# СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Цель работы: ознакомиться с методикой синтеза классических цифровых фильтров с помощью пакета MATLAB.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

### Классические низкочастотные фильтры

Идеальный низкочастотный фильтр должен пропускать без ослабления (без уменьшения амплитуды) гармонические сигналы в интервале частот $0 \le \omega \le \omega_c$ и полностью подавлять (не пропускать на выход) сигналы других частот. АЧХ такого фильтра должна иметь прямоугольный вид, как это показано пунктиром на рис.1,а. Как известно, фильтр с такой характеристикой физически нереализуем, поэтому на практике используют различные аппроксимации указанной АЧХ с помощью дробно-рациональных передаточных функций. Наибольшую известность получили фильтры Баттерворта, Чебышёва и эллиптические фильтры.

Передаточные функции фильтров Баттерворта и Чебышёва имеют вид $Q(p) = {}^{1}\!/\!{}_{A_n(p)}$, где $A_n(p)$ – некоторый полином $n$-го порядка, передаточная функция эллиптического фильтра имеет вид $Q(p) = B_{n-1}(p)/A_n(p)$. Эти фильтры отличаются критерием, используемым при аппроксимации и видом получаемых АЧХ. Примерный вид амплитудно-частотных характеристик этих фильтров показан на рис.1,а,б,в.

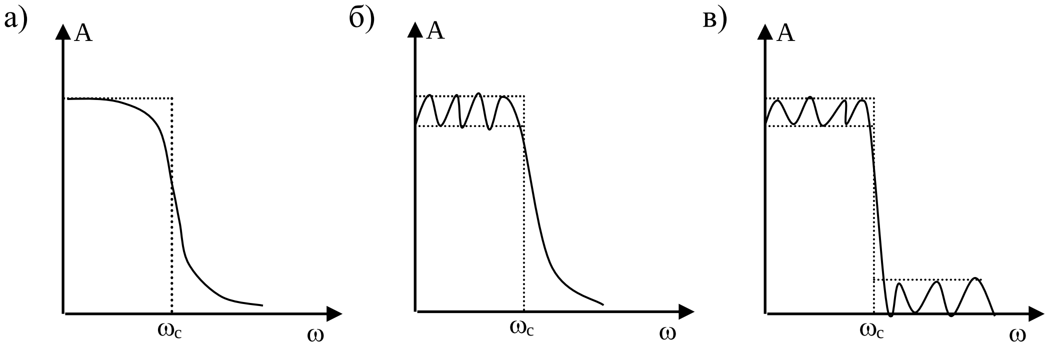


Рис.1. Примерный вид АЧХ фильтров Баттерворта (а), Чебышева (б) и эллиптического фильтра (в)

У фильтра Баттерворта АЧХ монотонно убывает, характеристика фильтра Чебышева обеспечивает равноволновую аппроксимацию идеальной характеристики в полосе пропускания, АЧХ эллиптического фильтра имеет равноволновый вид как в полосе пропускания, так и в высокочастотной области.

Фильтры Баттерворта. При построении фильтров Баттерворта используется простой методический прием. Он опирается на то обстоятельство, что графики функций $\dfrac{1}{1+\omega^{2n}}$ при больших $n$ близки по форме к характеристике идеального фильтра. Действительно, при $\omega < 1$ вторым слагаемым в знаменателе можно пренебречь, т.е. дробь близка к единице. Напротив, при $\omega > 1$ это слагаемое быстро растет и дробь становится близкой к нулю.

Остается найти устойчивую передаточную функцию $Q(p)$, квадрат АЧХ которой $Q(j\omega)Q^*(j\omega)$ имеет указанный вид. Она может быть записана в форме $Q(p) = \dfrac{1}{A_n(p)}$, где

$A_n(p)$ – полином с корнями в левой полуплоскости. Для этого полинома должно выполняться равенство

$$A_n(p)\cdot A_n(-p)=1+\left(p/j\right)^{2n}=1+\left(-1\right)^n p^{2n}.$$

Все $2n$ корней полинома, стоящего справа, равномерно расположены на единичной окружности. Корни полиномов $A_n(p)$ и $A_n(-p)$ должны быть расположены симметрично относительно обеих осей координат. Взяв в качестве корней $A_n(p)$ корни, лежащие на левой полуокружности, и в качестве корней $A_n(-p)$ – корни, лежащие на правой полуокружности, мы одновременно выполним условия симметричности распределения корней и устойчивости полинома $A_n(p)$. Полученная таким образом передаточная функция $Q(p)=\dfrac{1}{A_n(p)}$ и будет характеризовать фильтр Баттерворта $n$–го порядка. Такой фильтр имеет монотонно убывающую АЧХ с максимально плоской вершиной и сравнительно длинным "хвостом" (рис. 1,а). Его полюсы равномерно распределены на единичной полуокружности, как это показано на рис. 2 для $n = 5$.

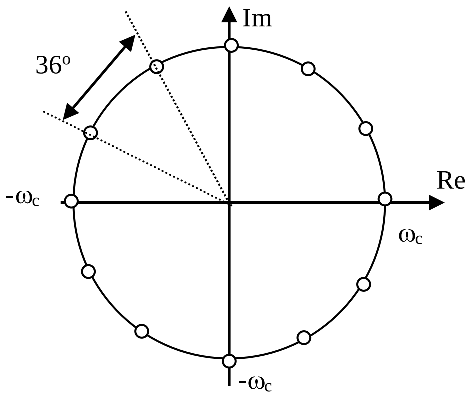


Рис.2. Расположение полюсов АЧХ фильтра Баттерворта 5-го порядка

Приведем вид полиномов Баттерворта для $n = 1, 2, 3, 4$:

$A_1(p)=p+1;\ A_2(p)=p^2+\sqrt{2}p+1;\ A_3(p)=p^3+2p^2+2p+1;$

$A_4(p)=p^4+2{,}61p^3+3{,}41p^2+2{,}61p+1.$

Коэффициенты этих полиномов определяются тригонометрическими формулами, в частности, $a_i=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}$. Расположение полюсов соответствующих фильтров Баттерворта, показано на рис. 3, полюсы для $n = 5$ выделены на рис. 2 кружками.

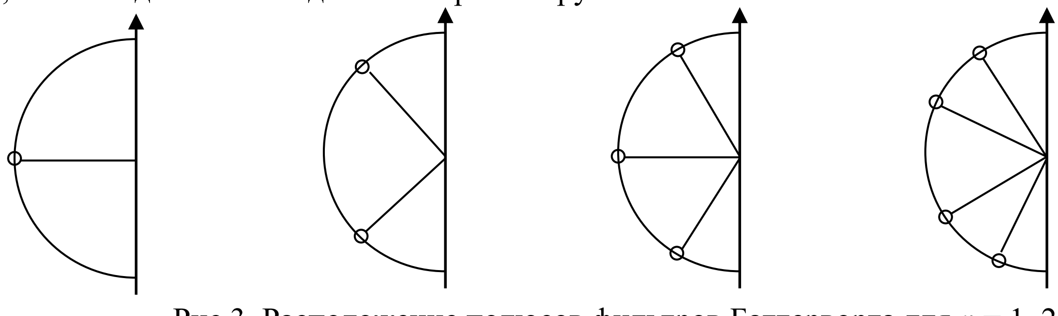

Рис.3. Расположение полюсов фильтров Баттерворта для $n = 1, 2, 3, 4$

<u>Фильтры</u> <u>Чебышёва.</u> При построении фильтров Чебышёва применяется тот же методический прием, что и для фильтров Баттерворта, только для аппроксимации

характеристики идеального фильтра низкой частоты вместо функции $\frac{1}{1+\omega^{2n}}$ используется функция $\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega)}$, где $T_n$ – полином Чебышева порядка $n$.

Значения полиномов Чебышева при $\omega < 1$ по абсолютной величине не превышают единицы, а при $\omega > 1$ быстро возрастают. Поэтому, как и для фильтра Баттерворта в интервале $0 \le \omega < 1$ дробь будет близка к единице, а вне этого интервала – к нулю.

Благодаря равноволновому характеру колебаний полиномов Чебышева, фильтр Чебышева обеспечивает минимум максимального отклонения АЧХ от идеальной характеристики в полосе пропускания. Параметр $\varepsilon$ определяет абсолютную величину этого отклонения.

Два первых полинома Чебышева имеют вид $T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1$, остальные могут быть найдены с помощью рекурсивной формулы

$$T_{n+1}(x) = 2T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Эти полиномы характеризуются колебаниями одинаковой амплитуды в заданном диапазоне $x$, что приводит к АЧХ вида рис. 1,б. Эта функция имеет равновеликие пульсации в полосе пропускания, а за ее пределами монотонно спадает. Размах пульсаций определяется выражением $\delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$.

Полюсы фильтра Чебышева располагаются на эллипсе, который полностью определяется заданными значениями $\varepsilon$ и $n$.

Эллиптические фильтры. Математическое описание эллиптических фильтров довольно сложно. Оно опирается на теорию эллиптических функций Якоби sn u, cn u (так называемые синус амплитуды и косинус амплитуды), которые вводятся через интегралы специального вида. Передаточная функция эллиптического фильтра представляет собой отношение двух полиномов, т.е. имеет не только полюсы, но и нули. За счет этого оказывается возможным обеспечить равноволновой характер АЧХ как в низкочастотной, так и высокочастотной областях, выбирая амплитуду пульсаций независимо. При этом обеспечивается более крутой спад характеристики на частоте среза, чем у фильтра Чебышева того же порядка.

Рассмотрим в качестве примера эллиптический фильтр 5-го порядка, передаточная функция которого имеет вид:

$$Q(p) = \frac{0{,}11618p^4 + 0{,}73207p^2 + 1}{4{,}189p^5 + 6{,}3134p^4 + 10{,}4846p^3 + 8{,}7932p^2 + 5{,}6754p + 2}.$$

Ей отвечает АЧХ, приведенная в центральной части рис. 6.

В верхней и нижней частях этого рисунка в укрупненном виде показаны равноволновые колебания амплитудной характеристики в полосе пропускания и полосе задерживания. Величина пульсаций составляет 0,01 в низкочастотной области и 0,005 после частоты среза, т.е. 2% и 1% соответственно.

Передаточная функция имеет 2 пары чисто мнимых нулей [± 2.0734$i$; ± 1.4150$i$], которым отвечают два минимума в нижней части АЧХ на рис.6, а также пять полюсов [-0.0923±1.0424$i$; -0.3629±0.7738$i$; -0.5968], которым соответствуют резонансные всплески на верхней части АЧХ.

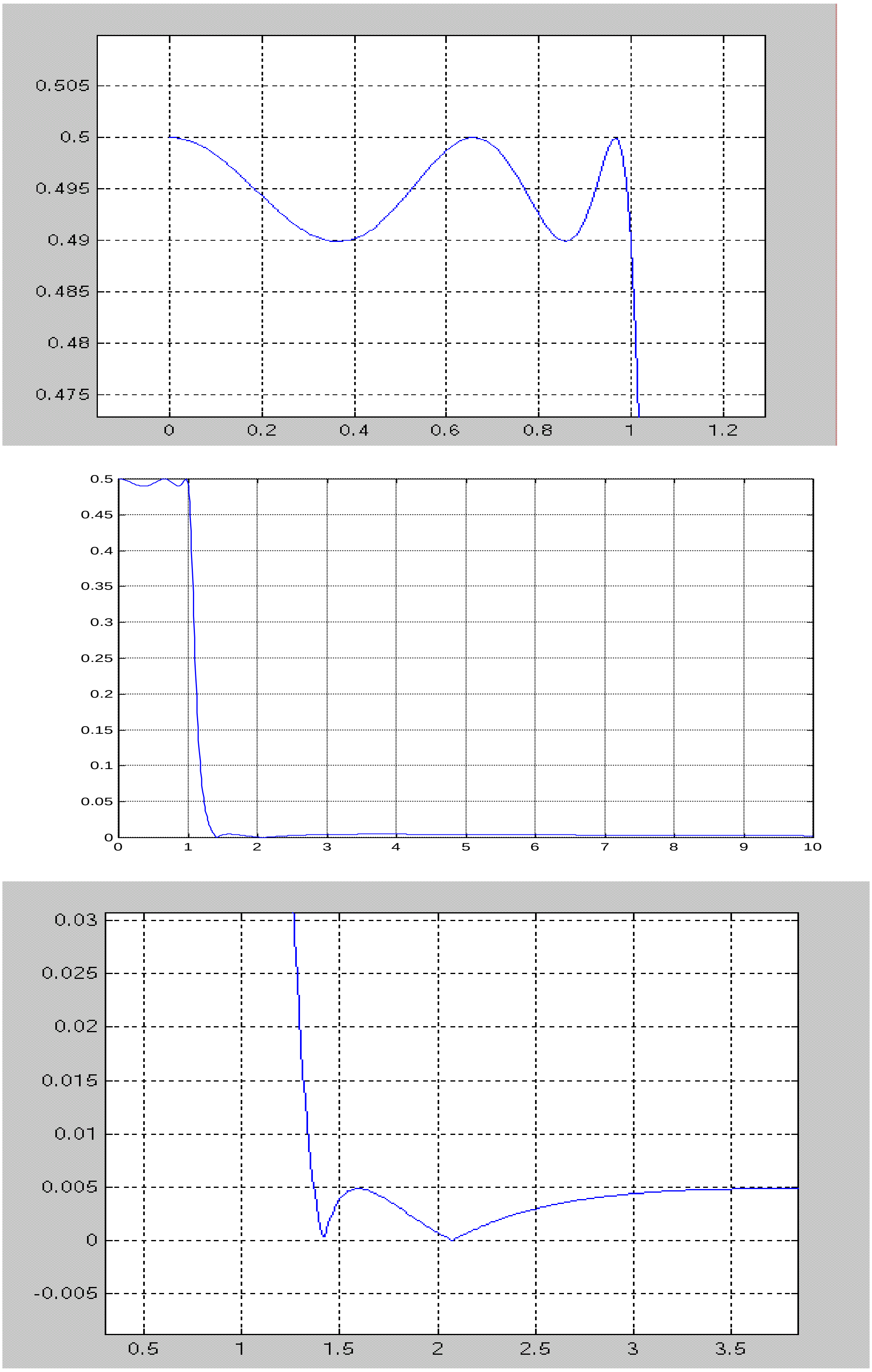


Рис.6. АЧХ эллиптического фильтра

Расположение нулей и полюсов фильтра на комплексной плоскости показано на рис. 7.

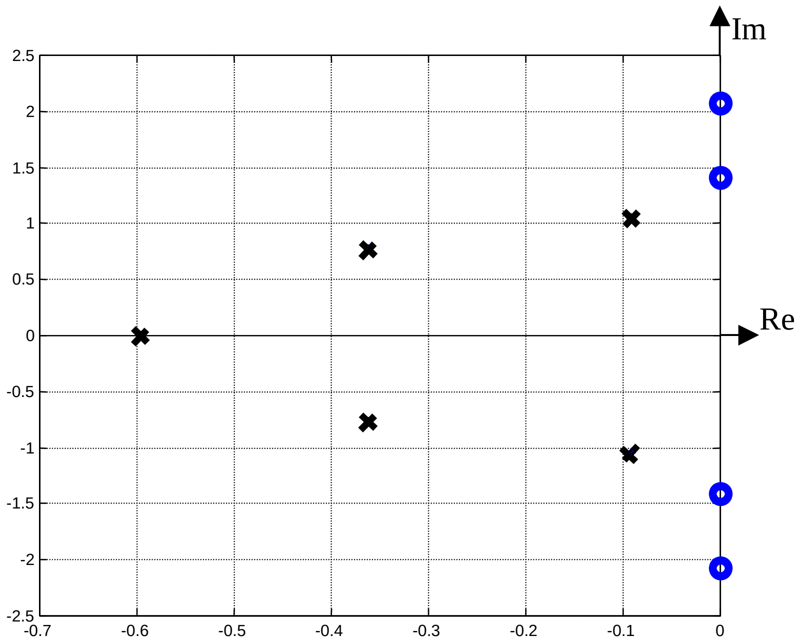


Рис.7. Расположение нулей и полюсов эллиптического фильтра

**Реализация фильтров в пакете MATLAB**

В пакете MATLAB имеются специальные команды, позволяющие синтезировать различные фильтры и осуществлять обработку сигналов с их помощью. Почти все они сосредоточены в тулбоксе "Signal". В первую очередь здесь следует назвать команды Buttap, Cheb1ap, Cheb2ap, Ellipap, предназначенные для построения аналоговых фильтров Баттерворта, двух разновидностей фильтров Чебышева и эллиптических фильтров. Соответствующие цифровые фильтры строятся с помощью команд Butter, Cheby1, Cheby2, Ellip.
Ниже приводится более полная информация об этих и других командах тулбокса Signal.

<u>Аналоговые низкочастотные прототипы фильтров</u>.
Buttap - прототип Фильтра Баттерворта.
Cheb1ap - прототип Фильтра Чебышева первого типа (равноволновые колебания в полосе пропускания).
Cheb2ap - прототип Фильтра Чебышева второго типа (равноволновые колебания в полосе подавления).
Ellipap - прототип эллиптического фильтра.

<u>Цифровые БИХ- фильтры.</u>
Butter - цифровой фильтр Баттерворта.
Cheby1 - цифровой Фильтр Чебышева первого типа.
Cheby2 - цифровой Фильтр Чебышева второго типа.
Ellip - цифровой эллиптический фильтр.

Синтаксис команд поясним на примере эллиптического фильтра.

`[B,A] = ELLIPAP (n, Rp, Rs)` формирует передаточную функцию низкочастотного аналогового эллиптического фильтра n-го порядка, Rp и Rs характеризуют амплитуду равноволновых колебаний (в децибелах) в полосе пропускания и в полосе подавления, Wn – ширина полосы пропускания.

[B,A] = ELLIP (n, Rp, Rs, Wn) формирует передаточную функцию низкочастотного цифрового эллиптического фильтра n-го порядка, Rp и Rs характеризуют амплитуду равноволновых колебаний (в децибелах) в полосе пропускания и в полосе подавления, Wn – ширина полосы пропускания.

Ниже приводится примеры синтеза классических фильтров в пакете MATLAB

```
» [z,p,k]=cheb1ap(8,1);  %8- порядок фильтра, 1- величина пульсаций в полосе пропускания/10
»w=0:0.01:4;
```

```
»h=freqs(k*poly(z),poly(p),w); plot(w,abs(h));
» [z,p,k]=cheb2ap(8,20); % z,p,k – это нули, полюсы, и коэффициент усиления фильтра
»w=0:0.01:4;                    %8- порядок фильтра,  20- подавление в полосе задерживания в децибелах
» [z,p,k]=ellipap(8,1/2,30);  %8- порядок фильтра, 30- подавление в полосе задерживания в децибелах
                                                    %1/2- амплитуда пульсаций в полосе пропускания
»h=freqs(k*poly(z),poly(p),w); plot(w,abs(h));
» h=freqs(k*poly(z),poly(p),w); plot(w,abs(h));
» [z,p,k]=buttap(8);
» h=freqs(k*poly(z),poly(p),w); plot(w,abs(h));
```

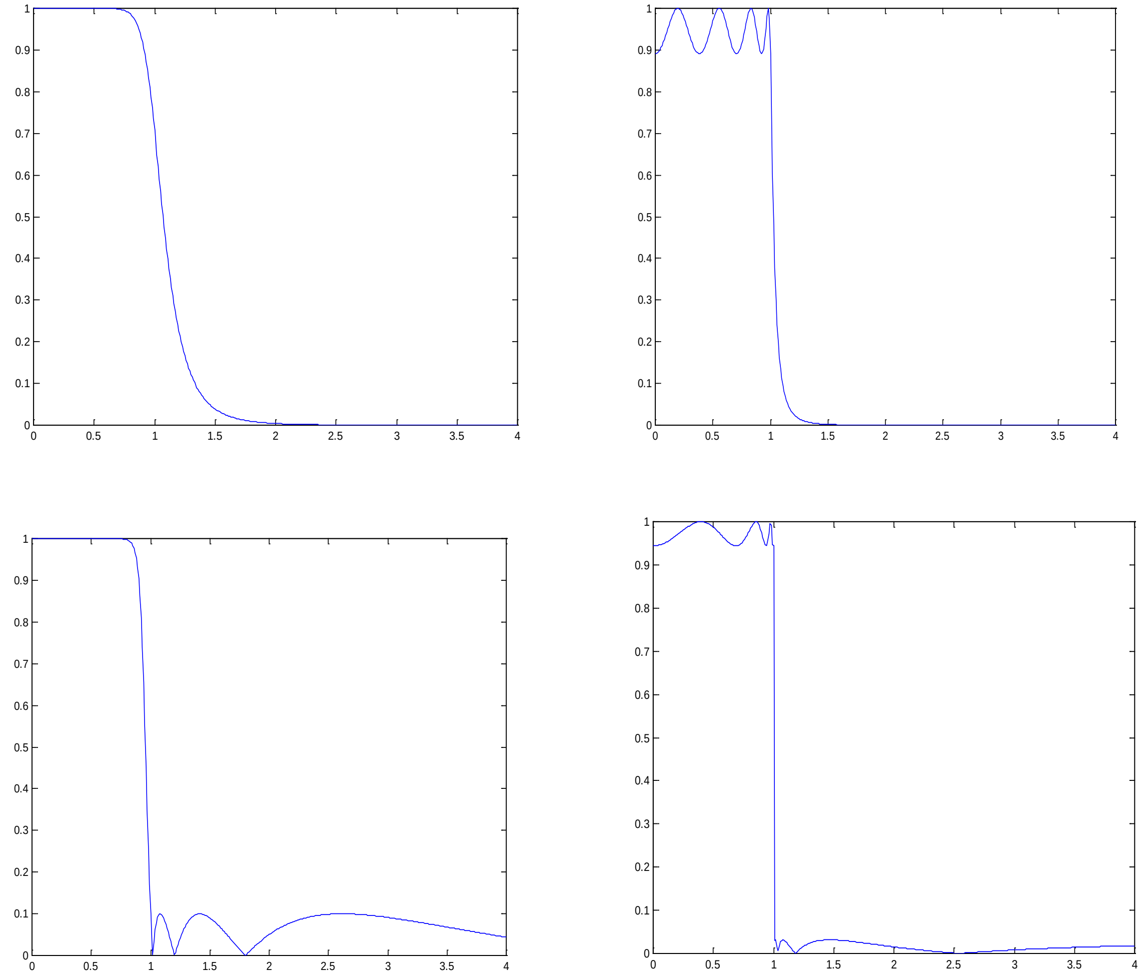


Рис.8.

На рис. 8 показаны графики АЧХ фильтров Баттерворта, Чебышёва  и эллиптического фильтра, аналогичные приведенным на рис.1.

На рис. 9 показано распределение нулей и полюсов этих фильтров, полученное с помощью  команд:.

```
» clf; hold on; plot(pc1,'r*'); plot(pc2,'co'); plot(pe,'yo'); plot(pb,'k+');
axis('square'); axis([-3 1 -2 2]); hold off
```

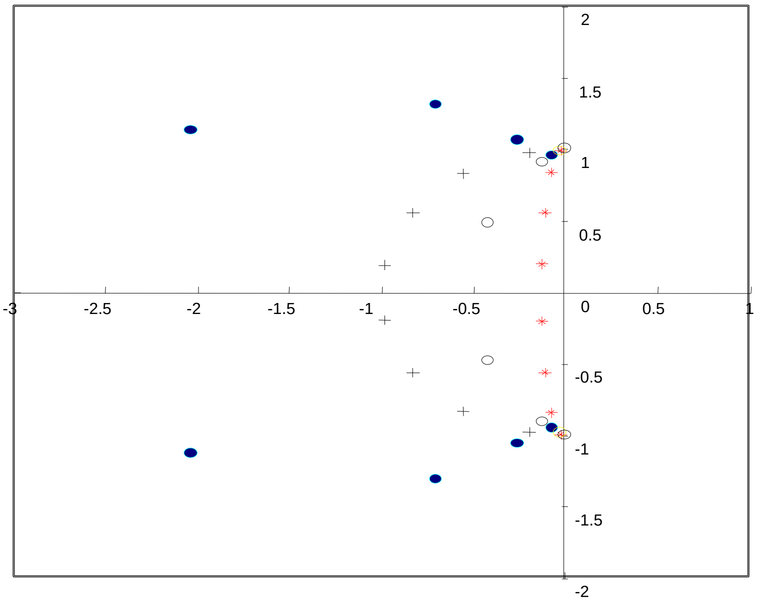


Рис.9.

## 2. ЗАДАНИЕ ПО РАБОТЕ И СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

В лабораторной работе исследуются низкочастотные фильтры трех типов – фильтр Баттерворта, фильтр Чебышева и эллиптический фильтр. Порядок фильтра берется из табл. 1. В отчете требуется:

1. Аналитически получить коэффициенты аналогового фильтра Баттерворта порядка B1.
2. Привести программу в пакете MATLAB для получения коэффициентов аналогового фильтра Баттерворта порядка B1 (см. poly).
3. Привести программу в пакете MATLAB для получения цифрового фильтра из аналогового прототипа (см. bilinear), коэффициенты цифрового фильтра Баттерворта из п. 1, его АЧХ (см. freqs).
4. Привести программу в пакете MATLAB для построения чебышевских фильтров типов 1 и 2 (см. cheby1,cheby2,ellip) и эллиптического фильтров (порядок фильтров – C1, C2 и E, соответственно; полоса пропускания – F1 и F2). Обратите внимание, что F1 и F2 это нормированные частоты. Частоту дискретизации вы задаете таким образом, чтобы удовлетворить теореме Котельникова при выполнении пункта 5.
5. Построить АЧХ и ЛАЧХ для этих фильтров. Сконструировать сигнал из двух синусоид, одна из которых лежит в середине полосы пропускания, а другая – в середине полосы подавления для каждого из этих фильтров. Пропустить сигнал через фильтр и привести графики до и после фильтрации. Для каждого фильтра.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 |
| C1 | 5 | – | 8 | – | 5 | – | 8 | – | 5 | – | 8 | – | 5 | – | 8 | – | 5 | – | 8 | – | 6 |
| C2 | – | 5 | – | 8 | – | 5 | – | 8 | – | 5 | – | 8 | 5 | – | 8 | – | – | – | – | 6 | – |
| E | 5 | 5 | 10 | 8 | 5 | 5 | 10 | 8 | 5 | 5 | 10 | 8 | 5 | 10 | 8 | 5 | 12 | 10 | 8 | – | 12 |
| F1 | 1/3 | 2/3 | 1/4 | 1/4 | 2/3 | 1/2 | 2/3 | 1/5 | 1/3 | 2/3 | 1/4 | 1/4 | 2/3 | 1/2 | 2/3 | 1/5 | 1/4 | 1/4 | 2/3 | 1/2 | 2/3 |
| F2 | 1/2 | 1/2 | 1/4 | 2/3 | 1/4 | 1/2 | 2/3 | 1/5 | 1/2 | 1/2 | 1/4 | 2/3 | 1/4 | 1/2 | 2/3 | 1/5 | 1/4 | 2/3 | 1/4 | 1/2 | 2/3 |