Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра строительной механики

И.А. Куприянов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Сборник заданий и методические указания к контрольным работам

для студентов направления 08.03.05
Строительство уникальных зданий и сооружений

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2022

Содержание контрольных работ

КР № 1. Осевое растяжение и сжатие стержня.

Задача № 1.1. Определение усилий, напряжений и деформаций в стержне при растяжении и сжатии.

Задача № 1.2. Подбор сечения статически определимого стержня при растяжении-сжатии.

Задача № 1.3. Расчет статически неопределимого стержня при растяжении и сжатии.

Задача № 1.4. Расчет статически неопределимой стержневой системы при растяжении и сжатии.

КР № 2. Плоское напряженное состояние. Кручение.

Задача № 2.1. Исследование плоского напряженного состояния.

Задача № 2.2. Исследование плоского напряженного состояния. Проверки прочности.

Задача № 2.3. Подбор круглого сечения стержня (вала) при кручении.

КР № 3. Плоский изгиб прямолинейного стержня.

Задача № 3.1. Построение эпюр усилий в балке при равномерно распределенной и сосредоточенных нагрузках.

Задача № 3.2. Построение эпюр усилий в балке при линейно распределенной и сосредоточенных нагрузках.

Задача № 3.3. Подбор сечения стальной двутавровой балки при изгибе из условия прочности.

Порядок получения индивидуального задания

Исходные данные для выполнения каждой работы студент выписывает из приведённых в каждом задании таблиц и схем в соответствии со своим шифром. Шифром являются три последних цифры номера зачётной книжки или студенческого билета. Например, номер зачётной книжки 18549: первая цифра шифра – 5, вторая – 4, третья – 9.

Общие требования к оформлению контрольных работ

Контрольная работа выполняется на стандартных листах писчей бумаги (формат А-4). Заполняется только одна сторона листа (см. приложение 2).

На титульном листе указываются номер и название работы, фамилия, имя и отчество студента, номер группы и специальность, индивидуальный шифр. Работа должна быть сброшюрована.

Расчётная схема изображается в масштабе длин. На ней указываются все необходимые данные в численном виде (размеры, нагрузки и др.), которые выписываются из таблиц. Все расчёты приводятся в краткой форме.

Небрежно выполненные и выполненные не по шифру работы к проверке не принимаются.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Осевое растяжение и сжатие стержня.

Задача № 1.1. Определение усилий, напряжений и деформаций в стержне при растяжении и сжатии.

Задание: Определить продольные силы, нормальные напряжения и деформации в стержне. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений, относительных ε и абсолютных Δl деформаций. Определить удлинение (укорочение) свободного конца стержня.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 1.1 и схемам, представленным на рис. 1.1. Принять значение модуля продольной упругости равным $E = 1 \cdot 10^4$ МПа.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе длин расчётную схему стержня с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить на каждом участке стержня величину продольных сил и построить эпюру *N.*

3. Определить нормальные напряжения на каждом участке. Построить эпюру нормальных напряжений σ.

4. Определить относительную деформацию на каждом участке. Построить эпюру относительных деформаций ε.

5. Определить абсолютное удлинение (укорочение) на каждом участке**.** Построить эпюру абсолютных деформаций Δl. Определить общее абсолютное удлинение (укорочение) стержня.

Таблица 1.1.

Первая цифра шифра	A_1 см^2	F_1 кН	l_1 см	Вторая Цифра шифра	A_2 см^2	F_2 кН	l_2 см	Третья цифра шифра (№схемы)	A_3 см^2	F_3 кН	F_4 кН	l_3 см	a см	b см
0	4	60	10	0	9	150	7	0	14	160	0	14	3	4
1	5	50	12	1	10	140	6	1	15	0	80	12	4	3
2	6	70	14	2	11	130	8	2	16	170	0	15	2	5

3	7	80	16	3	12	120	9	3	17	0	90	16	2	2
4	8	90	8	4	13	110	10	4	18	150	0	8	3	4
5	4	110	6	5	9	90	11	5	20	0	100	10	4	3
6	5	120	9	6	10	100	12	6	18	140	0	8	5	2
7	6	130	11	7	11	80	14	7	16	0	110	6	2	5
8	7	140	12	8	12	70	15	8	14	135	0	10	3	4
9	8	150	10	9	13	60	16	9	19	0	70	12	4	3

Пример решения задачи № 1.1: Определить продольные силы, напряжения и деформации в стержне. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений, относительных и абсолютных деформаций.

Размеры участков и нагрузки показаны на рисунке. Площади поперечных сечений равны: $A_1 = 4$ см^2, $A_2 = 2$ см^2, $A_3 = 5$ см^2.

• Определяем опорную реакцию в опоре А:

$\sum X = 0;\ -10 + 35 - 40 + 20 - R_a = 0;\ R_a = 5$ кН.

• Определяем величину продольных сил на каждом участке по формуле:

$N_i = \sum F_i^{\text{отс}}:\ N_1 = 0;\ N_1 = 10$ кН; $N_3 = 10 - 35 = -25$ кН.

$N_4 = 10 - 35 + 40 = 15$ кН; $N_5 = -5 + 20 = 15$ кН; $N_6 = -5$ кН.

Строим эпюру N в кН**.**

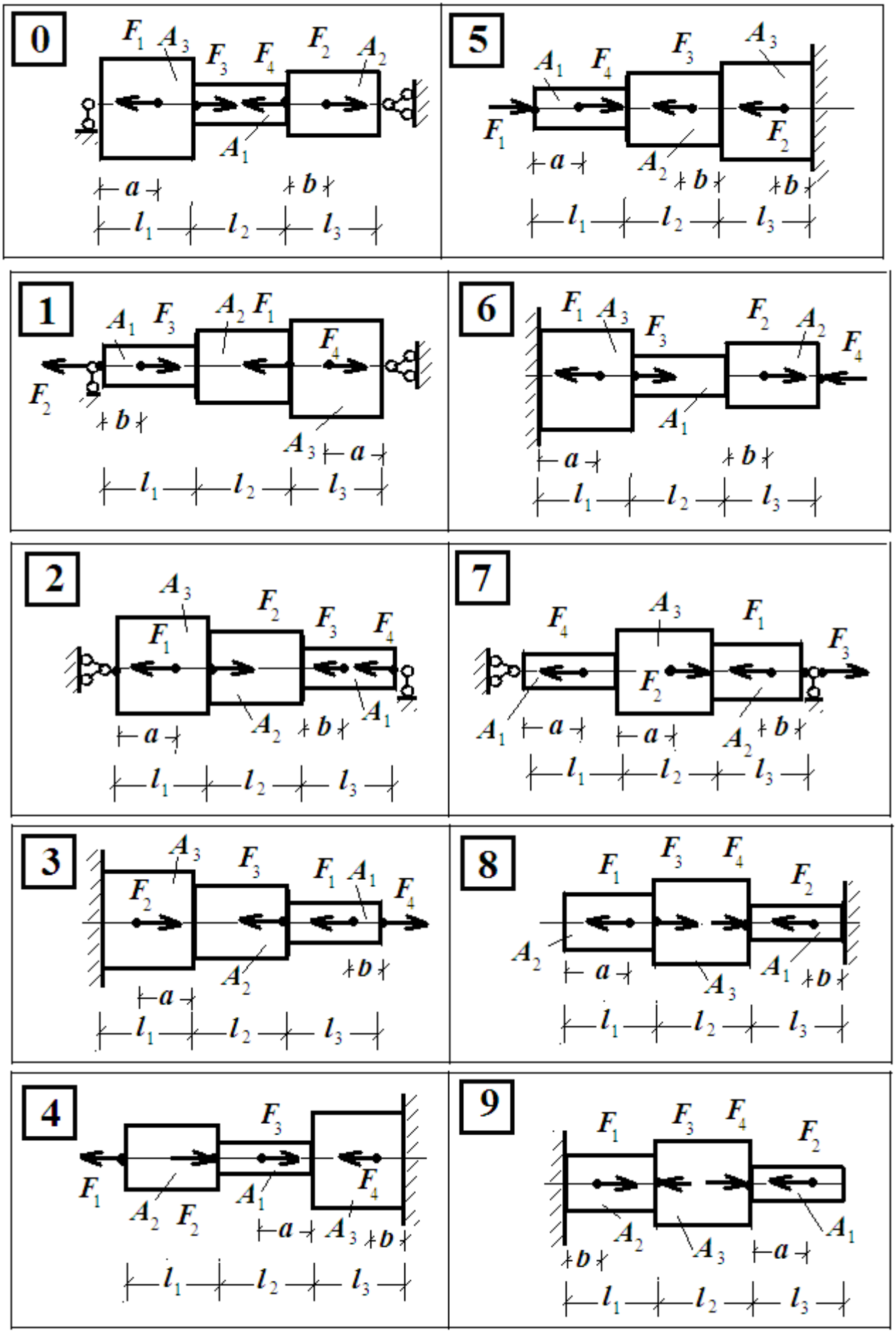

0
F_1 A_3 F_3 F_4 F_2 A_2
A_1
a b
l_1 l_2 l_3
5
A_1 F_4 F_3 A_3
F_1 F_2
a A_2 b b
l_1 l_2 l_3
1
A_1 F_3 A_2 F_1 F_4
F_2
b A_3 a
l_1 l_2 l_3
6
F_1 A_3 F_3 F_2 A_2 F_4
A_1
a b
l_1 l_2 l_3
2
A_3 F_2 F_3 F_4
F_1
a A_2 b A_1
l_1 l_2 l_3
7
F_4 A_3 F_1 F_3
F_2
A_1 a a A_2 b
l_1 l_2 l_3
3
A_3 F_3 F_1 A_1 F_4
F_2
A_2 b
a
l_1 l_2 l_3
8
F_1 F_3 F_4 F_2
A_2
a A_3 A_1 b
l_1 l_2 l_3
4
F_3
F_1 A_1 F_4
A_2 F_2
a A_3 b
l_1 l_2 l_3
9
F_1 F_3 F_4 F_2
A_2 A_1
b A_3 a
l_1 l_2 l_3

Рис. 1.1.

• Определяем нормальные напряжения на каждом участке по формуле $\sigma = \frac{N_i}{A_i}$ и строим эпюру σ: $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = \frac{10}{4} = 2,5$ кН/см^2;

$\sigma_3 = \frac{-25}{2} = -12,5$ кН/см^2; $\sigma_4 = \frac{15}{2} = 7,5$ кН/см^2; $\sigma_5 = \frac{15}{5} = 3$ кН/см^2; $\sigma_6 = \frac{-5}{5} = -1$ кН/см^2;

• Определяем относительное удлинение (укорочение) на каждом участке по формуле: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \cdot 100\%$; $E = 1 \cdot 10^4$ МПа =1000 кН / см^2:

$\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0,25\%$; $\varepsilon_3 = -1,25\%$; $\varepsilon_4 = 0,75\%$; $\varepsilon_5 = 0,3\%$; $\varepsilon_6 = -0,1\%$

Знак плюс говорит о том, что стержень растянут, знак минус – о том, что стержень сжат.

• Определяем абсолютное удлинение (укорочение) на каждом участке по формуле $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$:

на участке №1: $\Delta l_1 = 0$;

на участке №2: $\Delta l_2 = \frac{10 \cdot 5}{1000 \cdot 4} = 12,5 \cdot 10^{-3}$ см;

на участке №3: $\Delta l_3 = \frac{-25 \cdot 6}{1000 \cdot 2} = -75 \cdot 10^{-3}$ см;

на участке №4: $\Delta l_4 = \frac{15 \cdot 3}{1000 \cdot 2} = 22,5 \cdot 10^{-3}$ см;

на участке №5: $\Delta l_5 = \frac{15 \cdot 4}{1000 \cdot 5} = 12 \cdot 10^{-3}$ см;

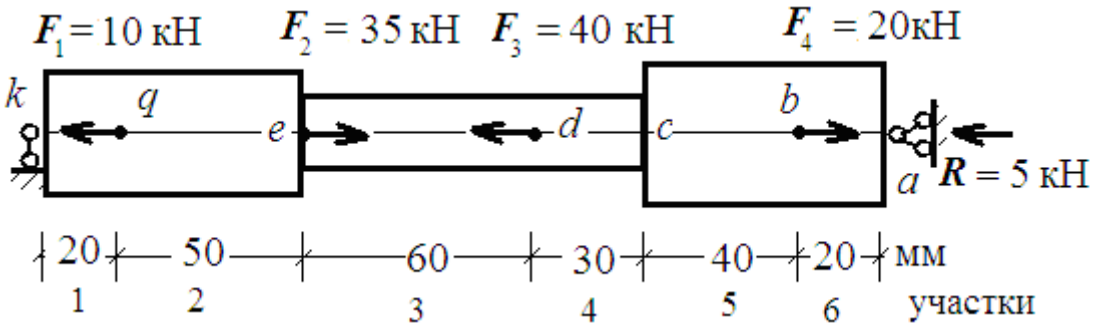
на участке №6: $\Delta l_6 = \frac{-5 \cdot 2}{1000 \cdot 5} = -2 \cdot 10^{-3}$ см.

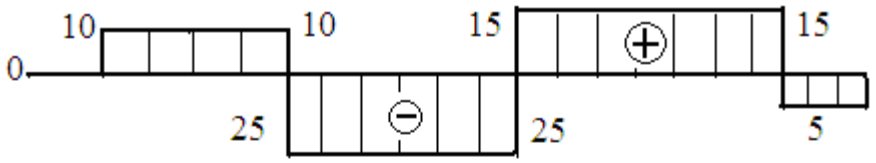
• Строим эпюру Δl начинаем с неподвижной точки а: $\Delta l_a = 0$;

в точке *b*: $\Delta l_b = \Delta l_6 = -2 \cdot 10^{-3}$ см;

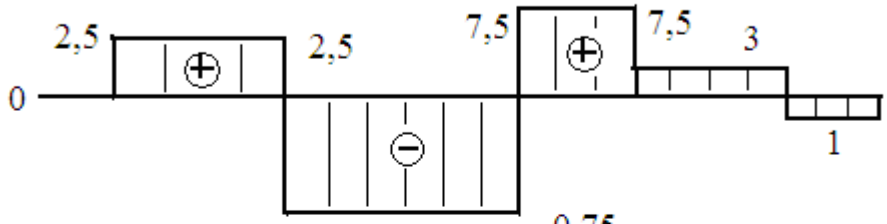
в точке *c*: $\Delta l_c = \Delta l_6 + \Delta l_5 = -2 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-3}$ см;

в точке *d*: $\Delta l_d = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 = 10 \cdot 10^{-3} + 22,5 \cdot 10^{-3} = 32,5 \cdot 10^{-3}$ см;

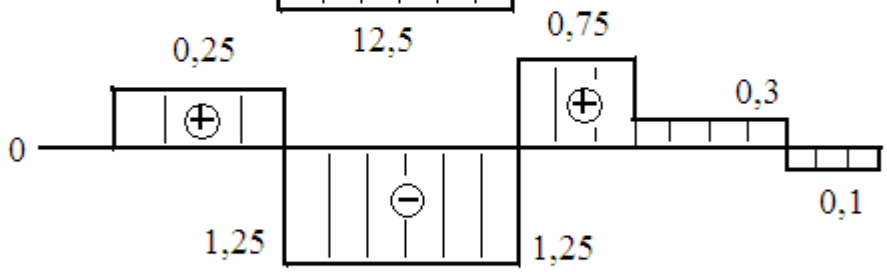




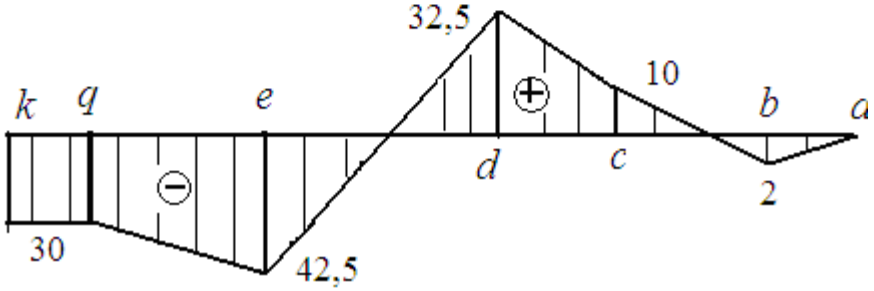
Эп. *N*, кН



Эп. σ, кН/см^2



Эп. ε, %



Эп.Δl, см·10^{-3}

в точке *e*:

$\Delta l_e = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 + \Delta l_3 = 32{,}5 \cdot 10^{-3} - 75 \cdot 10^{-3} = -42{,}5 \cdot 10^{-3}$ см;

в точке *q*:

$\Delta l_q = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 = -42{,}5 \cdot 10^{-3} + 12{,}5 \cdot 10^{-3} = -30 \cdot 10^{-3}$ см;

в точке *k*: $\Delta l_k = \Delta l_q = -30 \cdot 10^{-3}$ см, так как $\Delta l_1 = 0$.

• Вывод: стержень укоротился на 0,03 см.

Задача № 1.2. Подбор сечения статически определимого стержня при растяжении-сжатии.

Задание: Из условия прочности на растяжение (сжатие) подобрать сечение стержня *AC* из стали уголковой равнополочной. Определить удлинение стержня *AC*

Исходные данные к задаче определить по таблице 1.2 и схемам, представленным на рис. 1.2. Принять значения: расчётного сопротивления материала R = 240 МПа**,** коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$, модуля продольной упругости $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа.

Последовательность расчёта

1.Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Удалить стержень *AC,* заменив его усилием N_{AC} . Определить усилие $N_{AC.}$

3. Из условия прочности подобрать сечение стержня *AC* из стали уголковой равнополочной.

4. Определить удлинение стержня *AC.*

Таблица 1.2

Первая цифра шифра	F кН	α°	Вторая цифра шифра	q кН/м	l_1 м	Третья цифра шифра (№ схемы)	l_2 м
0	20	30	0	20	1	0	2
1	30	45	1	12	2	1	1
2	80	60	2	10	1	2	2
3	40	30	3	12	2	3	1
4	60	45	4	20	1	4	2
5	50	60	5	14	2	5	1
6	40	30	6	10	1	6	2
7	60	45	7	20	2	7	1
8	80	60	8	10	1	8	2
9	50	30	9	20	2	9	1

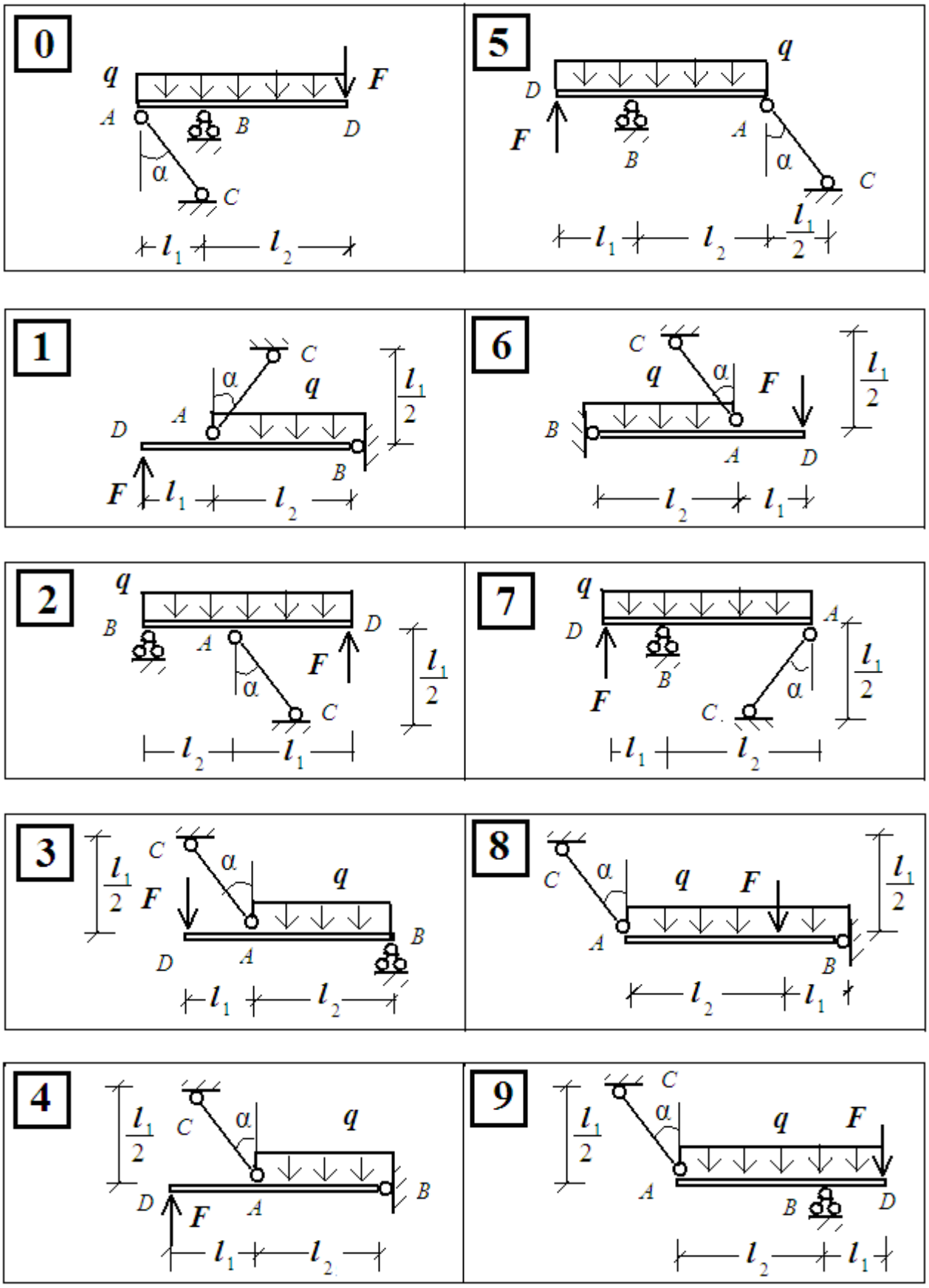
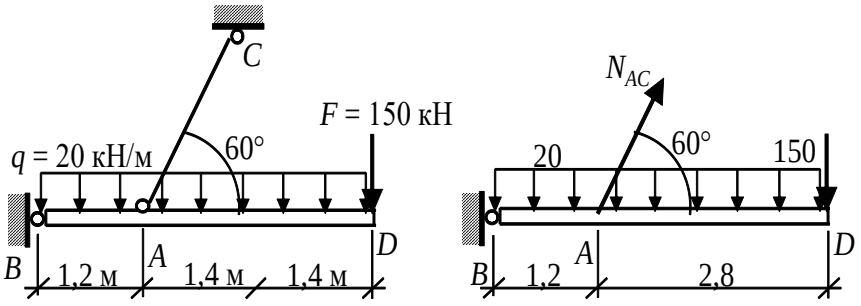

0
q
F
A
B
D
α
C
l1
l2
5
q
D
F
B
A
α
C
l1/2
1
C
α
q
l1/2
A
D
B
F
6
C
q
α
F
l1/2
B
A
D
2
q
B
D
A
F
α
C
7
q
A
D
B
F
C
3
C
α
q
F
B
D
A
8
C
α
q
F
A
B
4
C
α
q
D
F
A
B
9
C
α
q
F
A
B
D

Рис. 1.2

Пример решения задачи № 1.2: Брус абсолютной жёсткости *BD* поддерживается стержнем *AC*. Подобрать сечение стержня *AC* из стали уголковой равнополочной. $F = 150$ кН; $q = 20$ кН/м; $\gamma_c = 1$; R = 240 МПа, $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа.

• Определяем усилие в стержне *AC*:

$$\sum M_B = 0;\ -N_{AC} \cdot \sin 60^\circ \cdot 1{,}2 + F \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0;\ N_{AC} = 731{,}33 \text{ кН}.$$



• Условие прочности: $\sigma = \dfrac{N_{AC}}{A} \le \gamma_C R$; R = 240 МПа = 24 кН/см^2.

$\gamma_c = 1;\ A \ge \dfrac{N_{AC}}{R}\ \ A \ge \dfrac{731{,}33}{24} = 30{,}47$ см^2.

Принимаем 2 уголка ∟ 100×100×8; $A = 2 \cdot 15{,}6 = 31{,}2$ см^2 (см. сортамент проката).

• Определяем длину стержня *AC*: $l_{AC} = \dfrac{1{,}4}{\cos 60^\circ} = 2{,}8$ м= 280 см.

Определяем удлинение стержня *AC*:

$E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа = $2{,}06 \cdot 10^4$ кН/см^2,

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{EA} = \frac{731{,}33 \cdot 280}{2{,}06 \cdot 10^4 \cdot 31{,}2} = 0{,}32 \text{см}.$$

Задача № 1.3. Расчет статически неопределимого стержня при растяжении-сжатии

Задание: Определить продольные силы и нормальные напряжения в статически неопределимом стержне. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 1.3 и схемам, представленным на рис. 1.3. Принять значение модуля продольной упругости равным $E = 1 \cdot 10^5$ МПа.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе длин расчётную схему стержня с указанием размеров и нагрузки.

2. Записать уравнения равновесия стержня под действием нагрузки и реакций опор.

3. Составить условие совместности деформаций участков стержня.

4. Записать физические соотношения в форме закона Гука для каждого участка стержня.

5. Решив совместно полученную систему уравнений, определить реакции опор и усилия на каждом участке. Построить эпюру продольных сил.

6. Вычислить нормальные напряжения на каждом участке и построить их эпюру.

7. Решить задачу (п. 1-6) при условии, что воздействием на стержень является равномерное изменение его температуры на величину, указанную в табл. 1.3. Коэффициент $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ 1/град.

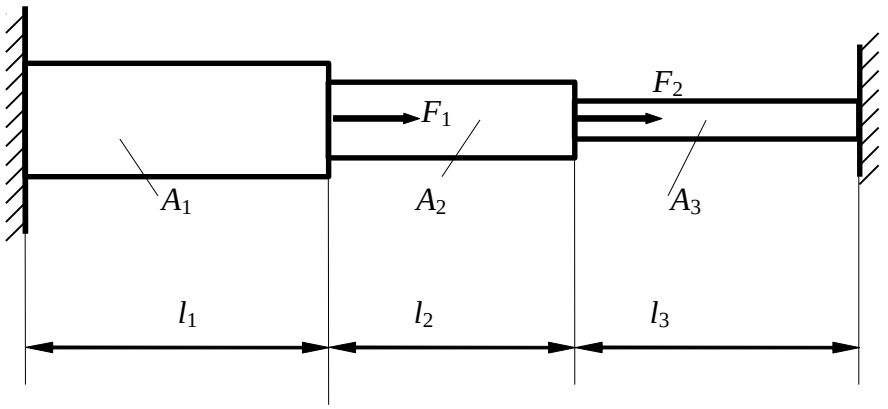


Рис. 1.3.

Таблица 1.3

Первая цифра шифра	A_1 см^2	F_1 кН	F_2 кН	Вторая цифра шифра	A_3 см^2	l_1 см	l_2 см	Третья цифра шифра (№ схемы)	Δt град.	A_2 см^2	l_3 см
0	4	60	0	0	8	15	7	0	40	14	14
1	15	0	120	1	10	14	6	1	–50	5	12
2	6	–70	0	2	12	13	8	2	30	16	15
3	17	0	100	3	7	12	9	3	–40	7	16
4	8	90	0	4	13	11	10	4	60	18	8
5	14	0	–60	5	9	9	11	5	–30	20	10
6	5	120	0	6	10	10	12	6	25	8	8
7	16	0	110	7	15	8	14	7	–20	16	6
8	7	–80	0	8	6	7	15	8	30	14	10
9	12	0	–90	9	14	6	16	9	50	19	9

Пример решения задачи № 1.3.

Исходные данные для решения задачи: $A_1 = 4$ см^2, $A_2 = 8$ см^2, $A_3 = 5$ см^2. $l_1 = 10$ см, $l_2 = 6$ см, $l_3 = 12$ см. $F_1 = 80$ кН.

Изображаем расчетную схему стержня, заменяя опоры реакциями R_A и R_B, направления которых предполагаем противоположными действию силы F_1. Составляем уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на горизонтальную ось стержня x:

$\sum X = 0$. $F_1 - R_A - R_B = 0$.

Усилия в сечениях на участках стержня при этом равны

$N_1 = R_A$; $N_2 = N_3 = R_A - F_1 = -R_B$.

Поскольку расстояние между жесткими опорами стержня не меняется, его полная абсолютная деформация равна нулю:

$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$.

Это выражение представляет собой условие совместности деформаций.

Абсолютные деформации выражаем через усилия согласно закону Гука:

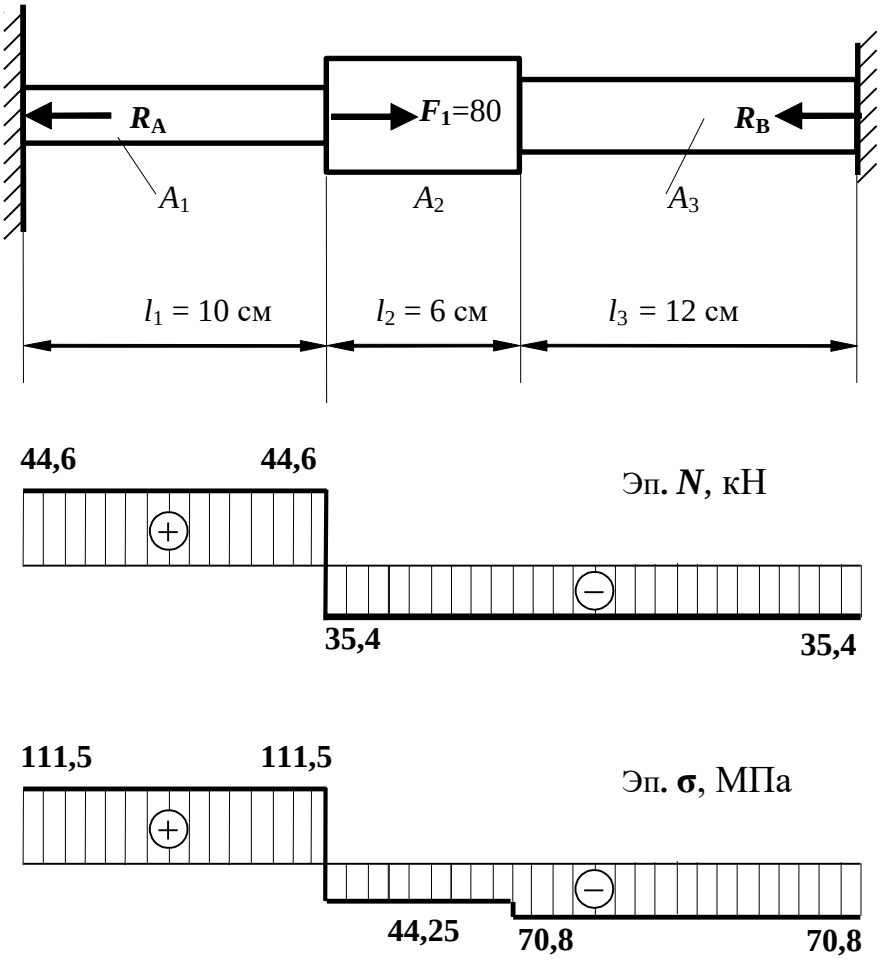
$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{R_A l_1}{EA_1};\ \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{(R_A - F_1) l_2}{EA_2};\ \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{(R_A - F_1) l_3}{EA_3}.$$

Решаем полученную систему уравнений. Вначале подставим формулы закона Гука в условие совместности деформаций:

$$\frac{R_A l_1}{EA_1}+\frac{(R_A-F_1)l_2}{EA_2}+\frac{(R_A-F_1)l_3}{EA_3}=0.$$

Получено линейное уравнение относительно неизвестной R_A. Умножив его на E и приведя подобные члены, выразим R_A:

$$R_A=\frac{F_1(l_2/A_2+l_3/A_3)}{l_1/A_1+l_2/A_2+l_3/A_3}=\frac{80\cdot(6/8+12/5)}{10/4+6/8+12/5}=44{,}6 \text{ кН}.$$



Находим усилия в сечениях:

$N_1=R_A=44{,}6$ кН; $N_2=N_3=R_A-F_1=44{,}6-80=-35{,}4$ кН.

По полученным значениям строим эпюру продольных сил.

Вычисляем напряжения на участках:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{44,6}{4} \cdot 10 = 111,5 \quad \text{МПа.} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-35,4}{8} \cdot 10 = -44,25$$

МПа.

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-35,4}{5} \cdot 10 = -70,8 \text{ МПа.}$$

Аналогично строим эпюру напряжений.

Определяем абсолютные деформации участков:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{111,5 \cdot 10}{10^5} = 11,15 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{-44,25 \cdot 6}{10^5} = -2,66 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = \frac{-70,8 \cdot 12}{10^5} = -8,49 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Проверяем равенство нулю суммарной деформации стержня:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = (11,15 - 2,66) \cdot 10^{-3} = 8,49 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 8,49 \cdot 10^{-3} - 8,49 \cdot 10^{-3} = 0.$$

Задача № 1.4. Расчет статически неопределимой стержневой системы при растяжении-сжатии

Задание: Определить грузоподъемность или подобрать площади сечений стержней статически неопределимой системы расчетом по упругой стадии и по предельному пластическому состоянию. Произвести сравнение результатов.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 1.4 и схемам, представленным на рис. 1.4. Принять значения расчётного сопротивления материала R = 240 Мпа (сталь)**,** коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$, Принять значение модуля продольной упругости равным $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Последовательность расчёта

Часть 1. Расчет по упругой стадии деформаций.

1. Изобразить в масштабе длин расчётную схему стержня с указанием размеров и нагрузки.

2. Изобразить план сил в недеформируемом состоянии и составить необходимые уравнения равновесия.

3. Составить план перемещений в соответствии с действующей нагрузкой и записать условие совместности деформаций.

4. Записать соотношения закона Гука для каждого из стержней системы.

5. Решить совместно статические, геометрические и физические уравнения задачи; определить усилия в стержнях системы, выразив их через площадь сечения одного из стержней или через нагрузку.

6. Определить и сравнить напряжения в стержнях; из условия прочности наиболее напряженного из них найти требуемые площади сечения стержней либо допускаемую нагрузку на систему. Вычислить фактические напряжения при принятых значениях площадей или нагрузки.

Часть 2. Расчет по предельному пластическому состоянию.

1. Выяснить, какова схема образования механизма при переходе системы в предельное пластическое состояние.

2. Изобразить план сил в предельном состоянии, соответствующий плану перемещений для упругой стадии деформирования.

3. Составить необходимые уравнения равновесия системы в предельном состоянии.

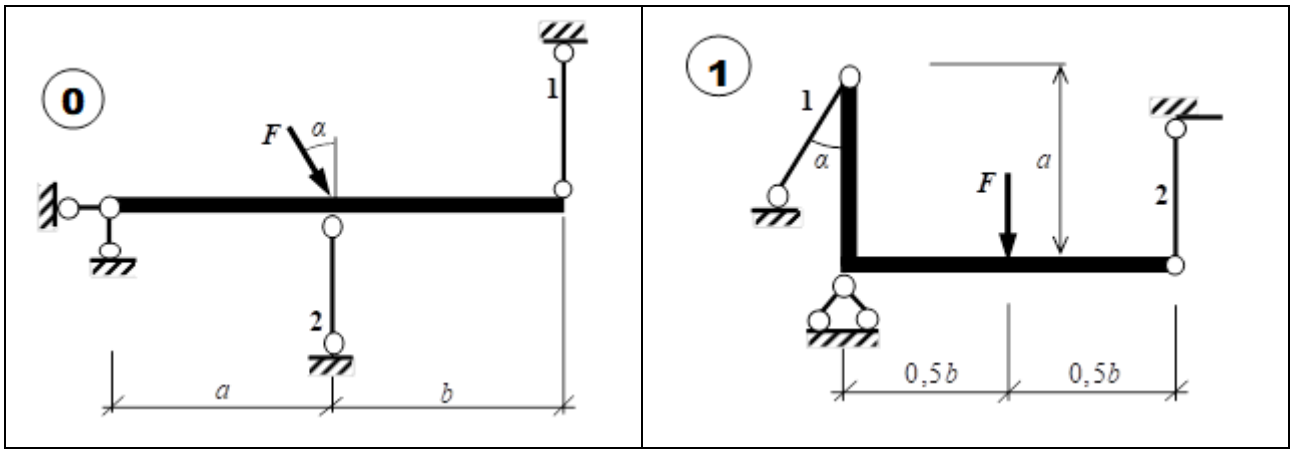
4. Определить предельную нагрузку, выразив ее, если необходимо, через площадь сечения одного из стержней системы.

5. Если неизвестны площади сечений стержней, то подобрать их из условия прочности системы в целом.

6. Произвести сравнение полученных результатов с результатами расчета по упругой стадии, отметив, в каком случае достигается экономия материала либо повышение грузоподъемности.

Таблица 1.4

A	b, м	l_1, м	A_2/A_1	α, °	B	l_2, м	F, кН	q, кН/м	A_1, см^2	a, м	C № сх.
0	3	1,5	3	30	0	1,5	–	–	6	4	0
1	2	2	2	45	1	2	80	40	–	2	1
2	3	2,5	1	60	2	3	–	–	4	3	2
3	4	3	1,5	-30	3	1	150	30	–	2	3
4	2	1,5	2,5	-45	4	2,5	180	40	–	4	4
5	3	2	0,75	-60	5	3	100	50	–	3	5
6	4	2,5	0,5	30	6	2	–	–	8	2	6
7	3	3	0,25	45	7	1	150	60	–	2	7
8	2	1	4	60	8	2	–	–	10	4	8
9	4	2	0,5	30	9	1,5	–	–	12	3	9



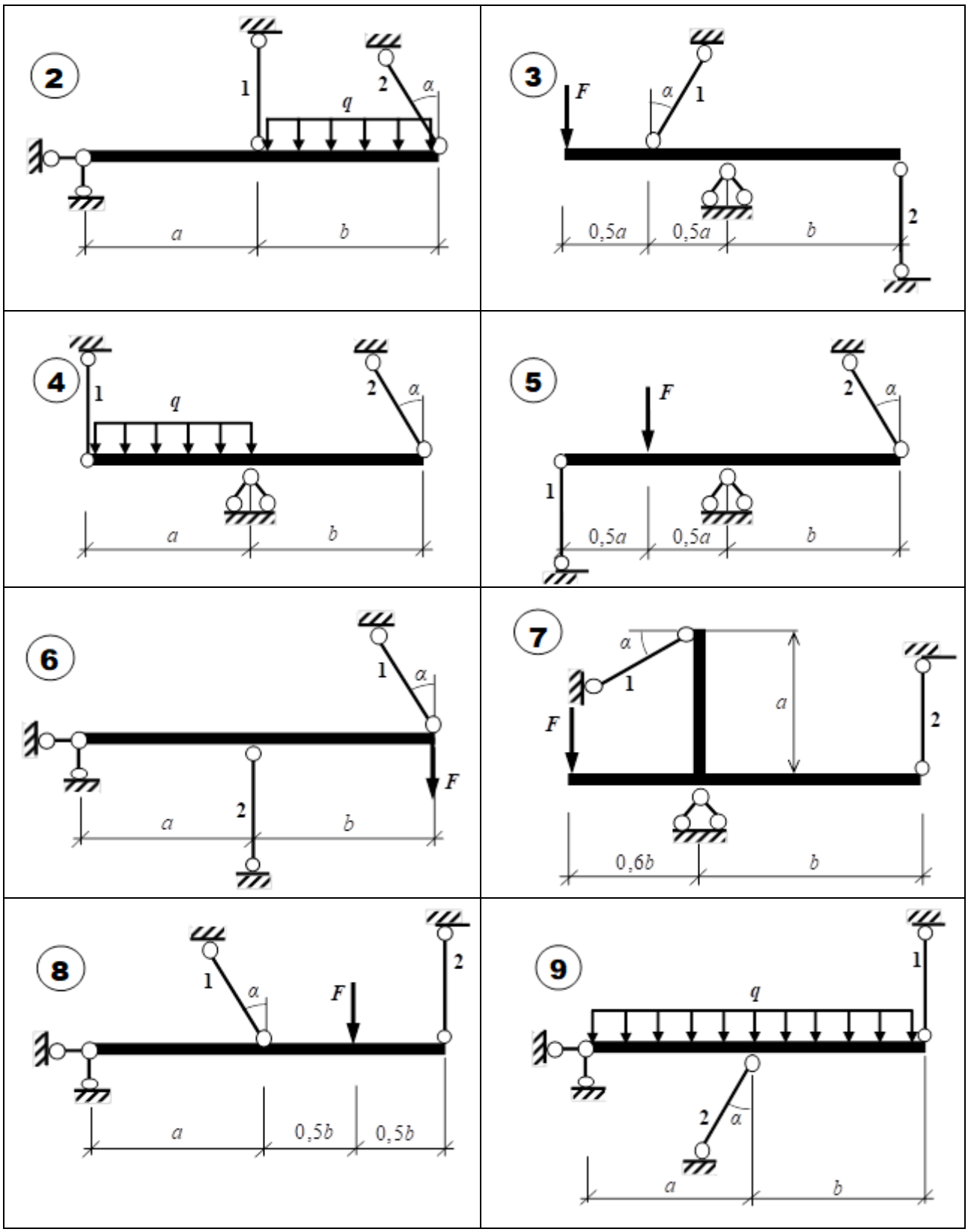

2
1
q
2
α
a
b
3
F
α
1
0,5a
0,5a
b
2
4
1
q
2
α
a
b
5
F
2
α
1
0,5a
0,5a
b
6
1
α
F
a
2
b
7
α
1
F
a
2
0,6b
b
8
1
α
F
2
a
0,5b
0,5b
9
1
q
2
α
a
b

Рис. 1.4

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Плоское напряженное состояние. Кручение

Задача № 2.1. Исследование плоского напряженного состояния

Задание: По заданным главным напряжениям на гранях элемента при плоском напряженном состоянии определить напряжения по наклонным площадкам и максимальные касательные напряжения. Вычислить главные линейные и объемную относительные деформации.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 2.1 и схеме, представленной на рис. 2.1.

Последовательность расчёта

1. Обозначить заданные главные напряжения согласно принятым правилам их индексации и показать эти напряжения на чертеже с учетом их величины и направления.

2. Вычислить нормальное и касательное напряжения по наклонным площадкам с внешними нормалями x и y. Использовать при этом свойство инвариантности суммы нормальных напряжений и закон парности касательных напряжений. Показать эти напряжения на схеме.

3. Определить максимальные касательные напряжения и нормальные напряжения на площадках, где действуют максимальные касательные напряжения. Показать эти напряжения на схеме.

4. Проверить по вычисленным в пункте 2 напряжениям величины главных напряжений и угол наклона главных площадок по отношению к направлениям x и y.

5. Пункты 2-4 выполнить графически, с помощью построения и использования круга Мора.

6. Определить главные линейные относительные деформации и объемную деформацию в окрестности точки, приняв модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ Мпа и коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}25$.

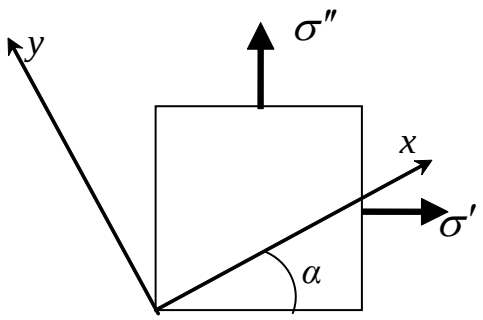


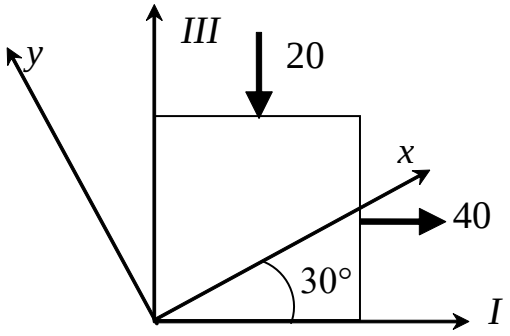
Рис. 2.1.

Таблица 2.1

Первая цифра шифра	σ', МПа	Вторая цифра шифра	σ'', МПа	Третья цифра шифра	α, градус
0	5	0	50	0	30
1	10	1	–5	1	60
2	15	2	40	2	45
3	20	3	–25	3	–30
4	30	4	35	4	–60
5	–10	5	–35	5	–45
6	–15	6	25	6	15
7	–20	7	–50	7	–75
8	–30	8	45	8	–15
9	–40	9	–45	9	75

Пример решения задачи № 2.1.

Исходные данные для решения задачи: $\sigma' = 40$ МПа, $\sigma'' = -20$ МПа, $\alpha = 30^\circ$.



1) По правилам индексации главных напряжений обозначаем $\sigma' = \sigma_1 = 40$ МПа и $\sigma'' = \sigma_3 = -20$ МПа. Показываем на рисунке

напряжение $\sigma_1 = 40$ МПа от площадки (растяжение) и напряжение $\sigma_3 = 20$ МПа – на площадку (сжатие). Показываем направления главных осей I и III.

2) Определяем по расчетным формулам напряжения по площадке с нормалью x:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha = \frac{40-20}{2} + \frac{40+20}{2}\cos 60^\circ =$$

$$= 10 + 30 \cdot 0{,}5 = 25 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha = \frac{40+20}{2}\sin 60^\circ = 30 \cdot 0{,}866 = 25{,}98 \text{ МПа}.$$

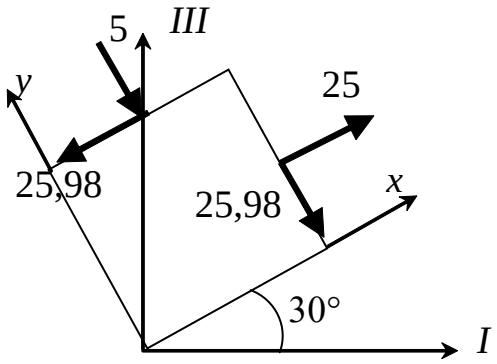
Из свойства постоянства суммы нормальных напряжений по взаимно перпендикулярным площадкам получаем:

$$\sigma_y = \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_x = 40 - 20 - 25 = -5 \text{ МПа}.$$

Согласно закону парности касательных напряжений:

$$\tau_{yx} = -\tau_{xy} = -25{,}98 \text{ МПа}.$$

Показываем наклонные площадки и напряжения на них с учетом знаков.



3) Вычисляем максимальные касательные напряжения в заданной плоскости главных осей I и III (только величина).

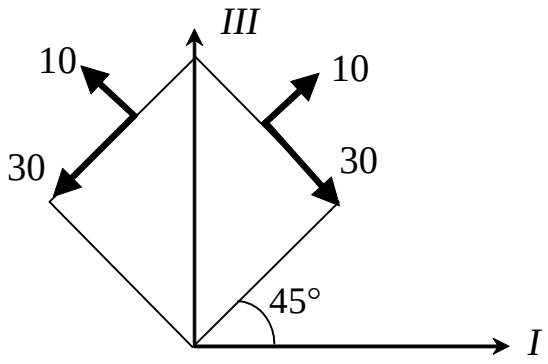
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{40+20}{2} = 30 \text{ МПа}.$$

Нормальные напряжения на площадках с максимальными касательными напряжениями:

$$\sigma_{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{40-20}{2} = 10 \text{ МПа}.$$

Показываем величину и направление напряжений на схеме.

На рисунке показаны напряжения только по двум взаимно перпендикулярным площадкам. На других двух площадках напряжения симметричны относительно горизонтальной оси по отношению к напряжениям, показанным на рисунке.



4) По найденным в п. 2 напряжениям проверяем исходные величины главных напряжений:

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{25-5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(25+5\right)^2 + 4 \cdot 25{,}98^2} = 10 \pm 30 \text{ МПа.}$$

$\sigma_1 = 10 + 30 = 40$ МПа. $\sigma_3 = 10 - 30 = -20$ МПа. Проверка выполнена.

Положение главных площадок. Определяем угол наклона главной оси по отношению к оси x:

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 25{,}98}{25+5} = -1{,}732.$$

$\alpha_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(-1{,}732\right) = -30^\circ$ $\alpha = -\alpha_0 = 30^\circ$, что соответствует заданному углу от оси I до оси x. Проверка выполнена.

Задача № 2.2. Исследование плоского напряженного состояния. Проверка прочности.

Задание: По заданным напряжениям на произвольных площадках при плоском напряженном состоянии определить напряжения по наклонным площадкам и максимальные касательные напряжения. Вычислить главные напряжения и положение главных площадок. Проверить прочность материала по соответствующей теории прочности.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 2.2 и схеме, представленной на рис. 2.2.

Последовательность расчёта

1. Определить нормальное, касательное и полное напряжения по наклонной площадке и показать эти напряжения на чертеже.

2. Определить главные напряжения и положение главных площадок по отношению к исходным. Показать главные площадки и действующие на них напряжения на чертеже.

3. Вычислить максимальные касательные напряжения и соответствующие нормальные напряжения: для заданной плоскости и для объема в целом. Показать эти напряжения на чертеже.

4. Пункты 1-3 выполнить графически, построив и используя круг Мора.

Таблица 2.2

A	№ схемы на рис. 7	σ_x, МПа	σ_y, МПа	*B*	τ_{xy}, МПа	β, град	*C*	$\sigma_{пред.}$, МПа	Материал
0	1	10	-20	0	30	15	0	240	Сталь
1	2	-20	30	1	-40	30	1	180/600	Чугун
2	3	50	40	2	50	45	2	150	Бронза
3	4	-30	-50	3	-60	60	3	150/500	Чугун
4	1	-10	30	4	10	75	4	210	Алюминий
5	2	20	-40	5	-20	15	5	160/480	Чугун
6	3	-70	-60	6	20	30	6	260	Сталь
7	4	40	30	7	-10	45	7	120	Бронза
8	4	-80	70	8	-30	60	8	180/600	Чугун
9	3	60	-30	9	40	75	9	200	Алюминий

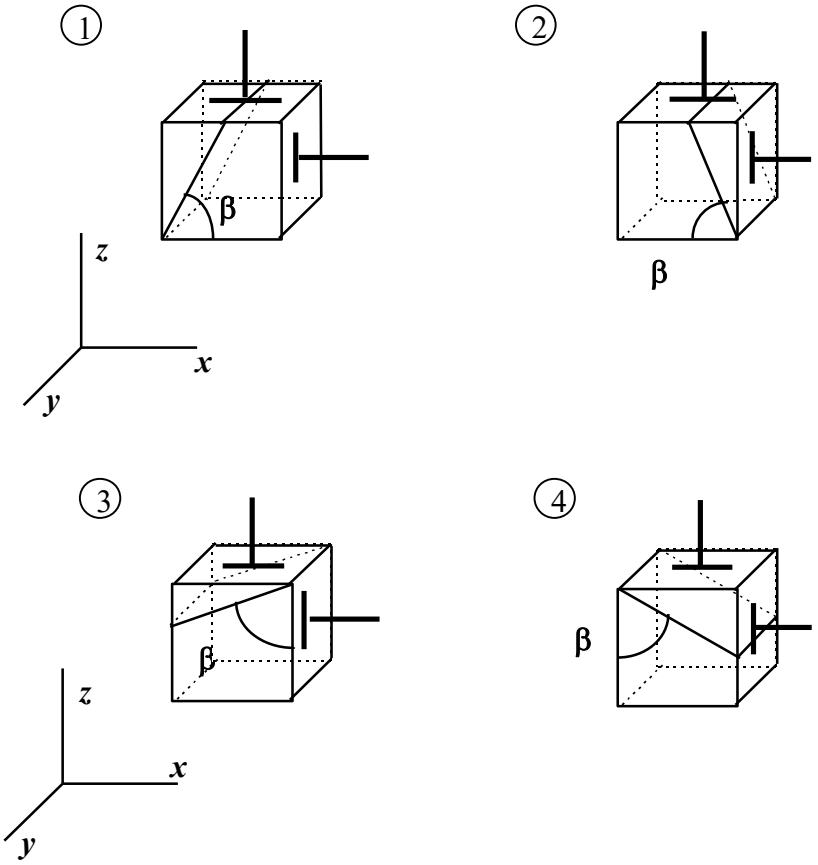


Рис. 2.2.

5. Проверить прочность материала в заданной точке по соответствующей теории прочности. Определить фактический запас прочности и показать положение опасных площадок на чертеже.

Условие задачи

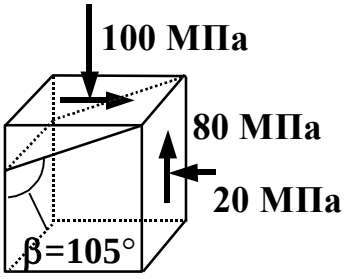


Рис. 2.3. Заданное напряженное состояние в условии задачи № 7

Элемент, выделенный из тела, находится в плоском напряженном состоянии (рис. 2.3). По граням элемента заданы нормальные и касательные напряжения, значения которых приведены на рисунке.

Материал элемента – сталь с такими характеристиками: предел текучести $\sigma_т = 240$ МПа; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$; модуль сдвига $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 0{,}77 \cdot 10^5$ МПа; нормируемый коэффициент запаса прочности $n = 1{,}5$.

Требуется:

1) найти нормальное, касательное и полное напряжения на наклонной площадке, заданной углом $\beta = 105°$ (см. рис. 2.3);

2) определить величины главных напряжений и положение главных площадок;

3) найти наибольшее касательное напряжение и положение площадки, по которой оно действует;

4) оценить прочность материала в точке и показать вероятное направление плоскости сдвига или отрыва (опасной площадки);

Примечание. Пп. 1–3 следует выполнить двумя способами: аналитическим и графическим.

Решение

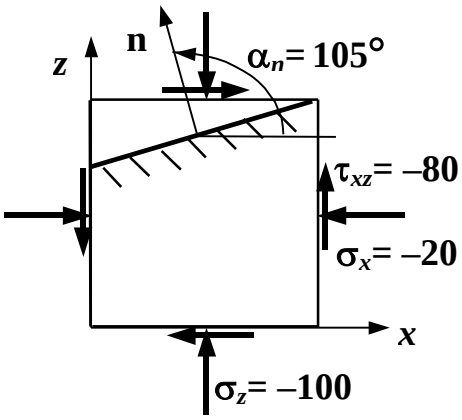


Рис. 2.4. Определение напряжений на заданной наклонной площадке

Изобразим элемент в виде плоского рисунка, на котором должна быть указана система координат (см. рис. 2.4). Введенная система координат позволяет присвоить напряжениям обозначения: $\sigma_x = -20$ МПа, $\sigma_z = -100$ МПа, $\tau_{xz} = -80$ МПа.

На рисунке следует показать также наклонную площадку, указать штриховкой ее внутреннюю сторону, задать внешнюю нормаль к площадке.

Аналитический способ исследования напряженного состояния

Определение напряжений на наклонной площадке. Напряжения, действующие на наклонной площадке (см. рис. 2.4), находим по формулам (2.2а) и (2.2б). В этих формулах положение площадки задает угол α_n между нормалью **n** к площадке и осью x. Этот угол нельзя путать с углом β, указанным на рис. 2.3.

Можно отсчитывать угол α_n не от оси x, а от оси z, но тогда в формулах (2.2а) и (2.2б) напряжения σ_x, σ_z надо поменять местами и напряжение τ_{xz} заменить напряжением τ_{zx}. Надо выбирать более удобный способ.

Используем угол α_n между **n** и осью x, отсчитывая его от оси x к нормали **n**: $\alpha_n = 105°$ (см. рис. 2.4). Значение угла положительное, так как угол отсчитывается против часовой стрелки.

Согласно (2.2а) и (2.2б)

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\cos(2\alpha_n) - \tau_{xz}\sin(2\alpha_n) = \frac{-20-100}{2} +$$

$$+ \frac{-20-(-100)}{2}\cos(2\cdot 105°) - (-80)\sin(2\cdot 105°) = -134{,}6\,\text{МПа},$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin(2\alpha_n) + \tau_{xz}\cos(2\alpha_n) =$$

$$= \frac{-20-(-100)}{2}\sin(2\cdot 105°) - (-80)\cos(2\cdot 105°) = 49{,}3\,\text{МПа}.$$

Получившееся нормальное напряжение σ_n отрицательно, значит, оно направлено к площадке (сжимающее). Касательное напряжение τ_n положительно, это значит, что оно обходит площадку по часовой стрелке.

Используем теперь угол α_n между нормалью **n** и осью z, отсчитывая его от z к **n**: $\alpha_n = 15°$. Формулы (2.2а) и (2.2б) записываем в измененном виде:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\cos(2\alpha_n) - \tau_{zx}\sin(2\alpha_n) =$$

$$= \frac{-100-20}{2} + \frac{-100-(-20)}{2}\cos(2\cdot 15°) - 80\sin(2\cdot 15°) = -134{,}6\,\text{МПа},$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\sin(2\alpha_n) + \tau_{zx}\cos(2\alpha_n) =$$

$$= \frac{-100-(-20)}{2}\sin(2\cdot 15°) + 80\cos(2\cdot 15°) = 49{,}3\,\text{МПа}.$$

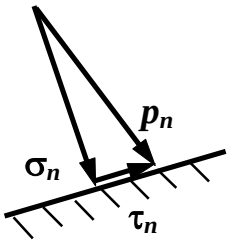


Рис. 2.5. Напряжения на наклонной площадке

Абсолютная величина полного напряжения (или просто полное напряжение)

$p_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} = \sqrt{(-134{,}6)^2 + (49{,}3)^2} = 143{,}4$ МПа. Вычисленные напряжения показаны на рис. 2.5.

Определение главных напряжений и главных направлений. Согласно (2.5) главные напряжения

$$\left.\begin{matrix}\sigma'_{\text{гл}} \\ \sigma''_{\text{гл}}\end{matrix}\right\} = \frac{(-20)+(-100)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{[-20-(-100)]^2 + 4(-80)^2} =$$

$$= -60 \pm 89{,}44 \text{ МПа}.$$

После вычисления главные напряжения следует пронумеровать согласно убыванию. Чтобы не путать напряжения до и после нумерации, специально используются для этих напряжений разные обозначения. Главные напряжения, пронумерованные согласно их величине,

$$\sigma_1 = 29{,}44 \text{ МПа}, \ \sigma_2 = 0, \ \sigma_3 = -149{,}44 \text{ МПа}.$$

Найдем положение главных площадок. Сказанное о способах вычисления напряжений по наклонной площадке относится и к способам вычисления положения главных площадок. Здесь мы вычислим углы $\alpha'_{\text{гл}}$, $\alpha''_{\text{гл}}$, определяющие положения главных площадок, одним способом: будем отсчитывать эти углы от направления оси x. Углы являются решениями уравнения (2.7):

$$\operatorname{tg}(2\alpha_{\text{гл}}) = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = -\frac{2(-80)}{-20-(-100)} = 2,$$

то есть

$$\alpha'_{\text{гл}} = 31{,}7°, \ \alpha''_{\text{гл}} = 121{,}7°.$$

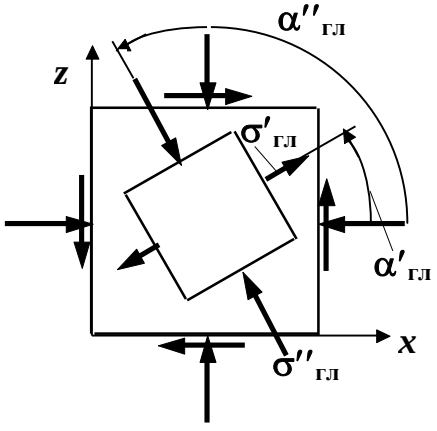


Рис. 2.6. Определение положения главных площадок

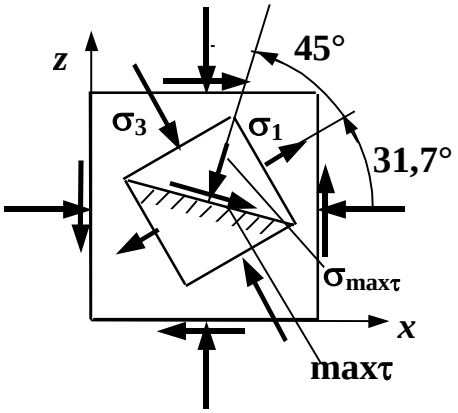


Рис. 2.7. Площадка с максимальным касательным напряжением

Получены два значения угла, которые отвечают площадкам с напряжениями σ_1, σ_3 (рис. 2.6). Выясним, какому из этих напряжений соответствует угол $\alpha'_{\text{гл}}$. Для этого определим по формуле (2.8) знак второй производной $d^2\sigma_n \big/ d\alpha_n{}^2$ при $\alpha_n = \alpha'_{\text{гл}}$:

$$\frac{d^2\sigma_n}{d\alpha_n{}^2} = -2[-20-(-100)]\cos(2\cdot 31{,}7°) + 4(-80)\sin(2\cdot 31{,}7°) < 0.$$

Знак отрицательный, следовательно, по этой площадке действует бóльшее из найденных главных напряжений – напряжение σ_1. Теперь можно в соответствии с нумерацией главных напряжений пронумеровать и углы: $\alpha_1 = 31{,}7°$, $\alpha_3 = 121{,}7°$.

Определение максимального касательного напряжения. Касательное напряжение, максимальное среди касательных напряжений на площадках, перпендикулярных плоскости $x0z$ (рис. 2.7), определяется формулой (2.10):

$$\max\tau = \left|\frac{\sigma'_{\text{гл}} - \sigma''_{\text{гл}}}{2}\right| = \frac{29{,}44-(-149{,}44)}{2} = 89{,}44\,\text{МПа}.$$

В рассматриваемом примере главные напряжения $\sigma'_{\text{гл}} = \sigma_1$, $\sigma''_{\text{гл}} = \sigma_3$, поэтому касательное напряжение $\max\tau$ является максимальным среди касательных напряжений для всей совокупности площадок, проходящих через заданную точку: $\max\tau = \tau_{\max}$.

Нормальные напряжения на той же площадке даются формулой (2.11):

$$\sigma_{\max\tau} = \frac{\sigma'_{\text{гл}} + \sigma''_{\text{гл}}}{2} = \frac{29{,}44+(-149{,}44)}{2} = -60\,\text{МПа}.$$

Графический способ исследования напряженного состояния

Круг напряжений Мора является средством вычисления. При выполнении задачи его необходимо построить в крупном масштабе на миллиметровке, используя заточенный карандаш. Чем точнее выполнены построения, тем точнее будет получен результат.

Строим круг напряжений Мора (рис. 2.8). Изображаем систему координат $\sigma 0 \tau$ с одинаковым масштабом по вертикальной и горизонтальной осям. Отмечаем на координатной плоскости $\sigma 0 \tau$ две точки X, Z, соответствующие заданным площадкам с нормалями x, z. Координатами точек $X(-20,-80)$, $Z(-100,80)$ являются нормальные и касательные напряжения на заданных площадках. Соединяем точки отрезком, который представляет собой диаметр круга Мора. Точка O пересечения диаметра с осью σ – центр круга. Проводим окружность.

Точкам I, III пересечения круга с горизонтальной осью соответствуют главные площадки 1, 3. Горизонтальные координаты этих точек (измеренные в масштабе) являются главными напряжениями: $\sigma_1 \approx 29\,\text{МПа}$, $\sigma_3 \approx -149\,\text{МПа}$.

Углы α_1, α_3, определяют положения главных площадок. Отмеченные на рисунке углы дают удвоенные значения α_1, α_3. По рисунку сразу видно, какому главному напряжению

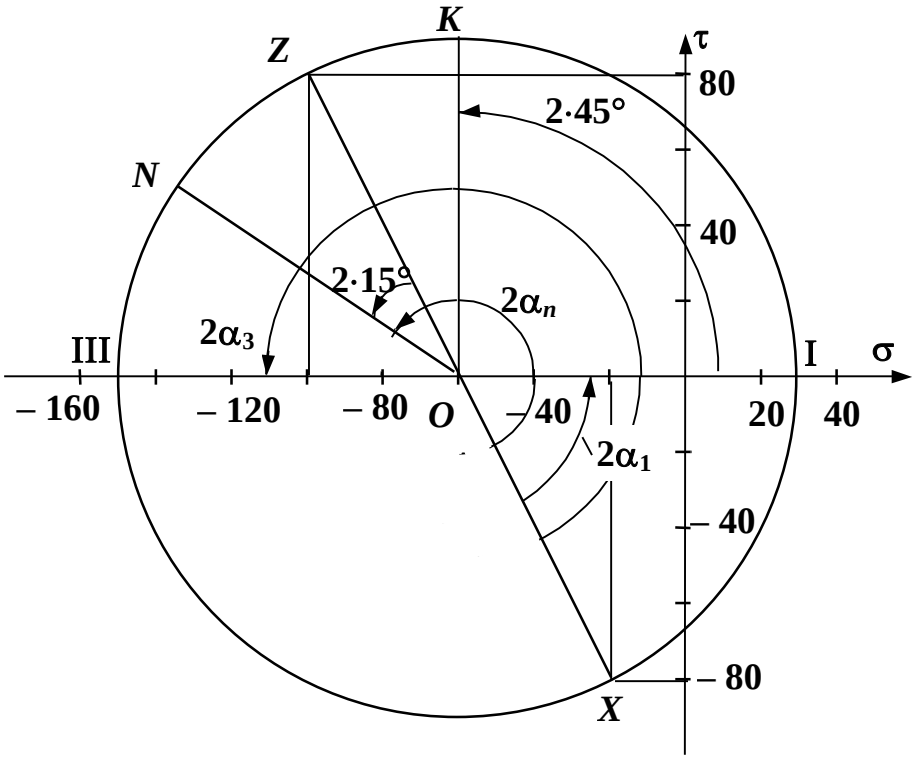


Рис. 2.8. Круг Мора, изображающий заданное плоское напряженное состояние

соответствует каждое значение угла. Графически найденные значения: $2\alpha_1 \approx 63°$, $2\alpha_3 \approx 243° = 180° + 63°$. Графический способ дает возможность проверить аналитическое решение, поэтому в расчетной работе следует рядом с кругом напряжений на отдельном рисунке показать положения главных площадок и напряжения на них.

Площадке, по которой действует максимальное касательное напряжение, соответствует точка K круга. Координаты точки K дают значения $\max \tau \approx 89\,\text{МПа}$, $\sigma_{\max \tau} = -60\,\text{МПа}$.

Найдем с помощью круга напряжений напряжения на наклонной площадке. Построим на круге точку N, соответствующую наклонной площадке. Для этого отложим от радиуса *OX* (соответствующего оси *x*) против часовой стрелки угол $2\alpha_n = 2 \cdot 105°$, либо от радиуса *OZ* (соответствующего оси *z*) в том же направлении угол 2·15°. Координаты точки N дают напряжения на наклонной площадке: $\sigma_n \approx -135\,\text{МПа}$, $\tau_n \approx 49\,\text{МПа}$.

Полное представление о напряженном состоянии дают три круга напряжений. Точки каждого круга соответствуют площадкам, которые перпендикулярны одной из главных площадок. Круги строятся по главным напряжениям. Обычно изображение напряженного состояния в виде трех кругов Мора используется в качестве иллюстрации, а не в качестве способа вычисления, поэтому данный рисунок можно выполнить в меньшем масштабе и не обязательно на миллиметровке. Все три круга напряжений для рассматриваемого напряженного состояния показаны на рис. 2.9. Построенный на рис. 2.8 круг напряжений соответствует площадкам, перпендикулярным плоскости чертежа (перпендикулярным второй главной площадке). Из рис. 2.9 видно, что максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ определяется по бóльшему кругу.

Проверка прочности. Главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 уже известны (вычислены выше).

Начать решение вопроса нужно с выбора соответствующей материалу теории прочности. По условию задачи материал – сталь (пластичный материал), поэтому используем третью и четвертую теории прочности.

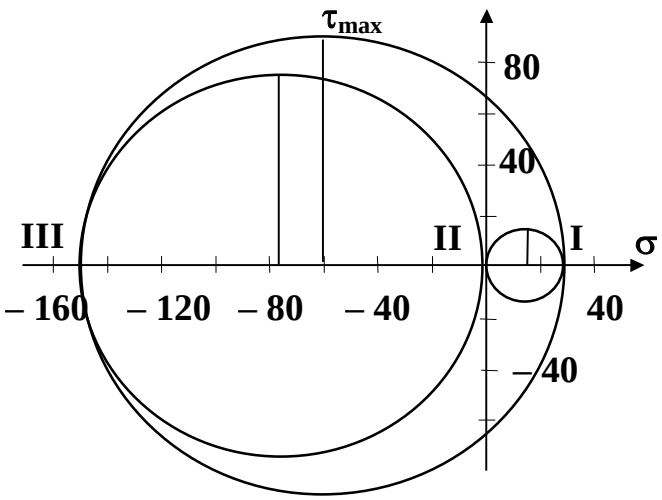


Рис. 2.9. Круги Мора, изображающие объемное напряженное состояние

Согласно третьей теории прочности эквивалентное напряжение

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = 29{,}44 - (-149{,}44) = 178{,}9 \text{ МПа}.$$

Сравнение $\sigma_{экв}$ с пределом текучести $\sigma_т$ показывает, что материал работает упруго. Действительно,

$$\sigma_{экв} = 178{,}9 \text{ МПа} < \sigma_т = 240 \text{ МПа}.$$

Но условие прочности не выполнено:

$$\sigma_{экв} = 178{,}9 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Это означает, что не обеспечен нормативный коэффициент запаса прочности. Конструкцию, имеющую точку с такими напряжениями, эксплуатировать запрещается. Действительный (фактический) коэффициент запаса

$$n_{действ} = \sigma_т / \sigma_{экв} = 240/178{,}9 = 1{,}33$$

меньше нормативного $n = 1{,}5$.

Согласно четвертой теории прочности

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}[(29{,}44)^2 + (-149{,}44)^2 + (29{,}44 - (-149{,}44))^2]} = 167{,}0 \text{ МПа},$$

$$\sigma_т = 240 > 167{,}0 > [\sigma]_р = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности не выполнено и согласно четвертой теории. Однако фактический коэффициент запаса оказывается другим:

$$n_{\text{действ}} = 240/167 = 1{,}44.$$

Положения опасных площадок согласно третьей и четвертой теориям приведены на рис. 2.10, 2.11. По площадке, показанной жирной линией на рис. 2.10, действует максимальное касательное напряжение. Эта площадка перпендикулярна к площадке 2 и наклонена под углом в 45° к площадкам 1 и 3. Площадка, показанная жирной линией на рис. 2.11, соответствует четвертой теории прочности. Она равно наклонена ко всем трем главным площадкам.

Специально обратим внимание на способ изображения опасных площадок: эти площадки показаны с привязкой к исходному элементу. Так необходимо сделать и при оформлении задачи.

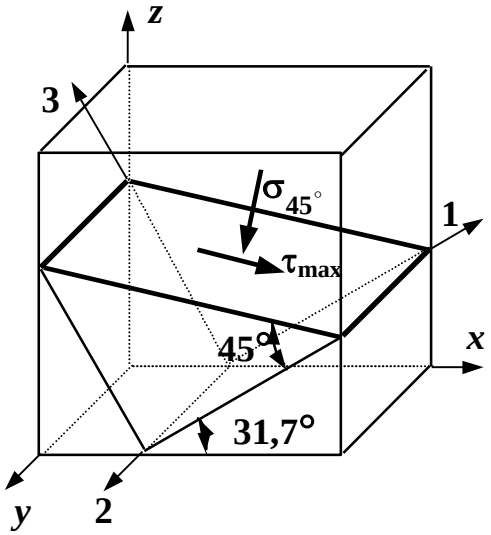


Рис. 2.10. Опасная площадка по третьей теории прочности

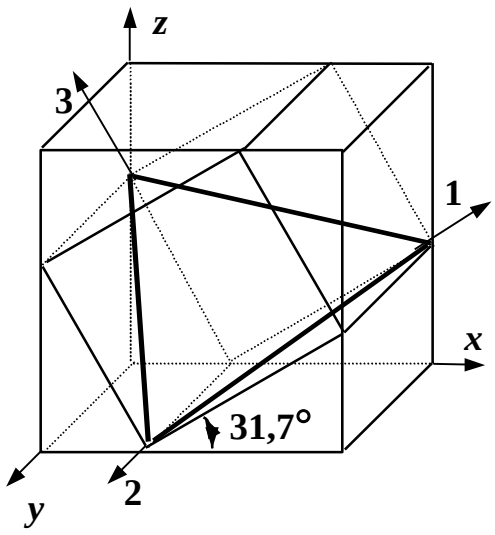


Рис. 2.11. Опасная площадка по четвертой теории прочности

Положение исходного элемента по отношению к конструкции, из которой вырезан элемент, известно. Примененный способ изображения опасных площадок позволяет указать эти площадки непосредственно на конструкции.

Задача № 2.3. Подбор круглого сечения стержня (вала) при кручении

Задание: Стальной вал переменного сечения нагружен внешними скручивающими моментами M_1, M_2 и $M_{3.}$ Определить диаметры обеих частей вала из условия прочности. Проверить жёсткость вала при допустимом погонном угле закручивания 1,7 град/м. Построить эпюру крутящих моментов. Принять значения: расчётного сопротивления на срез: $R_{ср.}$ = 80 МПа, модуля сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Исходные данные к задаче определить по таблице 2.3 и схемам, представленным на рис. 2.3.

Таблица 2.3

Первая цифра шифра	l_1 см	$\frac{d}{D}$	Вторая цифра шифра	l_2 см	M_1 кН·м	Вид Сеч. 1-1	Вид Сеч. 2-2	Третья цифра шифра	№ схемы	M_2 кН·м	$M_{3.}$ кН·м	l_3 см
0	40	0,8	0	20	–20	спл.	пол.	0	1	–20	40	30
1	30	0,7	1	40	30	пол.	спл.	1	2	30	–20	20
2	20	0,8	2	30	–40	спл.	пол.	2	1	–20	40	40
3	30	0,6	3	20	20	пол.	спл.	3	2	20	–30	30
4	20	0,7	4	30	–30	спл.	пол.	4	1	–10	40	20
5	40	0,6	5	40	20	пол.	спл.	5	2	10	–30	40
6	30	0,8	6	30	–40	спл.	пол.	6	1	–20	40	20
7	20	0,6	7	20	20	пол.	спл.	7	2	10	–30	30
8	30	0,7	8	20	–30	спл.	пол.	8	1	–20	30	20
9	40	0,9	9	40	10	пол.	спл.	9	2	20	–40	40

Примечания к таблице:

1. Вид сечения «спл.» означает: сечение круглое, сплошное, диаметром d. Вид сечения «пол.» означает: сечение круглое полое (труба) с соотношением диаметров $\alpha = \frac{d}{D}$.

2. Знак минус у величины момента означает, что момент имеет противоположное направление.

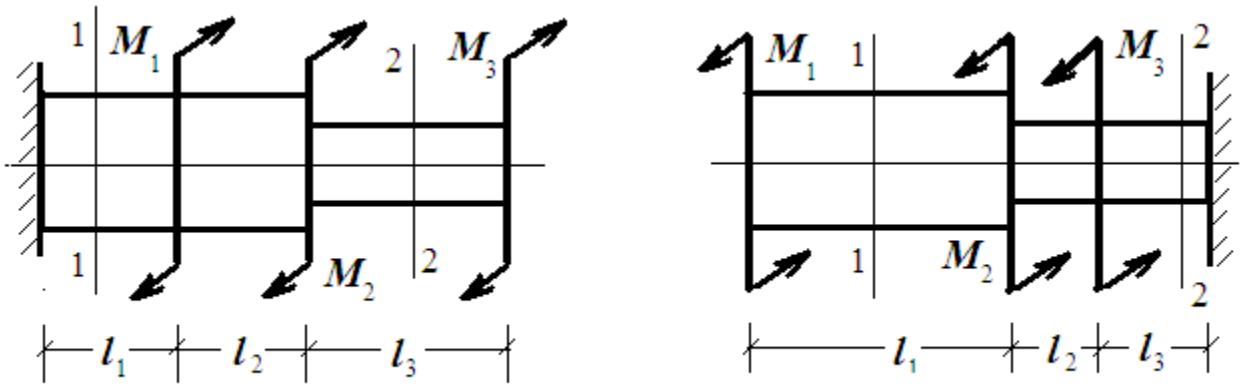


Схема стержня № 1 Схема стержня № 2

Рис. 2.3. Схемы вариантов закрученного стержня

Последовательность расчёта:

1. Изобразить в масштабе расчётную схему стержня с указанием размеров и всех необходимых для расчёта данных.

2. Построить эпюру крутящих моментов.

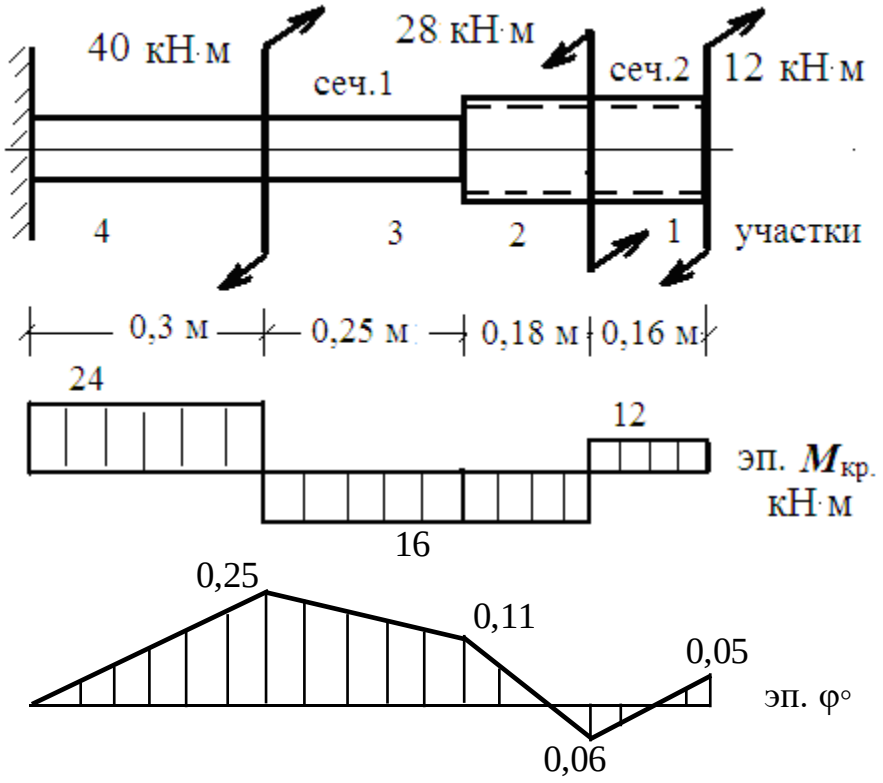
3. Определить опасные сечения для каждого вида поперечного сечения.

4. Определить диаметр вала из условия прочности для каждого вида поперечного сечения.

5. Проверить жесткость вала. В случае его невыполнения подобрать диаметр из условия жесткости.

Пример расчёта

Стальной стержень (вал) круглого переменного поперечного сечения подвержен действию скручивающих моментов. Подобрать из условия прочности поперечное сечение обеих частей вала: сеч.1 – круглое сплошное сечение диаметром d; сеч.2 – круглое полое (трубчатое) сечение с соотношением диаметров $\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}8$. Проверить жёсткость обеих частей вала при допустимом погонном угле закручивания 1,7 град/м. Построить эпюру крутящих моментов. Принять значения: расчётного сопротивления на срез: $R_{ср.} = 80$ МПа , модуля сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа .



• Определяем величину крутящего момента на каждом участке вала. Строим эпюру крутящих моментов.

• Определяем «опасное сечение» для каждого вида поперечного сечения:

для сеч.1: $M_{кр}^{max} = 24$ кН·м = 2400 кН·см,

для сеч.2: $M_{кр}^{max} = 16$ кН·м = 1600 кН·см.

• Определяем сечение вала из условия прочности: $\tau = \dfrac{M_{кр}}{W_p} \le R_{ср}$;

$R_{ср} = 80$ МПа $= 8$ кН/см^2; $W_p \ge \dfrac{M_{кр}^{max}}{R_{ср}}$.

Для сплошного круглого сечения:

$$W_p = 0,2d^3;\ d \ge \sqrt[3]{\frac{M_{кр}^{max}}{0,2R_{ср}}} = \sqrt[3]{\frac{2400}{0,2\cdot 8}} = 11,45 \text{ см}.$$

Принимаем $d_{спл.} = 12$ см.

Для полого круглого (трубчатого сечения):

$$W_p = 0,2D^3\left(1-\alpha^4\right) = 0,2D^3\left(1-0,8^4\right) = 0,12D^3;$$

$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{0{,}12R_{\text{ср}}}} = \sqrt[3]{\frac{1600}{0{,}12 \cdot 8}} = 11{,}86$ см. Принимаем $D_{\text{пол.}} = 12$ см. $d_{\text{пол.}} = 9{,}6$ см.

• Определяем полярные моменты инерции:

Сеч.1 (сплошное): $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 0{,}1d^4 = 0{,}1 \cdot 12^4 = 2074$ см^4 = $2074 \cdot 10^{-8}$ м^4;

Сеч.2 (полое): $I_p = 0{,}1\left(D^4 - d^4\right) = 0{,}1 \cdot \left(12^4 - 9{,}6^4\right) = 1224$ см^4 = $1224 \cdot 10^{-8}$ м^4.

• Проверяем жёсткость стержня. Для этого определяем значение погонного угла закручивания на каждой части стержня с одинаковым сечением при максимальном крутящем моменте и сравниваем его с допустимым значением в радианах. Условие жёсткости:

$\varphi' = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p} \leq \left[\varphi'\right]$, где $\left[\varphi'\right] = 1{,}7 \cdot \frac{3{,}14}{180} = 0{,}05$ рад/м.

Сеч. 1 (сплошное). $\varphi_1' = \frac{24}{8 \cdot 10^7 \cdot 2074 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0145 < 0{,}05$ рад/м.

Сеч. 2 (полое). $\varphi_2' = \frac{16}{8 \cdot 10^7 \cdot 1224 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0163 < 0{,}05$ рад/м.

Вывод: жёсткость обеспечена на всех участках.

• Определяем угол закручивания стержня на каждом участке по формуле $\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GI_p}$.

$\varphi_1 = \frac{12 \cdot 0{,}16}{8 \cdot 10^7 \cdot 1224 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{3{,}14} = 0{,}11^\circ$; $\varphi_2 = \frac{-16 \cdot 0{,}18}{8 \cdot 10^7 \cdot 1224 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{3{,}14} = -0{,}17^\circ$;

$\varphi_3 = \frac{-16 \cdot 0{,}25}{8 \cdot 10^7 \cdot 2074 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{3{,}14} = -0{,}14^\circ$;

$\varphi_4 = \frac{24 \cdot 0{,}3}{8 \cdot 10^7 \cdot 2074 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{3{,}14} = 0{,}25^\circ$.

• Строим эпюру изменения угла закручивания по оси стержня. Для этого определяем значения угла закручивания на границах участков. Построение эпюры начинаем от заделанного края:

$$\varphi_4 + \varphi_3 = 0,25 - 0,14 = 0,11^\circ .$$

$$\varphi_4 + \varphi_3 + \varphi_2 = 0,11 - 0,17 = -0,06^\circ .$$

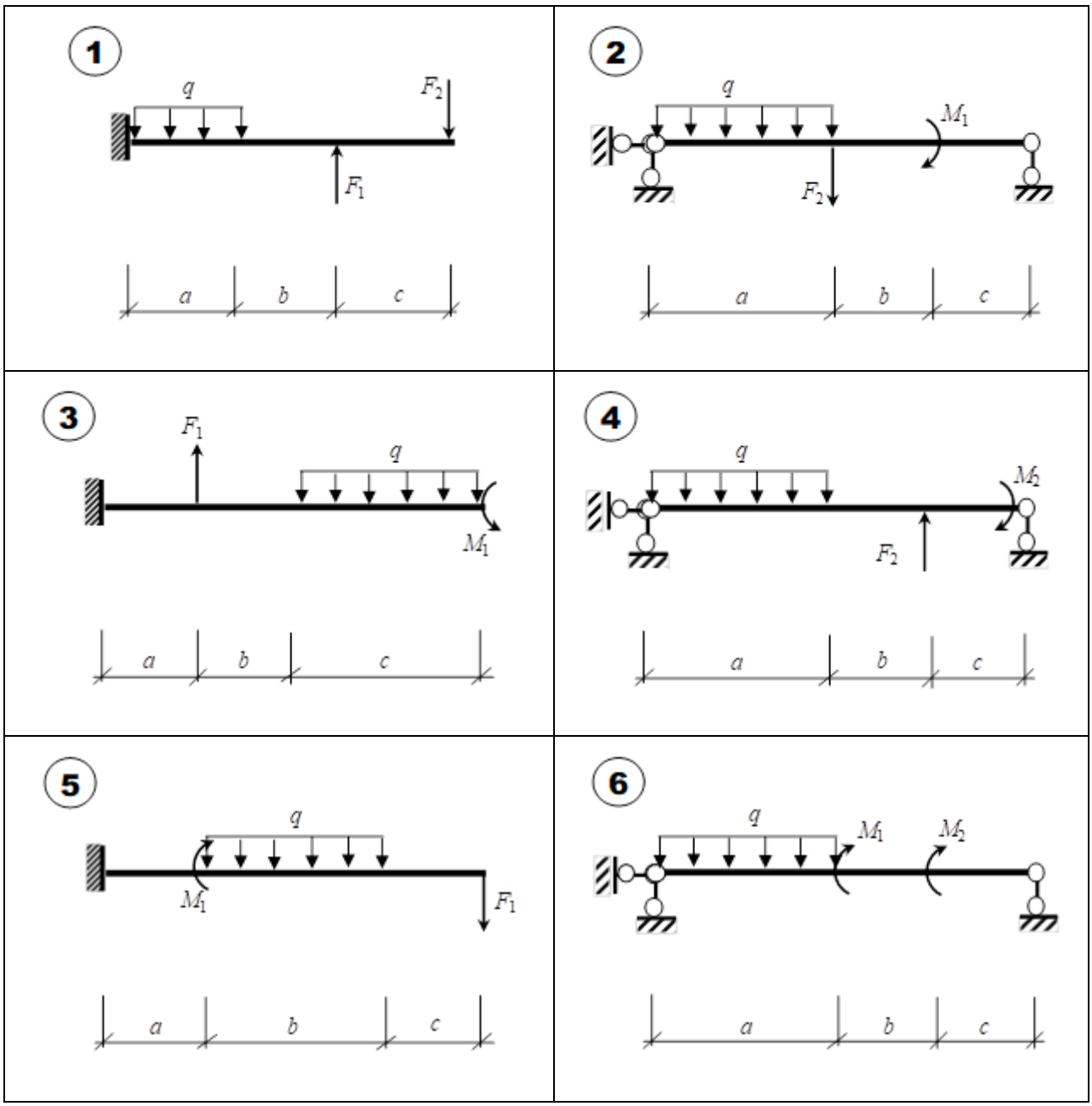
$$\varphi_4 + \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_1 = -0,06 + 0,11 = 0,05^\circ .$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Плоский изгиб прямолинейного стержня

Задача № 3.1. Построение эпюр усилий в балке при равномерно распределенной и сосредоточенных нагрузках

Задание: Дана схема статически определимой балки под нагрузкой. Требуется определить реакции опор балки и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Исходные данные к задаче определить по таблице 3.1 и схемам, представленным на рис. 3.1.



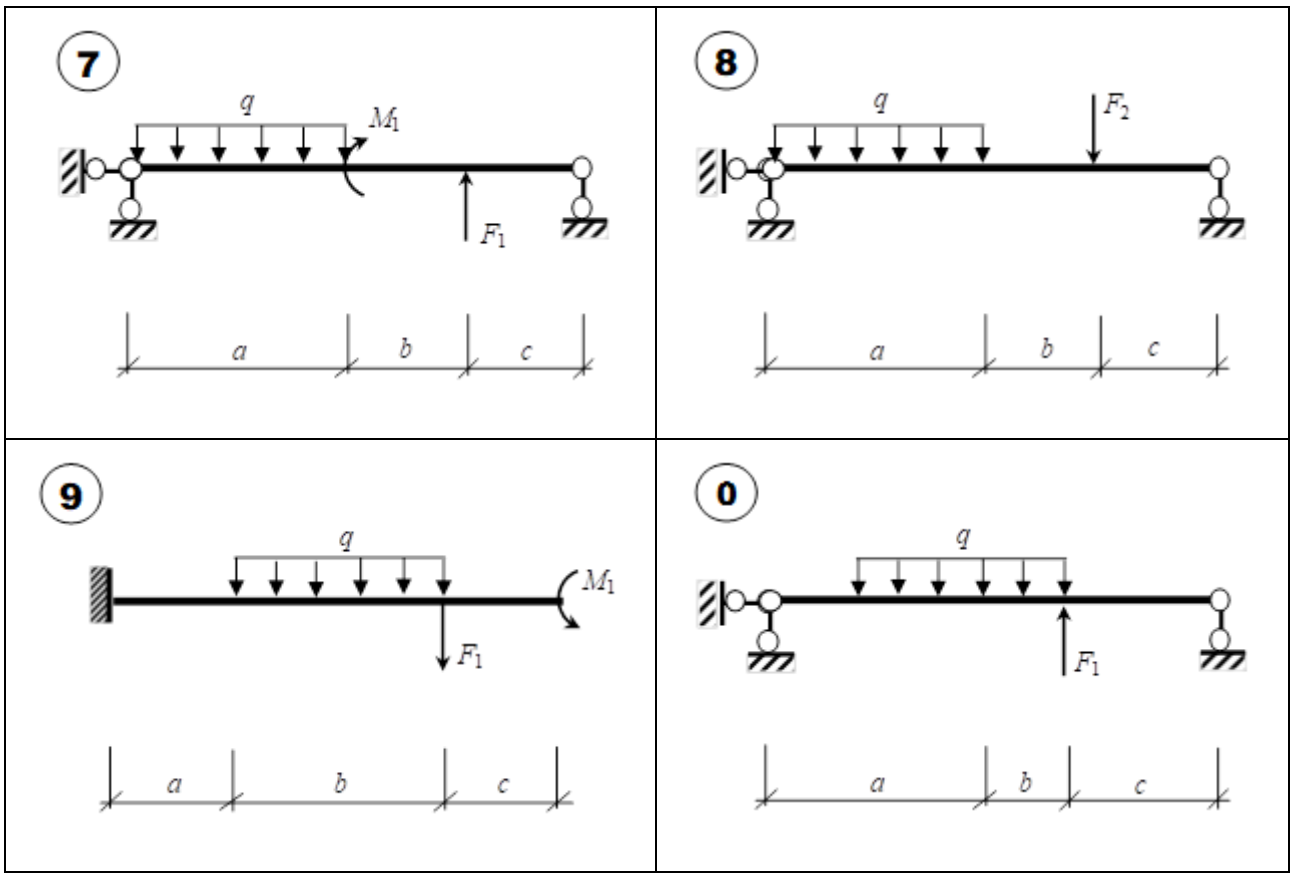


Рис. 3.1.

Таблица 3.1

Первая цифра шифра	F_1 кН	F_2 кН	a м	Вторая цифра шифра	M_1 кНм	M_2 кНм	q кН/м	b м	Третья цифра шифра № схемы	c м
0	10	8	1	0	10	5	2	2	0	3
1	12	5	2	1	4	8	3	1	1	4
2	4	6	3	2	5	20	4	3	2	2
3	6	12	1	3	12	6	6	4	3	2
4	5	10	2	4	8	10	5	3	4	1
5	15	9	3	5	6	4	8	2	5	3
6	8	4	1	6	3	9	2	1	6	1
7	9	3	2	7	15	10	4	3	7	1
8	14	7	3	8	5	12	3	3	8	2
9	10	15	1	9	20	16	6	2	9	2

Последовательность расчёта:

1. Изобразить в масштабе расчётную схему стержня с указанием размеров и всех необходимых для расчёта данных.

2. Определить реакции опор балки из условий ее равновесия.

3. Наметить расчетные сечения для определения усилий. Используя метод сечений, вычислить поперечные силы и изгибающие моменты в расчетных сечениях.

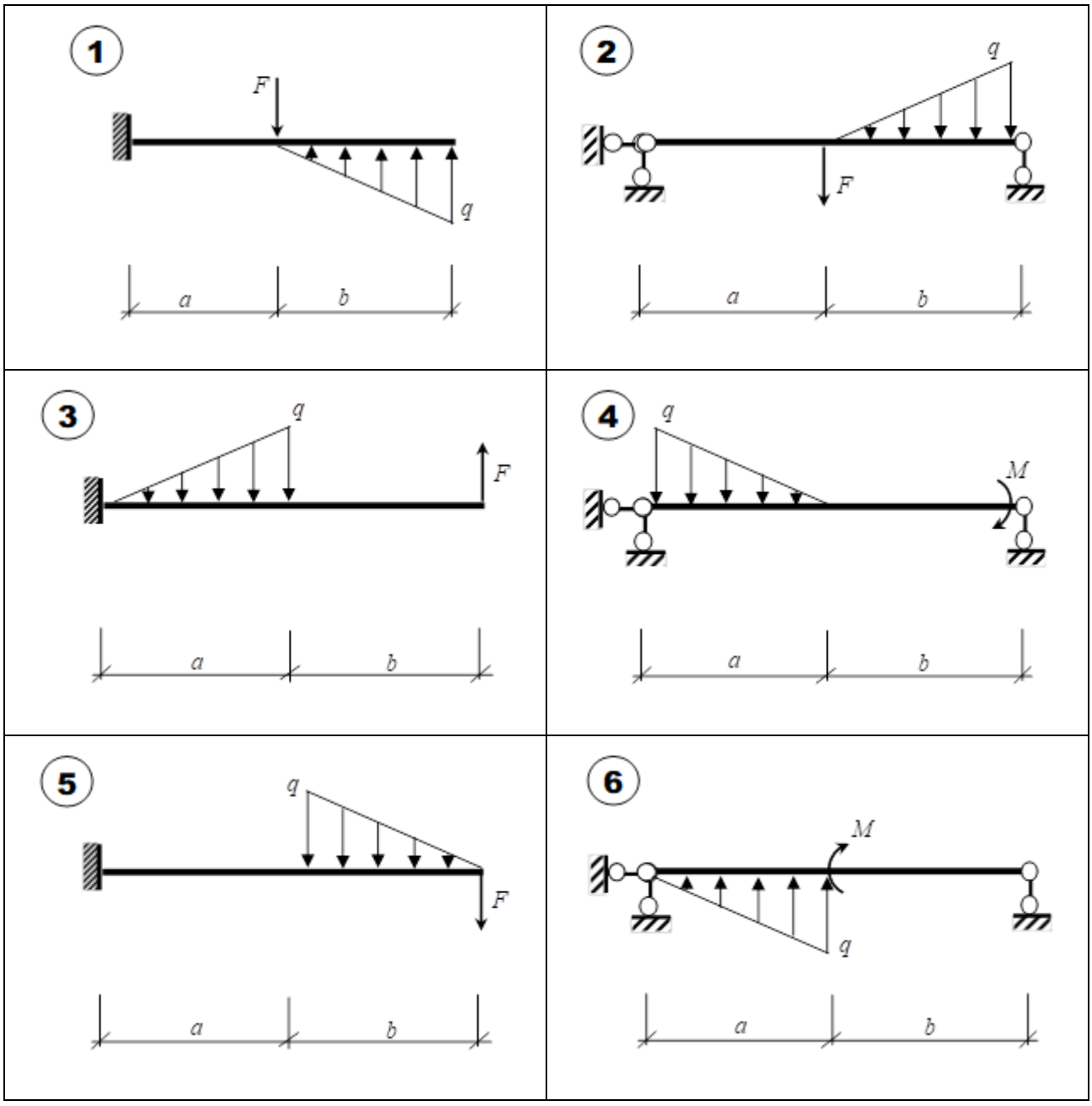
4. Выяснить наличие экстремума изгибающего момента на участке с равномерно распределенной нагрузкой. При существовании такого экстремума составить аналитические выражения для поперечной силы и изгибающего момента, определить точку экстремума и значение экстремума изгибающего момента.

5. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, используя вычисленные значения усилий.

6. Произвести визуальную проверку соблюдения следствий из дифференциальных зависимостей между усилиями и интенсивностью нагрузки на построенных эпюрах усилий.

Задача № 3.2. Построение эпюр усилий в балке при линейно распределенной и сосредоточенных нагрузках

Задание: Дана схема статически определимой балки под нагрузкой. Требуется определить реакции опор балки и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Исходные данные к задаче определить по таблице 3.2 и схемам, представленным на рис. 3.2.



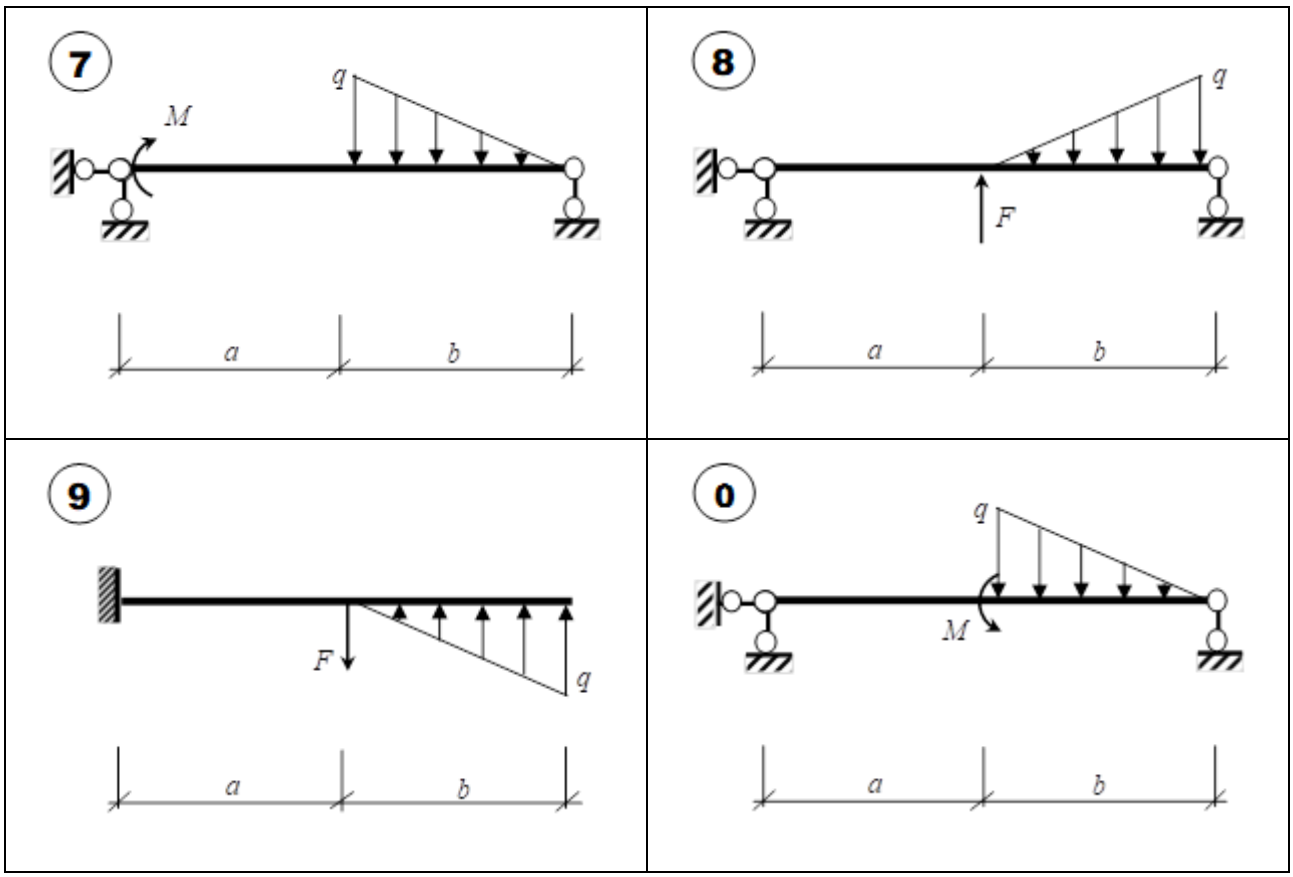


Рис. 3.2.

Таблица 3.2

Первая цифра шифра	F кН	a м	Вторая цифра шифра	M кНм	b м	Третья цифра шифра № схемы	q кН/м
0	10	1	0	10	2	0	2
1	12	2	1	4	1	1	3
2	4	3	2	5	3	2	4
3	6	1	3	12	4	3	6
4	5	2	4	8	3	4	5
5	15	3	5	6	2	5	8
6	8	1	6	3	1	6	2
7	9	2	7	15	3	7	4
8	14	3	8	5	3	8	3
9	10	1	9	20	2	9	6

Последовательность расчёта:

1. Изобразить в масштабе расчётную схему стержня с указанием размеров и всех необходимых для расчёта данных.

2. Определить реакции опор балки из условий ее равновесия.

3. Наметить расчетные сечения для определения усилий. Используя метод сечений, вычислить поперечные силы и изгибающие моменты в расчетных сечениях.

4. Выяснить наличие экстремума изгибающего момента на участке с равномерно распределенной нагрузкой. При существовании такого экстремума составить аналитические выражения для поперечной силы и изгибающего момента, определить точку экстремума и значение экстремума изгибающего момента.

5. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, используя вычисленные значения усилий.

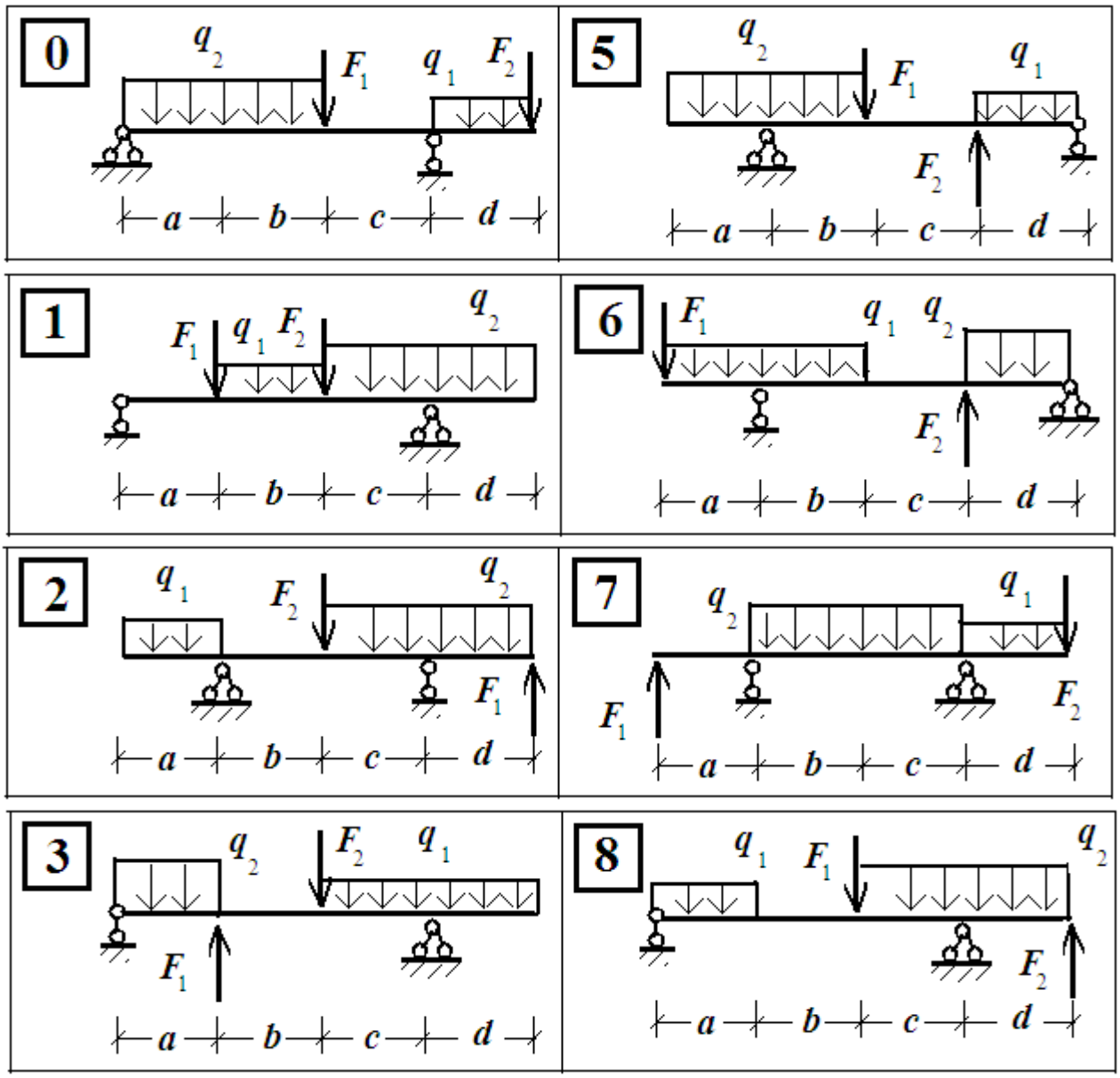
6. Произвести визуальную проверку соблюдения следствий из дифференциальных зависимостей между усилиями и интенсивностью нагрузки на построенных эпюрах усилий.

Задача № 3.3. Подбор сечения стальной двутавровой балки при изгибе из условия прочности

Задание: Определить усилия в изгибаемой балке. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Подобрать сечение стальной двутавровой балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

Проверить прочность по касательным и эквивалентным напряжениям. Принять значения: расчётного сопротивления материала на растяжение и сжатие $R = 240$ МПа, расчётного сопротивления материала на сдвиг $R = 130$ МПа, коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$, $d = 1$ м.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 3.3 и схемам, представленным на рис. 3.3.



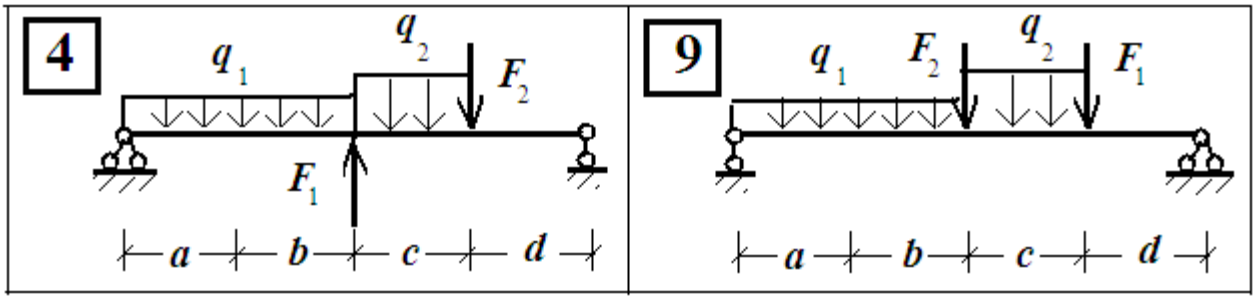


Рис. 3.3.

Таблица 3.3

Первая цифра шифра	F_1 кН	F_2 кН	Вторая цифра шифра	q_1 кН/м	q_2 кН/м	a м	Третья цифра шифра № схемы	b м	c м
0	100	0	0	0	30	1	0	2	4
1	0	100	1	40	0	2	1	1	5
2	120	0	2	0	20	3	2	3	2
3	0	120	3	50	0	2	3	4	2
4	200	0	4	0	40	1	4	5	1
5	0	200	5	20	0	3	5	2	3
6	60	0	6	0	50	1	6	4	1
7	0	60	7	30	0	2	7	5	1
8	150	0	8	0	60	1	8	3	2
9	0	150	9	20	0	3	9	2	4

Последовательность расчёта:

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить опорные реакции.

3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

4. Определить «опасное сечение» с максимальным изгибающим моментом и «опасную точку» с максимальными нормальными напряжениями в этом сечении.

5. Из условия прочности по нормальным напряжениям определить требуемый осевой момент сопротивления и подобрать сечение стальной двутавровой балки.

6. Определить «опасное сечение» с максимальной поперечной силой и «опасную точку» с максимальными касательными

напряжениями в этом сечении. Определить максимальную поперечную силу и проверить прочность по касательным напряжениям.

7. Определить «опасное сечение» и «опасную точку» в сечении из условия прочности по эквивалентным напряжениям (по IV теории прочности). Вычислить нормальные и касательные напряжения в «опасной точке опасного сечения». Определить величину эквивалентных напряжений. Сравнить её с расчётным сопротивлением.

Пример расчёта

Подобрать сечение двутавровой стальной балки из условия прочности по нормальным напряжениям. Проверить прочность балки по касательным напряжениям и по эквивалентным напряжениям.

Принять значения: расчётного сопротивления материала на растяжение и сжатие $R = 240$ МПа, расчётного сопротивления материала на сдвиг $R = 130$ МПа, коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$.

• Определяем опорные реакции: $\sum X = 0$. $B_x = 0$.

$\sum M_B = 0$. $-46 \cdot 1,2 - 78 \cdot 2,6 + 55 \cdot 2,2 \cdot 3,7 - C \cdot 4 = 0$. $C = 47,425$ кН.

$\sum M_C = 0$. $-55 \cdot 2,2 \cdot 0,3 + 78 \cdot 1,4 + -46 \cdot 5,2 + B \cdot 4 = 0$. $B = 41,575$ кН.

Проверка: $\sum Y = 0$. $41,575 + 47,425 - 46 - 55 \cdot 4 = 0$.

• Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Определяем максимальный изгибающий момент:

«Опасное сечение» – сечение A. $M^{\max} = 66,705$ кН·м = 66705 кН·см; «опасная точка» в сечении – точка 1.

• Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma^{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} \le R \text{ (сечение } A\text{, точка 1)};$$

$$W_z \ge \frac{M_z^{\max}}{R}; \; R = 240 \text{ МПа} = 24 \text{кН/см}^2;$$

$$W_z \ge \frac{6670,5}{24} = 277,94 \text{ см}^3.$$

Выбираем двутавр № 24: геометрические характеристики: $W_z = 289$ см^3; $I_z = 3460$ см^4; $S_z = 163$ см^3; размеры: h = 24 см; b = 11,5 см; s = 0,56 см; t = 0,95 см.

Реальное напряжение в точке A: $\sigma^{max} = \dfrac{6670,5}{289} = 23,08$ кН / см^2.

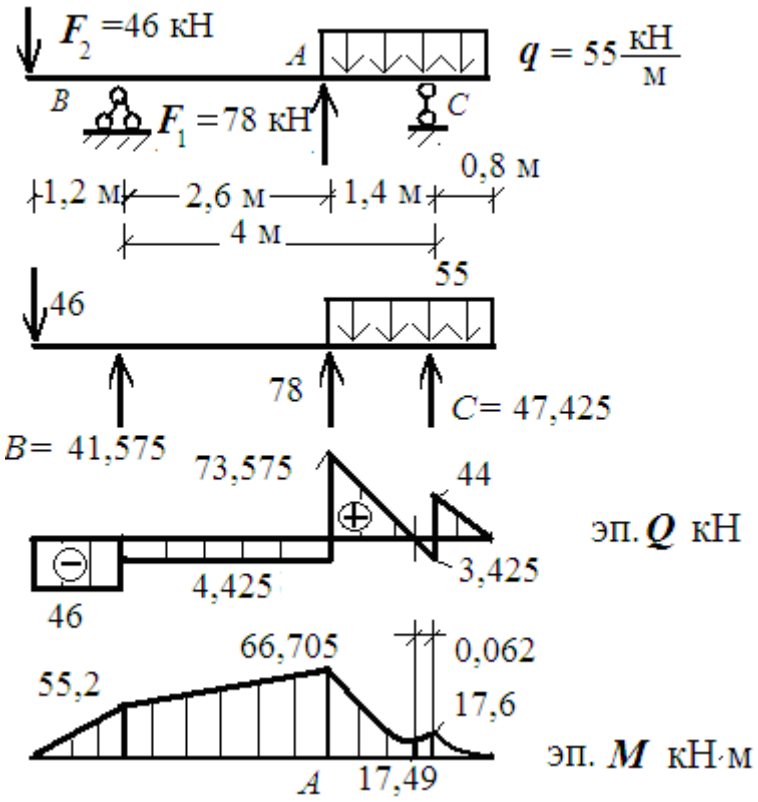
• Изображаем в масштабе сечение двутавра. Строим эпюры нормальных и касательных напряжений. Определяем «опасные точки» в сечении.

• Определяем максимальную поперечную силу: $Q^{max} = 73,575$ кН («опасное сечение» A, «опасная точка» 2).

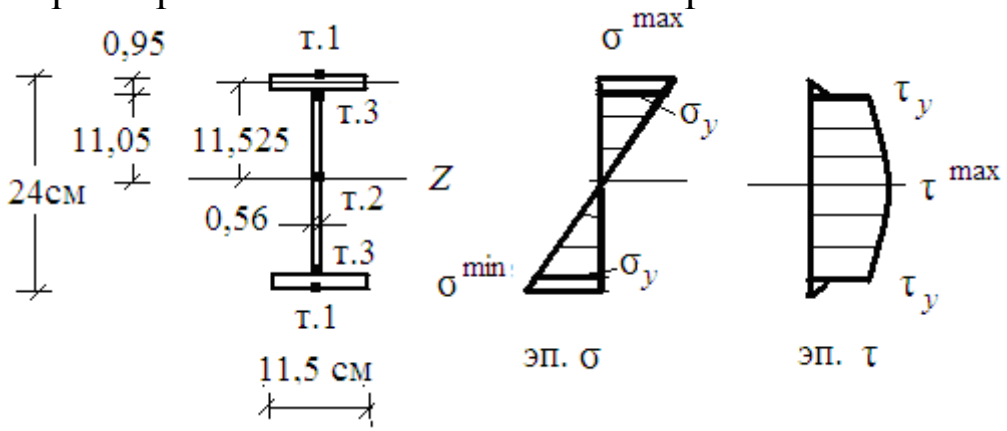
• Проверяем прочность по касательным напряжениям. Сравниваем касательные напряжения с расчётным сопротивлением материала на срез. Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau^{max} = \frac{Q^{max} S_z^{отс}}{sI_z} \le R_{ср};\ R_{ср} = 130 \text{ МПа} = 13 \text{ кН/см}^2.$$

$$\tau^{max} = \frac{73,575 \cdot 163}{0,56 \cdot 3460} = 6,19 \text{ кН/см}^2 < 13 \text{ кН/см}^2.$$



Эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении:



Вывод: прочность обеспечена.

• Определяем «опасное сечение» *A* и «опасную точку» 3 в сечении из условия прочности по эквивалентным напряжениям (по IV теории прочности). Вычисляем нормальные и касательные напряжения в этой точке:

$$\sigma_y = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{6670,5}{3460} \cdot 11,05 = 21,3 \text{ кН/см}^2.$$

Здесь $y = 12 - 0,95 = 11,05$ см.

$$\tau_y = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{sI_z} = \frac{QA^{\text{отс}}}{sI_z} \cdot y_C^{\text{отс}} = \frac{73,595 \cdot 10,93 \cdot 11,525}{0,56 \cdot 3460} = 4,78 \text{ кН/см}^2.$$

Здесь $S_y^{\text{отс}} = A^{\text{отс}} y^{\text{отс}}$; $A^{\text{отс}} = 11,5 \cdot 0,95 = 10,93$ см^2 – площадь отсеченной части; $y_C^{\text{отс}} = 12 - \frac{0,95}{2} = 11,525$ см – расстояние от центра тяжести отсеченной части до главной оси сечения z.

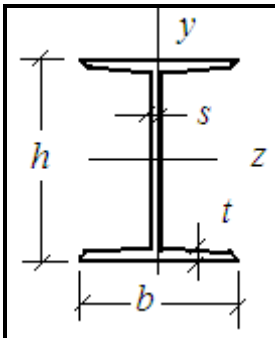
Определяем величину эквивалентных напряжений и сравниваем её с расчётным сопротивлением. Условие прочности по эквивалентным напряжениям:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_y^2 + 3\tau_y^2} \le R; \ \sqrt{21,3^2 + 3 \cdot 4,78^2} = 22,85 < 24 \text{ кН/см}^2.$$

Вывод: прочность обеспечена.

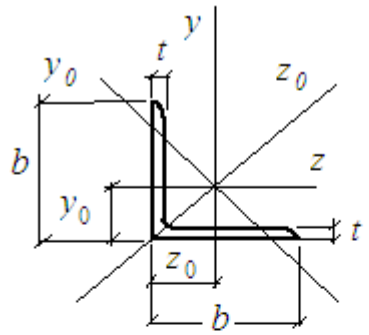
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Таблицы сортамента прокатной стали



Двутавры горячекатаные
(ГОСТ 8239 – 89)

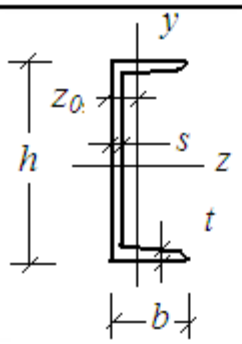
№	Масса 1 п.м., кг	Размеры, мм				A, см^2	I_z, см^4	W_z, см^3	i_z, см	S_z, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1280	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	365	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54



Уголки горячекатаные равнополочные

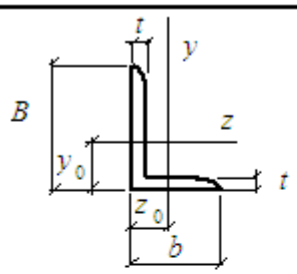
(по ГОСТ 8509 – 93)

№ Уголка	Масса 1п.м. кг	Размеры мм		A см^2	I_z см^4	i_z см	$I_{z_o}^{max}$ см^4	$i_{z_o}^{max}$ см	$I_{y_o}^{max}$ см^4	$i_{y_o}^{max}$ см	$\lvert I_{zy} \rvert$ см^4	z_o см
		b	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,3 8
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,7 3	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,5 2
	4,25		5	5,41	16	1,7 2	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,5 7
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,8	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,6
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	7,36	80	6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51



Швеллеры горячекатаные (ГОСТ 8240 – 89)

№ швеллера	Масса 1 п.м., кг	Размеры, мм				A, см^2	I_z, см^4	W_z, см^3	i_z, см	S_z, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	z_0, см
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	133	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	194
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,7	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,4	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

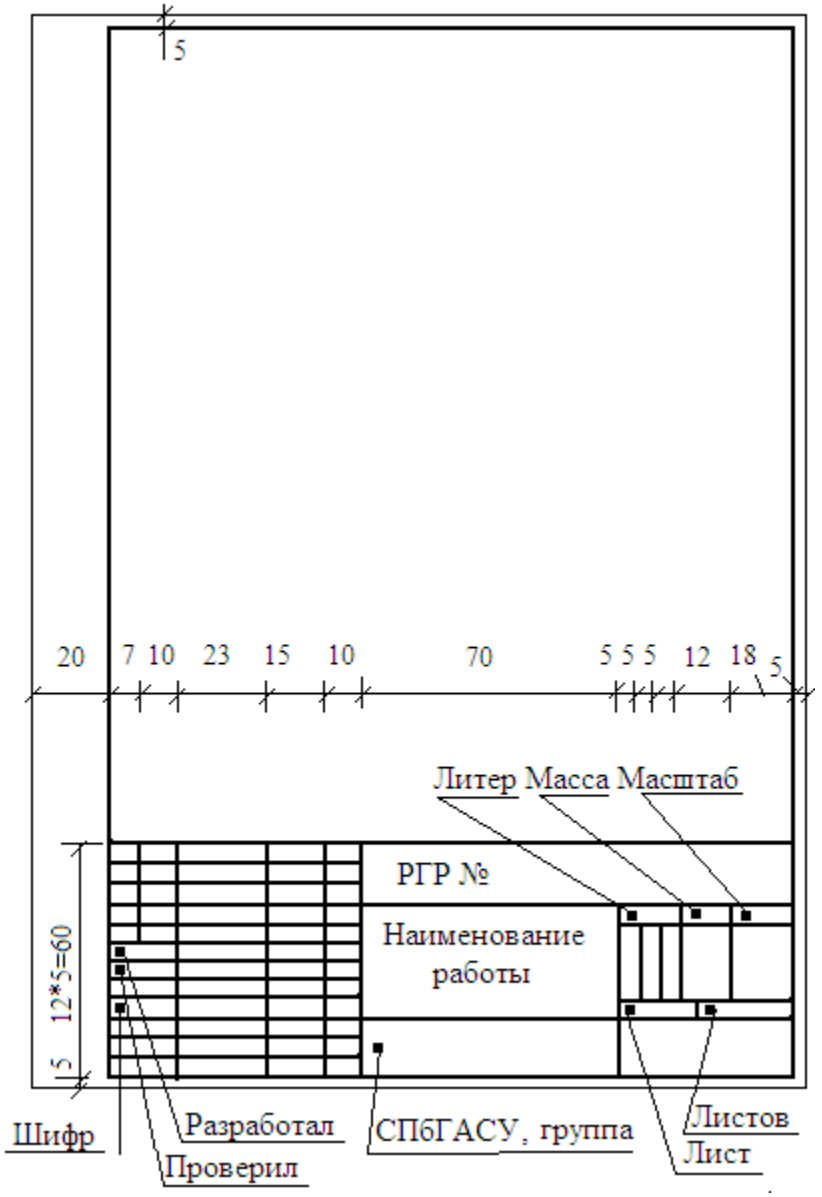


Уголки стальные горячекатаные неравнополчные (ГОСТ 8240 – 89)

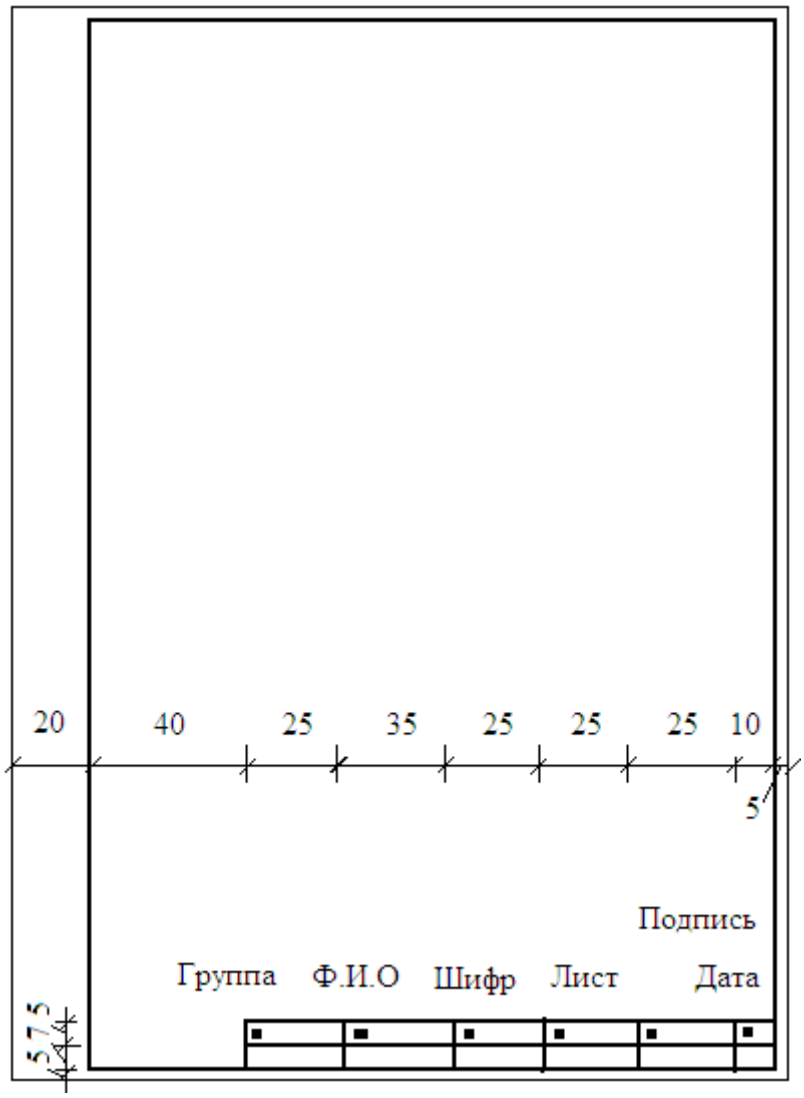
№ уголка	Масса 1 п.м., кг	Размеры, мм			A, см^2	I_z, см^4	i_z, см	I_y, см^4	i_y, см	z_0, см	y_0, см
		B	b	t							
5/3,2	2,4	50	32	4	3,17	7,9	1,59	2,56	0,9	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	1,17	2,39
9/5,6	6,7	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	1,42	3,23
	8,7			7	11,1	113	3,19	35	1,78	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	1,5	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	1,64	3,61
12,5/8	11	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	1,8	4,01
	12,6			8	16	256	4	83	2,28	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18	364	4,49	120	2,58	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	2,12	4,58
16/10	18	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	2,28	5,23
	23,6			12	30	784	5,11	239	2,82	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,8	275	3,12	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,1	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	2,79	6,5
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	2,99	6,71

Приложение 2.

Образец оформления первого листа расчета
(формат листа А-4)



Образец оформления последующих листов расчета
(формат листа А-4)



Рекомендуемая литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П., Сопротивление материалов, М.: «Высшая школа», 1995.

2. Дарков А.В., Шапиро Г.С., Сопротивление материалов, «Высш. школа», 1989.

3. Феодосьев В.И., Сопротивление материалов, М.: изд-во МГТУ им. Баумана, 2000.

4. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В., Справочник по сопротивлению материалов, Киев: «Наукова думка», 1988.

Содержание

КР № 1. Осевое растяжение и сжатие стержня. 4
Задача № 1.1. Определение усилий, напряжений и деформаций в стержне при растяжении и сжатии. 4
Задача № 1.2. Подбор сечения статически определимого стержня при растяжении-сжатии. 9
Задача № 1.3. Расчет статически неопределимого стержня при растяжении и сжатии. 12
Задача № 1.4. Расчет статически неопределимой стержневой системы при растяжении и сжатии. 16
КР № 2. Плоское напряженное состояние. Кручение. 19
Задача № 2.1. Исследование плоского напряженного состояния. 19
Задача № 2.2. Исследование плоского напряженного состояния. Проверка прочности. 23
Задача № 2.3. Подбор круглого сечения стержня (вала) при кручении. 25
КР № 3. Плоский изгиб прямолинейного стержня. 30
Задача № 3.1. Построение эпюр усилий в балке при равномерно распределенной и сосредоточенных нагрузках. 30
Задача № 3.2. Построение эпюр усилий в балке при линейно распределенной и сосредоточенных нагрузках. 33
Задача № 3.3. Подбор сечения стальной двутавровой балки из условия прочности. 36
Приложения 42
Рекомендуемая литература 48