

Тема: «Конечно-разностный метод решения краевой задачи»

Цель - сформировать у магистрантов представление о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать краевую задачу для дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ на отрезке $[a, b]$ при заданных краевых условиях $y(x_0) = y_0$ и $y(x_k) = y_1$. конечно-разностным методом, развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[x_0, x_k]$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad (21)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_k) = y_1. \quad (22)$$

Введем разностную сетку на отрезке $[x_0, x_k]$ $i = 0, 1, \dots, n$, $h = |x_k - x_0|/n$.

Решение задачи (21), (22) будем искать в виде сеточной функции $y^{(h)} = \{y_i, i = 0, 1, \dots, n\}$, предлагая, что решение существует и единственно. Введем разностную аппроксимацию производных следующим образом:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_i &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \\ \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_i &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя аппроксимации производных из (23) в (21), (22) получим систему уравнений для нахождения y_i :

$$\begin{cases} y_0 = y_{x_0} \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = f(x_i), \\ y_n = y_{x_k} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (24)$$

Приводя подобные и учитывая, что при задании граничных условий первого рода два неизвестных y_0, y_n уже фактически определены, получим систему линейных алгебраических уравнений с трех диагональной матрицей коэффициентов

$$\begin{cases}
\left(-2 + h^2 q(x_1)\right)y_1 + \left(1 + \frac{p(x_1)h}{2}\right)y_2 = h^2 f(x_1) - \left(1 - \frac{p_1(x_1)h}{2}\right)y_{x_0} \\
\left(1 - \frac{p(x_k)h}{2}\right)y_{i-1} + \left(-2 + h^2 q(x_k)\right)y_i + \\
+ \left(1 + \frac{p(x_k)h}{2}\right)y_{i+1} = h^2 f(x_k) & , i = 2, \dots, n-2 \\
\left(1 - \frac{p(x_{n-1})h}{2}\right)y_{n-1} + \left(-2 + h^2 q(x_{n-1})\right)y_{n-1} = \\
= h^2 f(x_{n-1}) - \left(1 + \frac{p(x_{n-1})h}{2}\right)y_{x_k}
\end{cases} \quad (25)$$

Для системы (25) при достаточно малых шагах сетки h и $q(x_k) < 0$ выполнены условия преобладания диагональных элементов

$$\left|-2 + h^2 q(x_k)\right| > \left|1 - \frac{p(x_k)h}{2}\right| + \left|1 + \frac{p(x_k)h}{2}\right|,$$

что гарантирует устойчивость счета и корректность применения метода прогонки для решения этой системы.

В случае использования граничных условий второго и третьего рода аппроксимация производных проводится с помощью односторонних разностей первого и второго порядков.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h); \quad (26)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2); \quad (27)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_n = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} + O(h^2)$$

В случае использования формул (26) линейная алгебраическая система аппроксимирует дифференциальную задачу в целом только с первым порядком (из-за аппроксимации в граничных точках), однако сохраняется трех диагональная структура матрицы коэффициентов. В случае использования формул (27) второй порядок аппроксимации сохраняется везде, но матрица линейной системы не трех диагональная.

Алгоритм метода прогонки состоит из нескольких шагов. Предварительно определяют коэффициенты уравнений вида (разностная схема)

$$A_i y_{i-1} + C_i y_i + B_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (28)$$

где $A_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}$, $B_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}$, $C_i = q_i - \frac{2}{h^2}$, $F_i = f_i$.

Затем находят прогоночные коэффициенты по формулам (прямая прогонка):

$$v_i = \frac{-B_i}{C_i + A_i v_{i-1}}, \quad \mu_i = \frac{F_i - A_i \mu_{i-1}}{C_i + A_i v_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (29)$$

$$v_0 = \frac{\frac{\beta_0}{2h} \left(3 - \frac{C_1}{B_1} \right)}{\alpha_0 + \frac{\beta_0}{h} \left(2 + \frac{A_1}{2B_1} \right)}, \quad \mu_0 = \frac{\gamma_0 + \frac{\beta_0 F_1}{2h B_1}}{\alpha_0 + \frac{\beta_0}{h} \left(2 + \frac{A_1}{2B_1} \right)},$$

Значения прогоночных коэффициентов на правой границе определяются из краевых условий по формулам

$$v_n = \frac{\frac{\beta_1}{h} \left(\frac{C_{n-1}}{2A_{n-1}} + 2 \right)}{\alpha_1 + \frac{\beta_1}{2h} \left(3 - \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} \right)}, \quad \mu_n = \frac{\gamma_1 - \frac{\beta_1 F_{n-1}}{2h A_{n-1}}}{\alpha_1 + \frac{\beta_1}{2h} \left(3 - \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} \right)} \quad (30)$$

После чего сеточная функция y_n на правой границе определяется из выражения

$$y_n = \frac{\mu_n + v_n \mu_{n-1}}{1 - v_n v_{n-1}} \quad (31)$$

Наконец, обратной прогонкой находят все значения сеточной функции

$$y_i = v_i y_{i+1} + \mu_i, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0. \quad (32)$$

Таким образом, метод прогонки позволяет найти точное решение системы (25), значит, погрешность решения краевой задачи (21)–(22) определяется погрешностью разностной аппроксимации исходной задачи системой (25) и равна $O(h)$. Так как $h = (x_k - x_0)/n$, то, выбирая n достаточно большим, можно добиться уменьшения погрешности ценой увеличения объема вычислений при решении системы (25).

При практической оценке погрешности найденного решения обычно используют двойной пересчет и правило Рунге. Если $y(x_i)$ - точное значение решения в узле x_i , а y_i и \bar{y}_i - приближенные значения в том же узле, полученные соответственно с шагом h и $h/2$, то оценка погрешности решения y_i определяется формулой

$$|\bar{y}_i - y(x_i)| \cong |y_i - \bar{y}_i|/3.$$

Алгоритм метода прогонки реализован при решении примеров 6 и 7..

Пример 6. Методом прогонки на отрезке $[0,8]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу с граничными условиями первого рода для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + \operatorname{tg}(x) \cdot y'(x) + \cos^2(x) \cdot y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(8) = 10.$$

Построить график решения. Сравнить полученное решение с точным решением

$$y(x) = \cos(\sin(x)) + C \cdot \sin(\sin(x)), \quad C = \frac{(10 - \cos(\sin(8)))}{\sin(\sin(8))} = 11,309.$$

Результаты решения представлены на рис. 19-21.

```

x0 := 0   xk := 8   alpha0 := 1   beta0 := 0   gamma0 := 1   alpha1 := 1   beta1 := 0   gamma1 := 10
p(x) := tan(x)   q(x) := cos(x)^2   f(x) := 0   n := 80   eps := 0.001
Progonka(n) :=
  x0 ← x0
  h ← (xk - x0) ÷ n
  for i ∈ 0..n-1
    xi+1 ← xi + h
    Ai ← 1 + h^2 - p(xi) ÷ (2 · h)
    Bi ← 1 + h^2 + p(xi) ÷ (2 · h)
    Ci ← q(xi) - 2 ÷ h^2
    Fi ← f(xi)
  r1 ← alpha0 + beta0 ÷ h · [2 + A1 ÷ (2 · B1)]
  nu0 ← [beta0 ÷ (2 · h) · (3 - C1 + B1)] ÷ r1
  mu0 ← [gamma0 + beta0 ÷ (2 · h) · F1 + B1] ÷ r1
  for i ∈ 1..n-1
    ui ← -Bi ÷ (Ci + Ai · ui-1)
    mi ← (Fi - Ai · mi-1) ÷ (Ci + Ai · ui-1)
  r2 ← alpha1 + beta1 ÷ (2 · h) · (3 - Bn-1 + An-1)
  nu ← [beta1 ÷ h · [Cn-1 ÷ (2 · An-1) + 2]] ÷ r2
  mu ← [gamma1 - beta1 ÷ (2 · h) · Fn-1 + An-1] ÷ r2
  yn ← (mu + nu · mu-1) ÷ (1 - nu · nu-1)
  for i ∈ n-1, n-2..0
    yi ← ui · yi+1 + mi
  R<0> ← x
  R<1> ← y
  R

```

Рис. 19. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 6 (задание исходных данных с функцией, возвращающей решение исходного уравнения методом прогонки)

```

Yrez := eps ← eps
for m ∈ 0..100
  y1 ← Progonka(n)
  y2 ← Progonka(2n)
  for k ∈ 0..n
    rk ← max( $\frac{|y1_{k,1} - y2_{2k,1}|}{3}$ )
  break if max(r) < eps
  n ← 2 · n otherwise
  (y2)
  (n)

```

$x := 0, 0.5..8$
 $CC := \frac{10 - \cos(\sin(8))}{\sin(\sin(8))} = 11.309$
 $Y_{\text{точное}}(x) := \cos(\sin(x)) + CC \cdot \sin(\sin(x))$
 $Y_{\text{rez1}} = 640$
 $k := 0, \frac{Y_{\text{rez1}}}{8} .. (2Y_{\text{rez}})_1$
 $xx(k) := (Y_{\text{rez0}})_{k,0} \quad y(k) := (Y_{\text{rez0}})_{k,1}$

x =	Y _{точное} (x) =	xx(k) =	y(k) =
0	1	0	1
0.5	6.104	0.5	5.52
1	9.099	1	8.922
1.5	10.043	1.5	10.053
2	9.538	2	9.442
2.5	7.198	2.5	6.742
3	2.581	3	1.683
3.5	-2.947	3.5	-4.112
4	-7.038	4	-8.217
4.5	-8.818	4.5	-9.922
5	-8.683	5	-9.796
5.5	-6.572	5.5	-7.76
6	-2.158	6	-3.301
6.5	3.391	6.5	2.554
7	7.699	7	7.308
7.5	9.711	7.5	9.649
8	10	8	10

Рис. 20. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 6 методом прогонки(функция, уточняющая решение, числовое решение, сравнение с точным решением)

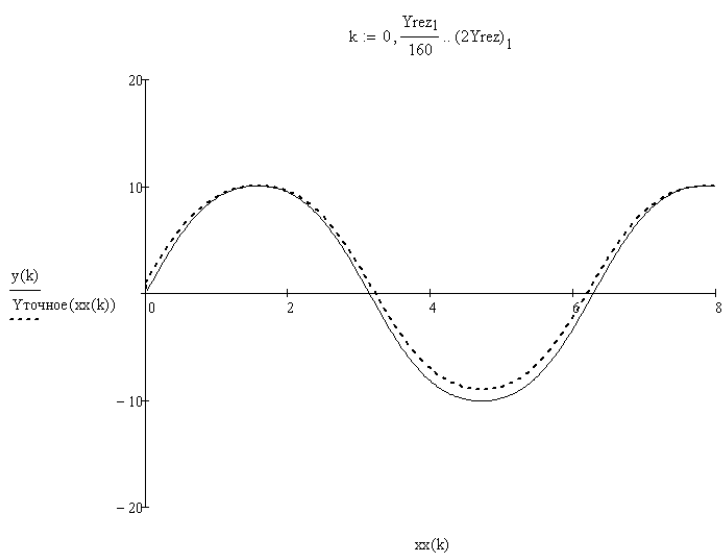


Рис. 21. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 6 методом прогонки (график решения, сравнение с точным решением)

Пример 7. Методом прогонки на отрезке $[0,10]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу с граничными условиями третьего рода для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + \frac{1}{x+1} \cdot y'(x) + x^2 \cdot y(x) = x^2 \cdot \ln(x+1),$$

$$3y(0) + \frac{1}{2}y'(0) = 0.5, \quad -0.4y(10) - 2y'(10) = -1.141.$$

Построить график решения. Сравнить полученное решение с точным решением $y(x) = \ln(x+1)$.

Результаты решения представлены на рис. 22.

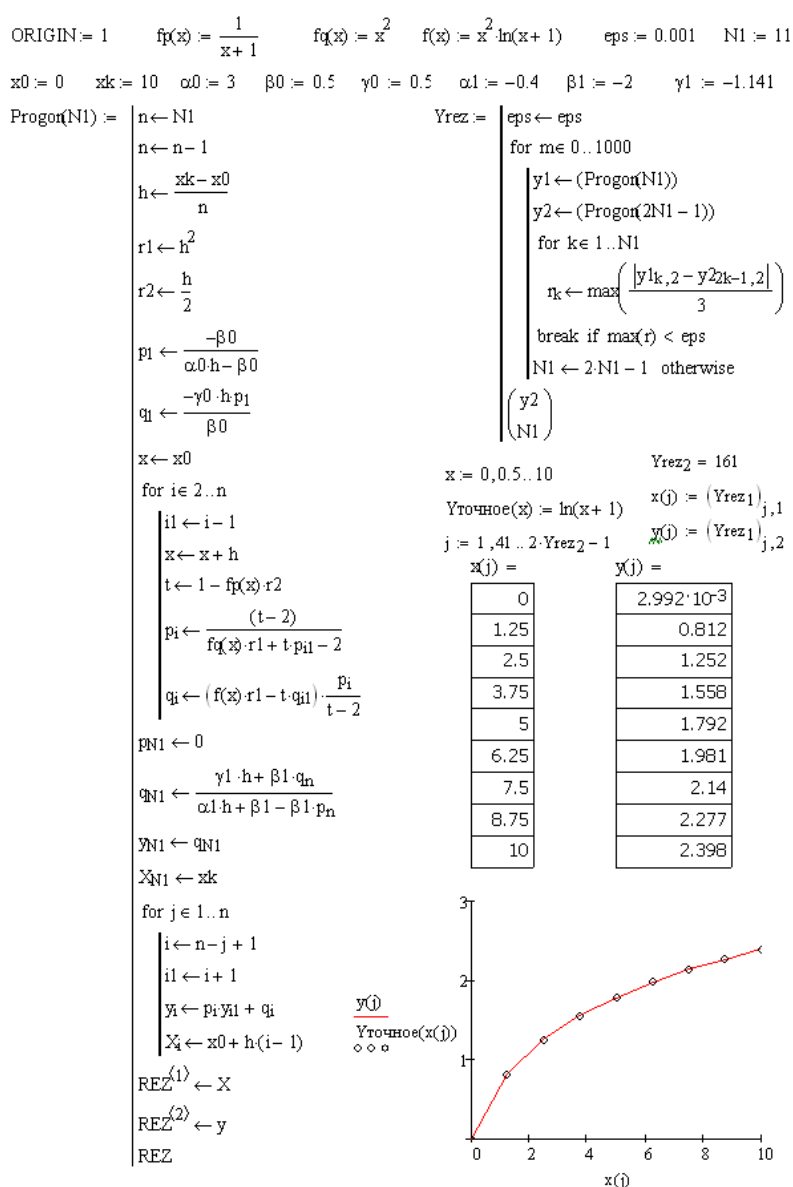


Рис. 22. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 7 методом прогонки

Анализируя полученные решения, видим в примере 7 полное совпадение результатов, полученных методом прогонки, с точным решением, однако в примере 6

результаты, полученные методом прогонки, не на всем отрезке интегрирования совпадают с точным решением. Это происходит из-за того, что точным решением в примере 7 является функция, довольно медленно меняющаяся на всем промежутке интегрирования. В примере 6 на участках медленного изменения функции решение методом прогонки дает полное совпадение с точным решением, на участках быстрого изменения функции решение методом прогонки отклоняется от точного решения. Максимальное отклонение составило 22 %. Уменьшение шага даже в 1000 раз не позволило уменьшить это отклонение. Значит к численному решению, полученному методом прогонки, в местах быстрого изменения решения следует подходить с осторожностью.

Задание 7. Методом прогонки на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка. Построить график решения.

Варианты заданий представлены ниже.

Вариант 1.

$$y''(x) - x \cdot y'(x) + (2 \cdot x + 1) \cdot y(x) = 0.8 \cdot x^2,$$

$$y(x_0) - 0.5y'(x_0) = 1, \quad y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 3.$$

Вариант 2.

$$y''(x) - \frac{1}{4} \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{2}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin(x),$$

$$1.5y(x_0) - y'(x_0) = 0.6, \quad 2y(x_k) = 0.3, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 3.

$$y''(x) - e^{-x^2} \cdot y'(x) + \cos(x) \cdot y(x) = x^2,$$

$$1.5y(x_0) + 1.94y'(x_0) = 2.31, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 0, \quad x_0 = -1, x_k = 4.$$

Вариант 4.

$$y''(x) - e^{\sqrt{x}} \cdot y'(x) + \frac{x}{3} \cdot y(x) = x^3,$$

$$y(x_0) - 3.6y'(x_0) = 1, \quad 0.43y(x_k) - 1.2y'(x_k) = 4, \quad x_0 = 0.2, x_k = 6.2.$$

Вариант 5.

$$y''(x) - x^2 \cdot y'(x) - \frac{0.5}{x} \cdot y(x) = 2,$$

$$2y(x_0) + 3y'(x_0) = 4, \quad -0.2y'(x_k) = 3.9, \quad x_0 = 2, x_k = 5.$$

Вариант 6.

$$y''(x) + x^3 \cdot y'(x) + \ln(x) \cdot y(x) = 2 \cdot x + \sin(x),$$

$$y(x_0) = 2, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 6.$$

Вариант 7.

$$y''(x) + e^x \cdot y'(x) + \frac{x}{2} \cdot y(x) = x^2,$$

$$y(x_0) - 1.2y'(x_0) = 0, \quad 2y(x_k) - 2.5y'(x_k) = -4, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 8.

$$y''(x) + 2 \cdot \sin(x) \cdot y'(x) - 1.5 \cdot x \cdot y(x) = \frac{2}{x},$$

$$y'(x_0) = 1, \quad y(x_k) + 2y'(x_k) = 1, \quad x_0 = 1, x_k = 5.$$

Вариант 9.

$$y''(x) + x \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{2 \cdot \ln(x)}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin^2(x),$$

$$2y(x_0) - 2y'(x_0) = 1, \quad 3y(x_k) = 1, \quad x_0 = 2, x_k = 6.$$

Вариант 10.

$$y''(x) + \cos^2(x) \cdot y'(x) + \frac{3}{x+4} \cdot y(x) = -x,$$

$$-y(x_0) + 2y'(x_0) = 3, \quad -2y(x_k) + y'(x_k) = -4, \quad x_0 = -2, x_k = 2.$$

Вариант 11.

$$y''(x) - x \cdot y'(x) + 2 \cdot y(x) = x + 1,$$

$$y(x_0) - 0.5y'(x_0) = 2, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = 0, x_k = 7.$$

Вариант 12.

$$y''(x) + 2 \cdot x^2 \cdot y'(x) + \frac{1}{x} \cdot y(x) = x,$$

$$2y(x_0) - y'(x_0) = 1, \quad y(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, x_k = 8.$$

Вариант 13.

$$y''(x) + (x^3 + 2 \cdot x) \cdot y'(x) - 2 \cdot x \cdot y(x) = e^x, \quad x_0 = -1, x_k = 4,$$

$$-y(x_0) - 3.5y'(x_0) = 4.6, \quad 1.6y(x_k) + 12.1y'(x_k) = 2.7.$$

Вариант 14.

$$y''(x) + e^{-x} \cdot y'(x) + 3 \cdot x \cdot y(x) = \sin^3(x),$$

$$1.1y(x_0) + 2.5y'(x_0) = -1, \quad 2.6y(x_k) + y'(x_k) = 7.4, \quad x_0 = 1, x_k = 8.$$

Вариант 15.

$$y''(x) - \frac{1}{2} \cdot y'(x) + \frac{3}{x+6} \cdot y(x) = 2 \cdot x^2,$$

$$y(x_0) + 2y'(x_0) = 0.6, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = -3, x_k = 3.$$

Вариант 16.

$$y''(x) + 2 \cdot x^2 \cdot y'(x) + e^{-2x} \cdot y(x) = x,$$

$$2y(x_0) - y'(x_0) = 11, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 17.

$$y''(x) + \frac{2}{x} \cdot y'(x) + e^{-3x} \cdot y(x) = x + 1,$$

$$y'(x_0) = 2, \quad y(x_k) - y'(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, x_k = 3.$$

Вариант 18.

$$y''(x) + \sin(x) \cdot y'(x) + \cos^2(x) \cdot y(x) = 2 \cdot x^2,$$

$$1.2y(x_0) + 3.1y'(x_0) = 3.9, \quad -y(x_k) + 3.3y'(x_k) = 4.2, \quad x_0 = -3, x_k = 1.$$

Вариант 19.

$$y''(x) + \frac{1}{x} \cdot y'(x) + 2 \cdot \ln(x) \cdot y(x) = x,$$

$$y(x_0) = 0.5, \quad 2y(x_k) + 3y'(x_k) = 1.2, \quad x_0 = 1, x_k = 5.$$

Вариант 20.

$$y''(x) + e^x \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{4}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin(x),$$

$$2.1y(x_0) - 1.4y'(x_0) = 0.9, \quad 1.7y(x_k) + 0.6y'(x_k) = 0.1, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$