Министерство образования и науки российской федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Национальный минерально-сырьевой университет «горный»

Кафедра общей и технической физики

ФИЗИКА
МЕХАНИКА

Методические указания к расчётно-графическим работам и варианты заданий для студентов направления подготовки 150400

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2013

УДК 531/534 (075.83)

Физика. МЕХАНИКА. Методические указания к расчётно-графическим работам и варианты заданий для студентов направления подготовки 150400./сост. Т.В. Стоянова. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». СПб, 2013. 38 с.

Методические указания разработаны в соответствии с требованиями Федеральных Государственных образовательных стандартов (ФГОС 3) для подготовки бакалавров по дисциплине “Физика”.

Предназначены для студентов направления подготовки 150400 национального минерально-сырьевого горного университета. Выполняются индивидуально в соответствии с вариантом.

Научный редактор: доцент Тупицкая Н.А..

1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вопросы и задачи, содержащиеся в пособие, охватывают большую часть стандартного курса механики, изучаемого в технических вузах, и способствуют более глубокому усвоению теоретического материала данного раздела.

Выполнение расчётно-графической работы предполагает достаточно большой объём самостоятельной работы студента.

Перед выполнением расчётно-графической работы рекомендуется изучить лекционный курс на тему «Механика» и познакомиться с соответствующим разделом учебника общего курса физики. Если при самостоятельном изучении теоретического материала возникли вопросы, желательно обсудить их на практических занятиях, но если и после этого остались не ясные моменты можно получить индивидуальную консультацию преподавателя, ведущего расчётно-графическую работу или лектора.

При изучении физического явления, прежде всего, необходимо выяснить сущность явления, условия при которых оно возможно, определить с помощью каких физических величин оно характеризуется. Желательно понять, как оно связано с другими явлениями и возможности его применения на практике. При определении физической величины важно обратить внимание на то, какая это величина – скалярная или векторная, какие свойства она характеризует, выяснить её размерность и формулу, определяющую связь с другими физическими величинами. При прочтении закона обратите внимание на границы его применения, определите, между какими явлениями он выражает связь, уточните формулировку и математическое выражение закона.

Расчётно-графическая работа оформляется на компьютере.

При выполнении расчётно-графической работы необходимо указать на титульном листе: название института, наименование дисциплины, название работы, фамилию и инициалы студента и ведущего расчётно-графическое задание преподавателя, год выполнения работы.

Необходимо полностью переписать задачу своего варианта, а заданные физические величины выписать отдельно, при этом все числовые значения должны быть переведены в одну систему единиц. При получении расчётной формулы приведите её полный подробный вывод.

Математическое решение должно сопровождаться пояснениями, а в случае необходимости его можно продемонстрировать рисунком. Задачу рекомендуется решить сначала в общем виде (в буквенных обозначениях), поясняя применяемые при написании формул буквенные обозначения, и только после проверки размерности искомой физической величины, подставить в выведенную формулу числовые значения. Все необходимые числовые значения величин должны быть выражены в системе «СИ». После получения окончательного результата, для удобства построения графических зависимостей можно перейти к внесистемным единицам. Например, выразить энергию в электрон-вольтах.

Перед построением графиков необходимо получить аналитическое выражение функциональной зависимости. Выбрать удобный масштаб и указать его на осях координат, а так же физические величины и единицы измерения.

На координатной плоскости обязательно должны быть нанесены экспериментальные точки. Кривая, аппроксимирующая функциональную теоретическую зависимость строится в соответствии с методом наименьших квадратов.

2. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА

1.Титульный лист
2. Теоретическая часть:
2.1. Определения всех физических явлений, законов и величин, встречающихся в данной работе.
2.2. Основные расчётные формулы с пояснениями.
3. Расчётная часть:
3.1. Задание с исходными данными своего варианта.
3.2. Расчёт с пояснениями

3. УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К РАЗДЕЛУ "МЕХАНИКА"
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ

Механика - учение о механическом движении и причинах, вызывающих или изменяющих это движение. *Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного положения тел или частей одного и того же тела в пространстве.*

Положение тела в пространстве может быть определено только по отношению к другим телам. Для описания механического движения необходимо указать тело, относительно которого рассматривается движение. Это тело называют *телом отсчета*.

Жестко связанная с этим телом система координат совместно с эталоном длины и часами образуют *систему отсчета.*

Материальная точка это тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с масштабами движения. Положение материальной точки M в декартовой системе координат определяется тремя координатами $x, y, z,$ но положение точки также может быть задано радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала системы координат до точки M (рис.1.). Здесь $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ единичные по модулю и взаимно перпендикулярные векторы - орты системы координат. Из правила сложения векторов следует, что радиус-вектор точки M можно разложить по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующим образом:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} .$$

При движении точки ее радиус-вектор в общем случае изменяется как по модулю, так и по направлению, т.е. радиус-вектор зависит от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) . \qquad (1)$$

Модуль радиус вектора $|\vec{r}|$ определяет расстояние между точкой М и началом координат.

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, .$$

Векторному уравнению (l) эквивалентна система скалярных уравнений:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t) \qquad (2)$$

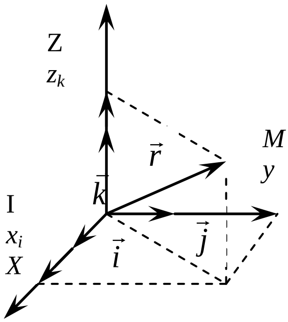

Рис.1.

Уравнения (1) или соответственно (2) называют уравнениями движения материальной точки.

Исключая время из уравнений движения, получим *уравнение траектории движения материальной точки.* На плоскости уравнение траектории имеет вид:

$$y = f(x)$$

Совокупность последовательных положений, занимаемых точкой в процессе ее движения, образует в пространстве линию, называемую *траекторией* движущейся точки (рис.2).

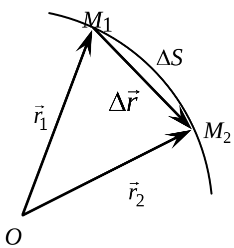

Рис.2

Если движущаяся точка в момент времени t находится в положении M_1 то ее радиус-вектор $\vec{r}_1$, а в момент времени $t+\Delta t$ она находится в положении M_2 и ее радиус-вектор $\vec{r}_2$.

Длина дуги $M_1M_2 = \Delta S$ – это путь, пройденный точкой M за время Δt. Вектор, направленный из точки M_1 в точку M_2 и равный $\Delta\vec{r}$ называется *вектором перемещения*:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \, .$$

Вектор перемещения характеризует изменение положения точки M в пространстве. Модуль вектора перемещения $|\Delta\vec{r}|$ равен длине хорды, стягивающей дугу, и не совпадает с ΔS, но различие между ними тем меньше, чем меньше Δt интервал времени. Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ совпадает по направлению с вектором средней скорости. Средняя скорость характеризует быстроту перемещения:

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \Delta\vec{r} / \Delta t \,,$$

Переходя к пределу ($\Delta t \to 0$), мы получим вектор мгновенной скорости в точке M_1. Вектор мгновенной скорости $\vec{\upsilon}$ в каждый момент времени направлен по касательной к траектории.

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,' = x'\cdot\vec{i} + y'\cdot\vec{j} + z'\cdot\vec{k}$$

В декартовой системе координат вектор мгновенной скорости определяется: $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$, где проекции скорости $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$, $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$, $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$. *Модуль мгновенной скорости:*

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_x + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \,.$$

Путевая скорость материальной точки это величина, равная абсолютному значению $|\vec{\upsilon}|$ (модулю) мгновенной скорости.

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \frac{dS}{dt} \,.$$

Если и величина и направление скорости не меняется, то движение называется равномерным и прямолинейным. При равномерном движении υ =const. Тогда:

$$S = \upsilon t \,, \qquad (2)$$

где S – путь, пройденный телом; υ, t – величина скорости и время движения.

Рассмотрим теперь движение, при котором скорость не остается постоянной, т.е. ускоренное движение. *Среднее ускорение определяется как изменение вектора скорости* $\Delta\vec{\upsilon}$ *за некоторый промежуток времени, деленное на величину этого промежутка (интервал времени)* Δt.

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение $\langle\vec{a}\rangle$ определяется как предел, к которому стремится отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ к промежутку времени движения тела Δt, при условии, что Δt стремится к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{\upsilon}' = \vec{r}\,'' = x''\cdot\vec{i} + y''\cdot\vec{j} + z''\cdot\vec{k}\ . \qquad (3)$$

Если ускорение постоянно и направлено как скорость, то величина скорости возрастает, и такое движение называют равноускоренным. Если векторы скорости и ускорения направлены в противоположные стороны, то скорость уменьшается и движение называют равнозамедленным. Для прямолинейного ускоренного движения

$$\upsilon_t = \upsilon_0 + at, \qquad (5)$$

где υ_0 и υ_t – величины скорости в начальный и конечный моменты времени *t*. Величина ускорения – *a*, входящая в формулу (5) алгебраическая – *a* положительно для равноускоренного и отрицательно для равнозамедленного движений.

Путь, пройденный телом за промежуток времени от 0 до *t* при прямолинейном равноускоренном движении можно получить, проведя интегрирование по времени выражения (5):

$$S = \int_0^t \upsilon_t dt = \int_0^t (\upsilon_0 + at)dt = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (6)$$

где υ_0 – начальная скорость.

При криволинейном движении скорость может изменяться независимо как по величине, так и по направлению. *Величина тангенциального* (*касательного*) a_t ускорения характеризует изменение модуля скорости и определяется следующим образом:

$$a_t = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

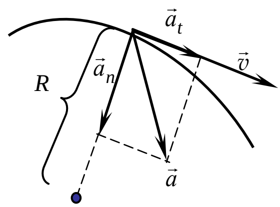

Рис. 3

Направлено тангенциальное ускорение по касательной к траектории (так же как и вектор мгновенной скорости). Если модуль скорости увеличивается, то тангенциальное ускорение положительно, если уменьшается, то отрицательно.

Нормальное (*центростремительное*) ускорения a_n характеризует изменение направления скорости. Величина нормального ускорения определяется:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

здесь R – радиус кривизны траектории.

Вектор нормального ускорения перпендикулярен скорости и направлен к центру кривизны траектории (рис.3).

Полное ускорение определяется как нормальной составляющей ускорения, так и тангенциальной составляющей. Полное ускорение направлено также как сила, действующая на тело. Величина полного ускорения равна:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Пусть в некоторый момент времени t материальная точка M, вращающаяся вокруг оси OO (рис.4) находится в положении M, а в момент времени $t + dt$ – в положении M'. За малое время dt радиус-вектор повернется на угол $d\varphi$ и материальная точка пройдет путь dS

по окружности. Величину пути dS можно выразить через угол $d\varphi$ и радиус окружности r:

$$dS = r \cdot d\varphi .$$

Поделим обе части уравнения на dt:

$$\upsilon = r\frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega . \qquad (7)$$

Величина, стоящая в левой части равенства представляет собой модуль скорости $\upsilon = \dfrac{dS}{dt}$.

Угловая скорость ω характеризует быстроту изменения угла поворота вращающейся точки и измеряется в радианах за секунду. Угловая скорость – псевдовектор. Направление вектора угловой скорости связано с направлением вращения правилом правого винта (правилом буравчика). Согласно этому правилу вектор мгновенной угловой скорости всегда направлен по оси вращения, в ту или другую сторону в зависимости от направления вращения.

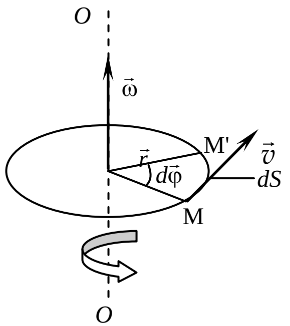

Рис.4

Связь между линейной и угловой скоростью можно записать в форме векторного произведения:

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}] .$$

При равномерном вращательном движении величина угловой скорости остается постоянной ω = const, и из формулы (8) следует:

$$d\varphi = \omega dt . \qquad (9)$$

Чтобы найти связь ω и φ за конечный промежуток времени необходимо проинтегрировать выражение (9):

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_t} d\varphi = \int_0^t \omega dt\,.$$

В результате интегрирования получим:

$$\varphi_t = \varphi_0 + \omega t\,,$$

где $\varphi_0; \varphi_t$ – угол поворота в начальный момент времени и в момент времени *t*. Эта формула верна только для движения по окружности с постоянной угловой скоростью. Для такого движения можно ввести понятие периода обращения *T*. За время, равное *T*, материальная точка совершает полный оборот, т.е. проходит угол $\varphi = 2\pi$ (рад). *Период равномерного вращательного движения T по окружности равен времени, необходимого телу для осуществления одного полного оборота:*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}\,,$$

где ν – частота вращения. В системе СИ период измеряется в секундах, а частота в герцах. Один герц соответствует одному обороту за секунду.

Если вращение происходит неравномерно, то быстроту изменения угловой скорости можно охарактеризовать угловым ускорением:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\,.$$

Угловое ускорение измеряется в рад/с^2. *Первый интеграл от углового ускорения дает угловую скорость* $\vec{\omega}$ *материальной точки, второе интегрирование дает её угловое перемещение.*

Равномерное движение:

1. Поступательное: $s = \int_0^t \upsilon dt = \upsilon t + s_0$

2. Вращательное: $\varphi = \int_0^t \omega dt = \omega t + \varphi_0$

Равнопеременное движение:

1. Поступательное: $\upsilon = \int a dt = at + \upsilon_0$

$$s = \int_0^t \upsilon \cdot dt = \int_0^t (\upsilon_0 + a \cdot t) \cdot dt = \upsilon_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} + s_0$$

2 .Вращательное: $\omega = \int_0^t \varepsilon \cdot dt = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$

$$\omega = \int_0^t \omega \cdot dt = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon \cdot t) dt = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} + \varphi_0$$

2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Раздел механики, изучающий как закономерности и характеристики движения тел, так и причины, вызывающие это движение, называется *динамикой*. В динамике используют эталон массы – килограмм, который добавляется к эталонам длины и времени, характерным для кинематики. К основным законам динамики относятся законы Ньютона.

I закон Ньютона. *Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

I закон Ньютона является определением инерциальной системы отсчета. Согласно этому закону, любая система координат жестко связанная с любым телом, на которое не действуют внешние силы (или результирующая внешняя сила равна нулю), является инерциальной системой отсчета. Только в инерциальных системах отсчета справедливы и выполняются второй и третий классические законы Ньютона.

II закон Ньютона. *Ускорение всякого тела прямо пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально массе тела*:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Так как ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, то II закон Ньютона можно записать и в следующей математической редакции:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

Если на тело действует не одна сила, а несколько, то ускорение будет сообщать сумма всех сил (равнодействующая всех сил). Поэтому II закон Ньютона в этом случае записывается в следующем виде:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{m}.$$

III закон Ньютона. *Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга тела, всегда равны по величине, направлены по одной прямой и противоположны по направлению.*

Силы взаимодействия двух тел равны по величине, направлены по одной прямой и противоположны по направлению, но приложены к разным телам и поэтому не компенсируют друг друга.

Обозначая силу, действующую на первое тело со стороны второго, через $\vec{F}_{12}$, а силу, действующую на второе тело со стороны первого, через $\vec{F}_{21}$, запишем III закон Ньютона в следующей математической редакции:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Знак минус показывает, что силы имеют противоположные направления. Силы, действующие на тела системы, можно подразделить на *внутренние* и *внешние*. *Внутренними силами* будем называть силы, с которыми действуют друг на друга отдельные части системы, а *внешними* – силы, обусловленные внешними телами, не принадлежащими к системе.

Изменение движения тела определяется как силой $\vec{F}$, так и промежутком времени *dt*, в течение которого происходило действие силы. *Импульсом силы называется физическая величина, измеряемая произведением силы на время ее действия* $\vec{F} \cdot dt$. Единица измерения импульса силы в СИ – 1 Н·с = 1 кг·м/с.

Импульсом тела называется физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость $\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$. Размерность импульса тела такая же, как и импульса силы. Применяя понятия импульса силы и импульса тела можно записать II закон Ньютона еще в одной математической редакции:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{\upsilon}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (13)$$

Умножая обе части равенства (13) на дифференциал *dt*, получим еще одну математическую редакцию II закона Ньютона:

$$\vec{F} \cdot dt = d\vec{p}\,. \qquad (14)$$

Согласно этой формулировке, элементарный импульс силы $\vec{F} \cdot dt$ численно равен элементарному изменению импульса тела $d\vec{p}$.

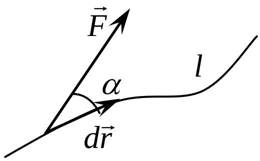

Рис.6

Работа и мощность. Элементарно-малая работа силы измеряется скалярным произведением силы на малое перемещение $d\vec{r}$.

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$$

или в развернутом виде:

$$dA = F \cdot dr \cdot \cos\alpha, \qquad (15)$$

где α - угол между направлениями силы и перемещения. Полная работа на всем пути будет равна:

$$A = \int\limits_{\ell} F_r \cdot dr,$$

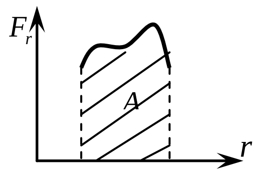

Рис.7

где $F_r = F \cdot \cos\alpha$ - проекция силы на направление перемещения. Графически работа силы численно равна площади криволинейной трапеции, заштрихованной на рис.7, где по оси ординат отложена проекция силы, т.е. величина $F \cdot \cos\alpha$, а по оси абсцисс - длина пути. Если проекция силы не изменяется на всем пути, т.е. $F_r = F \cdot \cos\alpha = const$, то тогда работа на всем пути будет равна:

$$A = F_r S = F \cdot S \cdot \cos\alpha,$$

где S – путь, пройденный телом. В частности это имеет место при прямолинейном движении, когда постоянная по величине сила F образует с направлением движения постоянный угол α. Если $90^0 > \alpha > 0$, то $A>0$ – работа совершается самой приложенной силой, если $\alpha > 90^0$ то $A<0$ и работа совершается против приложенной силы, если $\alpha = 90^0$ то $A=0$ - работа равна нулю. Единица измерения работы в СИ Джоуль: 1 Дж = 1 Н·м.

Для характеристики механизмов, предназначенных для совершения работы, вводится величина, показывающая, какую работу данный механизм совершает в единицу времени. Эта величина называется мощностью. *Мгновенная мощность P есть величина, равная отношению элементарной работы dA к элементарно малому промежутку времени dt, за который эта работа совершается*:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}.$$

Единица измерения мощности в СИ (Ватт): 1 Вт = 1 Дж/с.

Силы, действующие на тело, называются консервативными (потенциальными), если работа этих сил при перемещении тела не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положением тела в пространстве.

Работа консервативных сил зависит только от положения начальной и конечной точек перемещения, и поэтому на замкнутом пути, когда начальная и конечная точка совпадают, работа перемещения будет равняться нулю:

$$A = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0\,.$$

Силы, действующие на тело, называются неконсервативными, если работа сил зависит от формы пути перемещения тела между двумя конкретными точками пространства. Примером консервативных сил являются силы тяжести. Примером неконсервативных сил являются силы трения.

Энергия. Физическая величина, характеризующая способность тела совершать работу, называется энергией. Энергия – универсальная мера движения и взаимодействия тел. Можно выделить две разновидности энергии. Первая (потенциальная энергия) проявляется в том случае, если тело перемещается в поле потенциальных сил. В этом случае потенциальная энергия определяется работой перемещения. Вторая (кинетическая энергия) - проявляется, если тело за счет взаимодействия с другим телом изменяет свою скорость движения. В этом случае кинетическая энергия определяется работой внешней сипы затрачиваемой на увеличение скорости тела. В общем случае, энергия тела складывается из запасов потенциальной и кинетических энергий.

Допустим, что в потенциальном поле сил тело совершает малое перемещение и работа перемещения dA положительна. Тогда полагают, что эта работа была совершена за счет изменения запаса потенциальной энергии, т.е. потенциальная энергия тела dW_n уменьшилась на такую же величину:

$$dA = -\,dW_n \qquad *$$

Если на перемещение затрачивается работа (т.е. работа отрицательна), то потенциальная энергия тела в конкретной точке пространства положительна, в противном случае – отрицательна. Выбор точки пространства, где потенциальная энергия тела принимается за нуль, произволен и определяется спецификой решаемой задачи.

Допустим, что работа совершается силой действующей на изучаемое тело со стороны другого тела в течение весьма малого промежутка времени. Тогда элементарная работа dA совершенная этой силой будет равна элементарному изменению dW_k кинетической энергии:

$$dA = dW_k$$

Потенциальная и кинетическая энергии, также как и работа измеряется в Джоулях.

Для элементарно малой работы совершаемой за счет уменьшения запаса потенциальной энергии тела можно записать:

$$\partial W_n = -\partial A. \tag{16}$$

В последнем соотношении использованы частные дифференциалы, так как рассматривается конкретное (частное) перемещение по определенному направлению. С другой стороны, элементарно малая работа перемещения равна:

$$\partial A = F \partial r \cos\alpha. \tag{17}$$

Величина $F_r = F \cdot \cos\alpha$ является проекцией силы на направление перемещения $\vec{r}$. Поэтому из соотношений (16) и (17) следует:

$$F_r = -\frac{\partial W_n}{\partial r}. \tag{18}$$

Выберем в качестве конкретного направления перемещение вдоль оси «x» декартовой системы координат. Тогда:

$$F_x = -\frac{\partial W_n(x, y, z)}{\partial x},$$

где F_x – проекция силы на ось «x», $\dfrac{\partial W_n(x,y,z)}{\partial x}$ – частная производная от потенциальной энергии по координате «x». Аналогично для проекций на другие оси получим $F_y = -\dfrac{\partial W_n(x,y,z)}{\partial y}$ и $F_z = -\dfrac{\partial W_n(x,y,z)}{\partial z}$. Теперь вектор силы можно выразить через его проекции:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left\{\frac{\partial W_n(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_n(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_n(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}\right\},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}, \vec{k}$ – орты осей декартовой системы координат. Последнее выражение можно записать короче, для этого используем оператор градиента (*grad*), который является сокращенной записью выражения стоящего в фигурной скобке:

$$\vec{F} = -gradW_n.$$

По закону всемирного тяготения между телами с массами *m* и *M*, находящимися на расстоянии *r* друг от друга, действует сила взаимного притяжения

$$\vec{F} = G\frac{m \ \cdot M}{r^3}\cdot\vec{r},$$

где G – гравитационная постоянная, $G = 6{,}6720 \cdot 10^{-11}$ (Н·м^2)/кг^2. Тогда напряжённость гравитационного поля:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{GM_2}{r^3}\cdot\vec{r}$$

Соответственно потенциальная энергия в точке *r*:

$$W_n = -A = -\int\limits_{\infty}^{r} G\frac{m\cdot M}{r^2}dr = -G\frac{m\cdot M}{r}.$$

Потенциал гравитационного поля определяется:

$$\varphi = \frac{W_p}{m} = -G\frac{M}{r}$$

Вблизи поверхности Земли потенциал гравитационного поля:

$$\varphi = gh$$

На всякое тело массы m, вблизи поверхности Земли, действует сила, называемая *силой тяжести:*

$$\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}\,,$$

где g – ускорение свободного падения.

В данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Ускорение свободного падения изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от 9,780 м/с^2 на экваторе до 9,832 м/с^2 на полюсах, что обусловлено формой Земли и ее вращением (экваториальный и полярный радиусы равны соответственно 6378 и 6357 км). Сила тяжести вызывается силой гравитационного притяжения тела Землей и, поэтому, они равны между собой, т.е.:

$$F_{\text{т}} = mg = G\frac{mM}{R_З^2}\,,$$

где M – масса Земли; $R_З$ – радиус Земли. Тогда модуль ускорения свободного падения (иначе - модуль напряжённости гравитационного поля) на поверхности Земли будет определяться:

$$g = G\frac{M}{R_З^2}\,.$$

Ускорение свободного падения с удалением от поверхности Земли уменьшается. Аналогичные рассуждения верны и для любой другой планеты.

Рассмотрим действующую на тело силу тяжести: $\vec{F} = m\vec{g}$. Образуя проекцию этого выражения на ось h, направленную вертикально вверх, имеем: $F_h = -mg$. Тогда:

$$dW_n = mgdh.$$

Для потенциальной энергии тела массы m, поднятого на высоту h над поверхностью Земли:

$$W_n = \int_0^h dW_n = \int_0^h mgdh.$$

И окончательно:

$$W_n = mgh.$$

По закону Гука проекция упругой силы на ось x равна:

$$F = -kx,$$

где x – сжатие или растяжение пружины; k – жесткость пружины. Полагая потенциальную энергию не сжатой и не растянутой пружины нулем, получим:

$$W_n = \frac{kx^2}{2}.$$

Таким образом, мы видим, что выражение для потенциальной энергии зависит от вида взаимодействия и природы потенциального поля.

Рассмотрим теперь кинетическую энергию. Для этого будем считать, что к телу массы m приложена внешняя сила $\vec{F}$, которая вызывает ускорение тела и тем самым увеличивает скорость его движения. Пусть направление силы и перемещения совпадают, т.е. $\alpha = 0$ ($\cos\alpha = 1$). Подставив в (15) выражение силы $F = m\frac{d\upsilon}{dt}$ получим:

$$dA = m\frac{d\upsilon}{dt}dr$$

Но $\upsilon = \frac{dr}{dt}$, поэтому выражение для работы можно записать:

$$dA = m\upsilon d\upsilon. \tag{19}$$

Теперь определим работу силы при увеличении скорости тела от нуля до некоторой величины υ. Для этого возьмем определенный интеграл от выражения (19):

$$\int_0^A dA = \int_0^{\upsilon} m\upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Следовательно, работа внешней силы остается в виде запаса кинетической энергии движущегося твердого тела**:**

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2} \qquad (20)$$

В отличие от потенциальной энергии, формула для которой имеет различный вид в зависимости от физической природы потенциального поля, формула для кинетической энергии поступательного движения в классической механике всегда имеет один и тот же вид, определяемый формулой (20).

Сила трения. Силы трения весьма разнообразны. Эти силы зависят от формы, размеров и скорости движения тела по отношению к среде. Силы трения возникают при движении одного тела по поверхности другого (трение скольжения), также, если тело имеет форму шара или цилиндра и перемещается за счет качения (трение качения). Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки между ними, например, смазки, называют *сухим трением*. В этом случае сила трения возникает не только при скольжении одного тела по поверхности другого, но также при попытках вызвать такое скольжение (т.е. при попытке сдвинуть тело с места). Иначе говоря, если приложенная к телу сила меньше некоторой величины, то движение вызвать невозможно. Силу, действующую между поверхностями соприкосновения в этом случае, называют *силой трения покоя*. Если величина приложенной к телу силы больше этой величины, то возникает скольжение тела по поверхности другого тела. Сила трения скольжения направлена противоположно скорости тела. Величина силы трения в этом зависит от силы, с которой трущиеся поверхности «прижимаются» друг к другу и от свойств самих поверхностей (например, шероховатости). Модуль силы трения покоя:

$$F_{\text{тр.пок}} < \mu N,$$

где N – модуль силы нормального давления (реакции опоры); μ – коэффициент трения. Модуль силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр.ск}} = F_{\text{тр.пок}}^{\max} = \mu N,$$

где $F_{\text{тр.пок}}^{\max}$ – максимальная сила трения покоя.

Термин «нормальное давление» подчеркивает то обстоятельство, что эта сила нормальна (перпендикулярна) поверхности скольжения.

3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

*Скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности при вращательном движении, называется моментом инерции тела***.**

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси вращения определяется выражением (21):

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 . \tag{21}$$

Если разбиение тела проводить на все более и более мелкие элементы, то тогда сумма в пределе трансформируется в интеграл, и в результате чего получим:

$$I = \int r^2 dm. \tag{22}$$

Можно получить еще одну формулу полезную для расчета момента инерции. Для этого воспользуемся выражением для плотности вещества: $\rho = \dfrac{dm}{dV}$ ($dm = \rho dV$). После подстановки в (22) получим:

$$I = \int_V \rho r^2 dV, \qquad (23)$$

*Моменты инерции симметричных однородных твердых тел***:**

1) $I = mR^2/2$ - сплошного цилиндра массы m и радиуса R относительно оси, проходящей через центры оснований.

2) $I = m\,(R_1^2 + R_2^2)/\,2$ - толстостенного полого цилиндра массы m с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 относительно оси, проходящей через центры оснований.

3) $I \cong mR^2$ - тонкостенного полого цилиндра ($R_1 \approx R_2 = R$).

4) $I = 2mR^2/5$ - шара массы m и радиуса R относительно оси, проходящей через его центр.

5) $I = ml^2/12$ - стержня массы m и длины l относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему.

Теорема Штейнера: м*омент инерции относительно произвольной оси O_1O_1 равен сумме момента инерции I_0, относительно оси OO, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела (центр масс тела) и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями a.*

$$I = I_0 + ma^2.$$

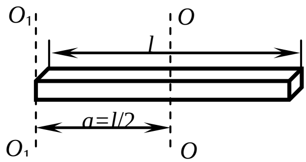

Рис.14

Моментом силы относительно точки O называется вектор равный:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения внешней силы $\vec{F}$; $[\vec{r}, \vec{F}]$ – векторное произведение $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Направление момента силы связано с направлением $\vec{r}$ и $\vec{F}$ правилом правого винта. Величина момента силы определяется выражением:

$$M = rF\sin\alpha,,$$

где α – угол между направлениями векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Размерность момента силы Н·м = кг(м^2/с^2).

Момент силы относительно оси. Момент силы относительно оси является скалярной величиной, так как является проекцией вектора момента силы на направление оси вращения. Однако, часто бывает удобно рассматривать его, как вектор, который направлен по оси вращения и может иметь только два направления, соответствующих вращению по или против часовой стрелки. Если момент силы вызывает вращение тела по часовой стрелке, то он считается положительным, если против – то отрицательным.

Величина момента силы относительно оси вращения равна

$$M = rF\sin\alpha = F\ell,$$

где $\ell = r\sin\alpha$ – плечо силы (кратчайшее расстояние от оси вращения до прямой, вдоль которой действует сила).

Момент импульса твердого тела относительно заданной оси вращения определяется:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \tag{24}$$

Направление момента импульса совпадает с направлением угловой скорости.

Основное уравнение динамики вращательного движения по форме сходно с уравнением II закона Ньютона, поэтому его иногда называют вторым законом динамики для вращательного движения:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}. \tag{25}$$

Момент внешних сил $\vec{M}$ направлен так же, как угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$.

Допустим, что F_i – составляющая внешней силы вызывающая вращение тела вокруг неподвижной оси и приложенная к некоторой элементарной массе Δm_i твердого тела. За малый промежуток времени элементарная масса переместится на $d\ell_i$ и, следовательно, силой будет совершена работа

$$dA_i = F_i d\ell_i\ ,$$

где F_i – сила касательная к траектории движения массы (сила, вызывающая вращение тела), величина перемещения $d\ell_i = r_i d\varphi$, где $d\varphi$ - элементарный угол поворота твердого тела. Тогда:

$$dA_i = F_i r_i d\varphi = M_{zi} d\varphi .$$

Суммируя работу моментов сил, получим:

$$dA = \sum_i M_{zi} d\varphi = M_z d\varphi,$$

где M_z – проекция на ось z результирующего момента сил, действующих на твердое тело, вращающееся вокруг заданной оси вращения. И окончательно для работы за конечный промежуток времени dt имеем:

$$A = \int dA = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi = \int_0^{t} M_z \omega dt,$$

где ω - угловая скорость вращения тела.

Кинетическая энергия вращающегося тела может быть выражена через момент инерции тела I и угловую скорость его вращения ω:

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2} .$$

Если тело движется поступательно и при этом вращается (катится), то кинетическая энергия тела складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс и кинетической энергии вращательного движения.

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} .$$

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В механике рассматриваются только две формы энергии (кинетическая и потенциальная), считается, что процессы перехода механической энергии в тепловую, электрическую, химическую и другие формы энергии не происходят.

Закон сохранения механической энергии следует из законов Ньютона: *сумма кинетической и потенциальной энергии замкнутой системы, между телами которой действуют только консервативные силы, остается постоянной*.

Если в замкнутой системе кроме консервативных сил действуют также неконсервативные, например, силы трения, то механическая энергия не сохраняется. В этом случае выполняется более общий закон - закон сохранения и превращения энергии: *в замкнутой системе остается постоянной сумма всех видов энергии, включая и немеханические.*

Можно дать и другую формулировку закона: *энергия не создается и не исчезает, а в эквивалентных количествах может переходить из одного вида энергии в другие*.

В случае если внешние силы отсутствуют, система называется *замкнутой*. Для суммарного импульса замкнутой системы существует закон сохранения: *суммарный импульс замкнутой (изолированной или квазиизолированной) системы остается постоянным:*

$$\vec{p} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + ...m_N\vec{\upsilon}_N = const.$$

Закон сохранения момента импульса: *если результирующий момент всех внешних сил, действующих на физическую систему равен нулю, то вектор момента импульса этой системы остается постоянным:*

$$\vec{M} = d\vec{L}/dt, \qquad (26)$$

где $\vec{M}$ – момент внешних сил, действующих на твердое тело; $\vec{L}$ – момент импульса этого тела.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

ЗАДАЧА №1

Даны зависимости координат от времени.

а) Определите зависимости радиус-вектора частицы, скорости, ускорения от времени и найдите их модули.
б) Найдите уравнение траектории, дайте оценку характера движения материальной точки вдоль траектории.
в) Постройте графические зависимости: $y\ (x)$, $\upsilon_x(t)$, $a(t)$.

Таблица 1

Исходные данные для задачи 1

№ варианта	Зависимости координат от времени
1.	$x(t) = 2t^2$; $y(t) = 4t^4+2t^2+2$; $z(t)=0$
2.	$x(t) = 4t$; $y(t) = 4t^2+2t$; $z(t)=0$
3.	$x(t) = 2t$; $y(t) = t^3-2t^2$; $z(t)=0$
4.	$x(t) = 2t^2$; $y(t) = 4t^4+2t^2+2$; $z(t)=0$
5.	$x(t) = 2t^2$; $y(t) = 4t^2+2t$; $z(t)=0$
6.	$x(t) = 4t$; $y(t) = 4t^2-2t$; $z(t)=0$
7.	$x(t) = 2t$; $y(t) = t^3+2t^2$; $z(t)=0$
8.	$x(t) = 2t^2$; $y(t) = 4t^4-2t^2+2$; $z(t)=0$
9.	$x(t) = t^2$; $y(t) = 4t^4+2t^2+2$; $z(t)=0$
10.	$x(t) = 3t^2$; $y(t) = 27t^2+2t$; $z(t)=0$
11.	$x(t) = 4t^2$; $y(t) = t^3-2t^2$; $z(t)=0$
12.	$x(t) = 81t$; $y(t) = 3t^4+27t^2+2$; $z(t)=0$
13.	$x(t) = t^2$; $y(t) = 4t^2+2t$; $z(t)=0$
14.	$x(t) = 3t^2$; $y(t) = 27t^2-2t$; $z(t)=0$
15.	$x(t) = 4t^2$; $y(t) = t^3+2t^2$; $z(t)=0$
16.	$x(t) = 81t$; $y(t) = 3t^4-27t^2+2$; $z(t)=0$
17.	$x(t) = t^2$; $y(t) = 4t^4+2t^2+2$; $z(t)=0$
18.	$x(t) = 3t^2$; $y(t) = 27t^2+2t$; $z(t)=0$
19.	$x(t) = 4t^2$; $y(t) = t^3-2t^2$; $z(t)=0$
20.	$x(t) = 3t$; $y(t) = 81t^4+2t^2+2$; $z(t)=0$
21.	$x(t) = t^2$; $y(t) = 4t^2+2t$; $z(t)=0$
22.	$x(t) = 3t^2$; $y(t) = 27t^2-2t$; $z(t)=0$
23.	$x(t) = 4t^2$; $y(t) = t^3+2t^2$; $z(t)=0$
24.	$x(t) = 3t$; $y(t) = 81t^4-2t^2+2$; $z(t)=0$
25.	$x(t) = 3t^2$; $y(t) = 27t^2-6t$; $z(t)=0$
26.	$x(t) = t^2$; $y(t) = 4t^4+4t^2+8$; $z(t)=0$
27.	$x(t) = 4t^2$; $y(t) = -t^3+2t^2$; $z(t)=0$
28.	$x(t) = 4t^2$; $y(t) = t^3-4t^2$; $z(t)=0$
29.	$x(t) = 3t$; $y(t) = -81t^4+2t^2-2$; $z(t)=0$
30.	$x(t) = -3t$; $y(t) = 81t^4-2t^2+2$; $z(t)=0$

ЗАДАЧА №2

Материальная точка движется по окружности радиусом R. При заданном уравнении движения материальной точки $S(t)$ определите:

а) тангенциальное ускорение a_τ, нормальное ускорение a_n и полное a ускорение в момент времени t_1;

б) характер движения материальной точки.

Постройте графические зависимости.

Таблица 2

Исходные данные для задачи 2

№ варианта	Уравнение движения	R, м	t_1, с	Графические зависимости
1.	$S = 1 + 2t^2 + t^3$	10	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
2.	$S = 2 + 0{,}5t^3$	9	2	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
3.	$S = 1 + 2t + t^2$	8	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_n(t)$
4.	$S = 4 + 2t^2$	7	2	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_\tau(t)$
5.	$S = 2 + 2t + t^2$	6	1	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a(t)$
6.	$S = 1 + 3t + t^2$	5	2	$S(t)$, $a_n(t)$, $a(t)$
7.	$S = 4 + 3t + t^3$	4	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
8.	$S = -2t + 2t^2$	3	2	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
9.	$S = 4 - t + 0{,}5t^2$	2	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_n(t)$
10.	$S = 3 + 3t^2$	10	2	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_\tau(t)$
11.	$S = 3 - 2t + 0{,}5t^2$	9	1	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a(t)$
12.	$S = - 2t + 4t^2$	8	2	$S(t)$, $a_n(t)$, $a(t)$
13.	$S = 3 + 2t - t^2$	7	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
14.	$S = 2t + t^2$	6	2	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
15.	$S = 4 + 3t + 0{,}5t^2$	5	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
16.	$S = 4 - 2t + 2t^2$	4	2	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
17.	$S = 0{,}5 + 3t + t^2$	3	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_n(t)$
18.	$S = 4t + 2t^2$	2	2	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_\tau(t)$
19.	$S = 3 + 2t + 0{,}5t^2$	10	1	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a(t)$
20.	$S = 2t + 0{,}5t^2$	9	2	$S(t)$, $a_n(t)$, $a(t)$
21.	$S = 0{,}5 + 4t + t^2$	8	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
22.	$S = 0{,}5 + 2t + t^2$	7	2	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
23.	$S = 5 + 3t + t^2$	6	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
24.	$S = 0{,}5 + t^2$	5	2	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
25.	$S = 3 + 0{,}5t + t^2$	4	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_n(t)$
26.	$S = 3t + 3t^2$	10	2	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_\tau(t)$
27.	$S = 5 + 2t + t^2$	9	1	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a(t)$
28.	$S = 0{,}5t + t^2$	8	2	$S(t)$, $a_n(t)$, $a(t)$
29.	$S = t + 2t^2$	7	1	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
30.	$S = 5t + 0{,}5t^2$	6	2	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$

ЗАДАЧА №3

3.1. С башни высотой 10 м горизонтально брошен камень со скоростью υ_0. Определить вид траектории движения камня; направление скорости камня в конце падения; радиус кривизны траектории в середине пути (по вертикали) и в точке, где $\upsilon = 2\,\upsilon_0$; исследовать зависимость радиуса кривизны траектории от угла α, образованного скоростями υ и υ_0. Постройте графические зависимости в соответствии с заданием варианта.

3.2. Тело брошено со скоростью υ_0 под некоторым углом к горизонту. Продолжительность полета t_1. Найти наибольшую высоту поднятия этого тела. Сопротивление воздуха не учитывать. Определите радиус кривизны его траектории в верхней точке и в момент падения на землю. Постройте графические зависимости в соответствии с заданием варианта.

3.3. Камень брошен в горизонтальном направлении. Через время t_1 после начала движения модуль скорости камня стал в 1,5 раза больше его начальной скорости. Найти начальную скорость камня. Сопротивление воздуха не учитывать. Найти радиус кривизны траектории тела через t_1 после начала движения. Постройте графические зависимости в соответствии с заданием варианта.

3.4. Мяч бросили со скоростью υ_0 под углом α к горизонту. Найдите высоту H, на которую поднимется мяч; расстояние S от точки бросания до точки падения мяча; время его полета. Сопротивление воздуха не учитывать. Постройте графические зависимости в соответствии с заданием варианта.

3.5. Из ямы глубиной h=1 м бросают тело под углом α к горизонту со скоростью υ_0. Тело вылетает из ямы. Найдите: 1) положение и скорость тела через время t_1; 2) максимальные высоту и дальность полета; 3) уравнение траектории тела. Постройте графические зависимости в соответствии с заданием варианта.

Таблица 3

Исходные данные для задач 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5

№ варианта	№ задачи	υ_0, м/с	t_1, с	$\alpha,^0$	Графические зависимости
1.	3.1	10	1	0	$R(t)$, $\upsilon(t)$, $a_y(t)$
2.	3.1	9	2	0	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
3.	3.2	8	1	30	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_n(t)$
4.	3.2	7	2	30	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_\tau(t)$
5.	3.3	6	1	0	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a(t)$
6.	3.4	5	2	30	$S(t)$, $a_n(t)$, $a(t)$
7.	3.5	4	1	30	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
8.	3.1	3	2	0	$R(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
9.	3.1	2	1	0	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_n(t)$
10.	3.2	10	2	45	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_\tau(t)$
11.	3.2	9	1	45	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a(t)$
12.	3.3	8	2	0	$S(t)$, $a_n(t)$, $a(t)$
13.	3.4	7	1	45	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
14.	3.5	6	2	45	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
15.	3.1	5	1	0	$R(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
16.	3.1	4	2	0	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
17.	3.2	3	1	60	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_n(t)$
18.	3.2	2	2	60	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_\tau(t)$
19.	3.3	10	1	0	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a(t)$
20.	3.4	9	2	60	$S(t)$, $a_n(t)$, $a_y(t)$
21.	3.5	8	1	60	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
22.	3.1	7	2	0	$R(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
23.	3.1	6	1	0	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_y(t)$
24.	3.2	5	2	60	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$
25.	3.2	4	1	60	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_n(t)$
26.	3.3	10	2	0	$S(t)$, $\upsilon(t)$, $a_\tau(t)$
27.	3.4	9	1	20	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_y(t)$
28.	3.5	8	2	40	$S(t)$, $a_n(t)$, $a(t)$
29.	3.1	7	1	0	$R(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$
30.	3.1	6	2	0	$S(t)$, $a_\tau(t)$, $a_n(t)$

ЗАДАЧА №4

4.1. С наклонной плоскости высотой h и длиной склона 10 м скользит тело массой m. Коэффициент трения на всём пути равен k. Найдите:

а) скорость движения υ тела у основания склона, путь, пройденный телом по горизонтальной части пути до остановки;

б) кинетическую энергию $W_к$ у основания склона, долю полной энергии, затраченную на нагрев наклонной плоскости, работу силы тяжести;
в) постройте графическую зависимость $W_к = f(x)$ на всём пути.

4.2. Груз массой m начинает двигаться из состояния покоя вдоль гладкой горизонтальной плоскости под действием силы F, причем $F_x = At$. Найдите зависимость $x = f(t)$, $(x(0) = 0)$. Постройте графические зависимости $F_x = f(t)$, $\upsilon_x = f(t)$ и $x = f(t)$.

Таблица 4

Исходные данные для задач 4.1, 4.2

№ варианта	№ задачи	m, кг	υ_0, м/с	A	h, м	k
1.	4.2	1	1	5	-	-
2.	4.2	2	2	2	-	-
3.	4.2	1	3	3	-	-
4.	4.2	2	6	4	-	-
5.	4.2	1	5	3	-	-
6.	4.1	5	-	-	0,5	0,03
7.	4.1	4	-	-	1	0,07
8.	4.1	3	-	-	1,5	0,06
9.	4.1	2	-	-	2	0,11
10.	4.1	1	-	-	2,5	0,14
11.	4.2	1	5	4	-	-
12.	4.2	2	4	6	-	-
13.	4.2	1	3	5	-	-
14.	4.2	2	3	2	-	-
15.	4.2	1	1	3	-	-
16.	4.1	1	-	-	2,5	0,05
17.	4.1	2	-	-	2	0,07
18.	4.1	3	-	-	1,5	0,08
19.	4.1	4	-	-	1	0,1
20.	4.1	5	-	-	0,5	0,15
21.	4.2	3	1	1	-	-
22.	4.2	1	2	2	-	-
23.	4.2	3	2	3	-	-
24.	4.2	1	4	6	-	-
25.	4.2	3	5	3	-	-
26.	4.1	6	-	-	0,5	0,06
27.	4.1	3	-	-	1	0,07
28.	4.1	2	-	-	1,5	0,08
29.	4.1	1	-	-	2	0,11
30.	4.1	5	-	-	2,5	0,12

ЗАДАЧА №5

5.1. Два стальных шара массами m_1 и m_2 подвешены на нитях так, что при их касании центры находятся на ℓ метров ниже точек подвеса, а нити вертикальны. Меньший шар отводят в сторону (при этом нить отклоняется на угол α) и отпускают. Принимая шары за абсолютно упругие, определите, на какую высоту поднимутся их центры шаров после удара. Что произойдет, если таким же образом отклонить большой шар? Постройте графическую зависимость $h_1 = f(m_1)$.

5.2. Два шара одинаковой массы по m_1 из абсолютно неупругого материала висят на вертикальных невесомых нитях длиной ℓ, касаясь друг друга. Один из шаров отводят в сторону так, что нить образует с вертикалью угол α, и отпускают. Определить h_{max} - наибольшую высоту подъёма общего центра массы системы после соударения. Постройте графическую зависимость $h = f(m_1)$.

5.3. Шар массой m_1 движется со скоростью υ_{01} навстречу шару с массой m_2, движущемуся со скоростью υ_{02}. Найдите величину изменения кинетической энергии системы шаров $\Delta W_к$ после неупругого центрального удара. Постройте графическую зависимость $\Delta W_к = f(m_2)$.

5.4. Для определения скорости пули, вылетающей из ружья, проделали следующее: стальной шар массой m_1 повесили на шнур длиной ℓ и выстрелили в него вдоль горизонтальной прямой, проходящей через центр шара. Пуля массой m_2 упруго от него отскочила, а шнур отклонился на угол α. Определить скорость движения пули до удара. Постройте графическую зависимость $\alpha = f(m_2)$.

5.5. Тело массой m_1 движется со скоростью υ_{01} и, нагоняя второе тело массой m_2, движущееся со скоростью υ_{02}, сталкивается с ним. Тела движутся по одной прямой. Найти скорости тел после столкновения, если:

а) удар был неупругим;

б) удар был упругим;

в) постройте графическую зависимость $\upsilon_1 = f(m_1)$.

Таблица 5

Исходные данные для задач 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5

Номер варианта	Номер задачи	m_1, кг	υ_{01}, м/с	m_2, кг	υ_{02}, м/с	$\alpha,^0$	ℓ, м
1.	5.5	2	3	3	1	-	-
2.	5.5	3	4	4	2	-	-
3.	5.5	2	4	4	1	-	-
4.	5.5	1	3	4	2	-	-
5.	5.5	1	4	3	2	-	-
6.	5.5	3	4	4	1	-	-
7.	5.3	2	3	3	1	-	-
8.	5.3	3	4	4	2	-	-
9.	5.3	2	4	4	1	-	-
10.	5.3	1	3	4	2	-	-
11.	5.3	1	4	3	2	-	-
12.	5.3	3	4	4	1	-	-
13.	5.2	0,2	-	-	-	60	1
14.	5.2	0,1	-	-	-	45	2
15.	5.2	0,4	-	-	-	60	3
16.	5.2	0,5	-	-	-	45	1
17.	5.2	0,3	-	-	-	60	2
18.	5.2	0,4	-	-	-	45	3
19.	5.1	0,8	-	0,2	-	90	1
20.	5.1	0,6	-	0,2	-	60	3
21.	5.1	1,0	-	0,2	-	90	2
22.	5.1	1,2	-	0,2	-	60	3
23.	5.1	0,6	-	0,2	-	90	1
24.	5.1	0,8	-	0,2	-	60	2
25.	5.4	5	?	0,005	-	10	0,24
26.	5.4	4	?	0,004	-	10	0,48
27.	5.4	3	?	0,003	-	10	0,4
28.	5.4	2	?	0,002	-	10	0,3
29.	5.4	5	?	0,004	-	10	0,24
30.	5.4	4	?	0,005	-	10	0,4

ЗАДАЧА №6

6.1. Человек стоит на неподвижной горизонтальной скамье Жуковского и ловит мяч массой m_1, летящий в горизонтальном направлении на расстоянии ℓ от оси вращения скамейки. После этого скамейка начала вращаться с угловой скоростью ω. Момент инерции человека и скамейки J. Определить скорость движения мяча относительно неподвижного наблюдателя.

6.2. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень длиной ℓ и массой m_1. Момент инерции человека и скамьи относительно оси равен J. Ось стержня совпадает с осью вращения скамейки. Скамья с человеком вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. С какой частотой будет вращаться скамейка, если человек повернет стержень в горизонтальное положение так, чтобы центр тяжести стержня остался на оси вращения?

6.3. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться вокруг вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в начальную точку платформы. Масса платформы m_1, масса человека m_2.

6.4. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска, стоит человек. Масса платформы m_1, радиус R; масса человека m_2. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найти, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью v_0 относительно платформы.

6.5. Человек стоит на диске, который сначала неподвижен, но может вращаться относительно вертикальной оси, проходящей через его центр. Момент инерции диска с человеком J. В руках человек держит колесо, ось которого вертикальна и расположена на расстоянии ℓ от центра диска. Колесо вращается с угловой скоростью ω. Определить частоту, с которой будет вращаться диск после того, как человек повернет ось колеса на 180°. Масса маленького колеса m_1, радиус R.

6.6. Диск массой m_1 и радиусом R вращается с угловой скоростью ω. На краю диска стоит человек массой m_2. Человек с линейной скоростью v_0 (относительно Земли) начал перемещаться к центру диска. Вывести законы для угловой скорости и углового ускорения системы как функции времени, проанализировать эти законы графически (построить графики).

Таблица 6

Исходные данные для задач 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6.

№ варианта	№ задачи	m_1, кг	υ_0, *м/с*	ω, рад/с	α,^{0}	m_2, кг	ℓ, м	J,кг·м^2	R,м
1.	6.6	30	0,1	1	-	60	-		2
2.	6.6	40	0,2	1	-	70	-	-	3
3.	6.6	30	0,3	2	-	70	-	-	2
4.	6.6	40	0,2	2	-	60			1
5.	6.5	3	-	1,5	-	-	0,5	48	0,4
6.	6.5	4	-	1,0	-	-	0,6	72	0,3
7.	6.5	2	-	2,0	-	-	0,8	48	0,2
8.	6.5	4	-	1,5	-	-	0,4	60	0,1
9.	6.4	200	2	-	-	80	-	-	2
10.	6.4	180	1	-	-	90	-	-	3
11.	6.4	220	3	-	-	70	-	-	1
12.	6.4	240	2	-	-	60	-	-	2
13.	6.3	240	-	-	-	60	-	-	-
14.	6.3	200	-	-	-	70	-	-	-
15.	6.3	220	-	-	-	80	-	-	-
16.	6.3	260	-	-	-	90	-	-	-
17.	6.2	25	-	1	-	-	2,4	5	-
18.	6.2	26	-	1,5	-	-	2,2	6	-
19.	6.2	27	-	2	-	-	2,6	7	-
20.	6.2	25	-	0,8	-	-	2,0	8	-
21.	6.1	0,3	-	1	-	-	0,5	5	-
22.	6.1	0,4	-	1,5	-	-	0,6	6	-
23.	6.1	0,5	-	2	-	-	0,8	7	-
24.	6.1	0,6	-	2,2	-	-	0,4	8	-
25.	6.1	0,2	-	0,5	-	-	0,3	4	-
26.	6.2	24	-	0,6	-	-	2,4	5	-
27.	6.3	100	-	-	-	70	-	-	-
28.	6.4	260	1	-	-	60	-	-	3
29.	6.5	8	-	2,5	-	-	0,4	70	0,6
30.	6.6	20	0,1	2	-	80			2

ЗАДАЧА №7

Найти напряженность поля тяготения планеты в точках, расстояние которых от центра планеты равно $0R$; $0{,}5R$; $1{,}0R$; $1{,}5R$; $2{,}0R$; $2{,}5R$; $3{,}0R$; $3{,}5R$, $4R$, где R – радиус планеты. Постройте графическую зависимость напряжённости поля тяготения планеты от расстояния r, считая, что плотность вещества планеты одинакова по всему объему и равна ρ, вне планеты плотность вещества близка к нулю. На какой высоте над поверхностью планеты напряженность её поля тяготения уменьшится в N раз? Постройте графическую зависимость потенциала от расстояния r, в интервале $0<r<2R$ где $2R$ - два радиуса планеты.

Таблица 7

№ варианта	ρ, кг/м^3	R, м	N	планета
1.	5520	6371	2	Земля
2.	5520	6371	3	Земля
3.	5520	6371	4	Земля
4.	5520	6371	5	Земля
5.	5520	6371	6	Земля
6.	3930	3390	2	Марс
7.	3930	3390	3	Марс
8.	3930	3390	4	Марс
9.	3930	3390	5	Марс
10.	3930	3390	6	Марс
11.	5200	6052	2	Венера
12.	5200	6052	3	Венера
13.	5200	6052	4	Венера
14.	5200	6052	5	Венера
15.	5200	6052	6	Венера
16.	1330	69911	2	Юпитер
17.	1330	69911	3	Юпитер
18.	1330	69911	4	Юпитер
19.	1330	69911	5	Юпитер
20.	1330	69911	6	Юпитер
21.	5430	24622	2	Меркурий
22.	5430	24622	3	Меркурий
23.	5430	24622	4	Меркурий
24.	5430	24622	5	Меркурий
25.	5430	24622	6	Меркурий
26.	687	58232	2	Сатурн
27.	687	58232	3	Сатурн
28.	687	58232	4	Сатурн
29.	687	58232	5	Сатурн
30.	687	58232	6	Сатурн

4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА №1

Даны зависимости координат от времени $x(t) = 2t^2$; $y(t) = 2t^2+t;$ $z(t)=0$. Определите:

а) Определите зависимости радиус-вектора частицы, скорости, ускорения от времени и найдите их модули.

б) Найдите уравнение траектории, дайте оценку характера движения материальной точки вдоль траектории.

в) Постройте графические зависимости: $y(x)$, $\upsilon_x(t)$, $a(t)$.

Дано:

$x(t) = 2t^2$;

$y(t) = 2t^2+t$;

$z(t)=0$

Найти:

$\vec{r} = ?\ |\vec{r}| = ?$

$\vec{\upsilon} = ?\ |\vec{\upsilon}| = ?$

$\vec{a} = ?\ |\vec{a}| = ?$

Построить графики:

$y(x)$; $\upsilon_x(t)$; $a(t)$

Решение

$$\begin{cases} \vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} \ \text{радиус вектор частицы} \rightarrow \\ \vec{r} = 2t^2\vec{i} + \left(2t^2 + t\right)\vec{j} \rightarrow \\ |\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{\left(2t^2\right)^2 + \left(2t^2 + t\right)^2} = \\ = \sqrt{8t^4 + 4t^3 + t^2} \\ \vec{\upsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} \ \text{скорость частицы} \rightarrow \vec{\upsilon} = 4t\vec{i} + \left(4t + 1\right)\vec{j} \rightarrow \\ \upsilon_x = 4t \\ |\vec{\upsilon}| = \sqrt{(4t)^2 + (4t+1)^2} = \sqrt{32t^2 + 8t + 1} \\ \vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{dt}} \ \text{скорость частицы} \rightarrow \vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{j} \rightarrow \\ |\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} = 5{,}6\ м/с^2 \end{cases}$$

Частица движется равноускорено. Найдём уравнение траектории

$$\begin{cases} x = 2\mathrm{t}^2 \rightarrow t = \sqrt{\dfrac{x}{2}} \\ y = 2t^2 + t \rightarrow y = x + \sqrt{\dfrac{x}{2}} \end{cases}$$

Графические зависимости:

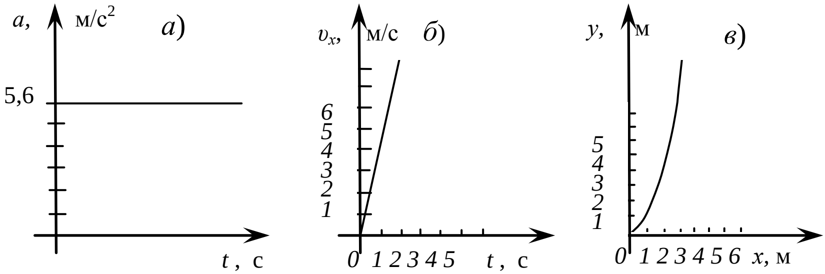

Рис. 1. *а* – зависимость ускорения от времени; *б* – зависимость проекции скорости на ось *x* от времени; *в* – зависимость координаты *y* от *x*.

Ответ: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + \left(2t^2 + t\right)\vec{j}; \left|\vec{r}\right| = \sqrt{8t^4 + 4t^3 + t^2}$; $y = x + \sqrt{\dfrac{x}{2}}$;

$\vec{\upsilon} = 4t\vec{i} + (4t+1)\vec{j}; \upsilon_x(t) = 4t; \left|\vec{\upsilon}\right| = \sqrt{32t^2 + 8t + 1}$; $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$;

$\left|\vec{a}\right| = 5{,}6\ м/с^2$; частица движется вдоль траектории равноускорено.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савельев И.В.* Курс физики. Т.1, М.: Лань, Т. 1., 2008
2. *Детлаф А.А.*, Курс физики. /*Детлаф А.А., Яворский Б.М.* М.: Высшая школа, 2009.
3. Варшавский С. П., Макасюк И. В. Рязанцева О.Л. Смирнова Н.Н. Общая физика. Механика. Сборник задач. СПб.: СПГГИ, 2000.
4. Федоров В.Л., Мустафаев А.С., Корольков А.П., Смирнова Н.Н. Механика. Учебное пособие / СПб.: СПГГИ (ТУ), 2007, 115 С.

СОДЕРЖАНИЕ