Лабораторная работа №13: Microsoft Excel. Решение нелинейных уравнений и систем

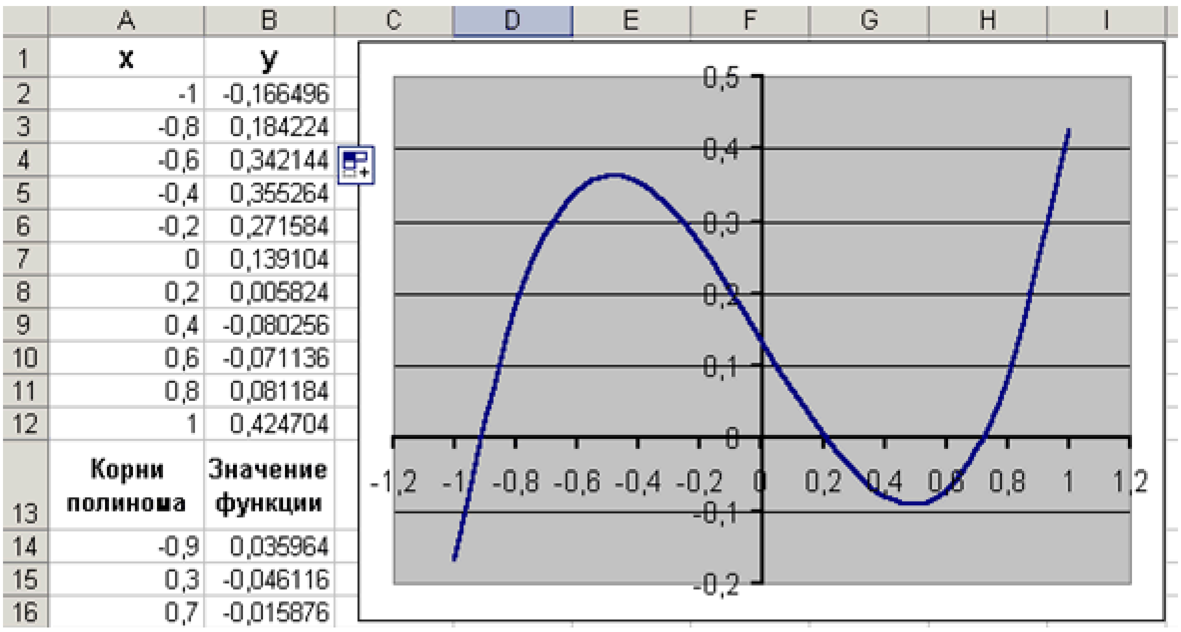
Цель работы: Изучение возможностей пакета MS Excel при решении нелинейных уравнений и систем. Приобретение навыков решения нелинейных уравнений и систем средствами пакета.

Задание 1. Найти корни полинома $x^3 - 0{,}01x^2 - 0{,}7044x + 0{,}139104 = 0$.

Методика выполнения работы

1. Для начала решим уравнение графически. Известно, что графическим решением уравнения f(x)=0 является точка пересечения графика функции f(x) с осью абсцисс, т.е. такое значение **x**, при котором функция обращается в ноль.

2. Проведем табулирование нашего полинома на интервале от -1 до 1 с шагом 0,2. Результаты вычислений приведены на рис. 1., где в ячейку B2 была введена формула: = A2^3 - 0,01*A2^2 - 0,7044*A2 + 0,139104. На графике видно, что функция три раза пересекает ось Ox, а так как полином третьей степени имеется не более трех вещественных корней, то графическое решение поставленной задачи найдено. Иначе говоря, была проведена локализация корней, т.е. определены интервалы, на которых находятся корни данного полинома: [-1,-0.8], [0.2,0.4] и [0.6,0.8].



	A	B
1	x	y
2	-1	-0,166496
3	-0,8	0,184224
4	-0,6	0,342144
5	-0,4	0,355264
6	-0,2	0,271584
7	0	0,139104
8	0,2	0,005824
9	0,4	-0,080256
10	0,6	-0,071136
11	0,8	0,081184
12	1	0,424704
13	Корни полинома	Значение функции
14	-0,9	0,035964
15	0,3	-0,046116
16	0,7	-0,015876

Рис. 1

3. Теперь можно найти корни полинома методом последовательных приближений с помощью команды Сервис → Подбор параметра. Относительная погрешность вычислений и предельное число итераций задаются на вкладке Сервис → Параметры.

4. После ввода начальных приближений и значений функции можно обратиться к пункту меню Сервис → Подбор параметра и заполнить диалоговое окно следующим образом (см. рис. 2).

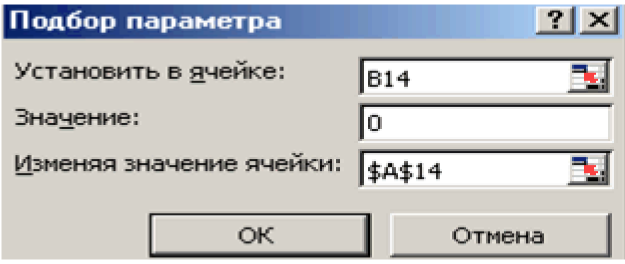


Рис. 2

5. В поле Установить в ячейке дается ссылка на ячейку, в которую введена формула, вычисляющая значение левой части уравнения (уравнение должно быть записано так, чтобы его правая часть не содержала переменную). В поле Значение вводим правую часть уравнения, а в поле Изменяя значения ячейки дается ссылка на ячейку, отведенную под переменную. Заметим, что вводить ссылки на ячейки в поля диалогового окна Подбор параметров удобнее не с клавиатуры, а щелчком на соответствующей ячейке.

6. После нажатия кнопки ОК появится диалоговое окно Результат подбора параметра (см. рис. 3) с сообщением об успешном завершении поиска решения, приближенное значение корня будет помещено в ячейку A14.

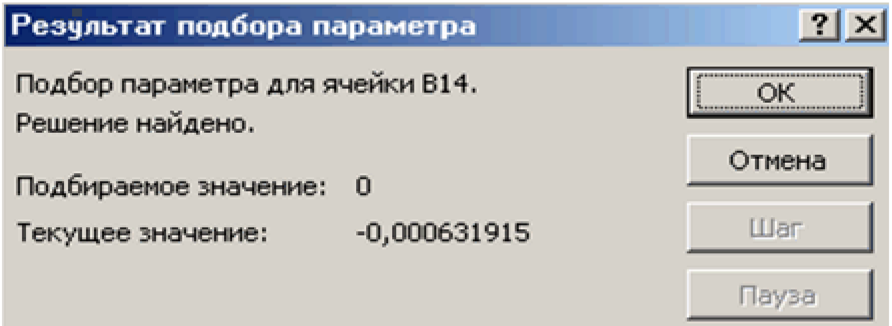


Рис. 3

7. Два оставшихся корня находим аналогично. Результаты вычислений будут помещены в ячейки A15 и A16 (см. рис. 4).

	A	B
13	**Корни полинома**	**Значение функции**
14	-0,92034081	-0,000632
15	0,210213539	-0,000123
16	0,720718302	0,0006019

Рис. 4

Варианты задания 1

Задание 1. Найти корни алгебраического уравнения $f(x) = 0$

Таблица 1

№ варианта	$f(x)$
1	$1{,}001x^3 + 14{,}999x^2 - 16{,}899x - 231{,}08$
2	$1{,}129x^3 - 3{,}087x^2 + 2{,}543x + 1{,}005$
3	$2{,}078x^3 + 5{,}002x^2 - 10{,}21x - 10{,}65$
4	$0{,}543x^4 - 40{,}89x^2 - 10{,}21x - 128{,}76$
5	$0{,}754x^3 + 12{,}432x^2 - 10{,}21x - 43{,}765$
6	$2{,}045x^3 + 5{,}11x^2 - 0{,}999x + 7{,}15$
7	$3{,}987x^2 + 12{,}321x - 34{,}0231$
8	$-0.997x^3 + 15{,}12x^2 - 17{,}54x + 6{,}32$
9	$0{,}95x^2 + 1{,}123x - 5{,}764$
10	$0{,}112x^4 - 3{,}987x^3 - 0{,}12x + 15{,}33$
11	$4{,}201x^3 - 45{,}004x^2 + 298{,}02$
12	$-1{,}007x^2 + 12{,}001x - 22{,}999$
13	$0{,}99x^2 - 2{,}002x - 23{,}007$
14	$0{,}99x^3 - 1{,}989x^2 - 669{,}98$
15	$1{,}01x^3 - 2{,}003x^2 - 112{,}09x + 76{,}03$

Задание 2. Решить уравнение $e^x - (2x - 1)^2 = 0$.

Методика выполнения работы

1. Проведем локализацию корней нелинейного уравнения.

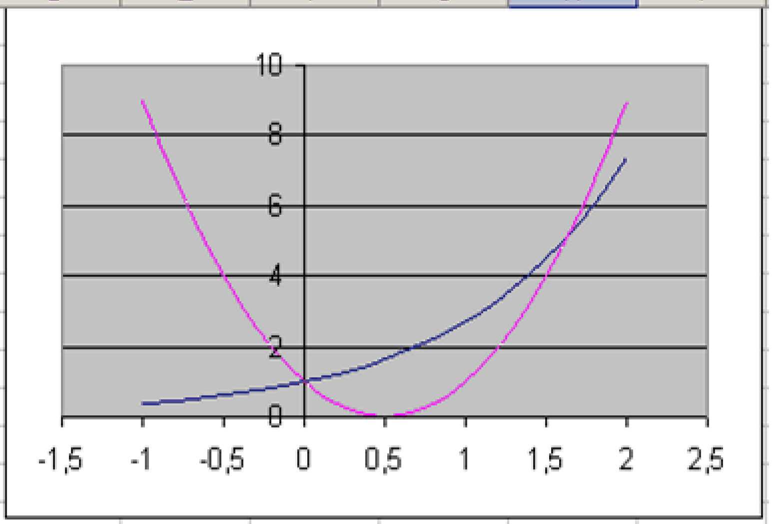
Для этого представим его в виде `f(x) = g(x)` , т.е. $e^x = (2x - 1)^2$ или $f(x) = e^x$, $g(x) = (2x - 1)^2$, и решим графически.

Графическим решением уравнения `f(x) = g(x)` будет точка пересечения линий `f(x)` и `g(x)`.

Построим графики `f(x)` и `g(x)`. Для этого в диапазон `A3:A18` введем значения аргумента. В ячейку `B3` введем формулу для вычисления значений функции `f(x)`: `=EXP(A3)`, а в `C3` для вычисления `g(x)`: `=(2*A3-1)^2`.

Результаты вычислений и построение графиков ***f(x)*** и ***g(x)*** в одной графической области (см. предыдущую лабораторную работу) показаны на рис. 5.

	A	B	C
3	-1	0,367879	9
4	-0,8	0,449329	6,76
5	-0,6	0,548812	4,84
6	-0,4	0,67032	3,24
7	-0,2	0,818731	1,96
8	0	1	1
9	0,2	1,221403	0,36
10	0,4	1,491825	0,04
11	0,6	1,822119	0,04
12	0,8	2,225541	0,36
13	1	2,718282	1
14	1,2	3,320117	1,96
15	1,4	4,0552	3,24
16	1,6	4,953032	4,84
17	1,8	6,049647	6,76
18	2	7,389056	9



	E–G	H	I
17	Решение уравнения	1,5	0,481689

Рис. 5

На графике видно, что линии `f(x)` и `g(x)` пересекаются дважды, т.е. данное уравнение имеет два решения. Одно из них тривиальное и может быть вычислено точно:

$$(x=0) \Rightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ (2x-1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = 1.$$

Для второго можно определить интервал изоляции корня: 1,5 < x < 2.

2. Теперь можно найти корень уравнения на отрезке [1.5,2] методом последовательных приближений.

Введём начальное приближение в ячейку `H17 = 1,5`, и само уравнение, со ссылкой на начальное приближение, в ячейку `I17 =EXP(H17)-(2*H17-1)^2` (см. рис. 5).

Далее воспользуемся пунктом меню `Сервис` → `Подбор` параметра и заполним диалоговое окно Подбор параметра (см. рис.6).

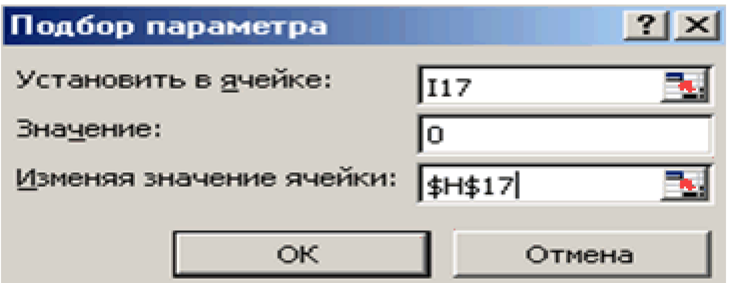


Рис. 6

Результат поиска решения будет выведен в ячейку `H17` (см. рис. 7).

	E–G	H	I
17	Решение уравнения	1,629052	3,14E-06

Рис. 7

Варианты задания 2

Задание 2 Найти корни трансцендентного уравнения $f(x) = 0$

Таблица 2

№ варианта	$f(x)$
1	$2x^2 - 3\ln\|x + 0.1\| - 6$
2	$2\sin(x) - x^2 + 10$
3	$e^{0,3x} + x^2 - 7x$
4	$\cos\left(\frac{x}{5}\right) - \ln\|x - 0,1\| + 1$
5	$\sin(2x) - e^{-0,7x} + 20$
6	$arctgx + \frac{1}{3x^3}$
7	$x\lg(x+1) - 1$
8	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 0,5x$
9	$e^{-2x} - 2x + 1$
10	$arctg(x-1) + 2x$
11	$\sqrt{x+1} - \frac{1}{x}$
12	$3x + \cos x + 1$
13	$x - \sqrt{\lg(x+2)}$
14	$x^2 - \ln(x+1)$
15	$2arctgx - x + 3$

Задание 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Методика выполнения работы

1. Рассмотрим, как можно решить систему уравнений:

$$F_1(x)=0,$$

$$F_2(x)=0,$$

$$\dots$$

$$F_n(x)=0$$

с помощью решающего блока (пункт меню `Сервис` → `Поиск Решения`), который позволяет решать не только оптимизационные задачи, но и обычные уравнения и системы уравнений. Для решения этой задачи ее можно сформулировать одним из следующих способов:

1. Найти минимум (максимум) функции

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x),$$

при системе ограничений, заданной в виде равенств $F_i(x) = 0$;

2. Найти минимум функции

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i^2(x) = F_1^2(x) + F_2^2(x) + \ldots F_n^2(x).$$

В этом случае задача решается без ограничений.

1-й способ. В ячейки A1 и A2 вводим числа 0 (здесь мы будем хранить x_1 и x_2). В ячейки B1 и B2 вводим ограничения: B1 = 2*A1-3*A2, B2 = A1+A2. В ячейку C1 введем функцию цели (эту ячейку мы будем минимизировать): C1 = СУММ(B1:B2). Воспользуемся командой Сервис → Поиск Решения и заполним появившееся диалоговое окно так, как показано на рис. 8. В результате решения поставленной задачи получим решение системы исходных уравнений: x_1 = 1,6, x_2 = 2,4.

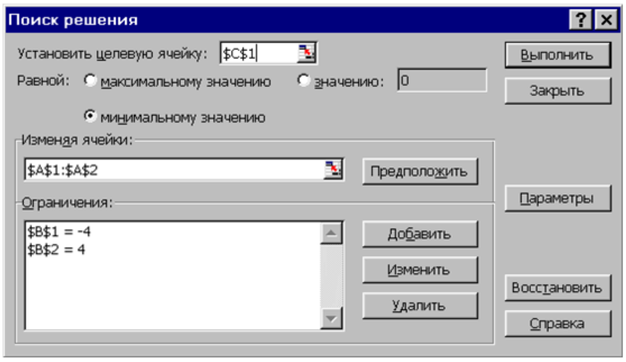


Рис. 8

2-й способ. В ячейках D1 и D2 будем хранить переменные x_1 и x_2. В ячейки E1 и E2 введем уравнения системы: E1 =2*D1-3*D2+4, E2 =D1+D2-4. В качестве функции цели в ячейку F1 введем формулу =E1^2+E2^2. Обратимся к решающему блоку (см. рис. 9) и введём условие задачи оптимизации. В результате получаем следующее решение системы: x_1 = 1,600000128, x_2 = 2,39999949.

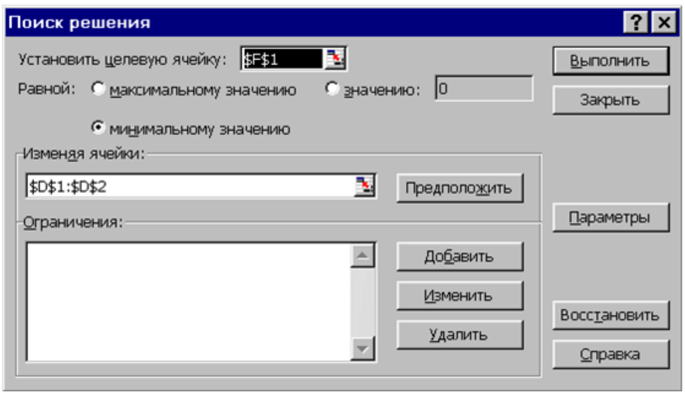


Рис. 9

Варианты задания 3

Задание 3. Решить систему уравнений

Таблица3

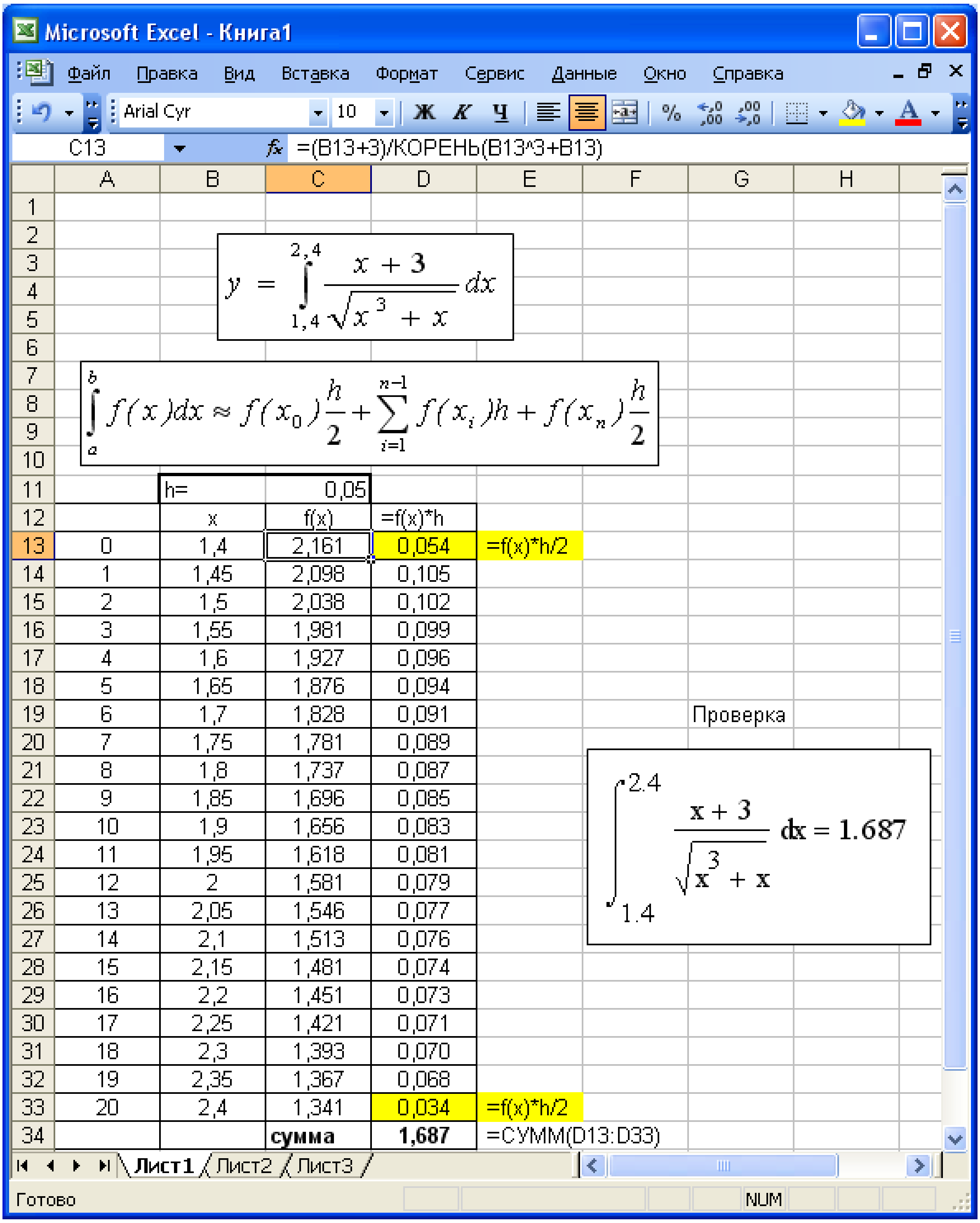
№ варианта	Система
1	$\begin{cases} 5x_1 + x_2^2 = 9 \\ -3x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^2 + x_2 = 5 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 - x_2 = -8 \\ x_1^2 + x_2^2 = 10 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 4x_1^2 + x_2^2 = 5 \\ -7x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -x_1^2 + x_2 = -8 \\ 6x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^2 + x_2 = 5 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 7x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 8x_1 - x_2 = 7 \\ x_1 + x_2^2 = 2 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -1 \\ x_1^2 - x_2^2 = 15 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$
12	$\begin{cases} -4x_1 - x_2^2 = 3 \\ x_1 + 8x_2 = 7 \end{cases}$
13	$\begin{cases} -x_1^2 + x_2^2 = -3 \\ 4x_1 + 3x_2 = -11 \end{cases}$
14	$\begin{cases} x_1^2 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ x_1^2 - x_2 = 14 \end{cases}$

Задание 4. На рабочем листе MS EXCEL вычислить определенный интеграл по методу трапеций.

Пример:

Вычислить $y = \int\limits_{1,4}^{2,4} \frac{x+3}{\sqrt{x^3+x}}dx$

Согласно методу трапеций $\int\limits_a^b f(x)dx \approx f(x_0)\frac{h}{2} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x_i)h + f(x_n)\frac{h}{2}$



	A	B	C	D	E
11		h=	0,05		
12		x	f(x)	=f(x)*h	
13	0	1,4	2,161	0,054	=f(x)*h/2
14	1	1,45	2,098	0,105	
15	2	1,5	2,038	0,102	
16	3	1,55	1,981	0,099	
17	4	1,6	1,927	0,096	
18	5	1,65	1,876	0,094	
19	6	1,7	1,828	0,091	
20	7	1,75	1,781	0,089	
21	8	1,8	1,737	0,087	
22	9	1,85	1,696	0,085	
23	10	1,9	1,656	0,083	
24	11	1,95	1,618	0,081	
25	12	2	1,581	0,079	
26	13	2,05	1,546	0,077	
27	14	2,1	1,513	0,076	
28	15	2,15	1,481	0,074	
29	16	2,2	1,451	0,073	
30	17	2,25	1,421	0,071	
31	18	2,3	1,393	0,070	
32	19	2,35	1,367	0,068	
33	20	2,4	1,341	0,034	=f(x)*h/2
34			**сумма**	**1,687**	=СУММ(D13:D33)

Варианты задания 4

Задание 4. Вычислить определенный интеграл $y=\int_a^b f(x0dx$ методом трапеций.

Таблица 4

№ варианта	a	b	$f(x)$
1	0,8	1,6	$\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+1}}$
2	1,6	2,4	$(x+1)\sin x$
3	0,8	1,2	$\dfrac{\sin(2x)}{x^2}$
4	0,8	1,6	$\dfrac{\lg(x^2+1)}{x}$
5	0,4	1,2	$\sqrt{x}\cos\left(x^2\right)$
6	0,4	0,8	$\dfrac{tg(x^2+0{,}5)}{1+2x^2}$
7	0,15	0,63	$\sqrt{x+1}\lg(x+3)$
8	1,2	2,8	$\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$
9	0,6	0,72	$\left(\sqrt{x}+1\right)tg\,2x$
10	0,8	1,6	$\left(x^2+1\right)\sin(x-0{,}5)$
11	1,6	3,2	$\dfrac{x}{2}\lg\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$
12	0.8	1,7	$\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+0{,}3}}$
13	1,3	2,1	$\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{2\sqrt{x}}$
14	0,8	1,2	$\dfrac{\sin\left(x^2-0{,}4\right)}{x+2}$
15	0,8	1,2	$\dfrac{\cos x}{x^2+1}$