Типовой расчет по математической статистике

Тема 1

Оценивание, проверка статистических гипотез. Методические указания.

I. Из генеральной совокупности X сделана выборка объема n = 200. Требуется на основании этой выборки сделать аргументированное заключение о законе распределения генеральной совокупности и её основных числовых характеристиках. Для этого необходимо:

а) найти статистический ряд с числом интервалов, равным, например, 12;
б) построить гистограмму;
в) найти статистическую функцию распределения и построить ее график;
г) найти точечные оценки математического ожидания и дисперсии;
д) найти доверительный интервал для математического ожидания с заданной надёжностью (доверительной вероятностью);
е) на основании критерия согласия χ^2 (Пирсона) проверить гипотезу о нормальном законе распределения генеральной совокупности.

II. По данным таблицы - группированной выборки двумерного вектора (X,Y), требуется найти выборочное уравнение прямой – линии линейной регрессии Y на X.

Каждому студенту преподаватель выдает для обработки выборку объема n = 200 из таблицы нормально распределенных случайных чисел и группированную выборку двумерного вектора в виде таблицы.

Рассмотрим каждый этап выполнения работы.

1. Составление статистического ряда, гистограммы и нахождение точечных оценок математического ожидания и дисперсии.

В заданной выборке находим наименьший a и наибольший b элементы. Частное $\frac{b-a}{12}$ округляем до десятых, и полученное число берем в качестве шага разбиения h. Вводим отрезок $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, длина которого 12 h, причем числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ подобраны так, чтобы $\tilde{a} \approx a$; $\tilde{b} \approx b$ и, кроме того, чтобы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ имели не более двух знаков после запятой для простоты дальнейших вычислений.

Отрезок $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ разбиваем точкам $x_0 = \tilde{a}$, x_1, x_2,... , $x_{12} = \tilde{b}$, на 12 равных частичных интервалов $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,...,11$; $\Delta_{12} = [x_{11}, x_{12}]$, затем определяем частоты n_i, то есть число элементов выборки, попавших в каждый из частичных интервалов Δ_i и относительные частоты $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, i= 1, …,12.

Примечание. Если некоторые элементы выборки не попали на отрезок $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ *, то их условимся относить к ближайшему крайнему интервалу. Числа, совпадающие с границами частичных интервалов, условимся относить к левому ин-*

тервалу. В качестве членов статистического ряда x_i^*, $i = 1, 2, ..., 12$ *берем числа, являющиеся серединами частичных интервалов:* $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$

Результаты оформляются в виде таблицы (табл. 1).

Таблица 1

Номера интервалов (x_{i-1}, x_i)	1	2	3	…	12	*Примечания*
Границы Интервалов	(x_0, x_1)	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	…	(x_{11}, x_{12})	
x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	…	x_{12}^*	
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_{12}	$\sum_{i=1}^{12} n_i = 200$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	p_3^*	…	p_{12}^*	$\sum_{i=1}^{12} p_i^* = 1$

Пример. Пусть нам дана следующая выборка

-0,669	0,035	-2,077	1,077	0,525	-0,154	-0,537	-1,036	0,882	-0,402
0,392	0,106	1,430	-0,204	-0,326	0,825	1,214	0,091	-0,032	-1,264
-0,337	0,199	-0,160	0,625	-0,891	-1,464	1,353	0,466	1,000	1,511
0,369	-1,990	-1,190	0,666	-1,614	0,082	-0,184	-1,324	0,741	-0,264
-1.694	0,710	-0,655	-0,546	1,654	0,134	-0,529	-0,915	-0,898	0,799
0,985	0,340	0,276	0,911	-0,170	-0 ,551	-0,036	0,679	-0,432	0,678
-1,063	-0,594	-1,526	-0,787	0,873	-0,405	1,469	-0,318	0,922	0,522
0,033	-1,527	1,422	0,308	0,845	-0,151	1,642	0,033	-0,838	-0,872
0,597	0,362	-3,760	1,159	0,874	-0,794	-0,358	0,162	0,064	1,594
-1.601	-0,570	0,133	-0,660	1,485	0, 682	0,104	1,215	0,686	0,676
-0266	-1,309	0,597	0,989	0,934	1,079	-0,999	0,015	-0,094	-1,920
0,901	1,531	-0,889	-1,019	0,084	1,531	0,638	1,297	-0,139	-0,157
-1,433	-1,008	-0,990	0,090	0,940	0,207	-2,243	-0,039	0,276	-0,551
1,327	0,703	-1,724	-0,709	-1,100	-1,346	0,183	-0,163	1,212	-0,452
-0,248	0,788	0,577	0,122	-0,536	0,293	-0,126	1,627	0,658	1,348
-0,401	-0,679	0,921	0,476	1,121	-0,864	-0,656	-0,220	-1,566	-0,144
0,344	0,324	0,686	-1,487	-0,136	0,803	-0,745	0,932	-0,833	-0,946
0,441	-0,372	-1,336	0,062	1,506	-0,315	1,207	0,838	-0,304	0,128
0,824	0,040	-1,734	0,261	0,054	-0,379	-0,961	-2,716	0,823	-0,112
1,385	1,320	-0,509	-0,381	-1,671	-0,524	1,298	-1,248	0,346	-0,805

Таблица 2

Номер интервала (x_{i-1}, x_i)	1 (x_0, x_1)	2 (x_1, x_2)	3 (x_2, x_3)	4 (x_3, x_4)	5 (x_4, x_5)	6 (x_5, x_6)	7 (x_6, x_7)	8 (x_7, x_8)	9 (x_8, x_9)	10 (x_9, x_{10})	11 (x_{10}, x_{11})	12 (x_{11}, x_{12})
Границы интервалов	(-4;-3,5)	(-3,5;-3)	(-3,-2,5)	(-2,5;-2)	(-2; -1,5)	(-1,5; -1)	(-1; -0,5)	(-0,5; 0)	(0; 0,5)	(0,5; 1)	(1; 1,5)	(1,5; 2)
x_i^*	-3,75	-3,25	-2,75	-2,25	-1,75	-1,25	-0,75	-0,25	0,25	0,75	1,25	1,75
n_i	1	0	1	2	11	16	34	34	37	38	18	8
p_i^*	0,005	0	0,005	0,010	0,055	0,080	0,170	0,170	0,185	0,190	0,090	0,040

Составляем статистический ряд с 12 интервалами. Наименьший элемент выборки $a = -3{,}760$, наибольший $b = 1{,}654$. Частное $\frac{b-a}{12} = \frac{1{,}654+3{,}760}{12} = 0{,}451$.

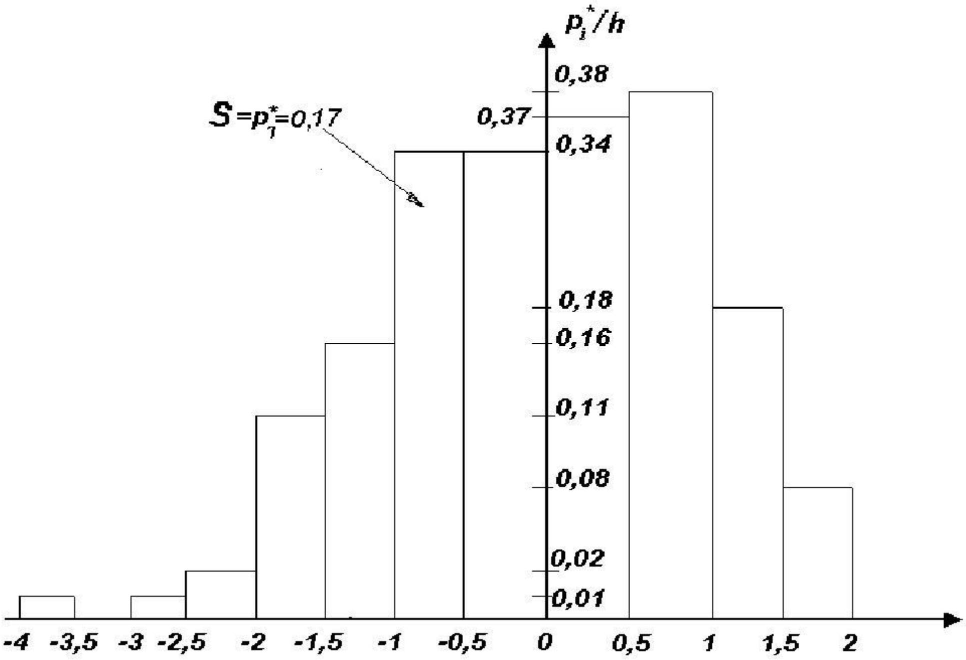
Округляя, получаем $h=0{,}5$.

$12\,h = 12 \cdot 0{,}5 = 6$. Поэтому удобно взять $\tilde{a} = -4$ и $\tilde{b} = 2$.

Составляем табл.2.

Построим гистограмму (рис. 1). ***Гистограмма*** представляет собой ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников, основания которых - частичные интервалы $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i),\ i = 1,2,\ldots,12$; расположенные на оси абсцисс, высоты пропорциональны, а площади равны соответствующим частотам (см. пособие с. 122-126). В нашем примере все эти данные берем из таблицы 2 .

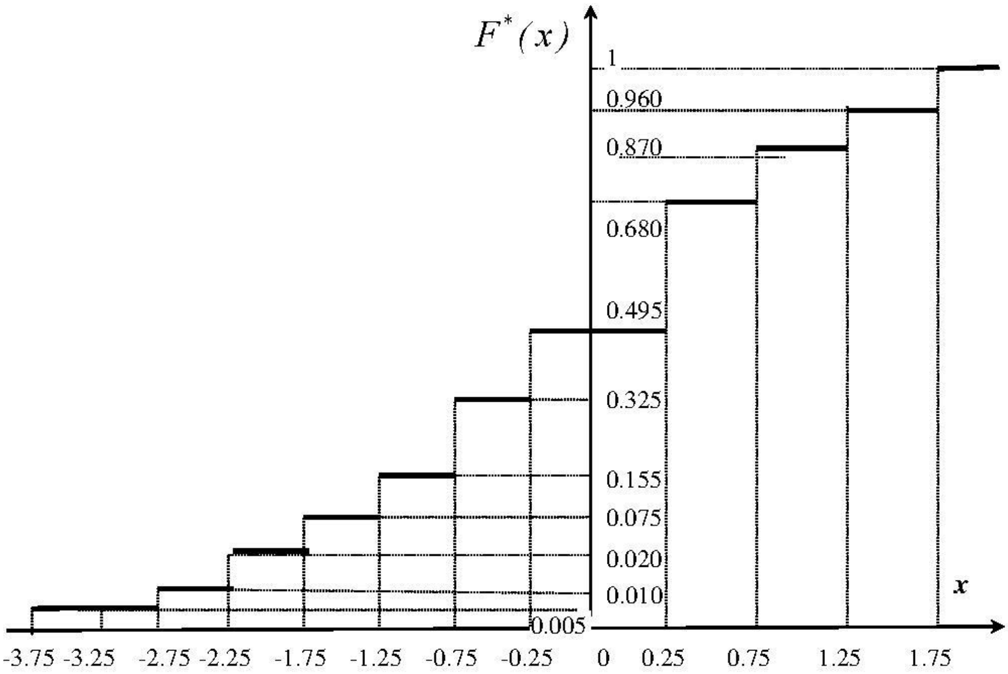
Гистограмма Рис. 1



Далее строим эмпирическую функцию распределения (см. пособие с. 86-89). Она имеет вид $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$; где n_x - число элементов выборки, меньших x; здесь x - любое вещественное число. График эмпирической функции распределения представляет собой ступенчатую линию, определенную на всей числовой оси (рис.2). Значения этой функции заключены в промежутке [0,1]. Из таблицы 2 находим

$$F^*(x)=\begin{cases}0.000 & x \le -3.75\\ 0.005 & -3.75 < x \le -2.75\\ 0.010 & -2.75 < x \le -2.25\\ 0.020 & -2.25 < x \le -1.75\\ 0.075 & -1.75 < x \le -1.25\\ 0.155 & -1.25 < x \le -0.75\\ 0.325 & -0.75 < x \le -0.25\\ 0.495 & -0.25 < x \le 0.25\\ 0.680 & 0.25 < x \le 0.75\\ 0.870 & 0.75 < x \le 1.25\\ 0.960 & 1.25 < x \le 1.75\\ 1.000 & x > 1.75\end{cases}$$

Отсюда график эмпирической функции распределения имеет вид



<u>График эмпирической функции распределения</u>
<u>рис.2</u>

Замечание. *Для наглядности, при построении гистограммы и эмпирической функции распределения масштаб по оси абсцисс и оси ординат может быть выбран различным.*

Найдем точечные оценки математического ожидания и дисперсии. В качестве таких оценок выбирают среднее выборочное значение $\bar{X} = \sum_{i=1}^{12} x_i^* p_i^*$ и выборочную дисперсию $S^2 = \sum_{i=1}^{12}(x_i^* - \bar{X})^2 p_i^* = \sum_{i=1}^{12} x_i^{*2} p_i^* - \bar{X}^2 = m_2 - \bar{X}^2$, где $m_2 = \sum_{i=1}^{12} x_i^{*2} p_i^*$ (см. пособие с.96-99).

Результаты заносим в таблицу вида 3.

Таблица 3

Номер интервала (x_{i-1}, x_i)	1	2	3	...	12	Некоторые результаты
x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_{12}^*	
P_i^*	P_1^*	P_2^*	P_3^*	...	P_{12}^*	
$x_i^* p_i^*$	$x_1^* p_1^*$	$x_2^* p_2^*$	$x_3^* p_3^*$	...	$x_{12}^* p_{12}^*$	$\bar{X} = \sum_{i=1}^{12} x_i^* p_i^*$
$x_i^{*2} p_i^*$	$x_1^{*2} p_1^*$	$x_2^{*2} p_2^*$	$x_3^{*2} p_3^*$	...	$x_{12}^{*2} p_{12}^*$	$m_2 = \sum_{i=1}^{12} x_i^{*2} p_i^*$

Таблица 3 строится по данным табл.2, затем вычисляются $\bar{X}$ и S^2. В нашем примере результаты приведены в табл.4, после ее создания найдены $\bar{X}$ и S^2.

2. Построение доверительного интервала.

Интервал θ_1, θ_2 называется ***доверительным интервалом*** для неизвестного параметра θ, если, с заданной доверительной вероятностью γ (надежностью) можно утверждать, что неизвестный параметр находится внутри этого интервала (накрывается интервалом). В данной работе будем искать доверительный интервал для математического ожидания m с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$ (см. пособие с. 108-109).

Ввиду большого объема выборки доверительный интервал имеет вид $\left(\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$. Параметр t определяется из равенства

$$\gamma = P(\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1,$$

где $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$, $\quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

Замечание. *Для определения t при использовании функции Лапласа* $\Phi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-x^2/2} dx$ *будем иметь следующее уравнение* $\gamma = 2\Phi^*(t)$.

Таблица 4

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Некоторые результаты
x_i^*	-3,75	-3,25	-2,75	-2,25	-1,75	-1,25	-0,75	-0,25	0,25	0,75	1,25	1,75	
p_i^*	0,005	0	0,005	0,01	0,055	0,08	0,17	0,17	0,185	0,19	0,09	0,040	
$x_i^* p_i^*$	-0,019	0	-0,014	-0,023	-0,096	-0,1	-0,128	-0,043	0,046	0,143	0,113	0,07	$\bar{X}$ = - 0,052
$x_i^{*2} p_i^*$	0,070	0	0,038	0,051	0,168	1/8	0,096	0,011	0,012	0,107	0,141	0,123	m_2 = 0,942

$\bar{X} = 0{,}052$; $S^2 = m_2 - \bar{X}^2 = 0{,}942 - 0{,}003 = 0{,}939$

Округляя полученные результаты, принимаем $\bar{X} = 0{,}05$; $S^2 = 0{,}94$.

Для рассматриваемого примера будем иметь при $\gamma = 0{,}95$, $\Phi(t) = 0{,}975$, откуда $t = 1{,}95$, поэтому в нашем примере имеем

$$\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}} = -0{,}05 - 1{,}95\frac{0{,}97}{1{,}41 \cdot 10} = -0{,}05 - 0{,}13 = -0{,}18, \quad \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}} = -0{,}05 + 0{,}13 = 0{,}08.$$

Таким образом, доверительный интервал для математического ожидания имеет вид $(-0{,}18;\ 0{,}08)$, то есть $-0{,}18 < m < 0{,}08$.

3. Проверка статистических гипотез.

Проверим гипотезу о том, что генеральная совокупность, из которой произведена выборка, имеет нормальный закон распределения (такое предположение может быть сделано по виду гистограммы). Применим критерий согласия χ^2 (Пирсона). Так как математическое ожидание m и дисперсия σ^2 генеральной совокупности нам неизвестны, то вместо них возьмем их выборочные характеристики: выборочное среднее $\bar{X}$ и выборочную дисперсию S^2.

Проверка гипотезы сводится к следующему алгоритму.

Объединим в один интервал интервалы с малыми частотами так, чтобы в каждом из интервалов было не менее 6-8 элементов выборки. Обозначим полученное число интервалов буквой k ($k \le n$). Вычислим статистику

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{np_i} - n,$$

где n_i - число элементов выборки в каждом из k интервалов; p_i – теоретическая вероятность попадания случайной величины в i -й интервал, которая определяется по формуле

$$p_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \Phi\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - m}{\sigma}\right) = \Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})$$

где вместо m берем $\bar{X}$, а вместо $\sigma^2 = S^2$, т. е. $z_i = (x_i - \bar{X})/S$.

Устанавливаем число степеней свободы r, которое для нормального закона вычисляем по формуле $r = k - 3$. Назначаем уровень значимости $p = 0{,}05$.

Для заданного уровня значимости p и найденного числа степеней свободы r по таблицам ***χ^2-распределения Пирсона*** находим значение $\chi^2_{r,p}$ и сравниваем между собой это значение и вычисленное значение статистики χ^2. Если окажется, что $\chi^2 < \chi^2_{r,p}$, то гипотеза о нормальном распределении не отвергается, то есть экспериментальные данные не противоречат гипотезе о нормальном распределении генеральной совокупности (см. пособие с. 126-129).

Замечание. *При вычислении теоретических вероятностей p_i крайние интервалы (x_0, x_1) и (x_{k-1}, x_k) заменяются интервалами $(-\infty, x_1)$ и $(x_{k-1}, +\infty)$.*

Применим критерий χ^2 к рассматриваемому примеру при уровне значимости $p = 0{,}05$. Результаты вычислений помещены в таблице 5. Из этой таблицы имеем $\sum_{i=1}^{8} \frac{n_i^2}{np_i} = 209{,}16$; $\chi^2 = 209{,}16 - 200 = 9{,}16$. По таблице χ^2-распределения находим: $\chi^2_p = 11{,}07$. Так как полученное нами значение $\chi^2 = 9{,}16 < 11{,}07$, то гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности не отвергается.

Тема 2

Ковариация и регрессия. Построение выборочного уравнения линии регрессии. Методические указания.

В приложениях часто требуется оценить характер зависимости между наблюдёнными переменными. Основная задача при этом состоит в выравнивании (сглаживании) экспериментальных данных с помощью специально подобранных кривых, называемых линиями или поверхностями регрессии, которые с большей или меньшей надёжностью характеризуют корреляционную зависимость между наблюдаемыми переменными.

Пусть (X,Y) – двумерный случайный вектор, где случайные величины X и Y являются зависимыми. Зависимость $y(x)$ математического ожидания Y от значения x случайной величины X есть функция регрессии Y на X: $E(Y/X=x)=y(x)$. Можно показать, что случайная величина $y(X)$, где $y(x)$ - функция регрессии Y на X, является наилучшим в среднеквадратичном приближением случайной величины Y функциями от случайной величины X, т.е. математическое ожидание $E(Y - f(X))^2$ минимально при $f(x)=y(x)$.

Таблица 5. $\overline{X} = -0.05$; $S^2 = 0,97$

Интер-валы	(-∞; -3,5)	(-3,5; -3)	(-3; -2,5)	(-2,5; -2)	(-2; -1,5)	(-1,5-1)	(-1; -0,5)	(-0,5;0)	(0;0,5)	(0,5;1)	(1;1,5)	(1,5; +∞)	Приме-чания
Z_i	-3,56	-3,04	-2,53	-2,01	-1,49	-0,98	-0,46	0,05	0,57	1,08	1,60	+∞	
$\Phi(Z_i)$	0,0002	0,0014	0,0062	0,0228	0,0668	0,1587	0,3085	0,5398	0,7257	0,8643	0,9452	1,0000	
p_i	0,0002	0,0012	0,0048	0,0166	0,0440	0,0919	0,1498	0,2313	0,1859	0,1386	0,0809	0,0548	Σ= 1
	Σ= 0,0666												
n_i	1	0	1	2	11	16	34	34	37	38	18	8	Σ= 200
	Σ= 15												
n_i^2	Σ= 225					256	1156	1156	1369	1444	324	64	
np_i	13,32					18,38	29,96	46,26	37,18	27,72	16,18	10,96	Σ= 200
n_i^2/np_i	16,89					13,93	38,58	24,99	36,82	52,09	20,02	5,84	Σ= 209.16

В качестве оценки функции $y(x)$ выбирают, как правило, функции, линейно зависящие от неизвестных параметров, т.е. функцию регрессии ищут в виде:

$$y(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+...+a_m\varphi_m(x),$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x),..., \varphi_m(x)$ - известные функции, $a_0, a_1,..., a_m$ - подлежащие оценке параметры. Для оценки параметров $a_0, a_1,..., a_m$ по выборке (x_i,y_i), $i=1, 2,..., n$ используют метод наименьших квадратов. При этом оценка $\vec{a}=(a_0,a_1,...,a_m)$ находится как вектор, минимизирующий сумму

$$S(\vec{a})=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\sum_{j=0}^{m}a_j\varphi_j(x_i))^2.$$

Необходимым (а в данном случае и достаточным) условием минимума функции S является выполнение равенств

$$\frac{\partial S}{\partial a_j}=0, \quad j=1, 2, ..., n,$$

которые приводят к системе уравнений, линейных относительно $a_0, a_1,..., a_m$.

Простейшей функцией регрессии является линейная функция $y(x)=a_0+a_1x$. В этом случае решение задачи $\min E(Y-a_0-a_1x)^2$ имеет вид

$$a_1=r(X,Y)\cdot\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}, \quad a_0=E(Y)-a_1E(X),$$

где $r(X,Y)$ – коэффициент корреляции X и Y, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ - среднеквадратичные отклонения X и Y. Функция регрессии при этом задается формулой

$$y(x)=E(Y)+r(X,Y)\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(x-E(X)). \tag{3}$$

В свою очередь метод наименьших квадратов приводит к следующему выражению для выборочной функции регрессии

$$y(x)=\overline{Y}_n+r_n(X,Y)\frac{\sigma_n(Y)}{\sigma_n(X)}(x-\overline{X}_n). \tag{4}$$

Здесь $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ и $\overline{Y}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ - оценки математических ожиданий $E(X)$ и $E(Y)$, $\sigma_n(X)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{X}_n^2}$, $\sigma_n(Y)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\overline{Y}_n^2}$ - оценки среднеквадратичных отклонений $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$, $r_n(X,Y)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\overline{X}_n\cdot\overline{Y}_n}{n\cdot\sigma_n(X)\cdot\sigma_n(Y)}$ - оценка коэффициента корреляции $r(X,Y)$; т.е. при построении выборочной регрессии при помощи метода наименьших квадратов все моменты в (3) заменяются своими выборочными оценками (см. пособие с. 96-102).

При обработке выборок большого объёма часто предварительно проводят группировку значений X и Y подобно тому, как это было описано в первой части типового расчёта. При этом для частичных интервалов $\Delta x_i=\left[x_{i-1},x_i\right.$, $i=1,...,$

k и $\Delta y_j = \left[y_{j-1}, y_j \right.$, j= 1,..., m определяют число элементов выборки n_{ij}, попавших в прямоугольник $\Delta x_i \times \Delta y_j$, и вычисляют середины интервалов по формулам: $x_i^* = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $y_j^* = \dfrac{y_{j-1}+y_j}{2}$. Все элементы выборки, попавшие в прямоугольник $\Delta x_i \times \Delta y_j$, считают равными ($x_i$*,$y_j$*), причём количество значений x_i* будет равно $n_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$, а количество значений y_j* будет равно $n_j = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$. Объём выборки равен $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{j=1}^{m} n_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}$. Все эти данные заносят в таблицу 6.

***Таблица* 6**

y_j* / x_i*	y_1*	Y_2*	...	y_m*	n_i
x_1*	n_{11}	N_{12}	...	n_{1m}	n_1
x_2*	n_{21}	N_{22}	...	n_{2m}	n_2
...	...	...	...	...	...
x_k*	n_{k1}	N_{k2}	...	n_{km}	n_k
N_j	n_1	N_2	...	n_m	n

Для расчёта коэффициентов в выборочном уравнении линии регрессии (4) используют формулы:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^*, \qquad \overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j y_j^*, \tag{5}$$

$$\sigma_n(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i^*)^2 - \overline{X}_n^2}, \qquad \sigma_n(Y) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j (y_j^*)^2 - \overline{Y}_n^2}, \tag{6}$$

$$r_n(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij} x_i^* y_j^* - n\cdot\overline{X}_n\cdot\overline{Y}_n}{n\cdot\sigma_n(X)\cdot\sigma_n(Y)}. \tag{7}$$

В вариантах заданий предлагается таблица группированных данных, на основании которой необходимо найти величины

$$n_i,\quad i=1,\ldots,k;\qquad n_j,\quad j=1,\ldots,m;\quad n;$$

затем, используя формулы (5), (6), (7) определить точечные оценки математических ожиданий - $\overline{X}_n$ и $\overline{Y}_n$, средних квадратичных отклонений - $\sigma_n(X)$ и $\sigma_n(Y)$, коэффициента корреляции - $r_n(X,Y)$ и получить выборочное уравнение линии регрессии (4).

В качестве примера рассмотрим построение выборочного уравнения линии линейной регрессии по таблице группированных данных 7.

Таблица 7

x_i^* \ y_j^*	15	25	35	45	55	n_i
10	5	0	0	0	0	5
20	7	20	0	0	0	27
30	0	23	30	10	0	63
40	0	0	47	11	9	67
50	0	0	2	20	7	29
60	0	0	0	6	3	9
n_j	12	43	79	47	19	n=200

По формулам (5) находим

$$\overline{X}_{200}=35{,}75, \qquad \overline{Y}_{200}=35{,}9;$$

по формулам (6) находим

$$\sigma_{200}(X)=11{,}06, \qquad \sigma_{200}(Y)=12{,}09;$$

по формуле (7) находим

$$r_{200}(X,Y)=0{,}603.$$

Подставив найденные величины в формулу (4), получим искомое выборочное уравнение линейной регрессии Y на X.

$$y(x)=35{,}9+0{,}603\cdot\frac{12{,}09}{11{,}06}(x-35{,}75),$$

или, окончательно,

$$y(x)=0{,}659\,x+12{,}34. \qquad (8)$$

Сравним оценки условных математических ожиданий, вычисленные
а) на основе последнего уравнения,
б) по данным таблицы 7, полагая, как и ранее, $P(y_j^*)= p_j^*=n_{i\,j}/\,n_i$.
Например, при x^* = 30 имеем:
а) $E(Y\,|\,X=30)=0{,}659\cdot 30+12{,}34=32{,}11$;
б) $E(Y\,|\,X=30)=(23\cdot 25+30\cdot 35+10\cdot 45)/63=32{,}94$.
Как видно, соответствие удовлетворительное.

Заметим, что уравнения линейной регрессии (3) и выборочной линейной регрессии (4), (8) являются уравнениями, задающими прямую линию.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

y_j* / x_i*	15	25	30	35
10	15	0	0	0
20	10	80	30	0
30	0	0	45	20

Вариант 2

y_j* / x_i*	17	27	32	37
12	30	80	0	0
22	0	45	20	0
32	0	0	10	15

Вариант 3

y_j* / x_i*	19	29	34	39
14	0	0	0	25
24	0	35	40	10
34	30	60	0	0

Вариант 4

y_j* / x_i*	21	31	36	41
16	0	0	30	80
26	0	55	20	0
36	15	0	0	0

Вариант 5

Y_j* / x_i*	23	33	38	43
18	20	15	0	0
28	0	45	80	30
38	0	0	0	10

Вариант 6

y_j* / x_i*	25	35	40	45
20	0	0	45	30
30	0	80	10	0
40	15	20	0	0

Вариант 7

y_j* / x_i*	27	37	42	47
22	20	10	0	0
32	0	80	45	0
42	0	0	15	30

Вариант 8

y_j* / x_i*	29	39	44	49
24	45	80	0	0
34	0	20	10	0
44	0	0	15	30

Вариант 9

Y_j* / x_i*	31	41	46	51
26	0	0	45	10
36	20	30	80	0
46	15	0	0	0

Вариант 10

y_j* / x_i*	33	43	48	53
28	15	80	0	0
38	0	20	45	10
48	0	0	0	30

Вариант 11

y_j^* x_i^*	35	45	50	55
30	0	0	45	30
40	80	10	20	0
50	15	0	0	0

Вариант 12

Y_j^* x_i^*	37	47	52	57
32	10	10	0	0
42	0	80	45	0
52	0	0	15	30

Вариант 13

y^* $x_i{}^*{}_j$	39	49	54	59
34	0	0	80	30
44	0	15	20	0
54	10	45	0	0

Вариант 14

y_j^* x_i^*	41	51	56	61
36	45	0	0	0
46	20	10	80	30
56	0	0	10	15

Вариант 15

y_j^* x_i^*	43	53	58	63
38	10	0	0	0
48	30	80	15	0
58	0	0	45	20

Вариант 16

y_j^* x_i^*	45	55	60	65
40	0	0	15	10
50	0	30	20	0
60	45	80	0	0

Вариант 17

y_j^* x_i^*	47	57	62	67
42	30	15	0	0
52	0	85	25	0
62	0	0	15	30

Вариант 18

y_j^* x_i^*	49	59	64	69
44	80	35	0	0
54	0	25	45	0
64	0	0	0	15

Вариант 19

y_j^* x_i^*	51	61	66	71
46	0	0	17	23
56	30	80	35	0
66	15	0	0	0

Вариант 20

y_j^* x_i^*	53	63	68	73
48	0	0	45	32
58	0	80	10	0
68	5	28	0	0

Вариант 21

y_j* / x_i*	55	65	70	75
50	24	16	0	0
60	0	75	45	0
70	0	0	10	30

Вариант 22

y_j* / x_i*	57	67	72	77
52	41	80	0	0
62	0	20	19	0
72	0	0	15	25

Вариант 23

y_j* / x_i*	59	69	74	79
54	14	46	0	0
64	0	80	20	25
74	0	0	0	15

Вариант 24

y_j* / x_i*	61	71	76	81
56	0	0	82	18
66	0	45	25	0
76	30	0	0	0

Вариант 25

y_j* / x_i*	63	73	78	83
58	33	45	0	0
68	0	27	10	70
78	0	0	0	15

Вариант 26

y_j* / x_i*	65	75	80	85
60	0	0	16	10
70	0	45	80	0
80	24	25	0	0

Вариант 27

y_j* / x_i*	67	77	82	87
62	0	0	87	33
72	0	18	15	0
82	5	42	0	0

Вариант 28

y_j* / x_i*	69	79	84	89
64	43	0	0	0
74	10	15	80	30
84	0	0	5	17

Вариант 29

y_j* / x_i*	71	81	86	91
66	33	88	0	0
76	0	25	28	0
86	0	0	42	5

Вариант 30

y_j* / x_i*	73	83	88	93
68	0	0	0	42
78	30	80	14	10
88	18	6	0	0

Приложение 1

Приближённые значения функции стандартного нормального распределения $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$, *умноженные на* 10^5

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1	84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91308	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997

Приложение 2

Таблица χ^2 распределения

$r \cdot P$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	1,642	2,706	3,841	5,41	6,635	7,879	9,5	10,83
2	3,219	4,605	5,991	7,82	9,210	10,60	12,4	13,82
3	4,642	6,251	7,815	9,84	11,35	12,84	14,8	16,27
4	5,989	7,779	9,488	11,67	13,28	14,86	16,9	18,47
5	7,289	9,236	11,07	13,39	15,09	16,75	18,9	20,52
6	8,558	10,65	12,59	15,03	16,81	18,55	20,7	22,46
7	9,803	12,02	14,07	16,62	18,48	20,29	22,6	24,32
8	11,03	13,36	15,51	18,17	20,09	21,96	24,3	26,13
9	12,24	14,68	16,92	19,68	21,67	23,59	26,1	27,88
10	13,44	15,99	18,31	21,2	23,21	25,19	27,7	29,59
11	14,63	17,28	19,68	22,6	24,73	26,76	29,4	31,26
12	15,81	18,55	21,03	24,1	26,22	28,30	30,9	32,91
13	16,99	19,81	22,36	25,5	27,69	29,82	32,5	34,53
14	18,15	21,06	23,69	26,9	29,14	31,32	34,0	36,12
15	19,31	22,31	25,00	28,3	30,58	32,80	35,6	37,70
16	20,47	23,54	26,30	29,6	32,00	34,27	37,1	39,25
17	21,62	24,77	27,59	31,0	33,41	35,72	38,6	40,79
18	22,76	25,99	28,87	32,3	34,81	37,16	40,1	42,31
19	23,90	27,20	30,14	33,7	36,19	38,58	41,6	43,82
20	25,04	28,41	31,41	35,0	37,57	40,00	43,0	45,32
21	26,17	29,62	32,67	36,3	38,93	41,40	44,5	46,80
22	27,30	30,81	33,92	37,7	40,29	42,80	45,9	48,27
23	28,43	32,01	35,17	39,0	41,64	44,18	47,3	49,73
24	29,55	33,20	36,42	40,3	42,98	45,56	48,7	51,18
25	30,68	34,38	37,65	41,6	44,31	46,93	50,1	52,62
26	31,80	35,56	38,89	42,9	45,64	48,29	51,6	54,05
27	32,91	36,74	40,11	44,1	46,96	49,65	52,9	55,48
28	34,03	37,92	41,34	45,4	48,28	50,99	54,4	56,89

Варианты типовых расчетов для каждого студента представляют собой выборки из генеральной совокупности объема n =200. Эти выборки формируются на основании приложения 3.

Приложение 3

Данные для формирования индивидуальных заданий по теме “Оценивание, проверка статистических гипотез”

-1.006	0.386	-1.223	-0.591	-0.345	0.157	0.800	-0.155	-0.379	-1.023
1.306	-0.861	0.303	0.518	0.986	0.788	0.883	-0.098	-0.242	1.701
1.199	-1.230	-0.730	-1.492	0.643	-0.577	-0.224	0.997	-1.165	-0.494
-2.577	2.641	-1.143	-0.086	2.919	0.527	0.297	0.434	0.756	0.172
-2.086	-0.904	-1.413	-0.012	-1.248	1.671	-0.521	-0.025	1.164	0.354

0.866	-0.005	0.403	1.908	0.448	0.169	-0.731	-1.189	0.905	0.283
2.431	1.409	0.191	-0.165	0.889	0.804	-2.131	-0.754	1.458	1.650
0.026	0.885	0.011	-0.990	-0.104	0.174	-0.052	-0.182	1.813	0.346
0.110	1.757	-0.693	-0.732	1.073	-1.724	-1.810	0.947	-1.118	0.666
0.970	1.140	-1.105	0.894	1.547	-0.484	-0.086	-0.066	0.150	-0.264

0.866	-0.005	0.403	1.908	0.448	0.169	-0.731	-1.189	0.905	0.283
2.431	1.409	0.191	-0.165	0.889	0.804	-2.131	-0.754	1.458	1.650
0.110	1.757	-0.693	-0.732	1.073	-1.724	-1.810	0.947	-1.118	0.666
0.026	0.885	0.011	-0.990	-0.104	0.174	-0.052	-0.182	1.813	0.346
0.970	1.140	-1.105	0.894	1.547	-0.484	-0.086	-0.066	0.150	-0.264

-0.644	-0.149	0.365	1.601	1.307	0.041	-2.312	1.023	1.880	-1.422
-0.905	0.577	-0.548	0.732	-0.482	0.413	1.380	-0.489	-0.799	-0.755
-0.716	0.753	0.578	0.555	-1.752	0.597	1.390	-0.402	-0.560	0.157
0.007	-0.167	-1.955	-0.813	-0.926	1.924	-0.453	1.399	1.708	0.378
-2.814	-0.581	0.522	-0.539	0.922	0.714	-0.628	0.280	-0.644	0.178

-0.602	2.301	-0.432	0.273	-0.802	-0.322	0.459	-0.023	0.361	0.557
-0.993	-0.270	-0.194	2.646	-0.456	-0.703	0.660	0.134	-2.058	-0.180
1.188	0.502	0.985	-0.053	0.193	-0.744	1.124	2.408	-2.332	-0.035
2.388	-0.119	0.468	0.472	0.889	0.371	0.979	0.901	-0.370	1.934
2.265	-0.001	-1.364	-2.080	-1.591	1.437	-1.316	0.076	1.285	1.305

-0.355	-2.735	1.194	-1.038	0.586	-0.213	1.143	0.454	0.097	-0.016
-0.327	-0.535	0.743	0.628	1.525	0.492	0.979	-1.417	-0.226	0.449
0.083	2.209	-0.121	0.867	2.143	-0.323	0.492	-0.919	-0.317	-0.522
0.433	-0.605	-0.031	2.071	-0.746	0.822	1.257	-1.448	0.634	-1.055
-1.435	-1.003	-0.594	-1.531	-1.414	0.594	-1.481	0.039	-0.047	1.152

-0.499	1.683	2.247	1.444	-0.418	-2.977	-0.968	-0.308	-1.816	-0.446
1.627	1.555	0.310	-0.074	1.414	1.007	0.555	0.003	-2.789	0.005
-0.239	-1.050	1.991	-0.362	-0.847	0.884	0.759	-1.406	0.262	-0.206
-0.961	0.096	-0.119	-0.777	0.166	-0.405	-0.572	1.624	0.119	0.049
-0.152	0.251	-0.272	-0.250	-0.048	-2.619	1.158	0.139	0.332	0.926

0.350	0.033	0.478	0.637	-0.033	-0.319	0.570	-0.837	-0.413	-1.640
-0.795	-0.015	1.774	-1.568	0.302	-1.120	-0.917	-0.091	1.118	0.277
-0.622	-0.554	-0.470	0.700	-0.656	1.460	1.701	0.630	-0.700	-0.674
1.429	-1.163	-0.925	0.973	-0.052	0.409	-0.024	0.384	-0.350	0.203
-2.084	0.100	0.001	-0.070	0.773	1.132	-0.769	-0.609	1.816	1.307
0.462	-0.603	0.264	-0.373	2.173	-1.875	0.261	0.064	-0.814	-0.456
1.288	1.833	0.292	-0.294	0.572	0.917	0.743	-1.727	0.990	-1.903
-0.956	-0.965	0.781	-1.717	0.815	-0.546	-0.162	0.716	-1.781	-0.392
1.195	-0.397	0.404	-0.053	-1.078	-0.605	0.435	0.036	-0.044	-1.107
-0.405	0.089	-0.325	0.217	-0.579	0.025	0.861	-0.184	0.890	1.757
-0.719	1.202	-1.083	0.606	1.244	-1.547	-0.108	0.856	1.034	-0.127
-0.219	-0.112	0.157	0.074	0.029	-1.071	-0.300	3.343	-0.618	1.019
-0.030	0.673	-0.662	-0.685	-1.675	0.737	1.279	0.894	0.987	0.170
-0.495	-1.322	0.362	0.475	-0.043	-1.698	-0.404	-0.741	-0.237	-0,420
-0.333	-0.216	1.170	0.757	-0.691	-0.591	1.444	1.695	0.307	2.096
-0.857	1.419	-1.178	-0.848	-1.576	2.249	-1.159	-0.676	-0.486	0.388
-0.771	0.626	-0.567	1.859	-0.610	-0.016	0.686	3.412	-0.331	-0.652
1.464	2.221	1.177	-0.036	0.376	0.735	0.730	-0.394	0.776	-0.056
1.091	-1.292	0.225	2.591	1.272	-0.640	0.514	1.205	-0.332	0.422
-0.074	-0.030	1.592	-0.039	1.199	0.212	-2.032	0.180	-1.065	-0.053
0.786	0.316	-0.973	-2.121	-0.033	0.188	1.220	0.897	-2.009	-0.014
-0.137	1.984	-1.147	-1.836	-0.541	0.284	-0.364	-1.230	0.243	-0.516
0.636	-0.645	-1.484	-1.542	-0.067	-1.529	-0.632	0.125	0.149	1.207
1.578	0.313	-0.966	-0.235	2.256	-2.370	-0.222	0.807	2.607	0.110
0.236	-1.251	2.032	-0.211	1.123	-0.563	1.336	0.874	1.987	-1.258
1.693	-0.453	-0.362	0.971	0.539	0.238	-0.214	-1.162	-0.102	0.140
0.457	-0.620	-0.984	-1.143	-0.691	-1.203	1.082	-0.647	-0.667	1.581
1.067	-1.925	1.365	2.047	1.084	-0.308	-0.171	1.572	-0.705	-0.297
-0.127	-1.425	0.867	0.007	0.629	-1.537	-0.810	0.130	-0.220	-0.351
0.188	0.268	-0.428	0.746	-0.756	-0.620	-0.005	-0.804	-0.450	0.872
0.821	-0.271	-0.571	-1.022	0.559	-1.372	0.515	0.086	-0.332	0.327
0.597	0.164	-1.416	-0.112	-0.619	0.675	-0.652	2.545	1.844	-0.006
0.039	-0.473	-1.056	0.062	-1.246	0.056	0.014	-0.086	0.287	0.064
-1.126	0.452	1.767	-0.439	0.095	1.323	1.213	1.287	-0.269	-0.168
0.682	-0.271	2.108	1.835	0.066	-0.232	1.411	0.248	-0.182	-0.962

-0.028	0.919	0.915	0.069	-1.132	-0.923	-1.911	1.558	0.262	-0.957
-1.542	-1.171	-0.568	-0.122	-1.468	0.588	-0.994	-0.122	0.573	1.923
-0.158	-1.213	0.590	0.454	-0.792	-0.698	0.612	0.122	-0.207	1.016
0.091	2.016	0.193	0.092	-1.857	0.586	1.149	-0.291	-2.691	-2.676
0.337	2.704	-2.068	-3.503	-0.266	-1.389	-0.612	-0.556	2.156	-0.005

0.251	0.409	0.632	0.977	-1.004	0.928	-1.032	-1.060	1.297	1.204
0.792	1.675	-0.038	1.306	-0.125	-0.127	1.804	1.301	1.134	1.093
0.592	0.515	-0.793	0.901	-1.353	0.304	0.367	0.980	1.462	1.093
0.578	-0.177	-1.041	-0.731	1.331	-1.079	-0.319	0.453	-1.001	0.135
0.291	0.010	0.298	0.820	0.451	-1.305	-0.504	0.446	-0.638	0.256

-0.327	0.407	-0.026	0.019	0.717	0.486	0.924	0.528	-0.010	-0.693
-0.038	-1.662	0.640	0.566	0.293	1.168	1.235	-0.717	-0.100	0.026
1.374	2.043	-0.489	1.113	-1.747	0.938	0.592	0.295	1.119	0.208
0.308	-0.535	1.615	-1.028	0.958	-0.660	1.538	0.756	1.306	0.632
0.244	2.134	0.112	-1.352	-0.601	-0.035	0.933	1.057	0.058	-3.285

1.486	-1.330	-1.231	-0.388	-0.778	-2.394	-0.654	0.134	1.763	-1.052
-1.772	0.403	0.694	0.308	-0.761	-0.391	-0.803	-0.976	1.697	-0.646
-0.873	1.439	-1.192	0.681	0.564	0.440	1.328	0.533	-0.151	-2.209
-1.574	-0.892	-0.097	-1.347	-0.603	0.885	-2.623	-0.809	-0.872	0.409
-0.795	-0.679	-0.871	-1.085	-0.873	0.711	1.203	1.181	-0.861	0.598

-0.203	0.578	-1.211	-1.845	1.357	-0.404	1.266	0.462	-0.859	1.227
-0.852	0.615	-2.627	1.011	-0.504	-0.383	1.177	0.942	-2.268	0.069
0.022	-1.295	-1.375	1.630	-0.703	0.128	0.214	0.418	1.656	-1.571
-0.604	0.952	0.026	-0.161	0.621	1.093	-0.467	0.564	-0.994	-1.802
-0.318	-0.619	-0.708	0.368	-0.100	0.472	-0.699	-0.764	0.344	1.286

-0.941	0.512	-0.155	0.887	-1.350	-0.784	0.692	0.267	-1.310	0.563
0.292	0.051	-0.432	-0.253	-0.802	0.093	0.153	-1.221	0.234	0.480
0.934	0.169	0.096	1.269	-0.965	-0.048	0.636	-0.287	0.088	1.454
1.316	-0.445	0.559	-1.028	0.465	-0.394	1.334	0.105	0.908	-0.040
0.333	-0.532	0 020	0.117	-0.325	-1.218	-1.240	-1.401	-1.864	0.179

0.012	0.072	1.471	0.613	-2.320	-0.380	-0.330	0.369	0.605	-0.639
-0.932	0.630	-0.788	0.047	-1.830	-0.696	-1.109	-2.266	0.376	-0.970
0.464	0.710	1.339	0.438	-1.003	-1.649	0.136	0.651	0.578	-0.111
-1.474	0.213	0.549	2.095	-1.366	-0.364	-0.293	0.320	-1.387	0.671
-0.866	1.931	1.925	0.035	-0.758	0.846	0.166	-0.579	-0.631	1.161

0.873	0.029	0.743	1.279	0.764	2.131	-1.086	0.689	0.386	-1.496
0.078	0.093	0.012	-1.140	-0.749	-0.197	-1.901	-0.774	1.642	-0.026
-1.142	-0.848	0.505	-1.200	0.358	0.654	-0.379	0.214	-1.461	0.788
-0.204	-1.715	-0.059	-1.107	-1.298	0.365	-0.797	0.416	-0.614	2.202
0.396	-0.191	0.599	1.049	-0.158	-0.233	-1.190	-0.299	-0.541	1.387
1.140	0.706	-0.643	0.920	0.562	1.007	-0.038	-0.160	-0.687	0.323
-1.068	-1.533	-0.101	0.111	0.286	-0.082	1.903	2.815	-0.514	0.820
0.769	0.873	2.093	-0.620	0.508	0.371	0.877	-0.779	-1.002	-1.872
1.192	-1.799	0.830	-0.384	0.665	1.162	-0.455	1.664	0.359	-1.638
-0.168	-1.582	-0.153	-0.165	-2.129	0.515	0.470	-0.664	-0.432	1.294
-0.540	0.057	-0.711	-0.623	0.183	0.446	0.592	-0.982	0.184	1.586
-0.946	0.441	-1.151	-0.307	-0.970	-0.044	0.737	-0.738	0.139	1.660
-0.394	-0.030	0.106	-0.922	-1.315	2.134	0.043	0.042	-0.062	-0.850
0.170	-0.053	-0.330	-0.371	0.918	-2.029	-0.097	0.372	-0.176	0.381
-1.211	-1.455	-0.479	-1.465	-0.987	0.549	1.131	-1.853	-0.508	0.201
0.830	-0.213	1.958	0.966	0.627	-0.369	-0.086	-0.413	-0.271	1.482
-0.094	-1.821	-0.860	-1.903	-0.355	1.438	0.372	0.664	-0.583	-1.240
-0.459	1.468	-0.335	1.108	1.347	0.067	-0.154	-0.415	-1.412	-0.484
0.049	-0.464	-0.589	0.716	0.118	-0.228	0.515	-0.346	-1.066	0.785
-1.363	0.733	-0.312	0.186	-0.583	0.486	1.358	-0.061	0.555	-0.095
1.196	1.188	0.534	-0.651	-1.503	-1.026	0.397	-0.149	0.781	1.560
-0.754	0.302	-1.810	-1.246	1.184	0.109	0.493	1.144	-0.661	1.402
-0.410	-0.475	1.096	-1.281	-0.579	1.583	-0.430	0.941	0.418	-0.363
-1.771	0.306	0.136	-1.935	1.258	-0.396	0.603	1.488	0.582	-1.124
-1.007	-0.630	0.584	0.136	-0.055	-0.312	-0.716	0.620	-0.156	-1.570
0.140	0.326	0.709	-0.002	-1.623	1.359	0.406	-0.685	0.939	-0.326
-0.868	-0.618	0.171	-0.749	-0.512	-0.064	0.063	-1.108	-0.034	-1.010
-0.655	-1.232	-0.058	-0.799	-0.346	-0.247	-0.711	0.196	-0.757	0.813
1.195	1.145	0.011	1.465	0.532	0.485	-0.795	-1.602	-0.590	0.995
-0.896	0.867	0.790	0.115	1.496	0.686	-0.058	0.048	-0.036	-0.201
0.768	0.908	-0.538	0.469	0.819	0.303	0.552	-0.148	-0.168	0.730
-0.206	0.763	-0.852	-1.084	0.620	-1.496	-0.590	-2.620	-1.161	-2.161
1.501	0.080	2.316	-0.279	-0.568	0.580	-0.183	-2.552	-0.120	1.459
-1.039	0.836	-0.522	-0.744	-1.195	0.090	-1.614	0.733	-1.001	-0.158
-1.096	1.729	-2.352	-0.287	2.109	-0.250	0.137	-0.769	1.479	0.310

1.013	0.341	0.677	-0.452	-0.055	-0.235	-0.462	-1.100	-0.035	-0.350
0.407	0.050	0.256	-0.098	1.150	-0.401	0.766	1.122	-0.399	1.414
1.143	-0.951	0.664	0.686	-0.402	-2.309	-0.528	0.396	-0.609	0.322
-0.853	-0.067	1.175	1.065	1.428	-0.754	0.640	-1.014	0.509	1.020
-1.133	-1.685	-0.662	0.392	-1.182	-0.140	-0.417	0.259	1.024	-0.528
0.544	1.254	0.384	2.243	0.708	1.029	-2.864	-0.312	0.434	0.352
-1.805	0.774	0.155	1.138	-0.065	-0.118	1.066	-0.674	-0.149	0.486
2.195	-1.119	0.080	-0.889	-0.079	0.522	-3.046	0.603	0.992	-0.488
-0.208	-0.272	1.957	-1.749	-0.164	1.554	0.186	1.277	0.577	-0.061
0.715	-0.289	1.960	-0.761	1.272	-0.220	-0.083	0.559	-2.140	-0.666
-0.142	0.509	0.135	0.208	0.147	-1.993	0.651	1.220	-0.538	0.599
-0.151	-0.855	0.760	-0.679	-0.229	-2.238	1.483	-0.172	1.439	0.242
0.319	0.036	-1.478	0.636	1.679	-0.861	0.569	2.810	-0.690	1.198
-1.119	-0.356	0.220	-0.808	1.238	-2.127	-0.672	-0.065	0.319	0.911
0.483	0.849	-1.205	0.081	-0.663	-0.246	-1.377	-0.572	2.336	-0.164
0.445	-0.211	0.970	0.198	0.493	0.168	1.491	-0.997	-1.542	0.262
-0.226	0.809	-1.062	0.448	-0.040	1.542	-0.520	0.519	-0.424	-0.298
-0.079	-0.189	2.402	0.088	0.721	0.300	0.316	0.636	-0.996	0.643
-0.819	-0.046	1.647	0.399	0.949	0.151	1.286	0.102	-0.713	-1.727
-0.143	1.382	-1.039	-0.676	0.377	-0.084	-1.476	0.552	-1.675	-0.895
0.802	0.834	1.776	-0.758	2.634	1.146	0.655	0.492	-2.286	-0.431
0.438	0.857	0.357	0.052	1.248	-0.146	-2.766	2.056	0.307	0.758
-1.251	-0.275	1.089	-0.336	0.330	-0.148	-0.919	-1.530	1.557	2.032
0.750	1.982	-1.252	1.476	0.100	0.284	-0.400	0.396	-0.660	-1.504
2.625	-0.795	0.142	0.618	-2.100	0.010	1.239	-0.339	0.125	0.678
-0.653	-0.682	0.290	0.002	-0.703	1.264	0.446	-0.617	0.346	1.083
1.319	1.849	-1.051	-0.240	0.762	0.367	0.743	0.189	-0.633	0.879
2.026	-0.328	0.510	-0.592	-0.739	-0.225	1.264	-1.126	-0.472	0.322
-0.282	0.112	0.774	2.315	-1.084	-0.268	-2.129	-0.496	0.366	-0.933
-2.360	-0.210	-1.095	-0.225	0.966	-0.690	-2.045	0.826	2.481	-1.090
-1.552	-0.473	-0.135	-1.129	-0.394	-1.830	-1.174	-0.771	-0.654	0.764
-1.268	-0.879	-0.220	0.886	0.270	0.169	-1.246	2.233	-0.582	-1.093
0.967	-0.167	0.972	0.608	0.544	-0.636	0.632	-0.096	0.280	-0.211
-0.041	-0.285	0.075	-2.535	-0.777	1.179	-1.752	1.138	-1.945	-0.270
0.299	0.067	-0.531	0.060	-0.373	0.501	0.044	-0.648	-1.330	0.513

-1.042	-0.533	-0.230	1.292	-1.612	0.424	-1.668	-0.351	-0.748	1.473
0.691	-1.018	0.599	-1.179	-0.272	0.768	0.426	-0.050	1.182	2.237
-1.123	0.250	1.864	-0.069	-0.796	0.075	0.446	-0.810	-0.354	-0.259
-1.389	-0.533	-1.918	0.236	0.309	-0.789	0.398	0.075	-1.747	1.192
-0.084	1.016	-1.216	0.843	-0.156	1.157	0.004	0.838	-0.251	-0.878
0.059	0.839	-0.905	0.874	0.398	0.056	-0.205	-1.293	0.331	-1.315
-0.906	0.335	-1.021	0.046	2.298	0.059	-0.175	-0.131	0.080	0.323
0.882	-0.454	-0.436	0.808	0.721	0.341	-0.327	-0.792	-0.216	-0.790
0.519	-0.219	1.338	1.392	-0.828	-1.631	-0.271	0.751	0.641	-0.333
2.550	0.155	1.070	0.387	-0.068	0.554	0.208	-0.217	1.130	0.324
1.611	-0.330	0.354	0.658	-0.234	-1.576	-1.283	-0.684	-0.675	2.214
0.318	0.658	-1.038	-0.269	0.627	1.039	-0.381	0.065	-1.649	-0.153
-2.002	1.559	-0.341	0.080	1.192	0.216	0.533	-1.086	0.095	0.815
2.376	-0.031	-0.084	-0.053	-0.331	-0.918	0.003	-1.880	0.940	0.193
0.068	1.404	0.870	0.021	0.801	0.883	1.592	0.457	-0.464	1.789
-0.221	-0.938	-0.211	0.600	0.584	-1.086	-0.906	0.246	-0.438	0.167
0.168	0.596	1.186	0.780	-0.834	1.380	0.736	0.092	0.473	-0.020
0.808	0.153	0.195	-1.230	-0.546	-0.074	-0.651	1.898	-0.226	-1.009
1.397	-1.450	0.241	-0.733	-0.736	0.321	0.805	0.669	-2.284	-0.074
-0.670	-1.736	0.603	0.222	-1.225	0.310	0.595	0.325	-0.626	0.614
-1.887	0.708	1.335	-1.116	0.177	0.437	-0.933	-0.276	-0.074	0.180
0.793	-0.385	1.228	0.752	-0.029	-0.463	1.223	-1.897	0.776	-0.444
0.836	0.785	-0.359	2.134	-0.820	1.782	-0.562	-1.545	1.348	-0.169
0.060	0.728	-0.772	1.201	0.114	1.546	0.718	1.341	0.673	-0.181
1.557	-0.978	-0.389	0.990	0.627	0.527	0.071	-0.337	-1.683	-0.139
-0.468	0.401	-0.304	0.276	-0.450	-0.711	-0.182	1.683	-1.632	2.336
-0.145	1.097	1.152	-0.139	0.949	0.251	0.549	-1.319	-0.237	0.056
1.147	-0.685	-0.349	-1.428	-0.934	-0.864	0.234	0.829	1.731	-1.986
0.441	-0.086	1.428	0.130	1.155	2.460	-1.030	1.864	-0.723	-0.479
0.503	-1.133	0.685	0.452	-1.270	-1.454	-0.433	-0.443	-1.068	1.346
-1.725	1.345	2.339	-2.472	-0.402	-1.031	1.151	1.230	0.008	1.041
1.066	0.608	-0.753	1.051	-0.108	-0.293	0.494	0.384	-1.872	0.329
0.328	-0.114	0.566	-1.948	-0.589	1.154	0.663	0.142	1.821	-1.046
0.385	0.517	1.360	0.086	-0.428	0.173	-0.372	-0.271	-1.081	-2.004
-0.135	-1.803	-1.608	0.778	0.010	-0.215	-2.060	-0.461	-0.122	1.998