

**Тема: «Приближенное решение задачи Коши методами Эйлера и Рунге-Кутты»**

**Цель - сформировать у магистрантов представление о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать задачу Коши для дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  на отрезке  $[a, b]$  при заданном начальном условии  $y_0 = y(x_0)$  методами Эйлера и Рунге-Кутты, развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.**

**1. Метод Эйлера.**

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения  $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ . Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  решения уравнения  $y(x)$  в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Чаще всего  $x_i = x_0 + ih$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Точки  $x_i$  называются узлами сетки, а величина  $h$  - шагом ( $h > 0$ ).

В методе Эйлера величины  $y_i$  вычисляются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Этот метод относится к группе одношаговых методов, в которых для расчета точки  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  требуется информация только о последней вычисленной точке  $(x_i, y_i)$ . Метод допускает простую геометрическую интерпретацию (рис. 1). Предположим, что известна точка  $(x_i, y_i)$  на искомой интегральной кривой. Тогда касательная к этой кривой, проходящая через точку  $(x_i, y_i)$ , определяется уравнением  $y = y'_i(x - x_i) + y_i$ , а так как  $y'_i = f(x_i, y_i)$  и  $x_{i+1} = x_i + h$ , то  $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ .

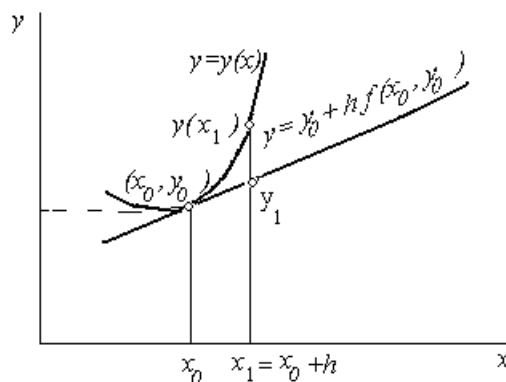


Рис. 1

Для оценки погрешности метода на одном шаге сетки разложим точное решение в ряд Тейлора в окрестности узла  $x_i$

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + O(h^2) = \\ &= y(x_i) + h f(x_i, y_i) + O(h^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Сравнение формулы (1) с разложением (2) показывает, что они согласуются до членов первого порядка по  $h$  а погрешность формулы (1) равна  $O(h^2)$ . Если расчетные формулы численного метода согласуются с разложением в ряд Тейлора до членов порядка  $h^p$ , то число  $p$  называют порядком метода. Таким образом, Метод Эйлера – метод первого порядка.

Для практической оценки погрешности расчета можно рекомендовать правило Рунге. Для этого проведем вычисления с шагом  $h$  и  $h/2$  и сравним величины  $y_i^{(h)}$  и  $y_{2i}^{(h/2)}$ . За оценку погрешности вычислений с шагом  $h/2$  можно принять величину

$$\max_i \left| y_i^{(h)} - y_{2i}^{(h/2)} \right|. \quad (7)$$

Используем описанный алгоритм Эйлера при решении примера 1.

**Пример 1.** Получить численное решение дифференциального уравнения  $y' + 3y = x^2 \sin x$  с начальным условием  $y(0) = 40$  на интервале  $[0,20]$ . Полученное решение сравнить с точным решением:

$$\begin{aligned} y_{\tau}(x) &= -\frac{1}{10} \cdot x^2 \cdot \cos x + \frac{3}{25} \cdot x \cdot \cos(x) - \frac{13}{250} \cdot \cos(x) + \\ &+ \frac{3}{10} \cdot x^2 \cdot \sin x - \frac{4}{25} \cdot x \cdot \sin(x) + \frac{9}{250} \cdot \sin x + \frac{10013}{250} \cdot e^{-3 \cdot x} \end{aligned}$$

Решение проведем в математическом пакете MATHCAD. Результаты представлены на рис. 2-5. На рис. 2 задаются начальные значения, число точек интегрирования, правая часть дифференциального уравнения и функция Euler(x0,xk,n,y0), решающая это уравнение по формуле (5). На рис. 3 задается функция Yrez, которая уточняет полученное решение по формуле (7) с заданной точностью. На рис. 4 представлен график решения. На рис. 5 представлены результаты решения и проведено сравнение полученного решения с точным. Как видим полученное решение с заданной точностью совпадает с точным решением.

$x_0$  - начальное значение  $x_0$   
 $x_k$  - конечное значение отрезка интегрирования уравнения  
 $y_0$  - значение  $y$  в точке  $x_0$   
 $n$  - число точек интегрирования  
 $h$  - шаг интегрирования  
 $eps$  - оценка погрешности вычислений  
 $f$  - правая часть уравнения

$x_0 := 0 \quad x_k := 20 \quad y_0 := 40 \quad n := 10 \quad eps := 0.001$

$f(x, y) := x^2 \cdot \sin(x) - 3 \cdot y$

```

Euler(x0, xk, n, y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ← (xk - x0) / n
  for i ∈ 0..n-1
    xi+1 ← xi + h
    yi+1 ← yi + h · f(xi, yi)
  Y(0) ← x
  Y(1) ← y
  Y
    
```

Рис. 2. Фрагмент рабочего документа MATHCAD с функцией, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Эйлера

```

Yrez :=
  eps ← eps
  for m ∈ 0..100000000
    mn := 0, (Yrez1) / 5 .. (2Yrez1)
    y1 ← Euler(x0, xk, n, y0)
    y2 ← Euler(x0, xk, 2n, y0)
    for k ∈ 0..n
      rk ← max(|y1k,1 - y22k,1|)
    break if max(r) < eps
    n ← 2 · n otherwise
  (y2)
  (n)
  n1 := Yrez1
  Yrez1 = 3.277 × 105
  y1 := Euler(x0, xk, n1, y0)
  y2 := Euler(x0, xk, 2n1, y0)
  k := 0..n1
  rk := max(|y1k,1 - y22k,1|)
  max(r) = 0.0007
    
```

0	40
2	1.02
4	-2.409
6	-5.575
8	18.564
10	-8.042
12	-33.149
14	53.607
16	1.343
18	-90.863
20	91.3

Рис. 3. Фрагмент рабочего документа MATHCAD с функцией, уточняющей решение с заданной точностью

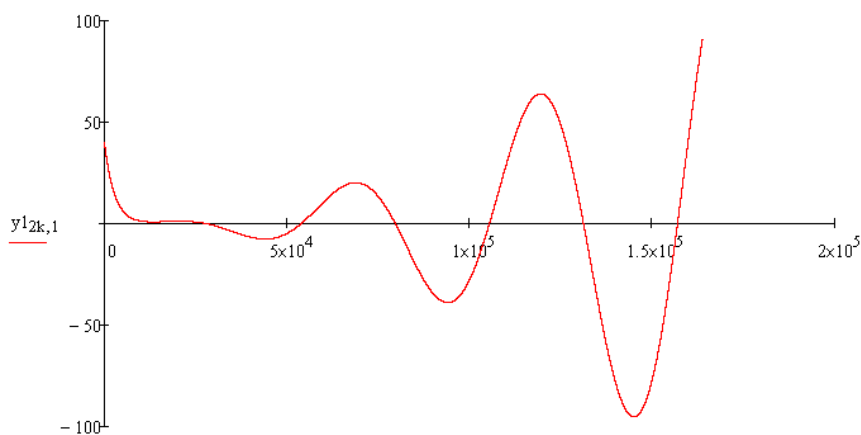


Рис. 4 Фрагмент рабочего документа MATHCAD с графиком решения  
точное решение

$x := 0..20$

$$y_T(x) := \frac{10013 \cdot e^{-3x}}{250} - \frac{13 \cdot \cos(x)}{250} + \frac{9 \cdot \sin(x)}{250} - \frac{x^2 \cdot \cos(x)}{10} + \frac{3 \cdot x^2 \cdot \sin(x)}{10} + \frac{3 \cdot x \cdot \cos(x)}{25} - \frac{4 \cdot x \cdot \sin(x)}{25}$$

$E_x := (Y_{rez0}) \frac{Y_{rez1}}{10^x}, 1$  Решение методом Эйлера

x =	$y_T(x) =$	$E_x =$	x =	$y_T(x) =$	$E_x =$
0	40	40	11	-34.624	-34.624
1	2.125	2.125	12	-33.149	-33.149
2	1.02	1.02	13	6.476	6.476
3	0.909	0.909	14	53.607	53.607
4	-2.409	-2.409	15	58.122	58.123
5	-7.013	-7.013	16	1.343	1.343
6	-5.575	-5.575	17	-73.368	-73.368
7	5.845	5.845	18	-90.862	-90.863
8	18.564	18.564	19	-17.708	-17.708
9	15.879	15.879	20	91.3	91.3
10	-8.042	-8.042			

Рис. 5. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – сравнение решения методом Эйлера с точным решением

**Задание 1.** Используя метод Эйлера получить численное решение дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ , с начальным условием  $y(x_0) = y_0$  на интервале  $[x_0, x_k]$  с точностью  $eps$ . Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 1.

Варианты заданий

Таблица 1

Номер варианта	$f(x, y)$	$x_0$	$x_k$	$y_0$	$eps$
1	$\cos(x \cdot y)$	1	4	3	0,001
2	$x \cdot y^2 - \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$	0	4	-0,5	0,0001
3	$y + \ln(x + y)$	1	2	5	0,01
4	$x \cdot \sin\left(\frac{x \cdot y}{x + y}\right)$	2	10	3	0,001
5	$x \cdot \cos\left(\frac{x^2 \cdot y}{x - y}\right)$	3	9	-1	0,001

6	$x \cdot \cos\left(\frac{x^2 \cdot y}{x-y}\right)$	1	6	-0,5	0,0001
7	$x \cdot \sin\left(\frac{x^2 \cdot y}{x-y}\right)$	1	7	0,65	0,001
8	$x^3 \cdot y^2 - e^{x \cdot y}$	1	4	2,5	0,001
9	$y - \ln(x^2 \cdot y)$	1	6	2	0,01
10	$y^{-x} - \tan(x \cdot y^2)$	1,5	7	2	0,001
11	$2 \cdot x^2 - \ln(x^2 \cdot y)$	1	9	1	0,01
12	$2 \cdot x^2 + \ln(x+y)$	1,3	2,8	1	0,1
13	$x^2 \cdot \cos(x-y)$	1	5	1	0,001
14	$x^2 \cdot \sin(x^2 - y)$	1	3	1	0,001
15	$y^2 \cdot \sin(x^2 + y)$	0	4	0,5	0,001
16	$y^{-x} \cdot \sin(x^3 + y)$	0	7	0,7	0,001
17	$y^{-x} \cdot \sin(x^3 + y^2)$	0	4	1,5	0,001
18	$x^3 \cdot \sin(x^3 - y^2)$	0	8	-1	0,0001
19	$y^{-3 \cdot x} \cdot \sin(x + y^2)$	0	7	1,4	0,001
20	$y^{-2 \cdot x} \cdot \sin(x - y^2)$	0	8	1,1	0,001

Метод Эйлера легко обобщается на случай нормальных систем дифференциальных уравнений. Пусть требуется найти решение системы дифференциальных уравнений

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

.....

$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0},$$

или в векторной форме  $Y' = F(x, Y)$ ,  $Y(x_0) = Y_0$ ,

$$Y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}, Y_0 = \{y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}\}$$

Приближенные значения  $y_k(x_i)$  в точках  $x_i$  вычисляются по формулам

$$y_{ki} = y_{k(i-1)} + h f_k(x_{i-1}, y_{1(i-1)}, y_{2(i-1)}, \dots, y_{n(i-1)}), k = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots$$

**Пример 2.** Методом Эйлера на отрезке  $[0, 3]$  с точностью  $eps = 0,001$  решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = e^{-x \cdot y_1}, \end{cases} \begin{cases} y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 6.

$$x0 := 0 \quad xk := 3 \quad y0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(x,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -x y_0 \end{pmatrix} \quad n := 30 \quad eps := 0.001$$

$$\text{Euler}(x0, xk, n, y0) := \begin{cases} x0 \leftarrow x0 \\ y0 \leftarrow y0 \\ h \leftarrow \frac{xk - x0}{n} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \begin{cases} x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \end{cases} \\ Y^{(0)} \leftarrow x \\ Y^{(1)} \leftarrow y \\ Y \end{cases}$$

$$Yrez := \begin{cases} eps \leftarrow eps \\ \text{for } m \in 0..100000000 \\ \quad \begin{cases} y1 \leftarrow \text{Euler}(x0, xk, n, y0) \\ y2 \leftarrow \text{Euler}(x0, xk, 2n, y0) \\ \text{for } k \in 0..n \\ \quad r_k \leftarrow \max(|y1_{k,1} - y2_{2k,1}|) \\ \text{break if } \max(r) < eps \\ n \leftarrow 2 \cdot n \text{ otherwise} \end{cases} \\ \begin{pmatrix} y1 \\ n \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$Yrez1 = 1.92 \times 10^3 \quad n := Yrez1 \quad nm := 0, \frac{n}{10} .. n \quad y := \text{Euler}(x0, xk, n, y0)$$

$(y_{nm,1})_0$	$(y_{nm,1})_1$
0	0
0.045	0.299
0.178	0.585
0.391	0.827
0.667	1.001
0.984	1.101
1.322	1.147
1.669	1.164
2.019	1.169
2.37	1.17
2.721	1.171

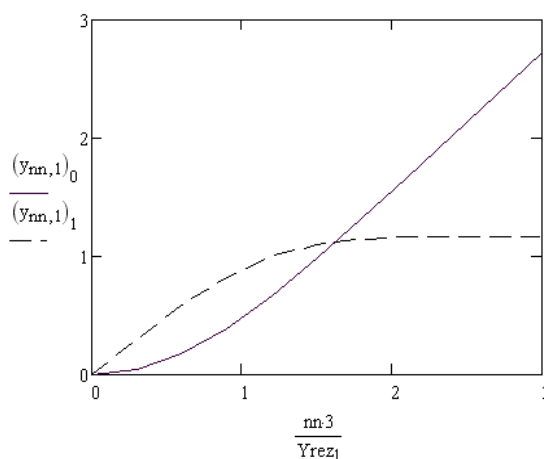


Рис. 6. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 2 методом Эйлера

**Задание 2.** Методом Эйлера на отрезке  $[x_0, x_k]$  с точностью  $eps$  решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases} \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}. \end{cases}$$

Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 2.

Таблица 2

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2)$ $f_2(x, y_1, y_2)$	$x_0$	$x_k$	$y_{10}$ $y_{20}$	$eps$
1	$\cos(x + y_2)$ $\sin(x - y_1)$	0	8	0,5 -0,5	0,001

2	$\frac{\arctg(x \cdot y_2)}{\sin(y_1)}$	-2,2	1,8	$\begin{matrix} 0,1 \\ 0 \end{matrix}$	0,001
3	$\frac{\sin(y_2)}{\cos(y_1)}$	1	7	$\begin{matrix} 0,4 \\ -0,6 \end{matrix}$	0,01
4	$\frac{\sqrt{1+x^2+y_2^2}}{\sin(y_1 \cdot y_2)}$	-1	4	$\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}$	0,01
5	$\frac{\arctg\left(\frac{1}{1+y_1^2+y_2^2}\right)}{\sin(y_1 \cdot y_2)}$	-1	5	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$	0,0001
6	$\frac{\frac{1}{3+e^{-y_2}}}{\frac{1}{2+e^{-y_1}}}$	2	7	$\begin{matrix} 0,2 \\ -3 \end{matrix}$	0,0001
7	$\frac{e^{-(y_1+y_2)}}{\arctg(y_1)}$	0	5	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$	0,001
8	$\frac{y_1^2}{y_2} \cdot \frac{1}{y_1^2 - y_2}$	1	3	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$	0,001
9	$\frac{\frac{1}{y_1^2 + y_2^2}}{\frac{2}{y_1^2 + y_2^2}}$	2	12	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$	0,001
10	$\frac{\sin(y_1) \cdot \cos^3(y_2)}{\cos(y_1) \cdot \cos(y_2)}$	-1	3	$\begin{matrix} 0,8 \\ 0,2 \end{matrix}$	0,01
11	$\frac{1}{\frac{ch(x+y_2)}{sh(x^2-y_1)}}$	0	3	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$	0,01
12	$\frac{\ln(x) \cdot y_2}{y_1 + y_2^2}$	1	4	$\begin{matrix} -4 \\ -6 \end{matrix}$	0,01
13	$\frac{y_2 + \sqrt{x^2 + y_1^2}}{\cos(x) \cdot y_2 - \sin(2 \cdot x)}$	2	4	$\begin{matrix} 4 \\ 8 \end{matrix}$	0,001
14	$\frac{\sin^3(y_2)}{\cos^2(y_1)}$	0	6	$\begin{matrix} 0,5 \\ -1 \end{matrix}$	0,01
15	$\frac{\cos^2(x+y_2)}{\frac{\sin(x-y_1)}{2}}$	0	3	$\begin{matrix} 0,3 \\ -0,6 \end{matrix}$	0,0001
16	$\frac{\frac{\cos(x+y_2^2)}{2}}{\ln(x) \cdot \sin^3(x-y_1)}$	1	6	$\begin{matrix} 0,2 \\ -0,5 \end{matrix}$	0,01
17	$\frac{\ln(x+2) \cdot y_2^2}{\sin(x-y_1^2)}$	1	3	$\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}$	0,001

18	$\sin(x) \cdot e^{-x \cdot y_1}$ $\cos(y_2) \cdot e^{-\frac{x}{y_1^2}}$	1	6	0,2 0,5	0,0001
19	$e^{\frac{x+y_1}{y_1+y_2}}$ $e^{\frac{y_1-x_1}{y_1+y_2}}$	2	4	1 -1	0,01
20	$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+y_1^2}\right)$ $\cos^4(y_1 \cdot y_2)$	-2	5	1 1	0,0001

## 2. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения  $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ . Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  решения уравнения  $y(x)$  в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Точки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - узлы сетки. Используем систему равноотстоящих узлов. Величина  $h$  - шаг сетки ( $h > 0$ ).

Методом Рунге-Кутты обычно называют одношаговый метод четвертого порядка, относящийся к широкому классу методов типа Рунге-Кутты. В этом методе величины  $y_{i+1}$  вычисляются по следующим формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \quad (1)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

Погрешность метода на одном шаге сетки равна  $Ch^4$ , но на практике оценить величину  $C$  обычно трудно. При оценке погрешности используют правило Рунге. Для этого проводят вычисления сначала с шагом  $h$ , а затем - с шагом  $h/2$ . Если  $y_i^{(h)}$  - приближение, вычисленное с шагом  $h$ , а  $y_{2i}^{(h/2)}$  - с шагом  $h/2$ , то справедлива оценка

$$\left| y_{2i}^{(h/2)} - y(x_{2i}) \right| \leq \frac{16}{15} \left| y_{2i}^{(h/2)} - y_i^{(h)} \right|.$$

За оценку погрешности вычислений с шагом  $h/2$  можно принять величину

$$\max \frac{|y_i^{(h)} - y_{2i}^{(h/2)}|}{15}. \quad (2)$$

Решим пример 1 методом Рунге-Кутты. Результаты представим на рис. 7. Сначала задаются начальные значения, число точек интегрирования, правая часть дифференциального уравнения и функция  $\text{RungeKutta}(x_0, x_k, n, y_0)$ , решающая это уравнение по формулам (1). Затем задается функция  $\text{Yrez}$ , которая уточняет полученное решение по формуле (2) с заданной точностью.

```

x0 := 0  xk := 20  y0 := 40  n := 10  eps := 0.001  f(x,y) := x^2 * sin(x) - 3 * y
RungeKutta(x0, xk, n, y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ← (xk - x0) / n
  for i ∈ 0..n-1
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h * f(xi, yi)
    k2i ← h * f(xi + h/2, yi + k1i/2)
    k3i ← h * f(xi + h/2, yi + k2i/2)
    k4i ← h * f(xi + h, yi + k3i)
    yi+1 ← yi + 1/6 * (k1i + 2 * k2i + 2 * k3i + k4i)
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

Yrez :=
  eps ← eps
  for m ∈ 0..1000000
    y1 ← RungeKutta(x0, xk, n, y0)
    y2 ← RungeKutta(x0, xk, 2n, y0)
    for k ∈ 0..n
      rk ← max(|y1k,1 - y2k,1| / 15)
    break if max(r) < eps
    n ← 2 * n otherwise
  (y2)
  (n)

nm := 0, Yrez1 / 5 .. (2 * Yrez)1
(Yrez0)nm,0 (Yrez0)nm,1 =

```

0	40
2	1.02
4	-2.409
6	-5.575
8	18.564
10	-8.042
12	-33.149
14	53.607
16	1.343
18	-90.862
20	91.3

```

n1 := Yrez1
y1 := RungeKutta(x0, xk, n1, y0)
y2 := RungeKutta(x0, xk, 2n1, y0)
k := 0..n1
rk := max(|y1k,1 - y2k,1| / 15)
max(r) = 0.000208

```

Рис. 7. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 1 методом Рунге-Кутты

Как видим результаты вычислений по методу Рунге-Кутты, также совпали с точным решением, как и с помощью метода Эйлера. Однако, для того чтобы это совпадение произошло по методу Рунге-Кутты нам пришлось уменьшить шаг в 2048 раз меньше, чем с помощью метода Эйлера, что приводит к уменьшению ошибки округления и значительной экономии машинного времени.

Метод Рунге-Кутта легко переносится на нормальные системы дифференциальных уравнений вида

$$y'_k(x) = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad 1 \leq k \leq n,$$

которые для краткости удобно записывать в векторной форме

$$Y'(x) = F(x, Y),$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

Для получения расчетных формул методом Рунге-Кутта достаточно в формулах (7) заменить  $y$  и  $f(x, y)$  соответственно на  $Y$  и  $F(x, Y)$ , а коэффициенты  $k_j$  - на  $K_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ).

**Пример 3.** Методом Рунге-Кутта на отрезке  $[0, 2]$  с точностью  $eps = 0,0000001$  решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_2 + \sin(x \cdot y_3), \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_3 - y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0, \\ y_3(0) = 1. \end{cases}$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 8.

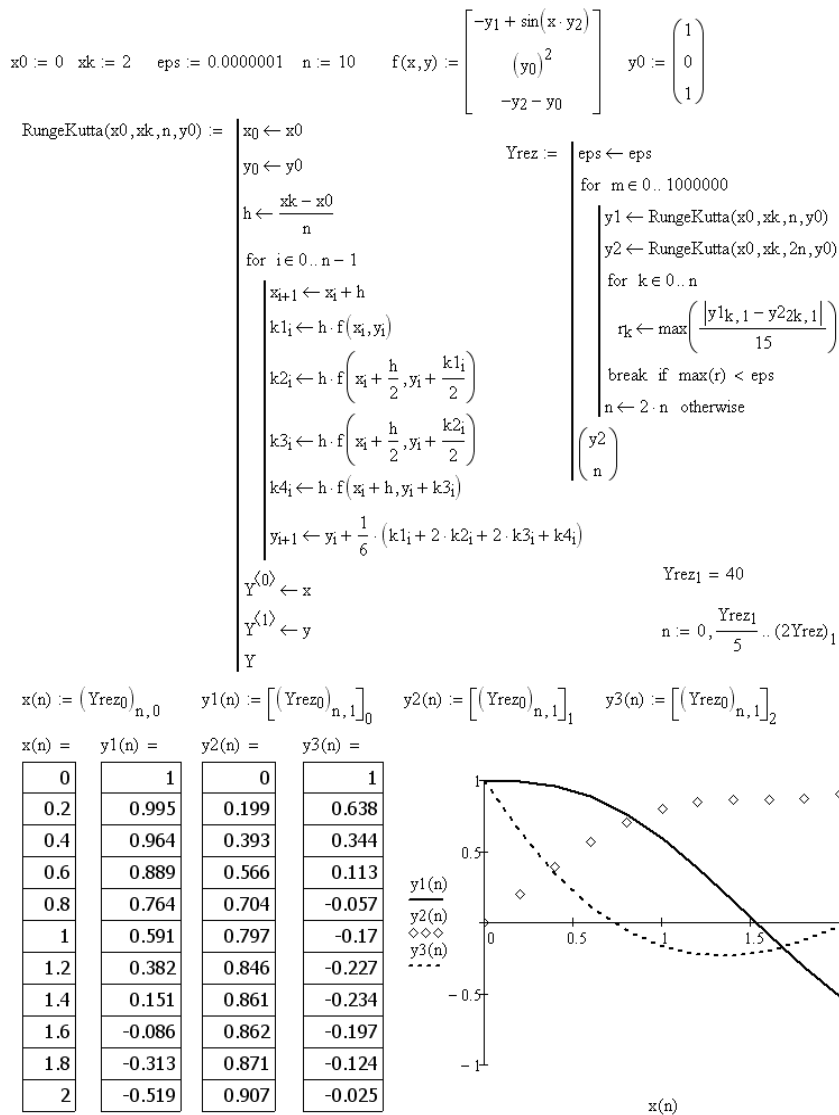


Рис. 8. Рабочий документ МАТНСАД – решение примера 3 методом Рунге-Кутта

**Задание 3.** Методом Рунге-Кутта на отрезке  $[x_0, x_k]$  с точностью  $eps = 0,000001$  решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3), \end{cases} \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \\ y_3(x_0) = y_{30} \end{cases}$$

Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 3.

Таблица 3

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$	$x_0$	$x_k$	$y_{10}$ $y_{20}$ $y_{30}$
1	$e^{y_3 - y_1}$ $\sin(x \cdot y_3)$ $\sqrt{x^2 + y_1^2 + y_2^2}$	1	3	2 -1 0

2	$2y_1^2 + y_2 \cdot y_3$ $y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + y_1^3$ $\sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}$	-1	0	-2 -7 2
3	$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$ $x^2 \cdot y_2^2$ $\lg(x^2 + y_1^2)$	0,2	2,2	0,1 -1 0,5
4	$\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$ $\ln(x^2 + y_3^2)$ $e^{-y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$	1	5	1 1 1
5	$\cos(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$ $y_1^2 + y_2 + y_3^2$ $\sin(y_1 + y_3)$	1,5	3,5	0,7 1 -0,7
6	$sh(x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3)$ $ch(x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3)$ $\sin(y_1 \cdot y_2 + y_3)$	0,75	2	0,3 -1 0,4
7	$\ln(x^2 + y_1^2)$ $arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)$ $\sin(arctg(y_1 \cdot y_3))$	-2	6	-2 -5 4
8	$\sin(x^2 + y_1^2)$ $arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)$ $\cos(arctg(y_1 \cdot y_2))$	0	4	-1 -2 2
9	$-y_2 + \cos(x \cdot y_3)$ $y_1^3$ $-\frac{y_3}{2} - 2y_1^2$	1	5	0 0 0
10	$\frac{1}{2y_1^2 + y_2 \cdot y_3}$ $\frac{1}{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$ $\sqrt{1 + y_3^2}$	-3	1	1 3 1
11	$\cos(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$ $e^{x \cdot y_1 \cdot y_3}$ $\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$	1	5	-2 1 3
12	$e^{\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)}$ $y_1^2 + y_2 + y_3$ $\cos(y_1 + y_3)$	0,6	2,6	0,5 0,75 -0,5

13	$\ln(x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3)$ $\lg(x \cdot y_1 \cdot y_2 + y_3)$ $\cos(y_1 \cdot y_2 + y_3)$	0	4	0,75 0,5 1
14	$e^{x \cdot y_1 + y_2 \cdot y_3}$ $\sqrt{x \cdot y_1 \cdot y_2 + y_3}$ $\sin(y_1 \cdot y_2 + y_3)$	0	1	0 0,5 0
15	$\ln(x^2 + y_1^2)$ $\arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)$ $\sin(\arctg(y_1 \cdot y_2))$	-3	3	-1 -7 2
16	$\frac{1}{2 + e^{y_1 \cdot y_2}}$ $\frac{1}{2 + \sin(y_1 \cdot y_3)}$ $\frac{3}{3 + \cos(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)}$	-1	3	-1 0,5 1,3
17	$\sqrt{x^2 + y_2^2}$ $e^{\arctg(x \cdot y_1 \cdot y_3)}$ $\cos(\arctg(y_1 \cdot y_3))$	-4	2	-3 6 -4
18	$e^{x \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y_2^2}}$ $\cos(x^2 + y_3^2)$	0,9	2,2	0,1 0,2 0,3
19	$\sqrt[4]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}$ $\sqrt[3]{x \cdot y_1 \cdot y_3}$ $\sin(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3)$	2	4	2 0 3
20	$-y_2 + \sin(x \cdot y_3)$ $y_1^3$ $-y_3 - y_1^2$	1	5	0 1 1