe^x}{x} dx</math> ;</p>   | <p>б) <math>\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 3x-4}} dx</math> ;</p>     | <p>в) <math>\int x \sin 4x dx</math> .</p>                |
| <p><b>191.</b> а) <math>\int \left( \cos x - \frac{1}{\sqrt{36-x^2}} \right) dx</math> ;</p>                     | <p>б) <math>\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx</math> ;</p>                     | <p>в) <math>\int xe^{2x} dx</math> .</p>                  |
| <p><b>192.</b> а) <math>\int \frac{(x-3)(x+2)}{x^2} dx</math> ;</p>  | <p>б) <math>\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx</math> ;</p>     | <p>в) <math>\int x \cos 6x dx</math> .</p>                |
| <p><b>193.</b> а) <math>\int \left( x - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2-25} \right) dx</math> ;</p>            | <p>б) <math>\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx</math> ;</p>          | <p>в) <math>\int \arccos 2x dx</math> .</p>               |
| <p><b>194.</b> а) <math>\int \frac{3x^4 + x^2 \cos x}{x^2} dx</math> ;</p>                                       | <p>б) <math>\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx</math> ;</p> | <p>в) <math>\int x \sin x dx</math> .</p>                 |
| <p><b>195.</b> а) <math>\int \left( \sin x + \frac{1}{\sqrt{49-x^2}} \right) dx</math> ;</p>                     | <p>б) <math>\int (4x^3+3)e^{x^4+3x} dx</math> ;</p>                   | <p>в) <math>\int x \cdot 3^{x+4} dx</math> .</p>          |
| <p><b>196.</b> а) <math>\int \frac{(x+3)(x+6)}{x^2} dx</math> ;</p>  | <p>б) <math>\int \frac{\cos \ln x}{x} dx</math> ;</p>                 | <p>в) <math>\int (4-3x)e^x dx</math> .</p>                |

197. a)	$\int \left( x^4 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{x^2-1} \right) dx$ ;	б)	$\int \sin x \cdot e^{\cos x} dx$ ;	в)	$\int x^5 \ln x dx$ .
198. a)	$\int \frac{3\sqrt{x} - 5xe^x}{x} dx$ ;	б)	$\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;	в)	$\int x \cdot 4^{-x} dx$ .
199. a)	$\int \left( \sin x - \frac{1}{\sqrt{81-x^2}} \right) dx$ ;	б)	$\int \frac{4x^3 + 6x}{x^4 + 3x^2 - 1} dx$ ;	в)	$\int \operatorname{arctg} 5x dx$ .
200. a)	$\int \frac{(x-5)(x+1)}{x^2} dx$ ;	б)	$\int e^x \sin e^x dx$ ;	в)	$\int \ln 7x dx$ .

В задачах 201 – 220 вычислить определенные интегралы.

201. a)	$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$ ;	б)	$\int_{-1}^1 xe^{-x^2} dx$ .
202. a)	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$ ;	б)	$\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x dx$ .
203. a)	$\int_{\frac{\pi^6}{6}}^{6\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 36}$ ;	б)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$ .
204. a)	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ ;	б)	$\int_1^e x \ln x dx$ .
205. a)	$\int_0^2 x(3-x) dx$ ;	б)	$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx$ .
206. a)	$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ;	б)	$\int_1^3 (x^2 - 3x) \ln x dx$ .
207. a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + x \sin x}{x} dx$ ;	б)	$\int_0^1 \frac{x^3 3^{x^4}}{2} dx$ .
208. a)	$\int_0^1 (3x^2 + e^x) dx$ ;	б)	$\int_0^{\ln 5} xe^{-x} dx$ .
209. a)	$\int_1^e \frac{2x^2 + 1}{x} dx$ ;	б)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ .
210. a)	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$ ;	б)	$\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{3} dx$ .
211. a)	$\int_0^4 \left( \frac{3}{\sqrt{x^2+9}} - x^3 + 2 \right) dx$ ;	б)	$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{2 - e^{3x}} dx$ .



212. a)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{10+x^2}{1+x^2} dx$  ; б)  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$  .
213. a)  $\int_1^e \frac{x^2+8}{x} dx$  ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1+\sin x}} dx$  .
214. a)  $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$  ; б)  $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$  .
215. a)  $\int_1^4 \left( \sqrt{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx$  ; б)  $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx$  .
216. a)  $\int_6^{14} \left( \frac{x^3}{3} - 10x^2 + 84x - \frac{520}{3} \right) dx$  ; б)  $\int_1^e \frac{\sqrt[5]{3+\ln x}}{x} dx$  .
217. a)  $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2} dx$  ; б)  $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$  .
218. a)  $\int_0^1 x(5-x) dx$  ; б)  $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$  .
219. a)  $\int_1^e \frac{4}{x} dx$  ; б)  $\int_0^5 \frac{x^2}{\sqrt{x+4}} dx$  .
220. a)  $\int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x}+5-7x}{x} dx$  ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-x) \cos 2x dx$  .

В задачах 221 – 240 найти площади фигуры, ограниченных линиями. Сделать чертеж.

221.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$ .  
 222.  $y = x^2$ ,  $y = 1$ .
223.  $y = \frac{1}{4}x^3$ ,  $x - y = 0$ .  
 224.  $y = x^2 - 2x + 3$ ,  $y = 3x - 1$ .
225.  $y = x^2$ ,  $y = 6 - x$ ,  $y = 0$ .  
 226.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$ .
227.  $y = -\frac{2}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 5$ ,  $y = 0$ .  
 228.  $y = x^2 + 3x$ ,  $y = -x^2 - 3x$ .
229.  $y^3 = x$ ,  $y = 1$ ,  $x = 8$ .  
 230.  $y = x^2 + 2$ ,  $y = 2x + 2$ .
231.  $y = x^2 + 2$ ,  $y = 1 - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .  
 232.  $y = \ln x$ ,  $x = e$ ,  $y = 0$ .
233.  $y = x^2$ ,  $y = 9$ .  
 234.  $y^2 = x + 1$ ,  $y = x^2 + 2x + 1$ .
235.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ .  
 236.  $y = \frac{x^2}{1}$ ,  $y = 2 - x^2$ .
237.  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ .  
 238.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = x$ ,  $x = 2$ .
239.  $y = 3x^2 + 1$ ,  $y = 3x + 7$ .  
 240.  $y = x^3$ ,  $y = 4x$ .

**241.** Вычислить объем тела, которое получается при вращении вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой  $y = \frac{1}{x}$ , прямыми  $x = 3$ ,  $x = 12$  и осью абсцисс.

**242.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной кривой  $y = x - x^2$  в пределах от  $x = 0$  до  $x = 1$ .

**243.** Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси  $Oy$  трапеции, образованной прямыми  $y = 3x$ ,  $y = 2$ ,  $y = 4$  и осью ординат.

**244.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной кривой  $y = x^3$  и отрезком  $0 \leq y \leq 8$ .

**245.** Определить объем тела, полученного от вращения кривой  $y = \frac{x^2}{4}$  вокруг оси  $Oy$  в пределах от  $y = 1$  до  $y = 5$ .

**246.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной кривой  $y = x - x^2$  в пределах от  $x = 0$  до  $x = 1$ .

**247.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = x$ ,  $y = x^2$ .

**248.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = 4 - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

**249.** Вычислить объем тела, которое получается при вращении вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной дугой кубической параболы  $y = x^3 - 4x$  и осью абсцисс.

**250.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  трапеции, образованной прямыми  $y = 3x$ ,  $y = 2$ ,  $y = 4$  и осью ординат.

**251.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной кривыми  $y = 2x^2$  и  $y = x^3$ .

**252.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

**253.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной параболой  $y^2 = 2x$  и прямой  $y = 2x + 2y - 3 = 0$ .

**254.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной кривыми  $y^2 = 4x$  и  $y = x$ .

**255.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + 1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

**256.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной кривыми  $y = x^2$  и  $y^2 = 8x$ .

**257.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \ln x$ ,  $x = 1$ ,  $x = e$ .

**258.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной кривыми  $x = y^2 - 2$  и  $y = x$ .

**259.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной кривой  $y^2 = (x-1)^3$  и прямой  $x = 2$ .

**260.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

**Пример 1.** Найти  $C = A^T - 3B$ ,  $D = A \cdot B$ , если

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Найдем транспонированную матрицу к матрице  $A$ :  
 $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ . Умножим матрицу  $B$  на число 3, получим

$$3B = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \\ 0 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем разность матриц  $A^T$  и  $3B$ , получим

$$C = A^T - 3B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \\ 0 & -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2-0 & 3-3 \\ 4-6 & 5-3 & 7-6 \\ 0-0 & -3+9 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно):  $A \cdot B = D$ ,  $3 \times 3 \cdot 3 \times 3 = 3 \times 3$ .

Вычислим элементы матрицы-произведения  $D$ , умножая элементы каждой строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы столбцов матрицы  $B$ :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 12 & 14 & 5 \\ 11 & -5 & 21 \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 14 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \end{cases} \text{ по}$$

формулам Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 4 - 15 - 15 +$$

Решение. Найдем определитель системы

$+4 - 18 = -22$ . Так как  $\Delta \neq 0$ , то система линейных уравнений имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ , полученных из определителя системы  $\Delta$  заменой соответственно первого, второго и третьего

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 14 & 3 & -1 \\ 13 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 81 + 28 - 39 - 39 + 18 - 126 = -77$$

столбцов свободных членов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 2 & 14 & -1 \\ 5 & 13 & 3 \end{vmatrix} = 84 + 26 - 45 - 70 + 26 - 54 = -33$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 14 \\ 5 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 78 + 36 + 210 - 135 - 56 -$$

$$-78 = 55.$$

По формулам Крамера находим единственное решение системы линейных уравнений:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-77}{-22} = 3,5 \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-33}{-22} = 1,5 \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{55}{-22} = -2,5$$

**Пример 3.** Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , и угол между ними, если  $a = (1; -2; 2)$ ,  $b = (-1; 1; 0)$ .

Решение. Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равно  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -3$ .

Длина вектора  $\vec{a}$  равна  $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ , длина вектора  $\vec{b}$  —  $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ . Косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\cos \alpha = \frac{-3}{3 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , откуда  $\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ .

**Пример 4.** Даны координаты точек  $A(1;2)$ ,  $B(2;0)$ ,  $C(-1;1)$ . Найти уравнения сторон треугольника  $ABC$ . Найти уравнение одной из медиан треугольника  $ABC$ . Найти уравнение одной из высот треугольника  $ABC$ .

Решение. Для нахождения уравнений сторон треугольника  $ABC$  воспользуемся формулой  $\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_1}$ . Уравнение стороны  $AB$ :  $\frac{2-1}{2-1} = \frac{y-2}{0-2}$ ,  $-2x+2 = y-2$ ,  $2x+y-4=0$ . Уравнение стороны  $BC$ :  $\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-0}{1-0}$ ,  $x-2 = -3y$ ,  $x+3y-2=0$ . Уравнение стороны  $AC$ :  $\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{1-2}$ ,  $-x+1 = -2y+4$ ,  $x-2y+3=0$ .

Найдем уравнение одной из медиан треугольника  $ABC$ . Пусть точка  $M$  середина стороны  $AB$ , тогда координаты точки  $M$  равны  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ ,  $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$ . Уравнение медианы  $CM$  определим по формуле  $\frac{x - x_C}{x_M - x_C} = \frac{y - y_C}{y_M - y_C}$ . Уравнение медианы  $CM$ :  $\frac{x - (-1)}{\frac{3}{2} - (-1)} = \frac{y - 1}{1 - 1}$ ,  $y = 1$ .

Найдем уравнение одной из высот треугольника  $ABC$ . Пусть высота треугольника проходит через точки  $B$  и  $Z$ . Точка  $Z$  лежит на стороне  $AC$ . Угловой коэффициент прямой  $AC$  равен  $k_1 = 0,5$ . Из условия  $k_1 k_2 = -1$ , следует, что угловой коэффициент прямой  $BZ$  равен  $k_2 = -2$ . Уравнение высоты будем искать в виде  $y - y_B = k_2(x - x_B)$ . Итак, уравнение высоты  $BZ$  имеет вид  $y - 0 = -2 \cdot (x - 2)$ ,  $2x + y - 4 = 0$ .

**Пример 5.** Даны координаты вершин треугольной пирамиды  $ABCD$ :  $A(2; 3; 1)$ ,  $B(4; 1; -2)$ ,  $C(6; 3; 7)$ ,  $D(-5; -4; 8)$ . Требуется найти: длину ребра  $AB$ ; угол между ребрами  $AB$  и  $AD$ ; площадь грани  $ABC$ ; уравнение плоскости  $ABC$ ; уравнение высоты, опущенной из вершины  $D$  на грань  $ABC$ ; объем пирамиды.

**Решение.** Так как  $\vec{AB} = (2; -2; -3)$ , то длина ребра  $AB$  равна  $|AB| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$ .

Так как  $\vec{AB} = (2; -2; -3)$ ,  $\vec{AD} = (-7; -7; 7)$ , то угол между ребрами  $AB$  и  $AD$  равен  $\cos \alpha = \frac{-14 + 14 - 21}{\sqrt{4 + 4 + 9} \cdot \sqrt{49 + 49 + 49}} = \frac{-21}{7\sqrt{51}} = -\frac{\sqrt{51}}{17}$ ,  $\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{51}}{17}\right)$ .

Определим площадь грани  $ABC$ . Координаты векторов равны  $\vec{AB} = (2; -2; -3)$ ,  $\vec{AC} = (4; 0; 6)$ . векторное произведение равно  $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$ . Площадь грани  $ABC$  равна

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 576 + 64} = \frac{1}{2} \sqrt{784} = 14 \text{ кв. ед.}$$

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(2; 3; 1)$ ,  $B(4; 1; -2)$ ,  $C(6; 3; 7)$ .  $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12x - 24y + 8z + 88$ . Уравнение плоскости

$ABC$  имеет вид  $3x + 6y - 2z - 22 = 0$ .

Уравнение высоты, опущенной из вершины  $D$  на плоскость  $ABC$  имеет вид  $\frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z+8}{-2}$ .

Объем треугольной пирамиды равен  $V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{154}{3}$  куб. ед.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение учебной дисциплины

### Основная литература:

1. Математический анализ в 2 ч. Ч. 1: учебник для бакалавров / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – 4-е изд. – М.: Издательство Юрайт, 2015 – 660 с. – Серия: Бакалавр. Углубленный курс.
2. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник и практикум для бакалавров / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 447 с. – Серия: Бакалавр. Базовый курс.

### Дополнительная литература:

1. Заборский Б.В., Крюкова М.С., Медведева О.М., Селеменова Т.А. Высшая математика. Курс лекций с примерами и задачами: учебное пособие / под общей редакцией Э.Н. Чижикова. – СПб.: Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России, 2015. Часть 1. – 200 с.
2. Калинина Е.С., Селеменова Т.А., Хитов С.Б. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие / под общей редакцией Э.Н. Чижикова. – СПб.: Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы МЧС России, 2015. Часть I. – 108 с.

### Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Сотрудниками кафедры высшей математики и системного моделирования сложных процессов СПб УГПС МЧС России разработаны компьютерные демонстрации по всем темам учебного курса.

В локальной сети университета создан сайт, предоставляющий обучающимся возможность пользоваться материалами электронной библиотеки университета, знакомиться с дидактическими и методическими материалами кафедры, сопровождающими учебный курс математики.

Компьютерная сеть университета предусматривает выход в глобальную сеть Internet, что дает возможность обучающимся знакомиться с материалами образовательных математических сайтов ([URL:http://exponenta.ru](http://exponenta.ru); [URL:http://www.studfiles.ru](http://www.studfiles.ru); [URL:http://www.uchites.ru](http://www.uchites.ru) и др.), а также пользоваться материалами справочных сайтов ([URL:http://www.ru.wikipedia.org](http://www.ru.wikipedia.org) и др.).

Разработал:

Заместитель начальника кафедры ВМиСМСП

майор внутренней службы

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 г.

М.С. Крюкова

## Лист регистрации изменений

Номер измене- ния	Номера листов			Основание для внесения изменений	Подпись	Расшиф- ровка подписи	Дата	Дата введения измене- ния
	замене- нных	новых	аннули- рован- ных					