ИНФОРМАТИКА

РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ MS EXCEL И MATHCAD

Программа и методические указания к выполнению курсовой работы для студентов специальности 130400

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2014

ВВЕДЕНИЕ

Целью курсовой работы по дисциплине "Информатика" является углубление знаний по информатике и программированию, полученных студентами при изучении дисциплины на I курсе. Курсовая работа дает возможность студенту овладеть основными принципами построения алгоритмов, методами вычислений и их реализации на персональном компьютере (ПК), приобрести навыки постановки задач, построения математических моделей, получения физических закономерностей при обработке экспериментальных данных и их анализ. Получить представление о применении персонального компьютера и наиболее распространенных пакетов программ при решении задач из предметной области.

Применение математических моделей, их реализация на ПК позволяет проанализировать наиболее существенные взаимосвязи различных показателей, получить оптимальное решение и сравнить его с другими, наметить пути устранения недостатков и показать, к каким качественно новым выводам можно прийти, используя математические модели и ПК.

Из курса информатики известно, что весь процесс получения результатов с применением ПК требует значительных усилий и умения планировать свои действия. Применение ПК позволяет сократить работу, затрачиваемую на вычисления, увеличить количество рассматриваемых вариантов с целью выбора оптимального решения, а также повысить достоверность и точность результатов.

Курсовая работа предполагает решение каждым студентом нескольких задач из предметной области, используя полученные знания из курса информатики, в частности, навыки работы в системе MathCad и табличном процессоре MS Excel

Методические указания содержат всю необходимую информацию для выполнения курсовой работы:

- сведения об основных этапах работы, начиная от формализации задач и кончая защитой отчета о выполненной работе;
- рекомендации по программированию, отладке программ и вводу исходных данных;
- постановку предлагаемых для решения задач и разработку математической модели;

ность и творческий подход к выбору методов решения, а также своевременность выполнения всей работы и отдельных ее этапов.

Студент обязан не менее одного раза в месяц информировать руководителя курсовой работы о выполненных этапах.

2. ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ ПО РАБОТЕ

Отчет по курсовой работе (пояснительная записка) должен содержать следующие разделы:

- титульный лист;
- задание по курсовой работе;
- аннотация;
- оглавление;
- введение;
- теоретические сведения;
- текст каждой задачи (постановка задачи);
- подробное описание решения задачи при использовании табличного процессора MS Excel;
- табличные вычисления, полученные в MS Excel;
- выбор метода решения и описание алгоритмов (блок-схемы);
- исходные данные;
- Выполнение расчетов в системе MathCad (или в любой системе программирования);
- результаты расчетов в виде графиков и таблиц;
- анализ решения задачи, выводы;
- библиографический список.

На титульном листе указывается официальное название института, вид работы, наименование кафедры и название дисциплины, тема курсовой работы, фамилия и инициалы студента, шифр группы, дата оформления отчета, должность, фамилия и инициалы руководителя работы, место для выставления оценки.

В аннотации приводятся краткие сведения о содержании работы (на русском и иностранном языках).

Введение должно содержать информацию о наиболее часто используемых программных средствах при решении математических и прикладных задач.

Теоретические сведения по каждой задаче должны содержать информацию, необходимую для ее решения в общем виде. При указании формул следует разъяснить смысл всех величин, входящих в них.

Текст каждой задачи составляется студентом с учетом постановки задачи и конкретных данных, соответствующих номеру студента в списке группы.

Решение задачи с помощью табличного процессора MS Excel должно демонстрировать этапы расчета с необходимыми для их понимания комментариями. В отчете приводятся фрагменты рабочих листов в режиме отображения данных и в режиме отображения формул. Результаты вычислений следует использовать в качестве теста для проверки правильности решения, полученного на персональном компьютере.

Формализация задачи предполагает, что должны быть рассмотрены вопросы: в какой форме представить исходные данные для их ввода в компьютер, какие формулы и в какой последовательности следует применить для получения промежуточных и окончательных результатов, какова точность вычисления всех параметров и правил их округления. Конкретные рекомендации для каждой задачи имеются в настоящих разделах методических указаний.

Описание алгоритмов должно быть структурированным, «сверху вниз». Это означает, что сначала нужно выделить укрупненные этапы решения задачи. Затем каждый этап разбивается на более мелкие шаги и т.д. Процесс детализации завершается тогда, когда все шаги становятся очевидными для программирования, т.е. их можно представить либо одним оператором, либо небольшим количеством очевидных операторов.

Расчеты в системе MathCad выполняются по разработанному алгоритму. Все расчеты необходимо прокомментировать.

Программа составляется на одном из известных студенту языке программирования, и должна содержать достаточное количество комментариев для понимания ее текста. Все используемые в программе переменные сводятся в таблицу идентификаторов. Образец таблицы приводится на рис.2.1.

Таблица идентификаторов для задачи 1.

Обозначение в формуле	Обозначение в программе	Комментарий
i	i	Номер элемента массива в строке
$\sum a_i$	Summa_A	Сумма элементов массива A_i

Рис.2.1

Исходные данные нужно представить в том виде, в каком их вводят в компьютер. Если их много, то следует записать их в файл и вводить в программу из этого файла. Распечатка должна содержать исходную программу, вводимую информацию и результаты выполнения программы.

Анализ результатов расчетов в MathCad предполагает сравнение с результатами вычислений в MS Excel, а также их смысловую оценку и выводы.

В конце отчета о курсовой работе нужно дать список использованной литературы по информатике и геодезии.

Пояснительная записка составляется с использованием текстового процессора MS Word. Для заголовков разделов и основного текста нужно создать стили. Оглавление в документ вставляется автоматически средствами MS Word на основе созданных стилей для разделов и подразделов.

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОСТАВЛЕНИЮ ПРОГРАММ

При разработке программы нужно следовать принципам структурного программирования: поэтапная детализация, использование только базовых структур (следование, ветвление, цикл), повышение наглядности программы.

Уже на стадии разработки программы нужно продумать мероприятия по ее отладке (подготовка тестов, включение в программу операторов вывода промежуточных результатов, учет особых случаев, ошибок вывода).

В общем случае нужно быть готовым к неожиданностям при запуске программы и поэтому иметь твердые копии (распечатки текста) программы и исходной информации для их восстановления в случае необходимости.

Разрабатывая программу, нужно помнить о целесообразности оформления некоторых важных ее частей в виде подпрограмм. Метод подпрограмм облегчает написание и отладку программы.

Другие указания по программированию приводятся при рассмотрении конкретных задач, входящих в курсовую работу.

4. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

ЗАДАЧА 1. ОБРАТНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Обратная геодезическая задача заключается в вычислении дирекционного угла α и расстояния $R = |AB|$ по заданным на плоскости декартовым координатам x, y двух точек A и B. Дирекционный угол, в конечном итоге, должен быть представлен в градусной мере, как это принято в геодезии. Расстояние между точками определяется через найденный дирекционный угол.

Пусть даны две точки A и B (рис.4.1), координаты которых соответственно x_A, y_A, x_B, y_B.

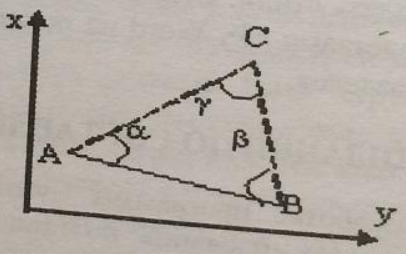

Рис.4.1.

Согласно схеме, показанной на рис. 4.1., приращения координат определяются:

$$\Delta y = y_B - y_A; \quad \Delta x = x_B - x_A \tag{4.1}$$

Затем находят величину румба.

$$r = arctg \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \tag{4.2}$$

Далее по знакам приращения координат находят название четверти, что, в свою очередь, позволяет определить значение дирекционного угла (см. табл. 4.1).

Горизонтальное расстояние между точками может быть определено по формуле:

$$S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad (4.3)$$

или по формуле:

$$S = \begin{cases} \dfrac{\Delta y}{\sin\alpha}, & \textit{если } \alpha \textit{ существенно отличен от } 0 \\ \dfrac{\Delta x}{\cos\alpha}, & \textit{если } \alpha \textit{ близок к } 0 \end{cases} \qquad (4.4)$$

Таблица 4.1

Определение значения дирекционного угла

Знаки приращения координат		Название четверти	Формула дирекционного угла
Δx	Δy		
+	+	I	$\alpha = r$
-	+	II	$\alpha = \pi - r$
-	-	III	$\alpha = \pi + r$
+	-	IV	$\alpha = 2\pi - r$

Перевод вычисленного дирекционного угла в градусную меру может быть выполнен различными способами. Один из возможных способов следующий:

- Переводим величину α в градусную меру

$$\alpha^o = 180 \cdot \alpha / \pi;$$

- Выделяем целую часть $\alpha\gamma = int(\alpha^o)$;
- Вычисляем остаток и переводим его в минуты

$$\alpha' = 60 \cdot (\alpha^o - \alpha\gamma);$$

- Вычисляем целое число минут

$$\alpha\mu = int(\alpha');$$

- Определяем остаток минут, переводим в секунды и округляем до целого

$$X_p = \frac{X_1 ctg\beta_2 + X_2 ctg\beta_1 - Y_1 + Y_2}{ctg\beta_1 + ctg\beta_2} \quad (4.5)$$

$$Y_p = \frac{Y_1 ctg\beta_2 + Y_2 ctg\beta_1 + X_1 - X_2}{ctg\beta_1 + ctg\beta_2} \quad (4.6)$$

Широко используются и формулы Гаусса. В этом случае исходными данными являются не только координаты пунктов A_1 и A_2 и измеренные горизонтальные углы β_1, β_2, но и вычисленный дирекционный угол α стороны $A_1 A_2$.

$$X_P = X_1 + \frac{(Y_2 - Y_1)\cdot sin\beta_2}{sin\alpha \cdot sin(\beta_1 + \beta_2)} cos(\alpha - \beta_1) \quad (4.7)$$

$$Y_P = Y_1 + \frac{(Y_2 - Y_1)\cdot sin\beta_2}{sin\alpha \cdot sin(\beta_1 + \beta_2)} sin(\alpha - \beta_1) \quad (4.8)$$

Если пунктов геодезической сети более двух (рис.4.2*б)*, то исходные данные являются избыточными, т.к. для определения искомых координат точки ***P*** достаточно знать координаты и углы двух точек одного треугольника. Однако решение прямой засечки только из одного треугольника является бесконтрольным. Достаточно, например, выписать из каталога координату исходной точки с ошибкой, как результат окажется совершенно неверным. По этой причине инструкции по выполнению геодезических работ требуют, чтобы координаты точки ***P*** определялись как минимум из двух треугольников (или был организован какой-либо другой контроль).

Избыточность исходных данных позволяет повысить надежность определения окончательных значений искомых величин за счет применения правила арифметического среднего.

$$X_P = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} X_{Pk} \quad (4.9)$$

$$Y_P = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} Y_{Pk}\ , \quad (4.10)$$

где X_{Pk} , Y_{Pk} координаты, определенные из k-того треугольника.

ЗАДАЧА 3. ОБРАТНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАСЕЧКА

На плоскости задана система точек $A_1, ..A_i, ...A_n$ с известными координатами (x_i, y_i). При использовании обратной геодезической засечки теодолит располагают непосредственно на точке P, координаты которой требуется определить. На точки с известными координатами (их должно быть не менее трех) устанавливают визирные цели, после чего измеряют горизонтальные углы β_1, β_2 (рис.4.3).

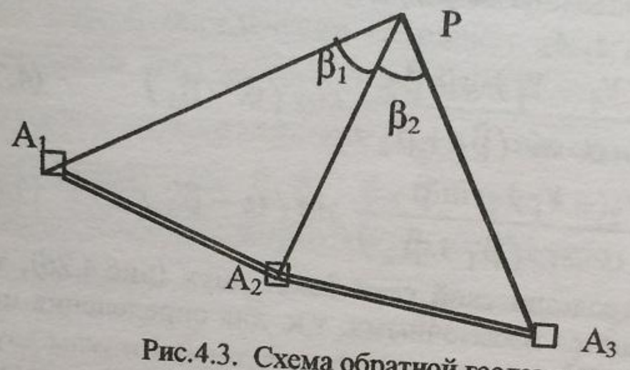

Рис.4.3. Схема обратной геодезической засечки.

Для однозначного определения координат точки P достаточно рассмотреть два треугольника, однако в этом случае решение задачи является бесконтрольным. Инструкции по проведению геодезических измерений требуют включать, как минимум, четыре точки с известными координатами и определять координаты вставляемой точки, соответственно, по трем или более треугольникам.

Избыточность исходных данных позволяет повысить надежность определения окончательных значений искомых величин за счет применения правила арифметического среднего.

Для определения координат вставляемой точки предварительно определяем вспомогательные величины n и m.

$$m = y_1 \cdot ctg\beta_1 + y_2 \cdot (-ctg\beta_1 - ctg\beta_2) + y_3 \cdot ctg\beta_2 + x_1 - x_3 \quad (4.11)$$

$$n = x_1 \cdot ctg\beta_1 + x_2 \cdot (-ctg\beta_1 - ctg\beta_2) + x_3 \cdot ctg\beta_2 - y_1 + y_3 \quad (4.12)$$

Далее находим углы $\gamma = arctg\, {}^{m}/_{n}$ $\delta = \gamma - \beta_1$ и определяем координаты вставляемой точки.

$$X_p = \frac{x_1 \cdot tg\delta - x_2 \cdot tg\gamma + y_2 - y_1}{tg\delta - tg\gamma} \tag{4.13}$$

$$Y_P = (X_p - x_2) \cdot tg\gamma + y_2 \tag{4.14}$$

ЗАДАЧА 4. ТЕОДОЛИТНЫЙ ХОД

Теодолитная съемка относится к числу крупномасштабных и выполняется с целью составления горизонтального плана равнинной местности, когда рельеф на плане не отображается, или для составления кадастрового плана. Применяется при картировании сравнительно небольших застроенных участков.

Съемку выполняют с точек геодезической сети, расположенных на участке, и точек съемочного обоснования, координаты которых определяют путем проложения теодолитных ходов.

Теодолитный ход – это полигон, представляющий собой систему ломаных линий, в котором горизонтальные расстояния между всеми его смежными вершинами измеряются стальными мерными лентами и рулетками, либо оптическими дальномерами, а горизонтальные углы между смежными сторонами - техническими теодолитами.

В зависимости от конструкции полигона, различают разомкнутый теодолитный ход, начало и конец которого опираются на пункты геодезического обоснования (рис.4.5*а*), замкнутый теодолитный ход (замкнутый многоугольник), примыкающий к пункту геодезического обоснования (рис.4.5*б*) и висячий (рис.4.5*в*).

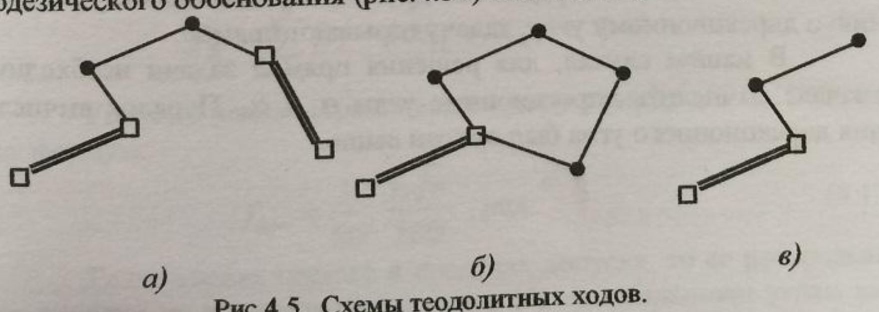

Рис.4.5. Схемы теодолитных ходов.

На рис. 4.5 точки опорной геодезической сети показаны квадратиками, а точки, координаты которых требуется определить – черными кружочками. Отрезок между опорными точками называется *исходной (примычной) стороной*, а угол между ней и стороной теодолитного хода – *примычным углом*. На рисунке исходные стороны показаны двойными линиями.

При создании съемочного обоснования теодолитной съемки, как правило, используются разомкнутые ходы, начинающиеся и заканчивающиеся на разных опорных точках. Замкнутые и, особенно, висячие ходы считаются ненадежными, так как остаются незамеченными ошибки исходных данных и не контролируются систематические ошибки линейных измерений.

Разомкнутый теодолитный ход.

Создание съемочного обоснования заключается в закреплении на местности новых точек и определении их координат. Если эти координаты определяются путем проложения теодолитного хода, то работы состоят из нескольких последовательных этапов. В данной курсовой работе будем рассматривать только последний этап – вычисление координат искомых точек.

На рис. 4.6 схематично представлен разомкнутый теодолитный ход. Заданы координаты опорных точек баз AB и CD, длины сторон теодолитного хода $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{n-1}$ и углы при вершинах $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$. Особо подчеркнем, что все углы должны быть левыми.

Когда определяются прямоугольные координаты некоторой точки по известным координатам другой, горизонтальному расстоянию и дирекционному углу, задачу называют прямой.

В нашем случае, для решения прямой задачи необходимо вначале вычислить дирекционные углы $\alpha_1 \ldots \alpha_n$. Порядок вычисления дирекционного угла был описан выше.

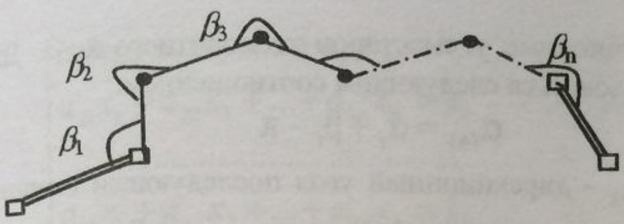

Рис.4.6 Схема разомкнутого теодолитного хода.

Из курса геодезии известно (и как следует из рис. 4.6*)*, что разность примычных углов должна быть равна разности дирекционных углов примычных сторон. Однако, в силу ошибок измерения, это равенство практически никогда не выполняется.

Разность между теоретическими положениями и результатами измерений называется *невязкой.* В случае, когда она меньше допуска, в измеренные величины вводят поправки таким образом, чтобы свести невязку к нулю. Сумма поправок равна невязке по абсолютной величине и противоположна по знаку.

Формула для вычисления угловой невязки для левых по ходу углов записывается следующим образом:

$$f_\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - (\alpha_k - \alpha_H) - \pi \cdot n\,, \qquad (4.15)$$

где $\alpha_н$ - дирекционный угол базы АВ, α_k - дирекционный угол базы CD. Углы при вершинах теодолитного хода представлены в радианах.

Для правых по ходу углов дирекционные углы в формуле меняются местами.

$$f_\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - (\alpha_H - \alpha_k) - \pi \cdot n \qquad (4.16)$$

Угловую невязку сравнивают с допустимой $f_{доп}$, определяют по формуле:

$$f_{доп} = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi\sqrt{n}}{180}\ \text{, рад.} \qquad (4.17)$$

Если угловая невязка в пределах допуска, то ее распределяют поровну во все измеренные углы. По исправленным углам вычисляют дирекционные углы сторон теодолитного хода. Для этого можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \beta_i - \pi \tag{4.18}$$

где α_{i+1} - дирекционный угол последующей стороны хода, α_i - дирекционный угол предыдущей стороны, β_i - левый по ходу угол между этими сторонами. Если углы по ходу правые, то угол β_i вычитается.

Далее вычисляются приращения координат:

$$\Delta X_i = \ell_i \cdot cos(\alpha_i), \qquad \Delta Y_i = \ell_i \cdot sin(\alpha_i) \tag{4.19}$$

Приращения координат суммируются и вычисляются абсолютные линейные невязки по соответствующим осям f_X и f_Y.

$$f_x = \sum_{i=1}^{n} \Delta X_i - (X_k - X_H), \quad f_y = \sum \Delta Y_i - (Y_k - Y_H) \tag{4.20}$$

X_H, Y_H и X_k, Y_k – координаты начальной и конечной точек хода.

Общая абсолютная невязка и общая относительная невязка теодолитного хода, соответственно:

$$f_{абс} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}, \qquad f_{отн} = f_{абс} \Big/ \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i \tag{4.21}$$

Величина допустимой относительной невязки определяется в соответствии с инструкцией по топографической съемке [5]. Если допуски выполняются, абсолютные невязки по осям распределяют пропорционально длинам сторон теодолитного хода и далее определяют искомые координаты новых точек по следующим формулам:

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_i, \quad Y_{i+1} = Y_i + \Delta Y_i \tag{4.22}$$

Подтверждением правильности вычисления является совпадение координат вычисленного значения опорной точки в конце теодолитного хода и заданного в исходных данных.

ЗАДАЧА 5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ (МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ)

Пусть требуется найти решение систем линейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = k_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = k_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = k_n
\end{cases} \tag{4.23}
$$

с заданной точностью ε>0.

Предположим, что все диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ и перепишем систему в следующем виде:

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n) \\
x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1})
\end{cases} \tag{4.24}
$$

Возьмем некоторое начальное приближение к решению системы $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ и подставим в правые части системы (4.24). Полученные значения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots., x_n^{(1)}$

$$
\begin{cases}
x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(0)}) \\
x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(0)}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - \ \ .\ \ .\ \ .\ \ - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)})
\end{cases}
$$

являются первым приближением.

Так, на $k -$м шаге будем иметь:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\
x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - \;.\;\;.\;\;.\;\; - a_{n\,n-1}\,x_{n-1}^{(k-1)})
\end{cases}
\tag{4.25}
$$

Описанный метод носит название *метода простой итерации*.

Итерационный процесс будет сходящимся, т.е. решение $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_3 \end{pmatrix}$ удовлетворяет соотношению $X = \lim\limits_{k\to\infty} X^k$ или

$$x_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

если выполняется неравенство

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{4.26}$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока все x_i^k не станут близки к $x_i^{(k-1)}$. Критерий близости можно задать в форме

$$M^{(k)} = \max_i \left| x_i^k - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon > 0.$$

Метод Зейделя отличается от изложенного метода простой итерации тем, что при вычислении x_i^k используются уже найденные на k – ом шаге значения x_1^k, $x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k$, т.е. если $a_{ij} \neq 0$, то

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ij}}(b_i - a_{i1}\,x_1^k - a_{i2}\,x_2^k - \ldots - a_{i\,i-1}\,x_{i-1} - a_{i\,i+1}\,x_{i+1}^{(k-1)} - - \ldots -$$

$$- a_{in}x_n^{(k-1)}\,)\ \text{, где}\left(i = 1, 2,\ \ldots,\ n\right).$$

Пример.

Решить систему линейных уравнений методом Зейделя

ε=0,0001

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение.

Приведем систему к виду (2):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{6}(9 - x_1 - 2x_3) \\ x_3 = \frac{1}{5}(2 + x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

Нулевое приближение $x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0,\ x_3^{(0)} = 0$

Используя формулу итерационного процесса Зейделя, приведем систему к виду:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{4}\left(4 + x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}\right) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{6}\left(9 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k-1)}\right) \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{5}\left(2 + x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

Получим приближение $x_1^{(1)} = 1,\ x_2^{(1)} = \frac{4}{3} = 1{,}333,\ \ x_3^{(1)} = \frac{17}{15} = 1{,}13$

Затем проведем последующие вычисления, сведя результаты в таблицу 4.2:

Таблица 4.2

Итерации	X_1	X_2	X_3
0	0	0	0
1	0.1000E+01	0.1333E+01	0.1133E+01
2	0.1050E+01	0.9473 E+00	0.9889 E+00
3	0.9896 E+00	0.1005 E+01	0.9999 E+00
4	0.1001 E+01	0.9999 E+00	0.1000 E+01
5	0.1000 E+01	0.1000 E+01	0.1000 E+00

Как видно из таблицы, требуемая точность достигнута уже на пятом шаге. Это показывает, что метод Зейделя сходится довольно быстро.

ЗАДАЧА 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Рассмотрим один из наиболее известных и широко применяемых прямых методов решения систем линейных уравнений. Обычно этот метод называют методом исключения или методом Гаусса.

Чтобы проиллюстрировать этот метод, рассмотрим сначала систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{4.27}$$

В такой системе по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{21}, a_{31} должен быть отличен от нуля, иначе бы мы имели бы дело в этих трех уравнениях только с двумя неизвестными. Если $a_{11} = 0$, то можно переставить уравнения так, чтобы коэффициент при x_1 в первом уравнении был отличен от нуля. Очевидно, что перестановка уравнений оставляет систему неизменной: ее решение остается прежним.

Если теперь в исходной системе уравнений (4.27) заменить третье уравнение на (4.29), то новая система выглядит так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases} \tag{4.30}$$

Эти новые уравнения полностью эквивалентны исходным уравнениям с тем преимуществом, что x_1 входит только в первое уравнение и не входит ни во второе, ни в третье. Таким образом, два последних уравнения представляют собой систему из двух уравнений с двумя неизвестными; если теперь найти решение этой системы, т.е. определить x_2 и x_3 , то результат можно подставить в первое уравнение и найти x_1 . Иначе говоря, задача сведена к решению системы из двух уравнений с двумя неизвестными.

Попытаемся теперь исключить x_2 из двух последних уравнений. Если $a'_{22} = 0$, то снова мы переставим уравнения так, чтобы a'_{22} было отлично от нуля (если $a'_{22} = 0$ и $a'_{32} = 0$, то система вырождена и либо вовсе не имеет решения, либо имеет бесчисленное множество решений).

Введем новый множитель

$$m'_3 = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}.$$

Умножим второе уравнение полученной системы (4.30) на m'_3 и вычтем его из третьего. Результат вычитания равен

$$(a'_{32} - m'_3 a'_{22})x_2 + (a'_{33} - m'_3 a'_{23})x_3 = b'_{23} - b'_2 m'_3$$

В силу выбора m'_3

$$a'_{32} - a_3 a'_{22} = 0 \ .$$

Полагая, что

$$a''_{33} = a'_{33} - m'_3 a'_{33}$$

$$b''_3 = b'_3 - m'_3 b'_2$$

окончательно получим

$$a''_{33}x_3 = b''_3 \tag{4.31}$$

Третье уравнение полученной системы (4.30) можно заменить уравнением (4.31), после чего система уравнений приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \;\; = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 = b'' \end{cases} \tag{4.32}$$

Такая система уравнений (4.32) иногда называется *треугольной* из-за своего внешнего вида.

Для решения необходимо определить x_3 из третьего уравнения системы (4.32), подставить этот результат во второе уравнение и определить x_2. Полученные значения x_3 и x_2 подставить в первое уравнение и определить x_1. Этот процесс, который обычно называется *обратной подстановкой (обратный ход)*, определяется формулами:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b''_3}{a''_{33}} \\ x_2 &= \frac{b'_2 - a'_{23}x_3}{a'_{22}} \\ x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Необходимо отметить, если $a''_{33} = 0$, то система уравнений *вырождена.*

Пример.

Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 3y + z = 9 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

Найти решение системы уравнений.

Решение.

Легко убедиться, что множители для второго и третьего уравнений равны 2 и 1.

После исключения x из второго и из третьего уравнений, новый множитель, исключающий y из третьего уравнения, равен –2. Треугольная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ \quad y-z=\ 1 \\ \quad -4z=-4 \end{cases}$$

Из последнего уравнения $z=1$, из второго $y=2$, из первого $x=1$. Можно подставить эти значения в исходные уравнения и убедиться, что они точно удовлетворяются.

Теперь можно обобщить этот метод на случай системы из n – уравнений с n-неизвестными.

Ниже записана система уравнений, приведенная к треугольному виду (4.34).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{2n}x_n = b''_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{4.34}$$

Формулы для вычисления неизвестных (обратный ход) будут иметь вид:

$$
\begin{cases}
x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_1 = \dfrac{b_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} a_{1i} \cdot x_i}{a_{11}}
\end{cases}
\qquad (4.35)
$$

ЗАДАЧА 7. ЗАДАЧА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ УЧАСТКА

Задачу вычисления площади участка сведем к задаче вычисления определенного интеграла вида: $S = \int_a^b f(x)\, dx$.

В этом случае площадь участка S должна ограничиваться осью X, двумя отрезками, проведенными из точек a и b перпендикулярно оси X, и произвольной кривой $f(x)$, соединяющей концы отрезков (рис.4.7.1).

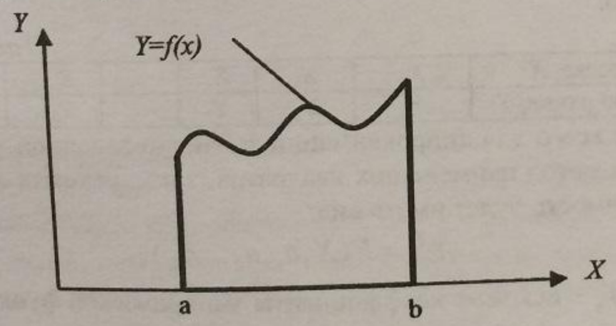

Рис.4.7.1

В реальной жизни подобная площадь может быть площадью садового участка, ограниченного просекой и боковыми линиями разграничения с соседями, а с тыльной стороны - ручьем или оврагом, или склоном холма и т.п.

Для вычисления площади подобного участка первоначально необходимо определить математическую функцию, описывающую линию ручья (оврага). Найти математическую функцию, абсолютно точно описывающую произвольную кривую, как правило, невозможно, поэтому постараемся найти функцию, вид которой максимально приближается к фактической кривой.

Нахождение такой математической зависимости называется *аппроксимацией функции*. Найденную математическую функцию называют *эмпирической*, а значения, вычисленные по этой функции, называют *теоретическими*.

Искомую функцию построим в декартовых координатах (для упрощения построения можно считать, что начало координат находится на линии пересечения просеки с боковой стороной).

Первоначально необходимо выполнить несколько замеров от линии просеки до границы участка по ручью (оврагу). При этом, чем сложнее линия границы, тем большее должно быть количество замеров. Линии замеров должны быть строго параллельны оси *Y*. Результаты замеров сведем в таблицу 4.3.

В этом случае нахождение математической функции, описывающей наши данные, называется аппроксимацией функции заданной таблично.

Таблица 4.3

Точки по просеке, *X*	X_o	X_1	X_2	...	X_{n-1}	X_n
Расстояние до ручья, *Y*	Y_o	Y_1	Y_2	...	Y_{n-1}	Y_n

Чаще всего для аппроксимации таблично заданной функции используется метод наименьших квадратов, тогда искомая аналитическая зависимость будет иметь вид:

$$Y^T = F(X, a_1, a_2, ..a_m), \qquad (4.36)$$

где $a_1, a_2, ..a_m$ – искомые коэффициенты эмпирической функции *F*.

Согласно методу наименьших квадратов, наилучшими коэффициентами $a_1, a_2, ..a_m$ считаются те, для которых сумма квадратов разности между вычисленным теоретическим значением функции

Y_i^T в точке X_i и фактическим (измеренным) значением Y_i в этой точке будет минимальна. Поясним геометрический смысл этого метода.

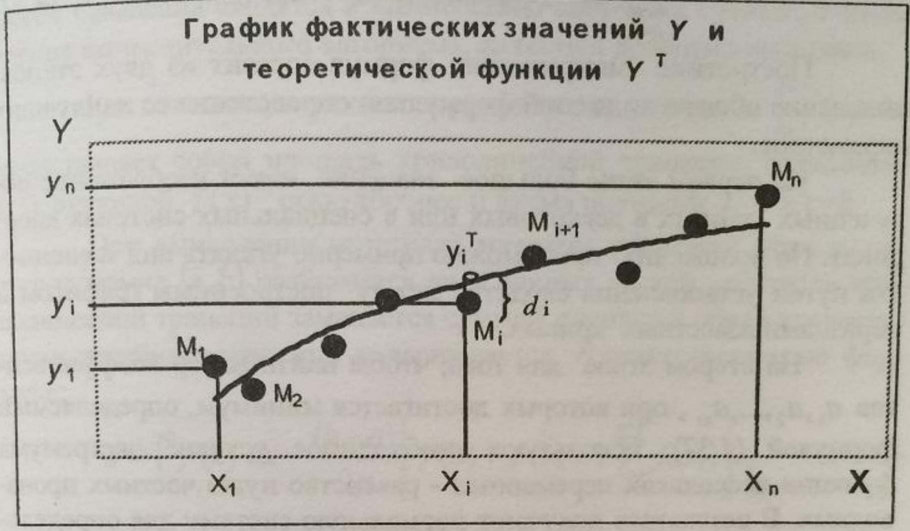

Рис.4.7.2

Каждая пара чисел (X_i, Y_i) из исходной таблицы определяет точку M_i на плоскости XOY (рис.4.7.2).). Используя формулу (4.36) с различными значениями коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_m$, можно построить множество кривых, которые будут являться графиками эмпирических функций $F(X, a_1, a_2, ..a_m)$.

Разности $(Y_i^T - Y_i)$ называются отклонениями и представляют собой расстояния по вертикали от точек M_i до графика эмпирической функции.

Как было сказано выше, по методу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами $a_1, a_2, ..., a_m$ считаются те, для которых сумма квадратов отклонений найденной теоретической функции от заданных фактических значений минимальна. Следовательно, задача состоит в определении коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_m$ (т.е. в выборе одной кривой из множества) таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений была наименьшей.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[F(X_i;a_1, a_2,..., a_m)-Y_i\right]^2 \to \min \qquad (4.37)$$

Построение эмпирических формул состоит из двух этапов: выяснение общего вида этой формулы и определение ее наилучших параметров.

На первом этапе большое значение имеет изображение полученных данных в декартовых или в специальных системах координат. По положению точек можно примерно угадать вид зависимости путем установления сходства между построенным графиком и образцами известных кривых.

На втором этапе для того, чтобы найти набор коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_m$, при которых достигается минимум, определяемый формулой (4.37), используют необходимое условие экстремума функции нескольких переменных - равенство нулю частных производных. В результате получают нормальную систему для определения коэффициентов a_i ($i=1, 2, ...m$):

Эта система упрощается, если эмпирическая формула (4.36) линейна относительно параметров a_i. Тогда для определения коэффициентов a_i необходимо решить систему из *m*-линейных уравнений, в которую искомые коэффициенты входят в качестве неизвестных.

В случае аппроксимации табличных данных простыми, широко известными математическими зависимостями, для построения графика эмпирической функции и вычисления коэффициентов a_i можно воспользоваться средствами табличного процессора MS Excel. Решение этой задачи в MS Excel называется *построением линии тренда*. Построив в MS Excel на точечном графике огибающую линию, выбрав тип аппроксимирующей функции и построив линию тренда с выводом на экран аппроксимирующей функции, мы получаем фактически график нашего участка и подынтегральную функцию для вычисления площади участка.

Вычисление интеграла следует провести численным методом (методом трапеции или методом Симпсона) по программе, составленной самостоятельно. Проверить правильность вычисления, проведя ручной счет или вычислив интеграл в среде MathCad (Math-Soft Apps).

Существует довольно много численных методов вычисления определенного интеграла. Предлагаемые методы: метод трапеций и метод Симпсона сводятся к вычислению конечных сумм и, с точки зрения вычислительного алгоритма, являются довольно простыми.

Как известно, величина определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной функцией $f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$.

При вычислении интеграла **методом трапеций** отрезок интегрирования [a, b] разбивается на ***n*** равных частей, площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей образовавшихся прямолинейных трапеций и вычисляется, соответственно, по формуле:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right], \quad (4.38)$$

где величина отрезка разбиения $h=(b-a)/n$, значение аргумента в *i*-той точке определяется по формуле $x_i=a+i\cdot h$, значение подынтегральной функции в точках разбиения $f(x_i)$.

Таким образом, вычисление приближенного значения определенного интеграла по методу трапеций при заданном числе разбиений ***n*** сводится к вычислению конечной суммы.

При вычислении приближенного значения интеграла **методом Симпсона** отрезок интегрирования [a, b] также разбивается на ***n*** равных частей, при этом количество частей должно быть обязательно четным, и на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ подынтегральная функция заменяется параболой, проходящей через точки $f(x_{i-1}), f(x_i), f(x_{i+1})$.

Записав уравнение параболы в виде интерполяционной формулы Ньютона и проинтегрировав это выражение, окончательно получим формулу:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{3n}\left[f(a)+f(b)+\sum_{i=1}^{n-1}(k_i+3)\,f(x_i)\right], \quad (4.39)$$

известную под названием *формулы Симпсона.*

Как и в методе трапеций, величина отрезка разбиения $h=(b-a)/n$, значение аргумента в i-той точке определяется по формуле $x_i = a + i \cdot h$, значение подынтегральной функции в точках разбиения $f(x_i)$. Значения подынтегральной функции в точках разбиения должны суммироваться (по формуле Симпсона) с различными коэффициентами: в четных точках с коэффициентом 2, а в нечетных с коэффициентом 4. Это достигается за счет использования переменной k_i, которая принимает значения по правилу:

$$k_i = \begin{cases} 1 & \textit{при нечетных } i \\ -1 & \textit{при четных } i \end{cases}$$

Можно видеть, что вычисление приближенного значения определенного интеграла по методу Симпсона при заданном числе разбиений ***n*** сводится к вычислению конечной суммы.

5. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

ЗАДАЧА 1.

ОБРАТНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Каждый вариант содержит два задания: А и В.

Вариант 1

А) X1 = 4608.35 Y1 = 4159.05
X2 = 5267.01 Y2 = 2501.18

В) X1 = 4299.05 Y1 = 10859.16
X2 = 2727.40 Y2 = 10590.88

Вариант 2

А) X1 = 5119.94 Y1 = 6157.33
X2 = 7182.27 Y2 = 4976.39
В) X1 = 10932.84 Y1 = 6112.26
X2 = 9115.24 Y2 = 4903.68

Вариант 3

А) X1 = 6043.54 Y1 = 5872.27

X2 = 3906.25 Y2 = 6112.51

B) X1 = 5344.70 Y1 = 5822.16
X2 = 7059.24 Y2 = 4924.57

Вариант 4
A) X1 = 6237.20 Y1 = 4199.42
X2 = 7911.41 Y2 = 3185.12

B) X1 = 4420.58 Y1 = 6084.74
X2 = 2573.32 Y2 = 5163.12

Вариант 5
A) X1 = 4608.35 Y1 = 4159.05
X2 = 5267.01 Y2 = 2501.18

B) X1 = 4299.05 Y1 = 10859.16
X2 = 2727.40 Y2 = 10590.88

Вариант 6
A) X1 = 10539.37 Y1 = 9193.08
X2 = 10323.90 Y2 = 11613.77

B) X1 = 2019.52 Y1 = 2839.30
X2 = 1300.40 Y2 = 4821.91

Вариант 7
A) X1 = 7837.27 Y1 = 3002.65
X2 = 8906.52 Y2 = 1540.51

B) X1 = 7933.79 Y1 = 7152.79
X2 = 6430.38 Y2 = 7849.55

Вариант 8
A) X1 = 8520.94 Y1 = 2400.47
X2 = 8182.44 Y2 = 4596.56

B) X1 = 11637.02 Y1 = 6391.67

X2 = 11907.65 Y2 = 4022.91

Вариант 9.

А) X1 = 6813.83 Y1 = 8994.60

X2 = 7582.40 Y2 = 7617.18

В) X1 = 8711.50 Y1 = 10594.55

X2 = 9372.01 Y2 = 8228.44

Вариант 10

А) X1 = 7176.03 Y1 = 4569.23

X2 = 6931.29 Y2 = 6097.46

В) X1 = 9204.90 Y1 = 11810.88

X2 = 7532.72 Y2 = 11589.42

ЗАДАЧА 2.

ПРЯМАЯ УГЛОВАЯ ЗАСЕЧКА. ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ТОЧЕК ИЗ ТРЕХ КОМБИНАЦИЙ

Вариант 1

№ пп	X, м	Y, м	B1, DDD MM SS	B2, DDD MM SS
1	5960.42	5412.21	80 42 57	
2	5639.25	5101.87	40 46 47	55 14 43
3	5194.43	5474.52		76 23 55

Вариант 2

№ пп	X, м	Y, м	B1, DDD MM SS	B2, DDD MM SS
1	5935.51	5441.24	98 4 30	
2	5687.41	5172.76	63 0 12	41 54 46
3	5142.93	5460.08		54 19 48

Вариант 3

№ пп	X, м	Y, м	B1, DDD MM SS	B2, DDD MM SS
1	5955.90	5417.77	76 55 42	
2	5678.44	5187.10	51 2 38	60 47 2
3	5159.39	5468.08		57 11 44

Вариант 4

№ пп	X, м	Y, м	B1, DDD MM SS	B2, DDD MM SS
1	5975.78	5472.82	74 56 47	
2	5645.57	5173.64	49 52 14	53 47 4
3	5180.81	5489.07		63 57 14

Вариант 5

№ пп	X, м	Y, м	B1, DDD MM SS	B2, DDD MM SS
1	5951.77	5440.33	94 58 38	
2	5648.54	5101.47	56 16 35	40 31 5
3	5177.15	5431.80		68 1 58

Вариант 6

№ пп	X, м	Y, м	B1, DDD MM SS	B2, DDD MM SS
1	5906.09	5475.85	108 3 20	
2	5675.91	5178.17	60 52 40	37 2 59
3	5175.59	5464.59		63 31 18

Вариант 7

№ пп	X, м	Y, м	B1, DDD MM SS	B2, DDD MM SS
1	5970.17	5431.58	88 46 2	
2	5672.25	5121.02	44 54 11	55 2 6
3	5118.11	5493.05		73 35 49

Вариант 8

№ пп	X, м	Y, м	B1, DDD MM SS	B2, DDD MM SS
1	5945.41	5466.87	85 10 1	
2	5689.51	5162.98	48 25 13	53 3 54
3	5122.29	5472.42		60 28 37

Вариант 9

№ пп	X, м	Y, м	B1, DDD MM SS	B2, DDD MM SS
1	5915.10	5463.49	89 27 45	
2	5644.09	5110.16	47 30 57	48 20 20
3	5151.16	5413.85		74 57 35

Вариант 10

№ пп	X, м	Y, м	B1, DDD MM SS	B2, DDD MM SS
1	5910.09	5475.85	108 3 20	
2	5675.91	5178.17	60 52 40	37 2 59
3	5175.59	5464.59		63 31 18

ЗАДАЧА 3.

ОБРАТНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАСЕЧКА

Вариант 1

Пункты	Направления	X	Y
Хутор	0 0 0	12248.39	11790.36
Крутик	78 18 43	9801.22	13127.74
Юрьево	197 25 1	9030.21	9511.77
Локно	258 53 19	11008.31	8759.05

Вариант 2

Пункты	Направления	X	Y
Хутор	0 0 0	10798.58	12689.72
Крутик	73 15 40	8921.43	11123.49
Юрьево	180 17 23	9787.11	8585.19
Локно	282 28 14	12484.41	10294.53

Вариант 3

Пункты	Направления	X	Y
Хутор	0 0 0	10018.12	11897.27
Крутик	91 16 41	8434.95	9947.89
Юрьево	194 54 1	11021.04	8137.20
Локно	270 40 57	12140.19	10436.07

Вариант 4

Пункты	Направления	X	Y
Хутор	0 0 0	8881.51	9535.87
Крутик	73 26 10	11065.47	8553.11
Юрьево	187 42 6	12328.47	11867.13
Локно	281 8 26	9072.06	12265.51

Вариант 5

Пункты	*Направления*	*X*	*Y*
Хутор	0 0 0	11327.11	9315.82
Крутик	75 46 14	11588.28	11619.02
Юрьево	168 7 51	8901.34	11230.33
Локно	278 52 25	9054.58	7892.42

Вариант 6

Пункты	*Направления*	*X*	*Y*
Хутор	0 0 0	12128.36	9185.54
Крутик	98 19 31	12015.28	11884.00
Юрьево	177 57 33	9196.20	12171.22
Локно	262 16 28	9261.40	9078.25

Вариант 7

Пункты	*Направления*	*X*	*Y*
Хутор	0 0 0	9316.44	10158.50
Крутик	105 6 3	11221.18	8344.16
Юрьево	189 22 49	12694.14	10139.86
Локно	273 22 8	10996.04	12048.02

Вариант 8

Пункты	*Направления*	*X*	*Y*
Хутор	0 0 0	12480.95	10219.13
Крутик	100 32 56	10241.98	12270.54
Юрьево	192 56 33	8586.56	10552.15
Локно	266 31 50	9655.10	8220.95

Вариант 9

Пункты	*Направления*	*X*	*Y*
Хутор	0 0 0	9437.34	9162.28
Крутик	76 44 25	11815.49	8923.49
Юрьево	169 52 22	11934.21	11482.86
Локно	274 32 37	8994.26	11890.43

Вариант 10

Пункты	*Направления*	*X*	*Y*
Хутор	0 0 0	11484.68	12730.66
Крутик	103 4 15	8642.33	11063.56
Юрьево	182 1 2	9897.19	9097.60
Локно	276 45 54	12039.96	10202.63

ЗАДАЧА 4.

ТЕОДОТИТНЫЙ ХОД

Вариант 1

Направления (ГГГ ММ.Д)

Стоим на 9506		Стоим на 1		Стоим на 2		Стоим на 3		Стоим на 4	
9505	0 00.0	9506	0 00.0	1	0 00.0	2	0 00.0	3	0 00.0
1	257 37.3	АС4	154 17.9	АС3	40 35.0	АС2	159 46.4	АС1	54 29.5
		2	188 46.0	3	82 42.3	4	182 9.4	9508	271 1.4

Стоим на 9508	
4	0 00.0
9507	259 56.8

Стороны (м)

9506	1	323.50	1	АС4	162.92
1	2	436.59	2	АС3	125.51
2	3	291.08	3	АС2	95.19
3	4	290.63	4	АС1	285.17
4	9508	473.85			

Коорд-ты исходных пунктов

nn	X,м	Y,м
9505	38115.11	28100.94
9506	38481.62	28101.13
9507	38120.05	29573.80
9508	39214.93	29223.28

Вариант 3

Направления (ГГГ ММ.Д)

Стоим на 9506		Стоим на 1		Стоим на 2		Стоим на 3		Стоим на 4	
9505	0 00.0	9506	0 00.0	1	0 00.0	2	0 00.0	3	0 00.0
1	257 29.0	АС4	156 50.0	АС3	38 8.0	АС2	159 5.1	АС1	56 2.4
		2	189 4.3	3	83 27.8	4	180 21.4	9508	272 20.9

Стоим на 9508	
4	0 00.0
9507	260 11.3

Стороны (м)

9506	1	332.11	1	АС4	160.28
1	2	429.76	2	АС3	123.63
2	3	283.92	3	АС2	103.13
3	4	289.80	4	АС1	274.84
4	9508	478.73			

Коорд-ты исходных пунктов

nn	X,м	Y,м
9505	38118.85	28101.99
9506	38477.15	28099.03
9507	38119.71	29568.82
9508	39210.74	29223.34

Вариант 4

Направления (ГГГ ММ.Д)

Стоим на 9506		Стоим на 1		Стоим на 2		Стоим на 3		Стоим на 4	
9505	0 00.0	9506	0 00.0	1	0 00.0	2	0 00.0	3	0 00.0
1	258 2.9	АС4	150 49.6	АС3	36 59.2	АС2	162 58.1	АС1	54 44.8
		2	187 51.7	3	83 53.7	4	180 22.6	9508	271 49.8

Стоим на 9508	
4	0 00.0
9507	260 0.7

Стороны (м)

9506	1	327.72	1	АС4	161.31
1	2	427.52	2	АС3	124.43
2	3	283.22	3	АС2	109.08
3	4	298.53	4	АС1	290.43
4	9508	474.00			

Коорд-ты исходных пунктов

nn	X,м	Y,м
9505	38124.69	28103.01
9506	38480.76	28104.03
9507	38124.65	29571.48
9508	39214.88	29221.25

Вариант 6

Направления (ГГГ ММ.Д)

Стоим на 9506		Стоим на 1		Стоим на 2		Стоим на 3		Стоим на 4	
9505	0 00.0	9506	0 00.0	1	0 00.0	2	0 00.0	3	0 00.0
1	257 11.9	АС4	157 45.7	АС3	39 20.3	АС2	160 14.0	АС1	53 4.3
		2	191 1.1	3	81 51.8	4	181 16.5	9508	272 40.3

Стоим на 9508	
4	0 00.0
9507	258 48.6

Стороны (м)

9506	1	325.48	1	АС4	161.36
1	2	440.01	2	АС3	131.24
2	3	288.81	3	АС2	108.44
3	4	299.34	4	АС1	288.43
4	9508	471.03			

Коорд-ты исходных пунктов

nn	X,м	Y,м
9505	38118.45	28104.57
9506	38478.09	28099.09
9507	38122.14	29573.48
9508	39210.87	29218.70

Вариант 8

Направления (ГГГ ММ.Д)

Стоим на 9506		Стоим на 1		Стоим на 2		Стоим на 3		Стоим на 4	
9505	0 00.0	9506	0 00.0	1	0 00.0	2	0 00.0	3	0 00.0
1	258 9.9	AC4	156 50.4	AC3	38 7.0	AC2	160 22.3	AC1	55 15.1
		2	188 36.4	3	83 23.2	4	180 56.4	9508	271 51.7

Стоим на 9508	
4	0 00.0
9507	259 58.3

Стороны (м)

9506	1	326.11	1	AC4	167.95
1	2	439.26	2	AC3	132.51
2	3	287.22	3	AC2	106.98
3	4	289.41	4	AC1	281.42
4	9508	473.78			

Коорд-ты исходных пунктов

пп	X,м	Y,м
9505	38122.59	28102.72
9506	38478.30	28098.25
9507	38116.36	29574.64
9508	39210.97	29223.00

ЗАДАЧА 5.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ

e– точность вычислений

Вариант 1

$$\begin{cases} 2{,}7X_1 + 3{,}3X_2 + 1{,}3X_3 = 2{,}1 \\ 3{,}5X_1 - 1{,}7X_2 + 2{,}8X_3 = 1{,}7 \\ 4.1X_1 + 5{,}8X_2 - 1{,}7X_3 = 0{,}8 \end{cases}$$

e=0.001

Вариант 2

$$\begin{cases} 1{,}7X_1 + 2{,}8X_2 + 9{,}5X_3 = 1{,}2 \\ 2{,}1X_1 + 3{,}4X_2 + 1{,}8X_3 = 1{,}4 \\ 4{,}2X_1 - 1{,}7X_2 + 1{,}3X_3 = 2{,}8 \end{cases}$$

e=0,0005

Вариант 3

$$\begin{cases} 5{,}2X_1 + 2{,}6X_2 + 1{,}9X_3 = 0{,}4 \\ 1{,}9X_1 + 3{,}1X_2 + 2{,}1X_3 = 2{,}6 \\ 7{,}3X_1 + 3{,}8X_2 - 4{,}5X_3 = 6{,}5 \end{cases}$$

e=0,0003

Вариант 4

$$\begin{cases} 9{,}2X_1 + 5{,}6X_2 + 7{,}8X_3 = 9{,}4 \\ 4{,}8X_1 + 5{,}4X_2 + 2{,}8X_3 = 7{,}6 \\ 4{,}5X_1 + 5{,}8X_2 + 1{,}2X_3 = 5{,}4 \end{cases}$$

e=0,001

Вариант 5

$$\begin{cases} 3{,}2X_1 + 2{,}1X_2 + 2{,}8X_3 = 0{,}9 \\ 4{,}2X_1 + 4{,}5X_2 + 3{,}7X_3 = 5{,}9 \\ 2{,}6X_1 + 1{,}8X_2 + 1{,}2X_3 = 3{,}7 \end{cases}$$

e=0,0002

Вариант 6

$$\begin{cases} 7{,}6X_1 + 5{,}8X_2 + 3{,}7X_3 = 98 \\ 3{,}8X_1 + 4{,}1X_2 + 2{,}7X_3 = 9{,}5 \\ 2{,}7X_1 + 1{,}9X_2 + 3{,}8X_3 = 8{,}8 \end{cases}$$

e=0.0001

Вариант 7

$$\begin{cases} 3{,}2X_1 - 2{,}5X_2 + 3{,}7X_3 = 6{,}7 \\ 0{,}7X_1 + 0{,}5X_2 + 1{,}7X_3 = -0{,}3 \\ 1{,}6X_1 + 2{,}3X_2 - 1{,}5X_3 = 4{,}3 \end{cases}$$

e=0,001

Вариант 8

$$\begin{cases} 5{,}4X_1 - 2{,}3X_2 + 3{,}9X_3 = -3{,}2 \\ 4{,}2X_1 + 3{,}9X_2 - 2{,}6X_3 = 5{,}6 \\ 3{,}4X_1 + 2{,}4X_2 + 6{,}4X_3 = 8{,}7 \end{cases}$$

e=0,0005

Вариант 9

$$\begin{cases} 3{,}6X_1 + 1{,}8X_2 - 4{,}7X_3 = 3{,}8 \\ 2{,}7X_1 - 3{,}6X_2 + 1{,}9X_3 = 0{,}4 \\ 1{,}5X_1 + 4{,}5X_2 + 3{,}3X_3 = 1{,}6 \end{cases}$$

e=0,0001

Вариант 10

$$\begin{cases} 5{,}1X_1 + 2{,}7X_2 - 1{,}6X_3 = 1{,}9 \\ 3{,}4X_1 - 4{,}6X_2 - 6{,}7X_3 = -2{,}4 \\ 0{,}9X_1 + 2{,}5X_2 + 3{,}1X_3 = 1{,}7 \end{cases}$$

e=0,0003

ЗАДАЧА 6.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

Вариант 1

$$\begin{cases} 5X_1 + 4X_2 + X_3 + 3X_4 = -1 \\ 17X_1 + 2X_2 + 8X_3 + 7X_4 = 0 \\ X_1 + 3X_2 + 10X_3 + 7X_4 = 8 \\ -2X_1 + X_2 + 3X_3 + 2X_4 = 3 \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 + 2X_3 = 13 \\ 2X_2 + 5X_3 + 5X_4 = 29 \\ 7X_1 + 5X_2 + 4X_3 + 9X_4 = 50 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 = 17 \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 + \quad - 8X_4 = 16 \\ 3X_1 + 2X_2 - X_3 - 26X_4 = -1 \\ 6X_1 + X_2 + 2X_3 - 4X_4 = 19 \\ 2X_1 + X_3 + 2X_4 = 9 \end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases} X_1 - 4X_2 - 3X_3 + 3X_4 = 24 \\ 2X_1 + 7X_2 + 8X_3 - X_4 = 43 \\ 3X_1 + 14X_2 + 5X_3 = 8 \\ X_1 + 5X_2 + X_3 = 3 \end{cases}$$

Вариант 5

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 - 3X_4 = 15 \\ 2X_1 + 18X_2 + 5X_4 = 83 \\ X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 6X_4 = 18 \\ X_2 + X_3 + 2X_4 = 8 \end{cases}$$

Вариант 6

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 - 4X_3 + 2X_4 = 35 \\ 5X_1 - 7X_2 + 9X_3 - 10X_4 = -181 \\ 2X_1 + 10X_3 = -6 \\ X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 52 \end{cases}$$

Вариант 7

$$\begin{cases} 4X_1 - 7X_2 - 5X_3 - 5X_4 = 47 \\ 14X_1 - 24X_2 - 6X_3 - 5X_4 = 129 \\ X_2 + 4X_3 + 2X_4 = -10 \\ 2X_1 - 3X_2 + X_3 = 14 \end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases} 7X_1 - 7X_2 + 2X_3 + 2X_4 = 39 \\ 17X_1 - 6X_2 + 78X_3 + 9X_4 = 91 \\ X_1 + 2X_2 + 4X_4 = 14 \\ 2X_1 + X_3 + 3X_4 = 19 \end{cases}$$

Вариант 9

$$\begin{cases} 3X_1 - X_2 - X_3 + 8X_4 = 18 \\ 2X_1 + X_2 + 5X_3 - 5X_4 = 45 \\ 2X_1 + 3X_3 + 10X_4 = 30 \\ X_1 + 2X_3 + 3X_4 = 19 \end{cases}$$

Вариант 10

$$\begin{cases} 2X_1 + 43X_3 - 4X_4 = 18 \\ X_1 + X_2 + 24X_3 + 17X_4 = -8 \\ 2X_2 - X_3 + 6X_4 = -2 \\ X_2 + 3X_3 + 5X_4 = -3 \end{cases}$$

ЗАДАЧА 7.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ УЧАСТКА

В таблицах приведены результаты измерений участков в метрах.

Вариант 1

X	Y
0	26,382
3	33,568
6	35,425
9	39,546
13	42,215
17	40,524
21	37,500
25	35,185
28	33,427
31	29,845

Вариант 2

X	Y
6	58,146
8	52,362
10	47,355
13	42,283
16	39,146
18	38,634
21	36,849
24	35,564
27	35,143
29	34,215

Вариант 3

X	Y
0	10,536
2	20,814
5	29,530
7	38,486
10	45,731
12	48,500
14	50,334
16	49,515
18	47,244
20	43,377

Вариант 4

X	Y
6	47,552
10	38,526
14	32,442
18	27,137
23	23,250
26	21,254
29	21,832
33	20,875
38	21,325
40	21,350

Вариант 5

X	Y
2	44,333
4	41,425
7	38,812
11	37,538
14	39,243
17	42,525
20	38,126
24	29,433
29	31,143
32	27,278

Вариант 6

X	Y
1	15,148
3	20,234
6	24,654
9	27,660
11	29,050
13	30,480
16	32,146
19	32,960
21	34,165
26	35,918

Вариант 7

X	Y
3	28,154
5	45,237
7	56,355
10	65,892
13	73,216
16	78,562
20	82,513
23	81,733
25	87,299
27	91,915

Вариант 8

X	Y
2	39,780
5	36,280
8	32,345
11	28,526
14	24,834
17	21,875
20	18,819
23	15,824
27	17,837
31	23,259

Вариант 9

X	Y
13	9,852
17	12,538
22	14,912
26	19,286
30	23,974
34	23,153
38	22,542
42	29,483
46	36,561
50	43,758

Вариант 10

X	Y
6	18,953
8	24,325
11	27,935
13	29,464
15	30,234
17	28,857
19	27,248
21	24,939
23	22,258
26	15,358