Практическое занятие №8

Тема: Численное решение уравнения Вольтерра 1 рода методом квадратур

Цель – сформировать у магистрантов представление о применении интегральных уравнений в различных областях. Привить умение решать линейные интегральные уравнения Вольтерра 1 рода. Развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию $y(x)$ под знаком интеграла:

$$\int_a^b F(x,t,y(t))dt = G(x,y(x)) \tag{1}$$

Здесь F,G – заданные функции. Если функция в правой части уравнения (1) не зависит от $y(x)$, то говорят об интегральном уравнении 1-го рода, в общем случае – об уравнении 2-го рода.

Область $S=[a,b]\times[a,b]$ изменения переменных x и t в уравнении (1) называется основным квадратом. Функция F считается определенной в S. Промежуток $[a,b]$, на котором ищется функция $y(x)$, называется областью определения уравнения (1). Промежуток $[a,b]$ может быть и бесконечным ($a=-\infty$ и/или $b=+\infty$). Функцию $y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество для всех $x\in[a,b]$, называют решением интегрального уравнения (1) на промежутке $[a,b]$.

Интегральное уравнение (1) называют линейным, если в него неизвестная функция входит линейно.

Линейное интегральное уравнение вида

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x) \tag{2}$$

называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

Уравнение

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x) \tag{3}$$

называют интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода.

В уравнениях (2), (3) функции $f(x), K(x,t)$ являются заданными, $y(x)$ – искомая функция, λ – числовой параметр, $x\in[a,b]$, $t\in[a,b]$. Функция $K(x,t)$ называется ядром интегрального уравнения, $f(x)$ – свободным членом. Если $f\equiv 0$, то уравнения (2), (3) называются однородными, в противном случае – неоднородными.

К интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода приводят задачи гравиразведки полезных ископаемых, задача восстановления размытого изображения. К однородным интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода приводят, например, задачи о собственных колебаниях систем, т. е. колебаниях при отсутствии внешней силы.

Частный случай линейных уравнений вида (2), (3), имеющий важное самостоятельное значение, возникает для ядер, удовлетворяющих условию

$$K(x,t)\equiv 0 \quad t>x.$$

Такие ядра называют ядрами Вольтерры.

При этом уравнения

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x) \quad x \in [a,b] \tag{4}$$

$$\int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x) \quad x \in [a,b] \tag{5}$$

называют уравнениями Вольтерры соответственно 2-го и 1-го рода.

К линейным уравнениям Вольтерры 2-го рода приводит, например, решение начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 1 РОДА МЕТОДОМ КВАДРАТУР

Применим метод квадратур к решению уравнения (5) с дополнительным условием $f(a) = 0$.

На первом этапе определим начальное значение $y(a)$. Для этого продифференцируем уравнение (5) по x

$$K(x,x)y(x) + \int_a^x K_x'(x,t)y(t)dt = f_x'(x)$$

Полагая $x = a$, найдем $y_1 = y(a) = \dfrac{f_x'(x)}{K(a,a)} = \dfrac{f_x'(a)}{K_{11}}$

На втором этапе выберем постоянный шаг интегрирования h и рассмотрим дискретное множество точек $x_i = a + h(i-1),\ i = 1,2,...;n$

При $x = x_i$ уравнение (5) примет вид

$$\int_a^{x_i} K(x,t)y(t)dt = f(x_i) \quad i = 2,3,...,n \tag{9}$$

Заменим интеграл в (9) квадратурной формулой (6) и выбирая x_j $(j = 1,2,...i)$ узлами квадратуры (по переменной t) получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{i} A_{ij} K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_{i)}) + R_i,\ i = 2,3,...,n$$

где A_{ij} коэффициенты квадратурной формулы на отрезке $[a, x_i]$ R_i -ошибка аппроксимации. Полагая R_i малыми и отбрасывая их, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{i} A_{ij} K_{ij} y_j = f_i,\ i = 2,3,...,n \tag{10}$$

где $f_i = f(x_i), K_{ij} = K(x_i, x_j)$ $(j = 1,2,...,i)$. y_j - приближенные значения искомой функции $y(x)$ в узлах x_i.

Теперь система уравнений (10) позволяет последовательно определить при $A_i K_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,...,n)$ искомые приближенные значения посредством формул

$$y_1 = \frac{f_x{}'(a)}{K_{11}},\ y_2 = \frac{f_2 - A_{21}K_{21}y_1}{A_{22}K_{22}},\ \dots, y_n = \frac{f_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} A_{nj}K_{nj}y_j}{A_{nn}K_{22--nn}} \quad (11)$$

конкретный вид которых зависит от выбора квадратурной формулы.

Используем формулу (11) при решении примера 2.

Пример 2. Получить численное решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_0^x \left[\sin^2(x-t)+1\right]\cdot y(t)dt = \frac{46\cdot\sin(x/2)}{15} + \frac{3\cdot x^2}{32} - \frac{\sin^2(x)}{32} - \frac{4\cdot\sin(2\cdot x)}{15}$$

на интервале $[0,12\pi]$. Полученное решение сравнить с точным решением: $y(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{8}$.

Решение будем строить по формулам (11). Для вычисления коэффициентов A_{ij} будем использовать квадратурную формулу трапеций.

Результаты представлены на рис. 4-7. На рис. 1 представлена функция, возвращающая численное решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода с использованием квадратурной формулы трапеций.

На рис. 5 приведен результат численного решения с шагом $h = 0.3\cdot\pi = 0.942$ без использования уточнения решения. Видим, что решение получилось чрезвычайно неустойчивым – в виде так называемой «пилы», не имеющей ничего общего с точным решением. Относительная ошибка решения равна $\delta = 0.873$.

После уточнения по правилу Рунге (рис.6) получили численное решение, совпадающее с точным решением (рис. 7). Относительная ошибка решения равна $\delta = 0.0000143$.

$a := 0 \quad b := 12\pi \quad n := 80 \quad K(x,t) := \sin(x-t)^2 + 1$

$$f(x) := \frac{46\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{15} + \frac{3\cdot x^2}{32} - \frac{\sin(x)^2}{32} - \frac{4\cdot\sin(2\cdot x)}{15} \qquad f(a) = 0$$

```
Volterra_1_TR(a,b,n,K,f) := | h ← (b − a)/n
                            | fp(x) ← d/dx f(x)
                            | for i ∈ 0..n
                            |   | x_i ← a + i·h
                            |   | f1_i ← f(x_i)
                            |   | b_i ← | 1 ÷ 2  if i = 0 ∨ i = n
                            |   |       | 1  otherwise
                            |   | for j ∈ 0..n
                            |   |   | t_j ← a + j·h
                            |   |   | K1_i,j ← K(x_i, t_j)
                            | y_0 ← fp(a) / K1_0,0
                            | for i ∈ 1..n
                            |   | s ← 0
                            |   | for j ∈ 0..i − 1
                            |   |   s ← s + b_j·K1_i,j·y_j
                            |   | y_i ← 2 ÷ K1_i,i·(f1_i ÷ h − s)
                            | V^⟨0⟩ ← x
                            | V^⟨1⟩ ← y
                            | V
```

Рис. 4 Фрагмент документа Mathcad с функцией, возвращающей численное решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода

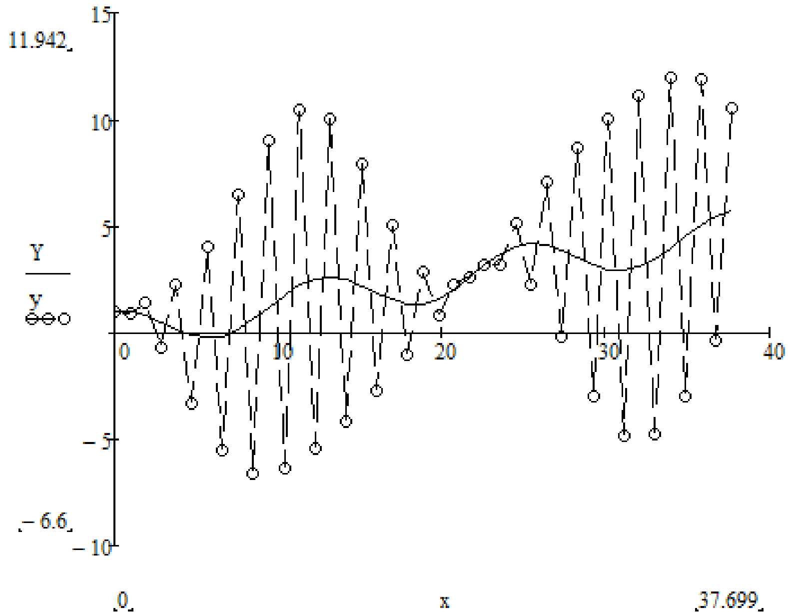
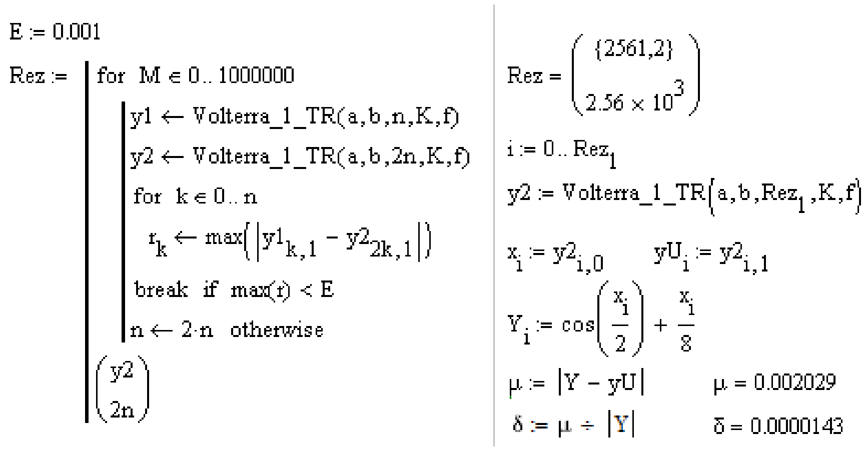


Рис. 5 Графическое решение уравнения. Здесь Y -точное решение;
y – Неустойчивое решение («пила»)



```
E := 0.001
Rez := | for M ∈ 0..1000000
       |   | y1 ← Volterra_1_TR(a,b,n,K,f)
       |   | y2 ← Volterra_1_TR(a,b,2n,K,f)
       |   | for k ∈ 0..n
       |   |   r_k ← max(|y1_{k,1} − y2_{2k,1}|)
       |   | break if max(r) < E
       |   | n ← 2·n otherwise
       | (y2)
       | (2n)

Rez = ({2561,2}; 2.56 × 10^3)
i := 0..Rez_1
y2 := Volterra_1_TR(a,b,Rez_1,K,f)
x_i := y2_{i,0}      yU_i := y2_{i,1}
Y_i := cos(x_i/2) + x_i/8
μ := |Y − yU|        μ = 0.002029
δ := μ ÷ |Y|         δ = 0.0000143
```

Рис. 6 Фрагмент документа Mathcad с функцией, уточняющей решение уравнения

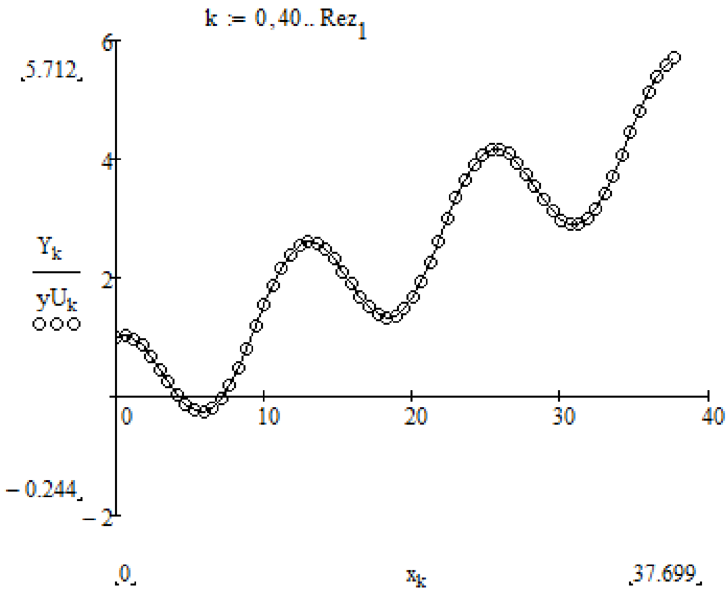


Рис. 7 Графическое решение уравнения. Здесь Y_k -точное решение; yU_k – численное решение

Задание 2.

1. Найдите приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода, используя квадратурные формулы левых прямоугольников, правых прямоугольников, трапеций, Симпсона. Выберите решение с наименьшей относительной ошибкой.

2. Для выбранного решения постройте последовательность непрерывных функций $y_n(x)$, сходящихся к точному решению исходного интегрального уравнения. Поиск в этой последовательности такого элемента $y_n(x)$, начиная с которого выполняется условие $\|y_n(x) - y_{n-1}\| \le \varepsilon$, где ε - заданная заранее точность.

3. Сравните приближенное решение с точным решением в эвклидовой норме. Вычислите значение относительной ошибки решения δ. Постройте графики точного и приближенного решений.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант 1.

$\int_0^x e^{x-t} y(t)dt = \frac{x^2}{2}$, $x \in [0,\pi]$, $\varepsilon = 0.001$.

Точное решение: $y(x) = x - \frac{x^2}{2}$.

Вариант 2.

$\int_0^x [sin^2(x+t)+1]\,y(t)dt = \frac{13\cdot sin(2x)}{16} - \frac{sin(6x)}{16} + \frac{x\cdot[2sin^2(x)-1])}{4}$, $x \in [0,2\pi]$, $\varepsilon = 0.0001$. Точное решение: $y(x) = \cos(2x)$.

Вариант 3.

$\int_1^x \frac{2t}{1+x^2} y(t)dt = \frac{6x^5-50x^3-15x^2+59}{15(x^2+1)}$, $x \in [1,3]$, $\varepsilon = 0.00001$.
Точное решение: $y(x) = x^3 - 5x - 1$.

Вариант 4.

$\int_0^x \cos(x-t)\,y(t)dt = 4sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2x + 2\sin(x)$,
$x \in [0,5]$, $\varepsilon = 0.0001$. Точное решение: $y(x) = 2\mathrm{x} - x^2$.

Вариант 5.

$\int_1^x (x^2+t^2+1)\,y(t)dt = x^2 - \frac{1}{x}$, $x \in [1,10]$, $\varepsilon = 0.0001$.
Точное решение: $y(x) = \frac{1}{x^2}$.

Вариант 6.

$\int_1^x e^{x^2-t^2}\,y(t)dt = e^{x^2}(x-1)$, $x \in [1,3]$, $\varepsilon = 0.000001$.
Точное решение: $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

Вариант 7.

$\int_1^x [sin^2(x-t)+1]\,y(t)dt = \frac{5\sin(x)}{3} - \frac{sin(2x-1)}{4} - \frac{\sin(2x-3)}{12} - \frac{3\sin(1)}{2}$,
$x \in [1,6]$, $\varepsilon = 0.00001$.
Точное решение: $y(x) = \cos(x)$.

Вариант 8.

$\int_0^x 2^{x-t} y(t)dt = \frac{2^x-6^x+6^x\,ln3-6^x e^{-x} ln3}{ln3(ln3-1)}$, $x \in [0,2]$, $\varepsilon = 0.001$
Точное решение: $y(x) = 6^x(1-e^{-x})$.

Вариант 9.

$\int_0^x \frac{cos(x-t)}{1+x^2} y(t)dt = \sin(x) - \frac{x}{1+x^2}\cos(x)$, $x \in [0,3\pi]$, $\varepsilon = 0.0001$
Точное решение: $y(x) = 4xsin(x)$.

Вариант 10.

$\int_1^x [(x-t)^2+1]\,y(t)dt = \frac{x^5}{15} + x^3 - \frac{5x^2}{3} + 3x - \frac{12}{5}$,
$x \in [1,4]$, $\varepsilon = 0.0001$. Точное решение: $y(x) = 2x^2 + 1$.

Вариант 11.

$\int_0^x [(x-t)^3+1]\,y(t) = x^2(x^3+10)$, $x \in [0,3]$, $\varepsilon = 0.001$.
Точное решение: $y(x) = 20x$.

Вариант 12.

$\int_0^x \frac{sin(x-t)+1}{1+x^2} y(t)dt = \frac{x-\cos(x)+1}{1+x^2}$, $x \in [0,2\pi]$, $\varepsilon = 0.00002$.
Точное решение: $y(x) = 1$.

Вариант 13.

$\int_0^x [(x-t)e^{x-t}+1]y(t)dt = \left(\frac{x^3}{6}+x-1\right)e^x+1, x\in[0,4]$, $\varepsilon = 0.0001$. Точное решение: $y(x) = xe^x$.

Вариант 14.

$\int_0^x cos^2(x-t)y(t)dt = x^2 + sin^2(x-t)$, $x\in[0,10]$, $\varepsilon = 0.0001$. Точное решение: $y(x) = 4x$.

Вариант 15.

$\int_0^x [sin^3(x-t)+1]\,y(t)dt = 3x^3+6x^2+x-\frac{cos^3(x)}{3}+13\cos(x)-\frac{38}{3}$,
$x\in[0,2\pi]$, $\quad\varepsilon = 0.001$.
Точное решение: $y(x) = 9x^2+1$.