

#### 4. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

З а д а н и е. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени  $t$  или в заданном положении.

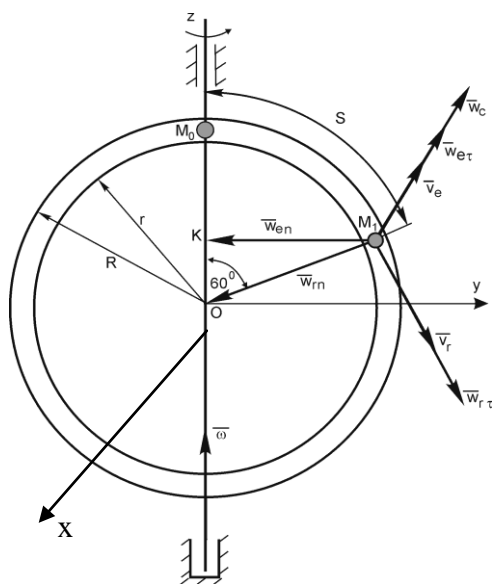


Рис. 4.1.

П р и м е р. Точка движется внутри кольца радиуса  $0,2 \text{ м}$  по закону  $s = 0,05\pi t^2/3$ ,  $\text{м}$  (см. рис.4.1). В свою очередь, кольцо вращается вокруг своего диаметра в направлении, указанном на рисунке, с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon = 0,5 \text{ рад/с}^2$ .

В начальный момент кольцо находилось в покое,  $t_1 = 2 \text{ с}$ .

Р е ш е н и е. Проанализируем движение. Движение точки внутри кольца – относительное; движение, которое сообщает точке вращающееся кольцо, – переносное; движение точки относительно неподвижной Земли – абсолютное. Найдем положение точки на окружности в заданный момент времени, подставив в формулу относительного движения  $t = 2 \text{ с}$ :  $s_1 = 0,05\pi \cdot 2^2/3 = 0,2\pi/3 \text{ м}$ .

За  $2 \text{ с}$  точка в относительном движении описала дугу  $0,2\pi/3 \text{ м}$ , которой соответствует центральный угол  $M_0OM_1 = M_0M_1/R = 0,2\pi/3 \cdot 0,2 = \pi/3$  рад, или  $60^\circ$ .

Абсолютную скорость точки  $M$  найдем по теореме сложения скоростей  $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ , где  $\vec{v}_r$  и  $\vec{v}_e$  – соответственно относительная и переносная скорости точки.

Относительная скорость  $v_r = ds/dt = 0,1\pi t/3 \text{ м/с}$ . В момент времени  $t=2 \text{ с}$   $v_r = 0,2\pi/3 = 0,21 \text{ м/с}$ . Эта скорость направлена по касательной к окружности кольца.

Переносная скорость  $v_e = h\omega$ , где  $h$  – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения;  $\omega$  – угловая скорость кольца.

Так как вращение по условию равнопеременное ( $\varepsilon = \text{const}$ ), то угловая скорость  $\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t_1$ , т.к.  $\omega_0 = 0$ .

Тогда  $\omega = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ рад/с}$ . В свою очередь,  $h = M_1K = OM_1 \sin 60^\circ = 0,2\sqrt{3}/2 = 0,1\sqrt{3} \text{ м}$ .

Это дает  $v_e = 0,1\sqrt{3} \cdot 1 = 0,17 \text{ м/с}$ .

Переносная скорость перпендикулярна плоскости кольца и направлена от нас. Таким образом,  $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$ , и модуль абсолютной скорости можно вычислить по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{0,21^2 + 0,17^2} = \sqrt{0,74} \approx 0,27 \text{ м/с}.$$

Абсолютное ускорение найдем по теореме Кориолиса

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c, \quad (4.1)$$

где  $\vec{w}_r$ ,  $\vec{w}_e$  и  $\vec{w}_c$  – соответственно относительное, переносное ускорение и ускорение Кориолиса.

Относительное и переносное ускорения можно разложить на составляющие по касательным и нормальям к соответствующим траекториям (относительная и переносная траектории – окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ ), т.е.  $\overline{w}_r = \overline{w}_{rn} + \overline{w}_{r\tau}$ ,  $\overline{w}_e = \overline{w}_{en} + \overline{w}_{e\tau}$ .

Тогда равенство (4.1) примет вид:

$$\overline{w} = \overline{w}_{rn} + \overline{w}_{r\tau} + \overline{w}_{en} + \overline{w}_{e\tau} + \overline{w}_c. \quad (4.2)$$

Нормальное относительное ускорение  $w_{rn} = v_r^2/R = 0,21^2/0,2 = 0,22 \text{ м/с}^2$ , вектор  $\overline{w}_{rn}$  направлен по радиусу  $M_1O$  к центру.

Касательное относительное ускорение  $w_{r\tau} = d^2s/dt^2 = 0,1\pi/3 = 0,1 \text{ м/с}^2$ , вектор  $\overline{w}_{r\tau}$  направлен по касательной к окружности кольца, как показано на рис. 4.1.

Нормальное переносное ускорение  $w_{en} = h\omega^2 = 0,1\sqrt{3} \cdot 1^2 = 0,17 \text{ м/с}^2$ , вектор  $\overline{w}_{en}$  направлен по  $M_1K$  к оси вращения. Касательное переносное ускорение  $w_{e\tau} = h\varepsilon = 0,1\sqrt{3} \cdot 0,5 = 0,087 \text{ м/с}^2$ , вектор  $\overline{w}_{e\tau}$  перпендикулярен плоскости кольца и направлен от нас.

Ускорение Кориолиса  $\overline{w}_c = 2\overline{\omega} \times \overline{v}_r$ . Модуль этого ускорения  $w_c = 2\omega v_r \sin(\overline{\omega} \wedge \overline{v}_r)$ . Вектор  $\overline{\omega}$  направлен по оси вращения вверх, поэтому  $(\overline{\omega} \wedge \overline{v}_r) = 150^\circ$ . Тогда  $w_c = 2 \cdot 1 \cdot 0,21 \cdot 0,5 = 0,21 \text{ м/с}^2$ , вектор  $\overline{w}_c$  перпендикулярен плоскости кольца и направлен от нас.

Введем систему координат, связанную с вращающимся кольцом, причем плоскость  $yOz$  совместим с плоскостью кольца, ось  $Oz$  направим по оси вращения, а ось  $Ox$  - перпендикулярно плоскости кольца, к нам. Спроектируем теперь равенство (4.2) на выбранные оси:

$$w_x = -w_{e\tau} - w_c = -0,087 - 0,21 \approx -0,3 \text{ м/с}^2; \quad w_y = -w_{rn} \cos 30^\circ +$$

$$+ w_{r\tau} \cos 60^\circ - w_{en} = -0,22 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,1 \cdot 0,5 - 0,173 = -0,31 \text{ м/с}^2;$$

$$w_z = -w_{rn} \cos 60^\circ - w_{r\tau} \cos 30^\circ = -0,22 \cdot 0,5 - 0,1 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,2 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{(-0,3)^2 + (-0,31)^2 + (-0,2)^2} = 0,48 \text{ м/с}^2.$$

**Задача 4.1.** Горизонтальная платформа радиусом  $0,5 \text{ м}$  вращается равноускоренно с угловым ускорением  $0,25 \text{ рад/с}^2$  из состояния покоя. В момент начала вращения из положения  $A$  выходит из состояния покоя движется равноускоренно в направлении  $AB$  с относительным ускорением  $w_r = 0,05 \text{ м/с}^2$ ;  $t_1 = 2 \text{ с}$  (рис. 4.2).

**Задача 4.2.** Прямоугольная пластинка  $ABCD$  вращается вокруг стороны  $AB$  по закону  $\varphi = \frac{4}{3}\sqrt{2}t^2 \text{ рад}$ . Вдоль  $EF$  ( $EF \perp AB$ ) движется точка по закону  $s = t^4 \text{ м}$ ;  $t_1 = 1 \text{ с}$  (рис. 4.3).

**Задача 4.3.** Диск радиусом  $1 \text{ м}$  вращается равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением  $\varepsilon = 0,4 \text{ рад/с}^2$ . По ободу диска в сторону, противоположную направлению вращения, движется точка  $M$  по закону  $s = 0,2t^2 \text{ м}$ ;  $t_1 = 5 \text{ с}$  (рис. 4.4).

**Задача 4.4.** Равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен  $1 \text{ м}$ , вращается вокруг вершины  $O$  равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением  $3 \text{ рад/с}^2$ . В момент начала вращения из вершины  $A$  выходит точка с начальной относительной скоростью  $2,5 \text{ м/с}$  и движется по катету  $AB$  с постоянным ускорением  $3 \text{ м/с}^2$ ;  $t_1 = 1/3 \text{ с}$  (рис. 4.5).

**Задача 4.5.** Диск вращается равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением  $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$ . По радиусу диска движется точка по закону  $S = (1+t^2) \text{ м}$ ;  $t_1 = 1 \text{ с}$  (рис. 4.6).

*Задача 4.6.* Решить задачу 4.3 при условии, что точка движется в сторону вращения, а  $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$ ,  $s = t^2 \text{ м}$ ,  $t_1 = 2/3 \text{ с}$  (рис. 4.4).

*Задача 4.7.* Равнобедренный прямоугольный треугольник вращается вокруг своего катета равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением  $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$ . Точка движется по гипотенузе согласно закону  $s = \sqrt{5}(1+t^2) \text{ м}$ ;  $t_1 = 1 \text{ с}$  (рис. 4.7).

*Задача 4.8.* Диск радиусом  $R = \sqrt{3}/3 \text{ м}$  и вращается равноускоренно с угловым ускорением  $\varepsilon = 2\sqrt{3} \text{ рад/с}^2$ . По стороне  $AB$  вписанного равностороннего треугольника движется точка с постоянным относительным ускорением  $w_r = 2 \text{ м/с}^2$ . Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она придет в положение  $B$ , если в этот момент  $\omega = 6 \text{ рад/с}$  и  $v_r = 5\sqrt{3}/12 \text{ м/с}$  (рис. 4.8).

*Задача 4.9.* Диск вращается равноускоренно из состояния покоя вокруг своего диаметра с угловым ускорением  $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$ . По радиусу диска из центра движется точка по закону  $s = (1+t^2) \text{ м}$ ;  $t_1 = 1 \text{ с}$  (рис. 4.9).

*Задача 4.10.* Квадрат со стороной  $1 \text{ м}$  равноускоренно вращается вокруг своей вершины  $O$  с угловым ускорением  $\varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2$ . По стороне  $AB$  движется точка с постоянным относительным ускорением  $w_r = 1 \text{ м/с}^2$ . Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины  $B$ , если в этот момент  $v_r = 0,5 \text{ м/с}$ , а  $\omega = 2 \text{ рад/с}$  (рис. 4.10).

*Задача 4.11.* Круглая пластинка вращается вокруг своего диаметра по закону  $\varphi = (7t^2 - 11t) \text{ рад}$ . По радиусу  $OA$  движется точка по закону  $s = \sqrt{2}t^2 \text{ м}$ ;  $t_1 = 1 \text{ с}$  (рис. 4.11).

*Задача 4.12.* Равносторонний треугольник со стороной  $1 \text{ м}$  вращается вокруг своей вершины  $O$  по закону  $\varphi = \sqrt{3}(t^2 + 2t) \text{ рад}$ . По стороне  $AB$  движется точка по закону  $s = (7/4)t + 5/2 t^2 \text{ м}$ ;  $t_1 = 0$  (рис. 4.12).

*Задача 4.13.* Полая трубка вращается равноускоренно из состояния покоя в плоскости чертежа с угловым ускорением  $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$ . Внутри трубки движется точка по закону  $s = (1+t^2) \text{ м}$ ;  $t_1 = 1 \text{ с}$  (рис. 4.13).

*Задача 4.14.* Квадрат со стороной  $1 \text{ м}$  вращается равноускоренно с угловым ускорением  $\varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2$  вокруг центра  $O$ . По стороне  $AB$  движется точка с постоянным относительным ускорением  $w_r = 1 \text{ м/с}^2$ . Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет положения  $B$ , если в момент  $\omega = 2 \text{ рад/с}$ , момент  $v_r = 1 \text{ м/с}$  (рис. 4.14).

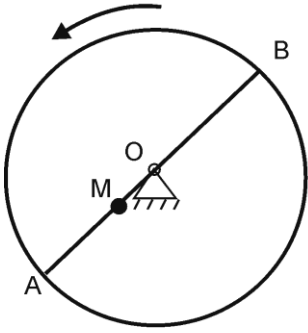


Рис. 4.2

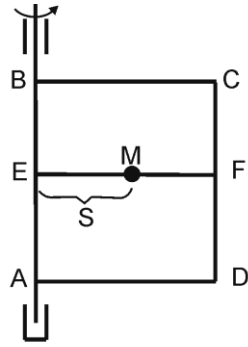


Рис. 4.3

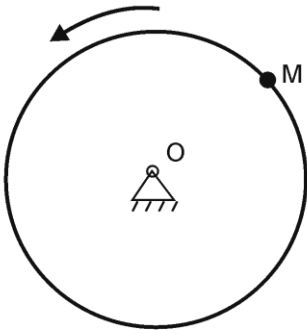


Рис. 4.4

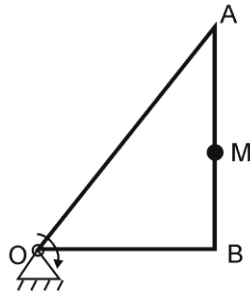


Рис. 4.5

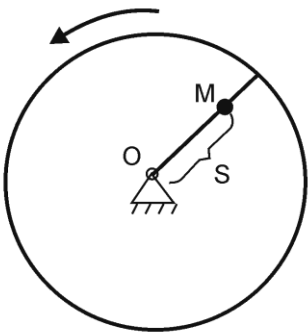


Рис. 4.6

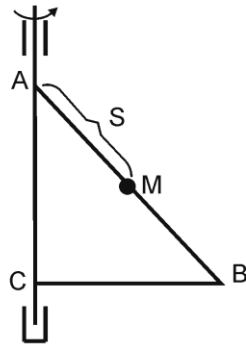


Рис. 4.7

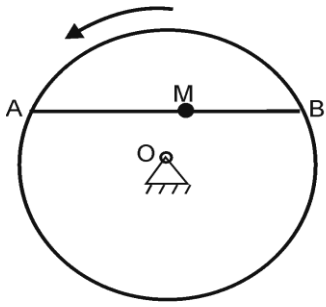


Рис. 4.8

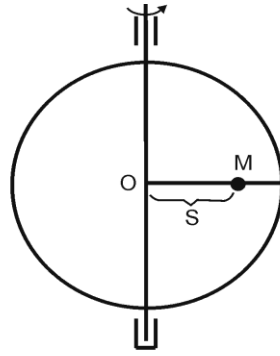


Рис. 4.9

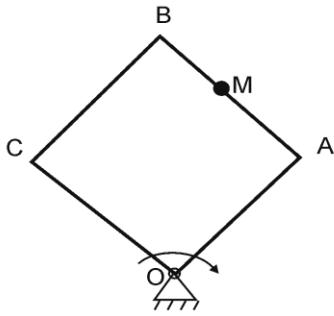


Рис. 4.10

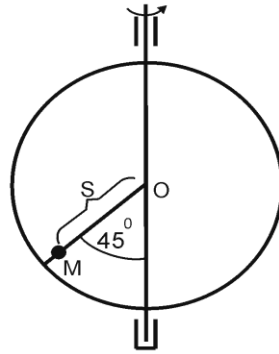


Рис. 4.11

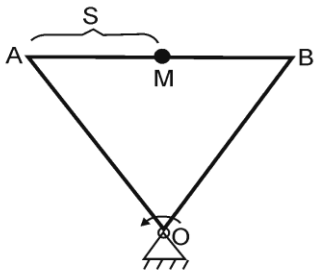


Рис. 4.12

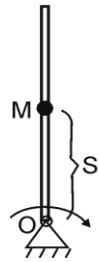


Рис. 4.13

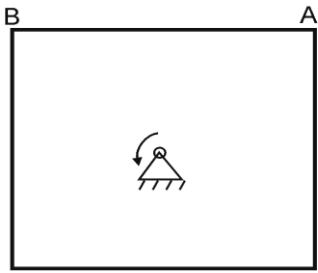


Рис. 4.14

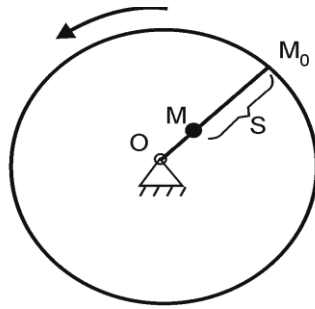


Рис. 4.15

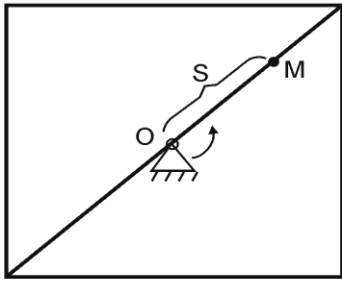


Рис. 4.16

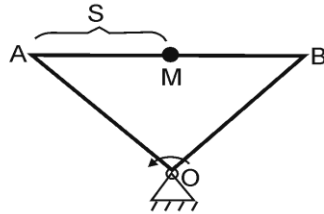


Рис. 4.17

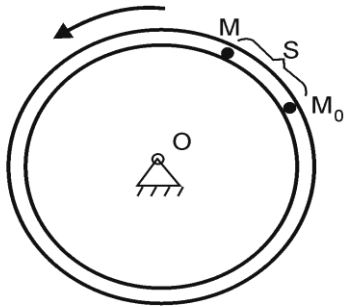


Рис. 4.18

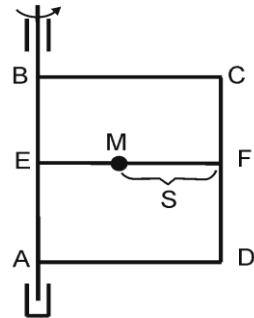


Рис. 4.19

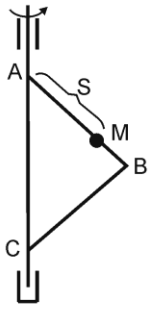


Рис. 4.20

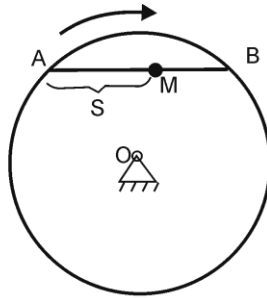


Рис. 4.21

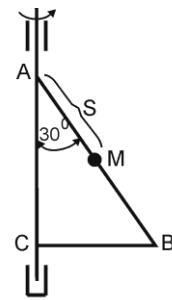


Рис. 4.26

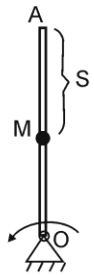


Рис. 4.22

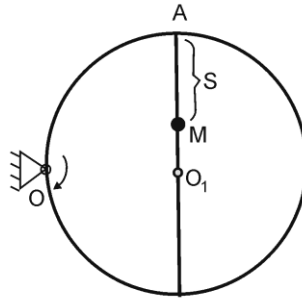


Рис. 4.23

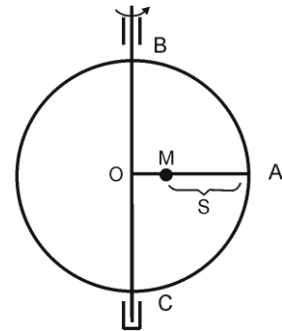


Рис. 4.27

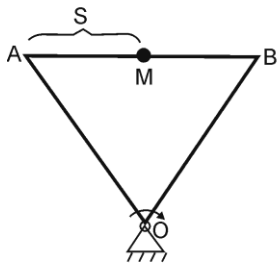


Рис. 4.24

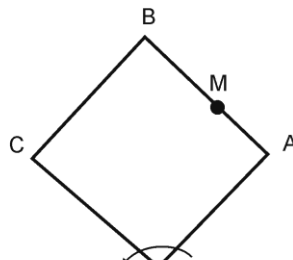


Рис. 4.25

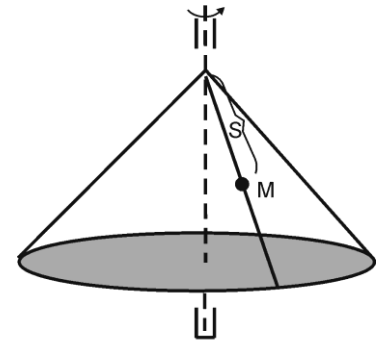


Рис. 4.28





3 а д а ч а 4.15. Диск радиусом 0,6 м вращается по закону  $\varphi = (2t^2 - 7t)$  рад вокруг оси  $O$ . К центру по радиусу диска движется точка по закону  $s = 0,1t^2$  м;  $t_1 = 2$  с (рис. 4.15).

3 а д а ч а 4.16. Квадрат вращается вокруг своего центра  $O$  по закону  $\varphi = (16t^2 - 28t)$  рад. По диагонали квадрата движется точка по закону  $s = t^2$  м;  $t_1 = 1$  с (рис. 4.16).

3 а д а ч а 4.17. Равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен  $\sqrt{2}$  м вращается без начальной угловой скорости с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon = 3$  рад/с<sup>2</sup> вокруг вершины  $O$ . По гипотенузе движется точка по закону  $s = (t^2 - t + 2)$  м;  $t_1 = 1$  с (рис. 4.17).

3 а д а ч а 4.18. Полное кольцо радиусом  $R = 1$  м вращается без начальной угловой скорости вокруг оси  $O$  с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon = 3$  рад/с<sup>2</sup>. Внутри кольца движется точка по закону  $s = (t^2 - t + 1)$  м;  $t_1 = 1$  с (рис. 4.18).

3 а д а ч а 4.19. Прямоугольная пластинка  $ABCD$  вращается вокруг стороны  $AB$  по закону  $\varphi = (2t^2 - 7t)$  рад. Вдоль  $FE$  ( $FE \perp AB$ ) движется точка по закону  $s = 0,1t^2$  м. Ширина пластинки  $BC = 0,6$  м;  $t_1 = 2$  с (рис. 4.19).

3 а д а ч а 4.20. Равнобедренный треугольник вращается вокруг гипотенузы  $AC$  без начальной угловой скорости с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon = 1$  рад/с<sup>2</sup>. По катету  $AB$  движется точка по закону  $s = \sqrt{2}(5t^2 - 3t + 8)$  м;  $t_1 = 1$  с (рис. 4.20).

3 а д а ч а 4.21. Круглый диск радиусом  $\sqrt{3}/3$  м вращается равноускоренно без начальной угловой скорости с угловым ускорением  $\varepsilon = 2\sqrt{3}$  рад/с<sup>2</sup>. По стороне  $AB$  вписанного шестиугольника движется точка по закону  $s = \frac{\sqrt{3}}{6}(3t^2 - 1)$  м;  $t_1 = 1$  с (рис. 4.21).

3 а д а ч а 4.22. Решить задачу 4.18, предполагая, что точка движется в сторону, противоположную направлению вращения;  $\varepsilon = 2$  рад/с<sup>2</sup>;  $R = 1$  м;  $s = t^2$  м (см. рис. 4.18).

3 а д а ч а 4.23. Кривошип  $OA$  длиной 0,6 м вращается по закону  $\varphi = (2t^2 - 7t)$  рад. Вдоль кривошипа от  $A$  к  $O$  движется точка по закону  $s = 0,4t^2$  м;  $t_1 = 1$  с (рис. 4.22).

3 а д а ч а 4.24. Круглый диск радиусом 1,5 м вращается в плоскости чертежа вокруг оси  $O$  по закону  $\varphi = (t^2 - t)$  рад. По диаметру  $AB$  движется точка по закону  $s = (t^2 - t + 1)$  м;  $t_1 = 2$  с (рис. 4.23).

3 а д а ч а 4.25. Равносторонний треугольник со стороной  $\sqrt{3}/3$  м вращается равноускоренно без начальной угловой скорости с угловым ускорением  $\varepsilon = 2\sqrt{3}$  рад/с<sup>2</sup>. По стороне  $AB$  движется точка по закону  $s = \frac{\sqrt{3}}{6}(3t^2 - 1)$  м;  $t_1 = 1$  с (рис. 4.24).

3 а д а ч а 4.26. Квадрат со стороной 1 м равноускоренно вращается вокруг своей вершины  $O$  с угловым ускорением  $\varepsilon = 2$  рад/с<sup>2</sup>. По стороне  $AB$  движется точка с постоянным относительным ускорением  $w_r = 2$  м/с<sup>2</sup>. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины  $B$ , если в этот момент  $v_r = 1$  м/с, а  $\omega = 2$  рад/с (рис. 4.25).

*Задача 4.27.* Прямоугольный треугольник вращается вокруг своего катета  $AC$  по закону  $\varphi = 0,1(t^2 + 8t)$  рад. По гипотенузе  $AB$  по закону  $s = t^2 + 1$  м движется точка;  $t_1 = 1$  с (рис. 4.26).

*Задача 4.28.* Диск радиусом 0,6 м вращается по закону  $\varphi = (2t^2 - 7t)$  рад вокруг своего диаметра. По радиусу  $OA$  диска ( $AO \perp BC$ ) от  $A$  к центру движется точка по закону  $s = 0,1t^2$  м;  $t_1 = 2$  с (рис.4.27).

*Задача 4.29.* Конус, имеющий прямой угол при вершине, вращается вокруг своей оси по закону  $\varphi = (t^2 + 6t)/8$  рад. По образующей конуса движется точка по закону  $s = \sqrt{2}(2t^2 - 3t + 5)$  м;  $t_1 = 1$  с (рис.4.28).

*Задача 4.30.* Решить задачу 4.24 в предположении, что направление вращения диска изменилось на противоположное (см. рис. 4.23).