ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Контрольные работы следует выполнять в отдельной тетради. На обложке тетради необходимо указать: название института Университета; название кафедры; название и номер контрольной работы; название (номер) специальности; фамилию, имя**,** отчество и номер зачетной книжки студента.

2. Условия задач переписывать полностью необязательно, достаточно указать номера задач по данному сборнику. В условия задач следует сначала подставить конкретные числовые значения параметров m и n, после чего выполняется их решение.

3. Задачи в контрольной работе нужно располагать в порядке возрастания номеров.

ФОРМИРОВАНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ К ЗАДАЧАМ

Условия задач, входящих в контрольную работу, одинаковы для всех студентов, однако числовые данные задач зависят от личного шифра студента, выполняющего работу.

Числовые значения параметров m и n определяются по двум последним цифрам номера зачетной книжки (А – предпоследняя цифра, B – последняя цифра). Значение параметра m выбирается из таблицы 1, а значение параметра n – из таблицы 2. Числа m и n следует подставить в условия задач контрольной работы.

Таблица 1 (выбор параметра m)

А	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

Таблица 2 (выбор параметра n)

В	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	3	5	4	2	1	5	4	1	3	2

Например, если номер зачетной книжки 2018/ 5037, то А = 3, В = 7, и из таблиц находим, что $m = 4$, $n = 2$. Полученные $m = 4$ и $n = 2$ подставляются в условия всех задач контрольной работы студента.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. Пособие : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Оникс 21 век, 2005.
2. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс – М.: Айрис-пресс, 2009.
3. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс – М.: Айрис-пресс, 2009.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2003.
5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – СПб.: Лань, 2015.
6. Кряквин В.Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях. – СПб: Лань, 2016.
7. Смирнов А.О., Гусман Ю.А. Аналитическая геометрия. СПб, изд-во ГУАП, 2012

Контрольная работа

Задание 1.

Найти значение матричного многочлена $(mE - nA^2)\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & m\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & m+n\\ n & 5 & -3\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Задание 2. Проверить правильность равенства $\Delta(AB)=\Delta(BA)=\Delta(A)\Delta(B)$, где

$$\text{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & m\\ -1 & m & 3\\ m & -1 & -1\end{pmatrix};\ \text{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & n & 4\\ n-2 & 1-n & 1\end{pmatrix},$$

Задание 3.

Найти матрицу обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}m & n & m+n\\ n & m-n & m\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ и проверить выполнение равенства $A^{-1}\cdot A = E$.

Задание 4.

Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы, методом Гаусса:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=2m+2n-1\\ mx_1+nx_2+(m-n)x_3=m^2+n^2-m+n.\\ (m+n)x_1+mx_2+nx_3=m^2+2mn-n\end{cases}$$

Задание 5.

Даны комплексные числа $z_1=n+mi$ и $z_2=m-ni$. Вычислить $z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1\cdot z_2,\ z_2\cdot\overline{z_2},\ \dfrac{z_1}{z_2},\ (z_1+z_2)^2$.

Задание 6.

Даны числа $z_1=n\left(\cos\dfrac{m\pi}{2}+i\sin\dfrac{m\pi}{2}\right)$, $z_2=m\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Вычислить $z_1\cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ z_1^{10}$.

Задание 7.

Даны вершины треугольника $A(m+1;n+1)$, $B(m;-n)$, $C(-m;n)$, найти:

1) уравнение стороны AB;
2) уравнение медианы, проведенной из вершины C;
3) координату точки пересечения медиан;
4) уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC и ее длину;
5) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB;
6) площадь треугольника.

Задание 8.

Даны вершины треугольной пирамиды $S(m;n;m+n)$, $A(m+1;-n;-m)$, $B(-n;m+1;-n)$, $C(-n;-m;-m-n)$. Найти:

1) угол между ребрами $\overrightarrow{BS}$ и $\overrightarrow{BC}$;
2) площадь грани ABC;
3) объем пирамиды $SABC$;
4) длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC;
5) угол между ребром SC и гранью ABC;
6) уравнение высоты, опущенной из вершины S на грань ABC.

Задание 9.

Показать, что векторы $e_1 = (2; -3; m)$; $e_2 = (-3; n; 2)$; $e_3 = (m+n, 1, -n)$ пространства R^3 образуют базис и найти координаты вектора $x = (1; 2; 3)$.

Краткие теоретические сведения для выполнения контрольной работы № 2 и решение типовых задач

2.1. Прямая на плоскости

Уравнение вида

$$Ax+By+C=0$$

называется **общим уравнением прямой**.

Уравнение вида

$$y=kx+b$$

называется **уравнением прямой с угловым коэффициентов**, здесь $k=\operatorname{tg}\alpha$, α - угол, образованный прямой с положительным направлением оси *Ox*, *b* – ордината точки пересечения прямой с осью *Oy*.

Пусть даны две точки прямой $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. **Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки** имеет вид

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$ **в заданном направлении**, определяемом угловым коэффициентом k, имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Условие параллельности двух прямых

Две прямые $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ параллельны в том и только в том случае, когда составляют равные углы α_1, α_2 с осью *Ox*, следовательно $\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2$ или $k_1=k_2$.

Условие перпендикулярности двух прямых

Две прямые перпендикулярны в том и только в том случае, когда угол φ между ними равен $\frac{\pi}{2}$, т.е. $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Координаты точки $M(x;y)$, делящей отрезок AB в данном отношении $\lambda > 0$, где $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $\frac{AM}{MB} = \lambda$, можно вычислить по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В частности, если $\lambda = 1$, то $AM = MB$, т.е. M – середина отрезка AB, то формулы примут вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Если уравнение прямой дано в общей форме: $Ax + By + C = 0$, то расстояние точки $M_0(x_0;y_0)$ до этой прямой находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ можно вычислить по формуле

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right\|.$$

Пример

Даны вершины треугольника $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Найти:

1) уравнение стороны AB;
2) уравнение медианы, проведенной из вершины C;
3) координату точки пересечения медиан;
4) уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC и ее длину;
5) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB;
6) площадь треугольника.

Решение

1) Используем уравнение прямой, проходящей через две точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Подставив координаты точек $A(4;6)$, $B(-4;0)$, получим
$\frac{y-6}{0-6}=\frac{x-4}{-4-4} \Rightarrow \frac{y-6}{-3}=\frac{x-4}{-4} \Rightarrow 3x-4y+12=0$ - общее уравнение прямой *AB*, из которого находим уравнение прямой с угловым коэффициентом $y=\frac{3}{4}x+3$, $k_{AB}=\frac{3}{4}$.

2) Медиана, проведенная из вершины *C* делит противолежащую сторону *AB* треугольника пополам. Найдем координаты точки *E* середины стороны AB (рис.1):
$x_E=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4-4}{2}=0$, $y_E=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{6+0}{2}=3$, т.е. $E(0;3)$, $C(-1;-4)$. Подставим координаты точек в уравнение прямой, проходящей через две точки, получим
$\frac{y-3}{-4-3}=\frac{x-0}{-1-0} \Rightarrow \frac{y-3}{-7}=\frac{x}{-1} \Rightarrow 7x-y+3=0$ - общее уравнение прямой *CE*.

3) Точка *M* делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. Таким образом, ее координаты x, y можно найти по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В нашем случае

$$x=\frac{x_C+2x_E}{3},\ \ y=\frac{y_C+2y_E}{3},$$

откуда $x=\frac{-1+2\cdot 0}{3}=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{-4+2\cdot 3}{3}=\frac{2}{3}$, $M\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

4) Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $B(-4;0)$ перпендикулярно прямой AC из уравнения $y-y_B=k\left(x-x_B\right)$. Найдем угловой коэффициент прямой *AC*, используя уравнение прямой, проходящей через две точки $A(4;6)$ и $C(-1;-4)$:

$$\frac{y-6}{-4-6}=\frac{x-4}{-1-4} \Rightarrow \frac{y-6}{-2}=\frac{x-4}{-1} \Rightarrow 2x-y-2=0 \Rightarrow y=2x-2 \text{ -}$$

уравнение AC.

Угловой коэффициент прямой AC равен $k_{AC}=2$, тогда, используя условие перпендикулярности двух прямых $k_{BH}=-\frac{1}{k_{AC}}=-\frac{1}{2}$, получим

$$y=-\frac{1}{2}(x+4) \Rightarrow x+2y+4=0 \text{ - уравнение высоты.}$$

Длину высоты можно найти, как расстояние от точки $B(-4;0)$ до прямой AC по формуле $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. В нашем случае уравнение прямой AC: $2x-y-2=0$, следовательно,

$$d=\frac{|2\cdot(-4)-1\cdot 0-2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}.$$

5) Для нахождения уравнения прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB используем уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении $y-y_C=k(x-x_C)$ и условие параллельности двух прямых. Известно, что угловой коэффициент прямой AB равен $\frac{3}{4}$, следовательно,

$$k=k_{AB}=\frac{3}{4},\ C(-1;-4) \Rightarrow y+4=\frac{3}{4}(x+1) \Rightarrow 3x-4y-13=0 \text{ -}$$

- уравнение искомой прямой.

6) Площадь треугольника находится по формуле: $S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{matrix}\right\|$, в нашем случае

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \\ 6 & 0 & -4 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot 50 = 25.$$

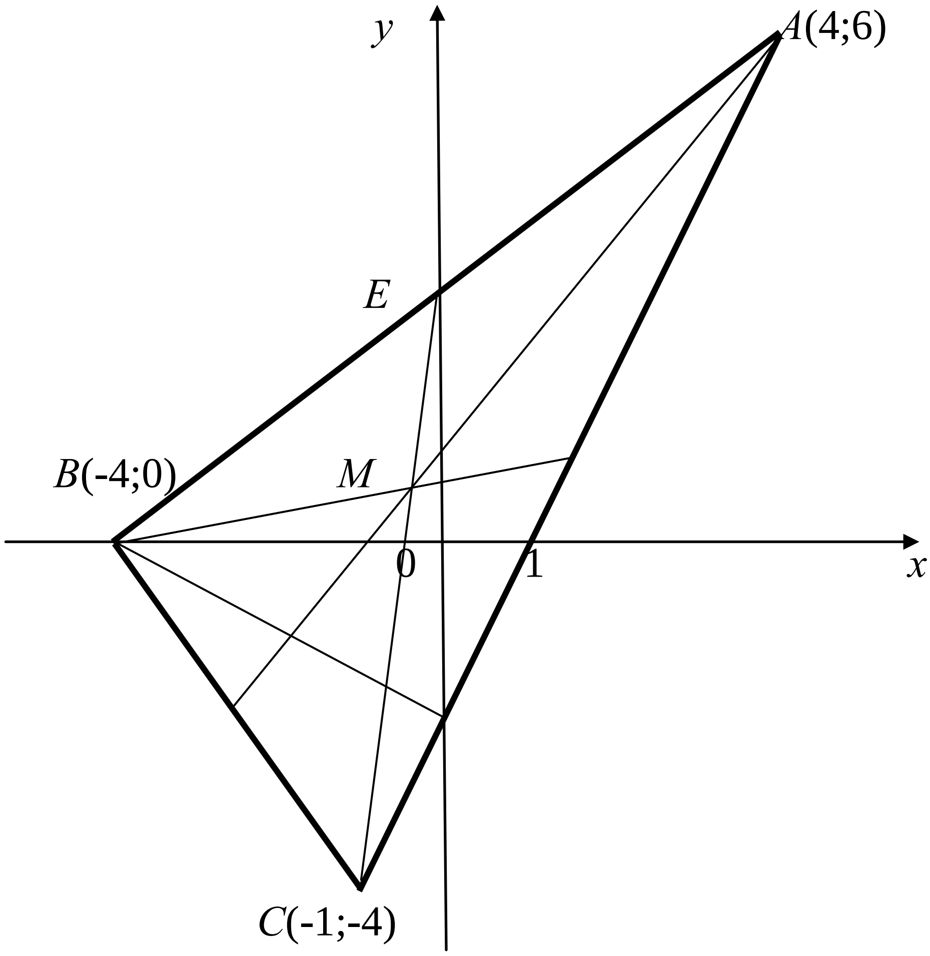

Рис. 1

2.2. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве

Векторные величины (векторы) – это такие величины, которые характеризуются не только своими числовыми значениями, но и направлением.

Для изображения векторных величин служат геометрические векторы. **Геометрический вектор** – это направленный отрезок.

Координатами вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называются проекции a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ на оси координат.

Запись $\vec{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\}$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $a_x,\ a_y,\ a_z$.

Модуль вектора (его длина) вычисляется по формуле

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ .$$

Чтобы найти координаты вектора, заданного координатами точек его начала и конца надо найти разности соответствующих координат его конца и начала, т.е. если задан вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, где $A(x_A,y_A,z_A),\ B(x_B,y_B,z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB}=\left\{x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right\}.$$

Тогда модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ находится по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}\ .$$

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними.

Обозначают: $(\vec{a},\vec{b})$ или $\vec{a}\cdot\vec{b}$. По определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi,\ \text{где}\ \ \varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Пусть векторы заданы аналитически:

$$\vec{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\},\ \vec{b}=\left\{b_x,b_y,b_z\right\}.$$

Выражение скалярного произведения через координаты перемноженных векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\,.$$

Косинус угла между двумя векторами можно найти по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\,.$$

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $\vec{a}\times\vec{b}$ или $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, определяемый условиями:

1) модуль этого вектора равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними, т.е.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi;$$

2) этот вектор перпендикулярен каждому из перемножаемых векторов, т.е. плоскости, определяемой этими векторами;
3) направлен по перпендикуляру к этой плоскости так, что векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ составляют правую тройку (т.е. если при наблюдении с конца вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки.)

Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах сомножителях – в этом состоит **геометрический смысл модуля векторного произведения**:

$$S_{\square} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Пусть даны два вектора $\vec{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\}$ и $\vec{b} = \left\{b_x, b_y, b_z\right\}$. Выражение векторного произведения через координаты перемножаемых векторов:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, т.е. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими прямоугольными координатами $\vec{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, $\vec{b} = \left\{b_x, b_y, b_z\right\}$, $\vec{c} = \left\{c_x, c_y, c_z\right\}$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения: объем параллелепипеда, построенного на 3-х некомпланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения

$$V = \left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|.$$

Тогда объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, находится по формуле

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|.$$

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Если $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ три данные точки, не лежащие на одной прямой, а $M(x;y;z)$ произвольная точка плоскости, то уравнение плоскости, проходящей через три точки, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки пространства $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$ имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-x_1}.$$

Угол между прямой и плоскостью находится по формуле

$$\sin\alpha = \frac{Ak+Bl+Cm}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{k^2+l^2+m^2}},$$

где коэффициенты выбирают из канонических уравнений прямой

$$\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}$$

и общего уравнения плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где $\vec{n} = \{A;B;C\}$ - вектор нормали к плоскости.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{k}=\frac{B}{l}=\frac{C}{m}.$$

Пример

Даны вершины треугольной пирамиды $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$. Найти:

1) угол между ребрами $\overrightarrow{A_2A_4}$ и $\overrightarrow{A_2A_3}$;

2) площадь грани $A_1A_2A_3$;

3) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

4) длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

5) угол между ребром A_4A_3 и гранью $A_1A_2A_3$;

6) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение

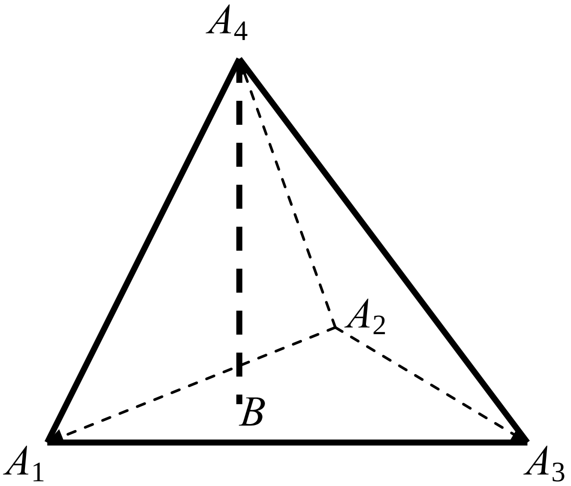

Рис. 2

1) Угол между ребрами $\overrightarrow{A_2A_4}$ и $\overrightarrow{A_2A_3}$ находим с помощью скалярного произведения векторов по формуле

$$\cos\varphi=\cos\left(\overrightarrow{A_2A_4}\,\hat{}\,\overrightarrow{A_2A_3}\right)=\frac{\overrightarrow{A_2A_4}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}}{\left|\overrightarrow{A_2A_4}\right|\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right|},$$

найдем координаты векторов

$\overrightarrow{A_2A_4}=\{-6;4;-4\}$, $\overrightarrow{A_2A_3}=\{-3;-2;0\}$,

тогда косинус угла между векторами

$$\cos\varphi=\frac{18-8+0}{\sqrt{36+16+16}\sqrt{9+4}}=\frac{5}{\sqrt{221}}.$$

2) Площадь грани $A_1A_2A_3$ находим с помощью векторного произведения векторов. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{A_2A_1}=\{-1;1;5\}$, тогда площадь треугольника находим по формуле

$$S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_2A_3}\times\overrightarrow{A_2A_1}\right|.$$

Найдем векторное произведение векторов

$$\overrightarrow{A_2A_3} \times \overrightarrow{A_2A_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 15\vec{j} - 5\vec{k},$$

модуль векторного произведения равен

$$\left|\overrightarrow{A_2A_3} \times \overrightarrow{A_2A_1}\right| = \sqrt{100+225+25} = \sqrt{350} = 5\sqrt{14},$$

откуда находим площадь треугольника

$$S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{5\sqrt{14}}{2}.$$

3) Объем пирамиды находим с помощью смешанного произведения векторов по формуле

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_2A_4}\,\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_2A_1}\right)\right|,$$

так как выше найдены координаты векторов

$$\overrightarrow{A_2A_4} = \{-6;4;-4\},\ \overrightarrow{A_2A_3} = \{-3;-2;0\},\ \overrightarrow{A_2A_1} = \{-1;1;5\},$$

подставим координаты векторов в формулу, получим

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_2A_4}\,\overrightarrow{A_2A_3}\,\overrightarrow{A_2A_1}\right)\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -6 & 4 & -4 \\ -3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{matrix}\right\| = \frac{70}{3}.$$

4) Для нахождения длины высоты h, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$ применим формулу

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\triangle A_1A_2A_3} \cdot h,$$

откуда находим

$$h = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}} = \frac{3\cdot 70\cdot 2}{3\cdot 5\cdot\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}.$$

5) Уравнение прямой A_4A_3 находим по формуле уравнения прямой, проходящей через две точки $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$:

$$\frac{x+4}{-1+4} = \frac{y-6}{0-6} = \frac{z+3}{1+3} \quad\Rightarrow\quad \frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{-6} = \frac{z+3}{4}.$$

Для нахождения уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ используем уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим координаты точек в уравнение, получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 2-1 & 2-3 & 1-6 \\ -1-1 & 0-3 & 1-6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-10(x-1)+15(y-3)-5(z-6)=0,$$

$$-10x+10+15y-45-5z+30=0,$$

$$-10x+15y-5z-5=0$$

или

$$2x-3y+z+1=0.$$

Угол между прямой и плоскостью находится по формуле

$$\sin\alpha = \frac{Ak+Bl+Cm}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{k^2+l^2+m^2}},$$

в нашем случае

$$\sin\alpha = \frac{2\cdot3-3\cdot(-6)+1\cdot4}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{9+36+16}} = \frac{28}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{61}}.$$

6) Общее уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$2x-3y+z+1=0,$$

нормальный вектор плоскости $\vec{n}=\{2;-3;1\}$.

Уравнение высоты A_4B: $\dfrac{x+4}{k}=\dfrac{y-6}{l}=\dfrac{z+3}{m}$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\dfrac{A}{k}=\dfrac{B}{l}=\dfrac{C}{m}$.

В нашем случае $\dfrac{2}{k}=\dfrac{-3}{l}=\dfrac{1}{m} \;\Rightarrow\; k=2,\; l=-3,\; m=1$, тогда уравнение высоты имеет вид

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+3}{1}.$$

Черняк Татьяна Анатольевна
Состина Елена Викторовна
Пушкина Вера Павловна

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ
ПО КУРСУ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ