1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР НОРМАЛЬНЫХ И ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ, ИЗГИБАЮЩИХ И КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Построение эпюр N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y и M_z рассмотрим на конструкции, изображенной на рис. 1. Система стержней, соединенных, как показано на рис. 1, а, нагружена силами $P_1 = 3$, $P_2 = 2$ и $P_3 = 5\ кН$. Допускаемое напряжение при растяжении – сжатии $[\sigma]$=160 МПа. Первый стержень длиной $l_1 = 4$ м имеет прямоугольное сечение с отношением сторон $h/b = 2$, второй ($l_2 = 3$м) и третий ($l_3 = 4$м) – круглые сечения.

Для данной конструкции (составного ломаного бруса) можно не определять реакций в заделке, если все участки рассматривать со стороны свободного конца конструкции. При этом обход участков будем осуществлять со стороны контура, обозначенного на рис. 1, б штриховой линией.

Ординаты эпюр откладывают от продольных осей стержней, поэтому в масштабе надо вычертить четыре контура ломаного бруса, на которых в дальнейшем будут построены эпюры.

Стержень I. Составим выражения для внутренних усилий в элементах бруса, пользуясь методом сечений. Возьмем сечение на расстоянии x_1 от свободного конца стержня (рис.1, б).

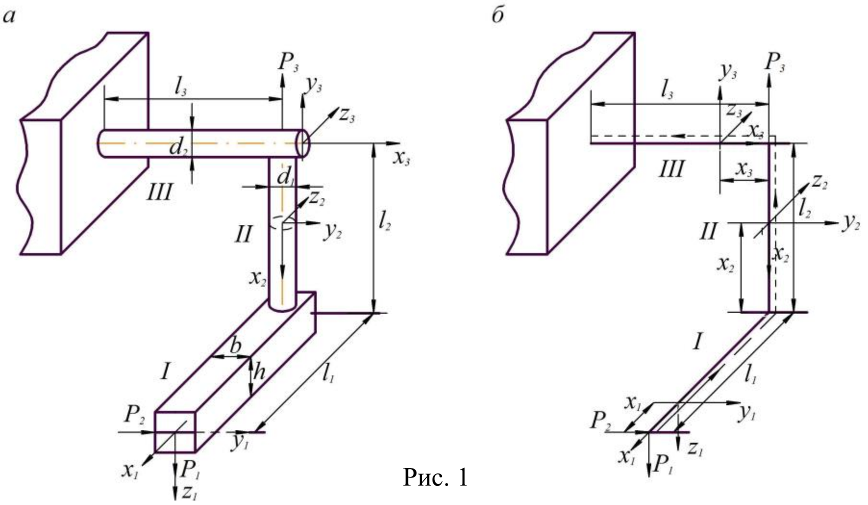

Рис. 1

В этом сечении будут действовать перерезывающие силы, постоянные по всей длине стержня:

– в вертикальной плоскости

$$Q_z = -P_1 = -3 \text{ кН};$$

– в горизонтальной плоскости

$$Q_y = P_2 = 2 \text{ кН};$$

изгибающие моменты:

$$M_y = -P_1 x_1 \text{ и } M_z = +P_2 x_1.$$

Изгибающие моменты зависят от переменной координаты в первой степени, следовательно, они изменяются по линейному закону.

Выражения для моментов справедливы по всей длине стержня, т.е. $0 \le x_1 \le l_1$ при $x_1 = 0$ $M_z = 0$ и $M_y = 0$; при $x_1 = l_1$ $M_y = -P_1 l_1 = -3 \cdot 4 = -12$ кН·м;. $M_z = P_2 l_1 = -2 \cdot 4 = 8$ кН·м.

При построении эпюр моментов (рис. 2; 5) ординаты откладываем по направлению сил:

$N_x = 0,\ M_x = 0,\ Q_z = -P_1 = -3\,\text{кН},\ Q_y = P_2 = 2\,\text{кН},$

$M_y = -P_1 x_1 = 0;8\,\text{кН}\cdot\text{м},\ M_z = P_2 x_1 = 0;12\,\text{кН}\cdot\text{м при } 0 \le x_1 \le l_1.$

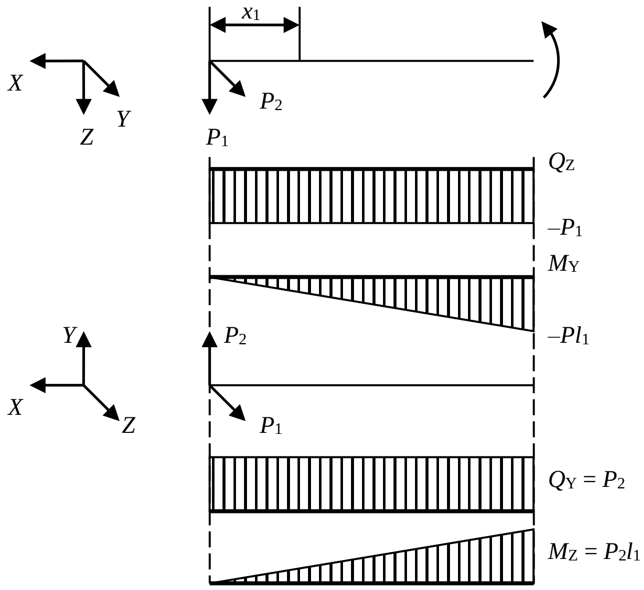

Рис. 2

Стержень II. Возьмем сечение на расстоянии x_2 от начала этого стержня. Внешние силы P_1 и P_2 в этом сечении приводятся к следующим внутренним силовым факторам:

– нормальная сила $N_x = P_1 = 3$ кН (растягивающая);

– перерезывающая сила $Q_y = P_2 = 2$ кН (в плоскости чертежа), а $Q_z = 0$.

Относительно оси *y* сила P_1 образует постоянный изгибающий момент $M_y = -P_1 l_1 = -3 \cdot 4 = -12$ кН·м.

Относительно оси *z* стержень изгибается силой P_2: $M_z = P_2 x_2$, $0 \le x_2 \le l_2$; при $x_2 = 0$ $M_z = 0$; $x_2 = l_2$ $M_z = P_2 l_2 = 6$ кН·м. От действия силы P_2 стержень испытывает еще и кручение: $M_x = P_2 l_1 = 2 \cdot 4 = 8$ кН$\cdot$м (рис. 3). Другие силовые факторы:

$N_x = P_1 = 3$ кН, $M_x = 8$ кН$\cdot$м, $Q_z = -P_1 = -3$ кН, $Q_y = P_2 = 2$ кН,

$M_y = -P_1 l_1 = -12$ кН$\cdot$м, $M_z = P_2 x_2 = 0\,;\,6$ кН$\cdot$м при $0 \le x_2 \le l_2$.

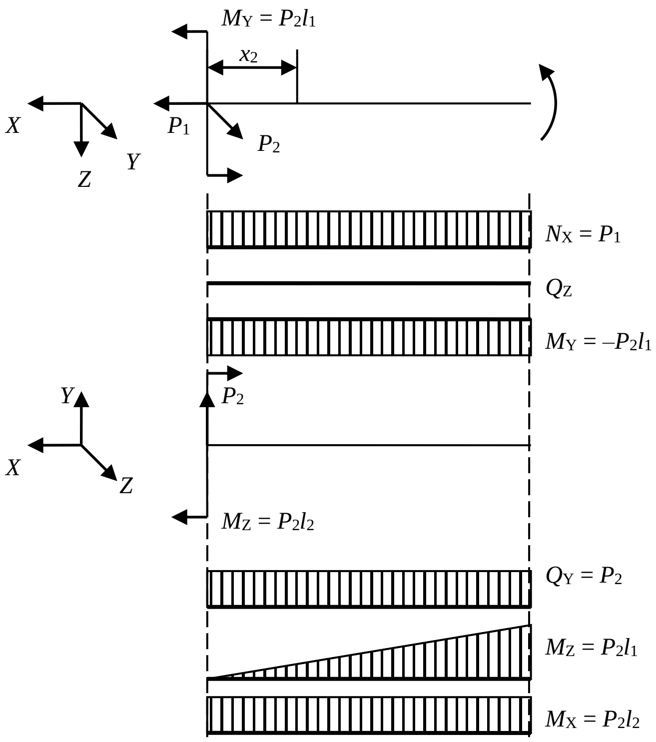

Рис. 3

Внутренние усилия во втором стержне можно определить и другим способом. Приведем все внешние силы к центру тяжести 2-го стержня (рис.4, а). Для этого приложим по две равных и противоположно направленных силы P_1 и P_2, тогда к его концу будут приложены растягивающая сила P_1, момент $M_y = -P_1 l_1$, изгибающий стержень относительно оси *y*, крутящий момент $M_x = P_2 l_1$ и сила P_2, под действием которой возникает поперечная сила, и момент, изгибающий стержень относительно оси *z* (рис. 4, б).

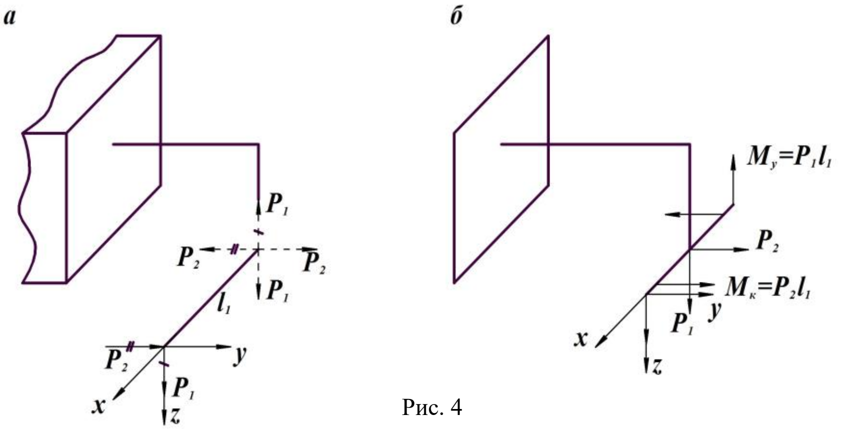

Рис. 4

Стержень III. Возьмем сечение на расстоянии x_3 от правого конца стержня (см. рис. 1, б) и составим все выражения для определения внутренних усилий в этом сечении:

– нормальная сила $N_x = P_2 = 2$ кН;

– перерезывающая сила $Q_y = -P_1 - P_3 = -8$ кН, $Q_z = 0$;

– крутящий момент $M_x = P_1 l_1 = 3 \cdot 4 = 12$ кН·м;

– изгибающие моменты: $M_y = P_2 l_1 = 2 \cdot 4 = 8$ кН·м,

$M_z = P_2 l_2 - (P_3 + P_1)x_3 = 2 \cdot 3 - (5+3)x_3$ при $0 \le x_3 \le l_3$; если $x_3 = 0$

$M_z = P_2 l_2 = 6$ кН·м, если $x_3 = l_3$, то

$M_z = P_2 l_2 + (P_3 - P_1) l_3 = -28$ кН·м (рис. 5).

При построении эпюр для 3–го стержня можно все внешние силы привести к центру тяжести правого конца данного стержня (см. рис. 3, а). Для этого приложим две равные и противоположно направленные силы P_2. В результате переноса на правом конце стержня будут действовать растягивающая сила P_2, момент $M_x = P_1 l_1$, закручивающий стержень, момент $M_y = P_2 l_1$, изгибающий стержень относительно оси *y*, момент $M_z = P_2 l_2 - (P_3 + P_1) \cdot x_3$, изгибающий относительно оси *z*, и сила $-\left(P_3 + P_1\right)$, действующая параллельно оси *y*. Тогда будем иметь:

$N_x = 2\,\text{кН},\ M_x = 12\,\text{кН}\cdot\text{м},\ Q_z = 0,\ Q_y = -8\,\text{кН},$

$M_y = P_2 l_1 = 8\,\text{кН}\cdot\text{м}, M_z = P_2 l_2 - (P_3 + P_1)\cdot x_3 = 6;-26\,\text{кН}\cdot\text{м при } 0 \le x_3 \le l_3$

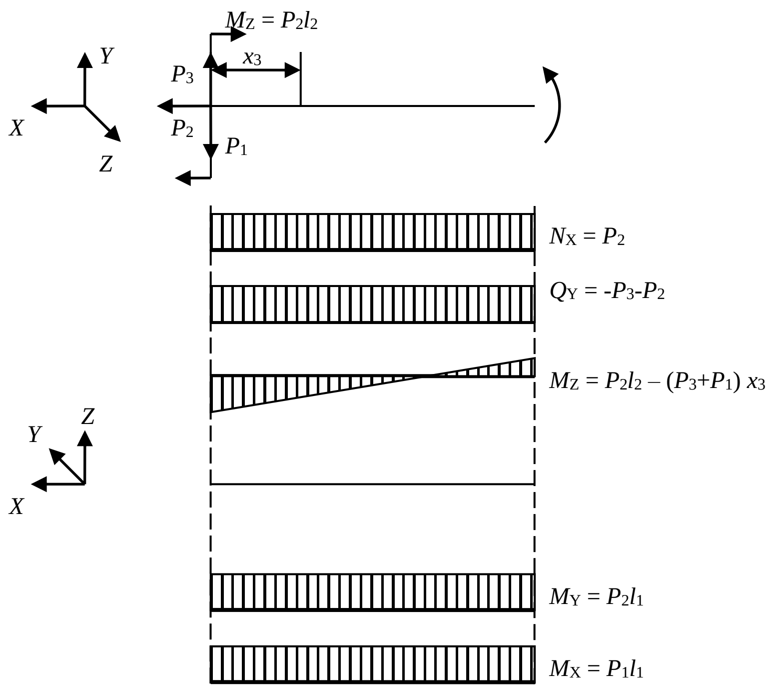

Рис. 5

Эпюры N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y и M_z приведены на рис. 6.

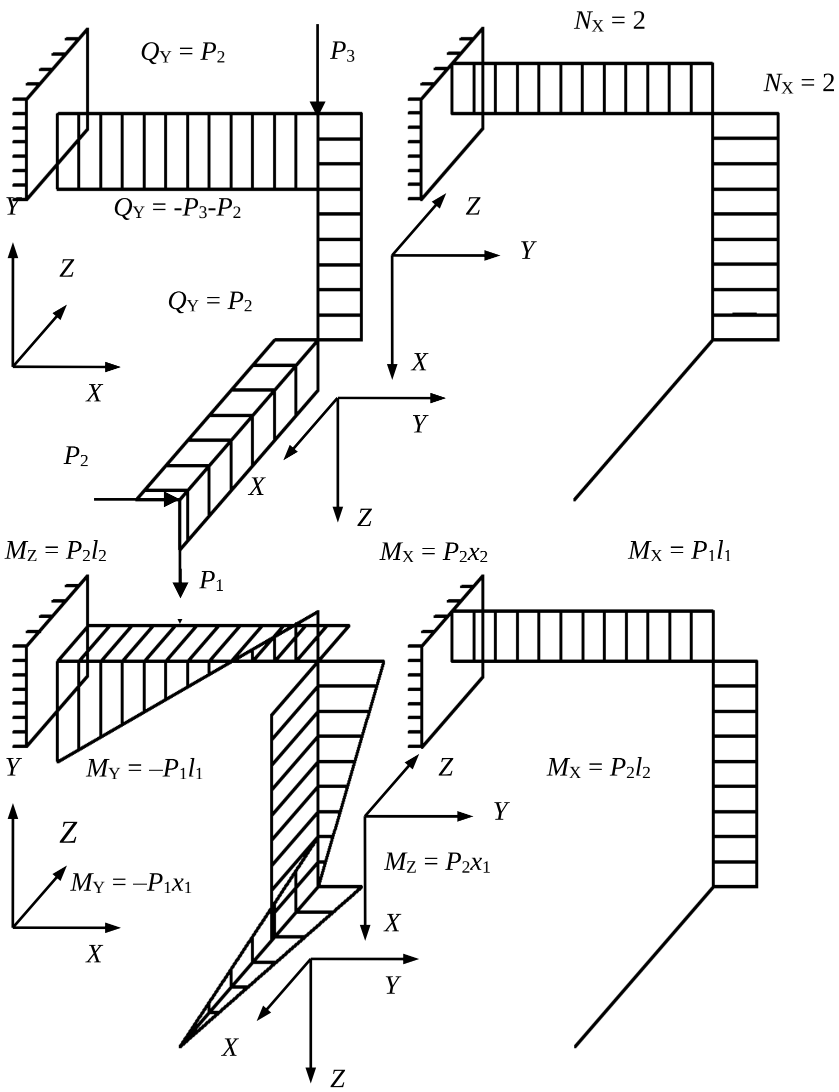

Рис. 6

2. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

На основании построенных эпюр определяем вид деформаций стержней.

Первый стержень работает на косой изгиб (см. рис. 1, а; 6), так как изгибается одновременно в двух плоскостях моментами M_y, M_z. Наибольшие нормальные напряжения возникают в сечении с наибольшими моментами M_y и M_z. Условие прочности следует записать для точки, наиболее удаленной от нейтральной оси, в которой напряжения от обоих моментов будут одного знака.

Для определения знаков напряжений рассмотрим деформацию стержня. Так, под действием момента M_z верхние волокна растягиваются, нижние сжимаются, под действием момента M_y растягиваются левые, а сжимаются правые волокна. Полученные знаки напряжений указаны на рис. 7.

Запишем условие прочности для опасных точек 2 и 4:

$$\left| \frac{M_{y\max}}{W_y} \pm \frac{M_{z\max}}{W_z} \right| \le [\sigma].$$

Для нашего случая

$$\frac{P_1 l_1}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{P_2 l_1}{\frac{b^2 h}{6}} \le [\sigma]$$

или

$$\frac{6}{bh^2}\left(P_1 l_1 + \frac{h}{b} P_2 l_1 \right) \le [\sigma].$$

По условию $h/b = 2$, тогда

$$\frac{12}{h^3}\left(P_1 l_1 + 2P_2 l_1 \right) \le [\sigma],$$

откуда

$$h > \sqrt[3]{\frac{12\left(P_1 l_1 + 2P_2 l_1\right)}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{12(12 + 2 \cdot 8) \cdot 10^{-3}}{160}} = 0{,}13 \text{ м};$$

$$b = \frac{h}{2} = \frac{0{,}13}{2} = 0{,}065 \text{ м}.$$

Вычислим нормальные напряжения в точках 1- 4 (рис. 7):

$$\sigma_{1,2,3,4} = \pm\frac{P_1 l_1}{\frac{bh^2}{6}} \pm \frac{P_2 l_1}{\frac{b^2 h}{6}} = \pm\frac{12\cdot10^{-3}}{\frac{0{,}065\cdot0{,}13^2}{6}} \pm \frac{8\cdot10^{-3}}{\frac{0{,}065^2\cdot0{,}13}{6}},$$

откуда:

$\sigma_1 = +65 - 87 = -22$ МПа ;

$\sigma_2 = -65 - 87 = -152$ МПа ;

$\sigma_3 = -65 + 87 = 22$ МПа ;

$\sigma_4 = +65 + 87 = 152$ МПа .

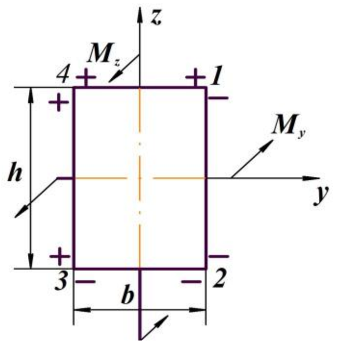

Рис. 7

Построим эпюры напряжений по контуру сечения. Положительные напряжения откладываем от контура влево (рис. 8). На нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю. По эпюрам σ можно определить нулевые точки на контуре сечения и через них провести нейтральную ось (см. рис. 8).

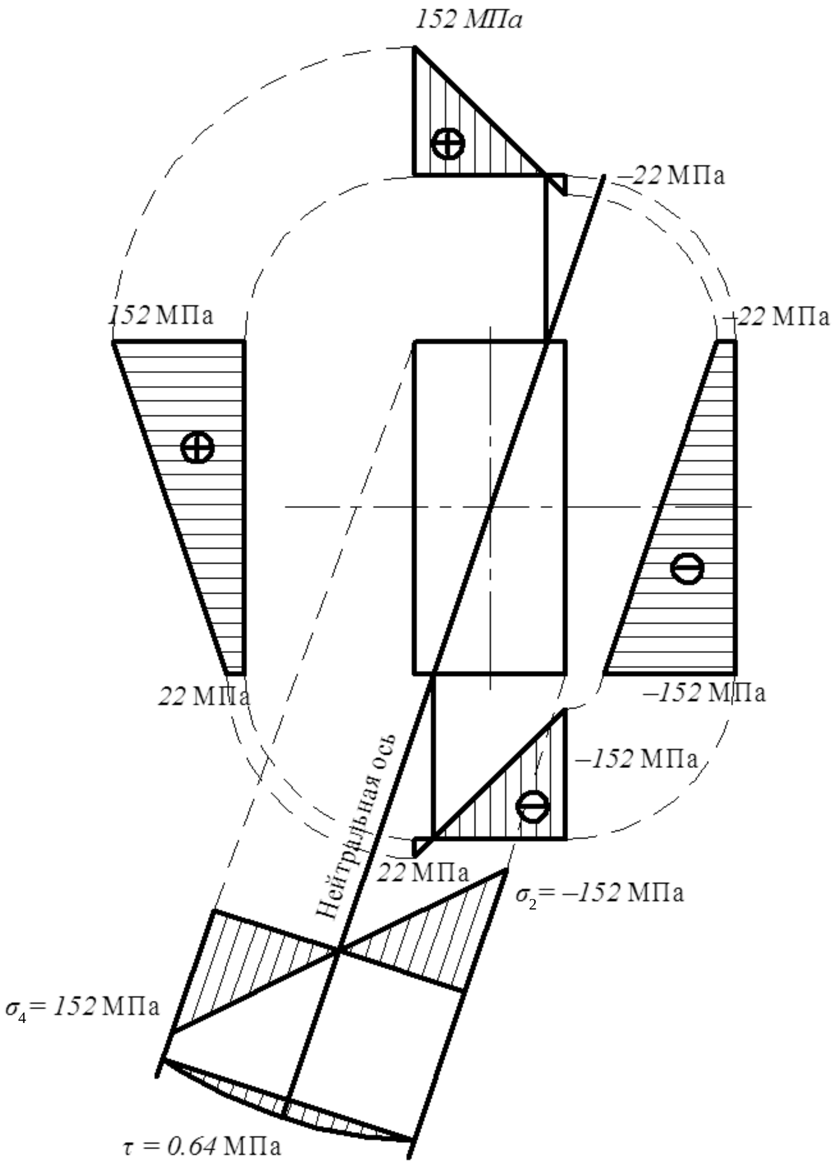
152 МПа
–22 МПа
152 МПа
–22 МПа
22 МПа
–152 МПа
–152 МПа
Нейтральная ось
22 МПа
σ_2= –152 МПа
σ_4= 152 МПа
τ = 0.64 МПа

Рис. 8

Касательные напряжения вычисляем по преобразованной формуле Журавского для максимальных напряжений в прямоугольном сечении отдельно от Q_y и Q_z:

$$\tau_z = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{bh} = \frac{3}{2}\frac{P_1}{bh} = \frac{3}{2}\frac{(-3 \cdot 10^{-3})}{0{,}065 \cdot 0{,}13} = -0{,}5 \text{ МПа};$$

$$\tau_y = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{bh} = \frac{3}{2}\frac{P_2}{bh} = \frac{3}{2}\frac{2 \cdot 10^{-3}}{0{,}065 \cdot 0{,}13} = 0{,}4 \text{ МПа.}$$

Суммарное касательное напряжение равно геометрической сумме этих напряжений, а наибольшее касательное напряжение будет в центре стержня:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \sqrt{(-0{,}5)^2 + 0{,}4^2} = 0{,}64 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{изг} = 152 \text{ МПа} \le [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполняется.

Второй стержень работает на изгиб в двух плоскостях с кручением и растяжением (см. рис. 3; 5). Поперечное сечение стержня круглое, поэтому изгиб будет условно плоским под действием результирующего момента:

$$M_{изг} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{(P_2 l_2)^2 + (P_1 l_1)^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 13{,}4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При плоском изгибе нейтральная ось перпендикулярна результирующему моменту, поэтому её положение легко определяется.

В наиболее удаленных точках от нейтральной оси будут наибольшие нормальные напряжения изгиба $\sigma_{\text{изг}}$. Наибольшие касательные напряжения при кручении $\tau_{кр}$ будут на окружности стержня. Кроме того, под действием перерезывающей силы возникают касательные напряжения $\tau_{изг}$, достигающие максимума в центре стержня, и от нормальной силы – равномерно распределенные по сечению нормальные напряжения σ_{N}.

Эпюры распределения всех напряжений приведены на рис. 9. Напряжения от перерезывающей и нормальной сил значительно меньше напряжений от изгибающего и крутящего моментов, поэтому опасными будут точки, наиболее удаленные от нейтральной оси (точки А и Б на рис. 9). Здесь материал находится в условиях плоского напряженного состояния.

Условие прочности по IV теории прочности имеет вид:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma];$$

при $\sigma = \sigma_{изг} + \sigma_N = \dfrac{M_{изг}}{W} + \dfrac{N}{F}$ и $\tau = \tau_{кр} = \dfrac{M_x}{W_p} = \dfrac{M_x}{2W}$,

где W – момент сопротивления относительно оси, W_p – полярный момент сопротивления.

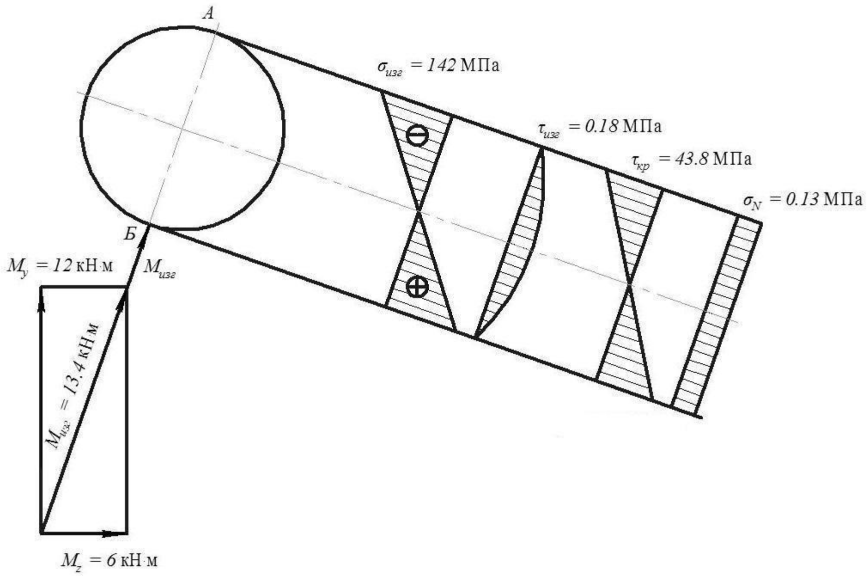

Рис. 9

При подборе сечения напряжениями от нормальной силы, ввиду их малой величины, можно пренебречь, тогда предварительное условие прочности примет вид:

$$\frac{\sqrt{M_{изг}^2 + 0{,}75 M_x^2}}{W} \le [\sigma],$$

или

$$\frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0{,}75M_x^2}}{0{,}1d^3} \le [\sigma],$$

отсюда

$$d = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{6^2 + 12^2 + 0{,}75 \cdot 8^2}) \cdot 10^{-3}}{0{,}1 \cdot 160}} = 0{,}097 \text{ м.}$$

Вычислим нормальные и касательные напряжения (рис. 9).
Наибольшее нормальное напряжение от изгиба:

$$\sigma_{\text{изг}} = \frac{M_{изг}}{W} = \frac{13{,}4 \cdot 10^{-3}}{0{,}1 \cdot 0{,}097^3} = 142 \text{ МПа.}$$

Наибольшее касательное напряжение при изгибе:

$$\tau_{изг} = \frac{4}{3}\frac{Q}{F} = \frac{4 \cdot (2000) \cdot 10^{-3}}{3 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}097^2}{4}} = 0{,}18 \text{ МПа.}$$

Наибольшее касательное напряжение при кручении:

$$\tau_{кр} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{0{,}2 \cdot 0{,}097^3} = 43{,}8 \text{ МПа}.$$

Нормальное напряжение от продольной силы:

$$\sigma_{\text{N}} = \frac{N}{F} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{\frac{3{,}14 \cdot 0{,}097^2}{4}} = 0{,}13 \text{ МПа}.$$

Из расчетов видно, что σ_{N} и $\tau_{изг}$ действительно значительно меньше $\sigma_{\text{изг}}$ и $\tau_{кр}$. Строго говоря, нормальная сила только смещает нейтральную ось от центра тяжести сечения. Определить новое положение нейтральной оси можно графически по суммарной эпюре нормальных напряжений или вычислить аналитически.

Обозначим смещение нейтральной оси с центра тяжести через u. Нормальные напряжения на нейтральной оси равны нулю. Тогда уравнение примет вид:

$$-\frac{M_{изг}u}{J} + \frac{N}{F} = 0,$$

отсюда

$$u = \frac{N \cdot \frac{\pi d^4}{64}}{M_{изг} \cdot \frac{\pi d^4}{4}} = \frac{3 \cdot 0.097^2}{13.4 \cdot 16} = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ м} \cdot$$

Эпюры напряжений приведены на рис.10.

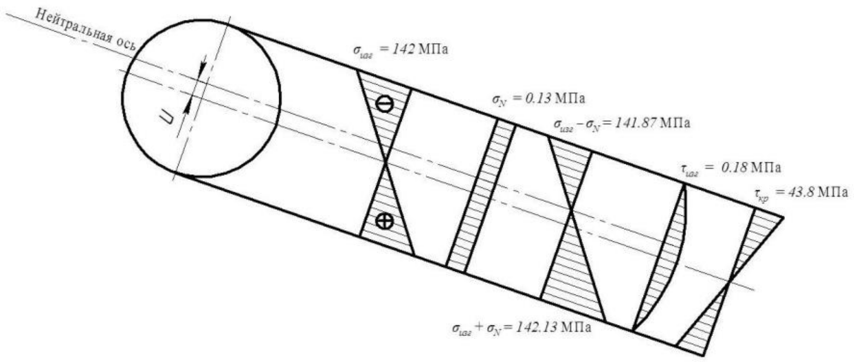

Рис. 10

Для окончательной проверки подставим вычисленные напряжения в условие прочности $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]$:

$$\sqrt{(\sigma_{\text{изг}} + \sigma_{\text{N}})^2 + 3\tau_{кр}^2} \le [\sigma], \ \sqrt{142{,}13^2 + 3 \cdot 43{,}8^2} = 161 \text{ МПа}.$$

При этом перегруз конструкции составляет 0,6%, что меньше допустимых 5%, т.е. условие прочности выполнено.

Третий стержень работает на изгиб с кручением и растяжением, поэтому все расчеты аналогичны расчетам, выполненным для второго стержня.

Опасным будет сечение в заделке. Условие прочности по III теории прочности имеет вид:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma].$$

Пренебрегая напряжениями от нормальной силы, получим

$$\frac{\sqrt{M_z^2+M_y^2+M_x^2}}{W}\le[\sigma],$$

отсюда

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{10^{-3}\sqrt{(-26)^2+8^2+12^2}}{0{,}1\cdot 160}}=0.27\ \text{м}.$$

Наибольшее нормальное напряжение при изгибе

$$\sigma_{\text{изг}}=\frac{\sqrt{M_z^2+M_y^2}}{W}=\frac{(\sqrt{(-26)^2+8^2})\cdot 10^{-3}}{0{,}1\cdot 0{,}27^3}=13.8\ \text{МПа}.$$

Наибольшее касательное напряжение при изгибе

$$\tau_{изг}=\frac{4}{3}\frac{Q}{F}=\frac{4}{3}\frac{-8\cdot 10^{-3}}{\frac{3{,}14\cdot 0{,}27^2}{4}}=-0{,}01\ \text{МПа}.$$

Наибольшее касательное напряжение при кручении

$$\tau_{кр}=\frac{M_x}{W_p}=\frac{12\cdot 10^{-3}}{0{,}2\cdot 0{,}27^3}=3.05\ \text{МПа}.$$

Нормальное напряжение от продольной силы

$$\sigma_{\text{N}}=\frac{N}{F}=\frac{2\cdot 10^{-3}}{\frac{3{,}14\cdot 0{,}27^2}{4}}=0{,}04\cdot 10^{-3}\ \text{МПа}.$$

Обозначим смещение нейтральной оси от центра тяжести через u. Нормальные напряжения на нейтральной оси равны нулю. Тогда уравнение примет вид:

$$-\frac{M_{изг}u}{J}+\frac{N}{F}=0,$$

отсюда

$$u=\frac{N\cdot\frac{\pi d^4}{64}}{M_{изг}\cdot\frac{\pi d^4}{4}}=\frac{2\cdot 0.27^2}{27.2\cdot 16}=0.0003=3\cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

Эпюры напряжений приведены на рис.11.

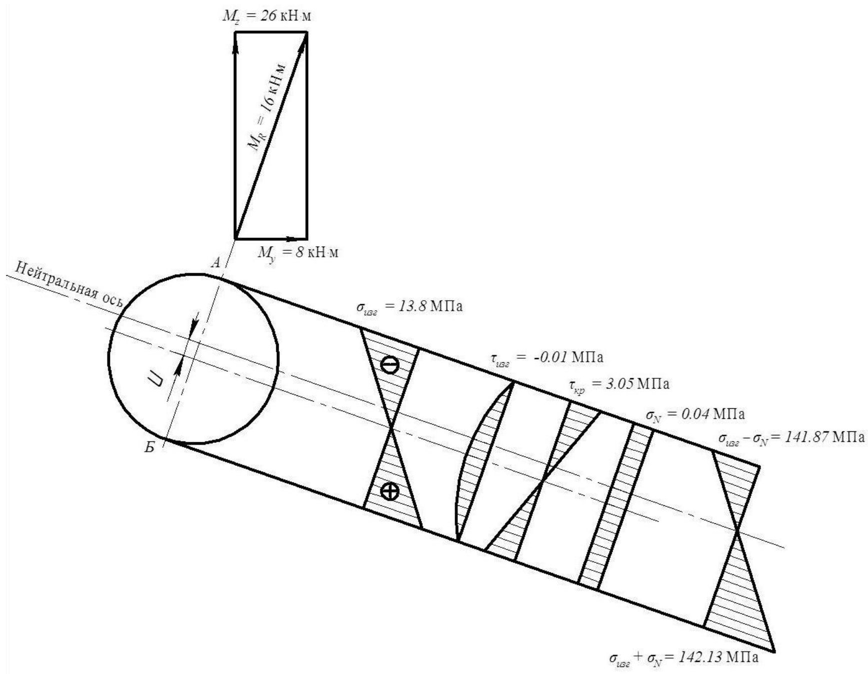

Рис.11

Вычисленные напряжения подставим в условие прочности:

$\sigma = \sigma_{изг} + \sigma_N = 13{,}8 + 0{,}04 = 13{,}84$ МПа ; $\tau = \tau_{кр} = 3{,}05$ МПа.

Условие прочности выполнено:

$$\sqrt{13{,}8^2 + 4 \cdot 3{,}05^2} = 15{,}08 \text{ МПа},$$

что значительно меньше допускаемого $[\sigma] = 160$ МПа.

3. ЗАДАНИЯ И РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ

Целью работы является определение опасного сечения пространственной конструкции из стержневых брусьев различных форм (круглых и прямоугольных) и подбор рациональной формы бруса, исходя из допустимой прочности материала.

Исходные данные берутся из задания на работу, а расчетные схемы по вариантам, приведенным во втором файле. Ее оформление, содержание и печать должны соответствовать правилам, установленным в СПГУ

Внимание! Расчеты делать только для первого и второго стержня.