

4. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

З а д а н и е. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени t или в заданном положении.

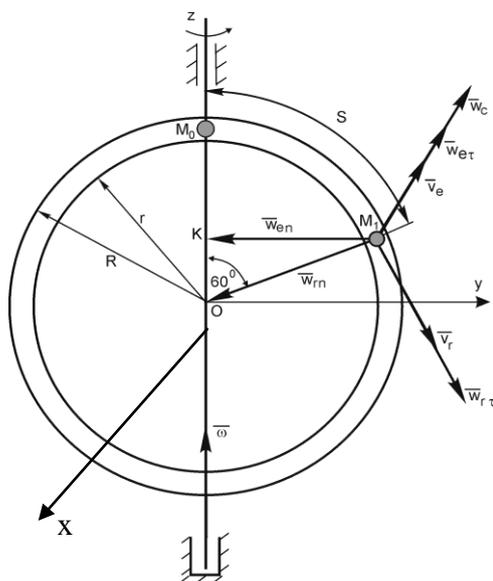


Рис. 4.1.

П р и м е р. Точка движется внутри кольца радиуса $0,2 \text{ м}$ по закону $s = 0,05\pi t^2/3$, м (см. рис.4.1). В свою очередь, кольцо вращается вокруг своего диаметра в направлении, указанном на рисунке, с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0,5 \text{ рад/с}^2$.

В начальный момент кольцо находилось в покое, $t_1 = 2\text{с}$.

Р е ш е н и е. Проанализируем движение. Движение точки внутри кольца – относительное; движение, которое сообщает точке вращающееся кольцо, – переносное; движение точки относительно неподвижной Земли – абсолютное. Найдем положение точки на окружности в заданный момент времени, подставив в формулу относительного движения $t = 2\text{с}$: $s_1 = 0,05\pi \cdot 2^2/3 = 0,2\pi/3 \text{ м}$.

За 2с точка в относительном движении описала дугу $0,2\pi/3 \text{ м}$, которой соответствует центральный угол $M_0OM_1 = M_0M_1/R = 0,2\pi/3 \cdot 0,2 = \pi/3 \text{ рад}$, или 60° .

Абсолютную скорость точки M найдем по теореме сложения скоростей $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$, где \vec{v}_r и \vec{v}_e – соответственно относительная и переносная скорости точки.

Относительная скорость $v_r = ds/dt = 0,1\pi t/3 \text{ м/с}$. В момент времени $t=2\text{с}$ $v_r = 0,2\pi/3 = 0,21 \text{ м/с}$. Эта скорость направлена по касательной к окружности кольца.

Переносная скорость $v_e = h\omega$, где h – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения; ω – угловая скорость кольца.

Так как вращение по условию равнопеременное ($\varepsilon = \text{const}$), то угловая скорость $\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t_1$, т.к. $\omega_0 = 0$.

Тогда $\omega = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ рад/с}$. В свою очередь, $h = M_1K = OM_1 \sin 60^\circ = 0,2\sqrt{3}/2 = 0,1\sqrt{3} \text{ м}$.

Это дает $v_e = 0,1\sqrt{3} \cdot 1 = 0,17 \text{ м/с}$.

Переносная скорость перпендикулярна плоскости кольца и направлена от нас. Таким образом, $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$, и модуль абсолютной скорости можно вычислить по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{0,21^2 + 0,17^2} = \sqrt{0,74} \approx 0,27 \text{ м/с}.$$

Абсолютное ускорение найдем по теореме Кориолиса

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c, \quad (4.1)$$

где \vec{w}_r , \vec{w}_e и \vec{w}_c – соответственно относительное, переносное ускорение и ускорение Кориолиса.

Относительное и переносное ускорения можно разложить на составляющие по касательным и нормальям к соответствующим траекториям (относительная и переносная траектории – окружности радиуса R с центром в точке O), т.е. $\overline{w}_r = \overline{w}_{rn} + \overline{w}_{r\tau}$, $\overline{w}_e = \overline{w}_{en} + \overline{w}_{e\tau}$.

Тогда равенство (4.1) примет вид:

$$\overline{w} = \overline{w}_{rn} + \overline{w}_{r\tau} + \overline{w}_{en} + \overline{w}_{e\tau} + \overline{w}_c. \quad (4.2)$$

Нормальное относительное ускорение $w_{rn} = v_r^2/R = 0,21^2/0,2 = 0,22 \text{ м/с}^2$, вектор \overline{w}_{rn} направлен по радиусу M_1O к центру.

Касательное относительное ускорение $w_{r\tau} = d^2s/dt^2 = 0,1\pi/3 = 0,1 \text{ м/с}^2$, вектор $\overline{w}_{r\tau}$ направлен по касательной к окружности кольца, как показано на рис. 4.1.

Нормальное переносное ускорение $w_{en} = h\omega^2 = 0,1\sqrt{3} \cdot 1^2 = 0,17 \text{ м/с}^2$, вектор \overline{w}_{en} направлен по M_1K к оси вращения. Касательное переносное ускорение $w_{e\tau} = h\varepsilon = 0,1\sqrt{3} \cdot 0,5 = 0,087 \text{ м/с}^2$, вектор $\overline{w}_{e\tau}$ перпендикулярен плоскости кольца и направлен от нас.

Ускорение Кориолиса $\overline{w}_c = 2\overline{\omega} \times \overline{v}_r$. Модуль этого ускорения $w_c = 2\omega v_r \sin(\overline{\omega} \wedge \overline{v}_r)$. Вектор $\overline{\omega}$ направлен по оси вращения вверх, поэтому $(\overline{\omega} \wedge \overline{v}_r) = 150^\circ$. Тогда $w_c = 2 \cdot 1 \cdot 0,21 \cdot 0,5 = 0,21 \text{ м/с}^2$, вектор \overline{w}_c перпендикулярен плоскости кольца и направлен от нас.

Введем систему координат, связанную с вращающимся кольцом, причем плоскость yOz совместим с плоскостью кольца, ось Oz направим по оси вращения, а ось Ox - перпендикулярно плоскости кольца, к нам. Спроектируем теперь равенство (4.2) на выбранные оси:

$$w_x = -w_{e\tau} - w_c = -0,087 - 0,21 \approx -0,3 \text{ м/с}^2; \quad w_y = -w_{rn} \cos 30^\circ +$$

$$+ w_{r\tau} \cos 60^\circ - w_{en} = -0,22 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,1 \cdot 0,5 - 0,173 = -0,31 \text{ м/с}^2;$$

$$w_z = -w_{rn} \cos 60^\circ - w_{r\tau} \cos 30^\circ = -0,22 \cdot 0,5 - 0,1 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,2 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{(-0,3)^2 + (-0,31)^2 + (-0,2)^2} = 0,48 \text{ м/с}^2.$$

Задача 4.1. Горизонтальная платформа радиусом $0,5 \text{ м}$ вращается равноускоренно с угловым ускорением $0,25 \text{ рад/с}^2$ из состояния покоя. В момент начала вращения из положения A выходит из состояния покоя движется равноускоренно в направлении AB с относительным ускорением $w_r = 0,05 \text{ м/с}^2$; $t_1 = 2 \text{ с}$ (рис. 4.2).

Задача 4.2. Прямоугольная пластинка $ABCD$ вращается вокруг стороны AB по закону $\varphi = \frac{4}{3}\sqrt{2}t^2$ рад. Вдоль EF ($EF \perp AB$) движется точка по закону $s = t^4$ м; $t_1 = 1 \text{ с}$ (рис. 4.3).

Задача 4.3. Диск радиусом 1 м вращается равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = 0,4 \text{ рад/с}^2$. По ободу диска в сторону, противоположную направлению вращения, движется точка M по закону $s = 0,2t^2$ м; $t_1 = 5 \text{ с}$ (рис. 4.4).

Задача 4.4. Равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен 1 м , вращается вокруг вершины O равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением 3 рад/с^2 . В момент начала вращения из вершины A выходит точка с начальной относительной скоростью $2,5 \text{ м/с}$ и движется по катету AB с постоянным ускорением 3 м/с^2 ; $t_1 = 1/3 \text{ с}$ (рис. 4.5).

Задача 4.5. Диск вращается равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$. По радиусу диска движется точка по закону $S = (1+t^2) \text{ м}$; $t_1 = 1 \text{ с}$ (рис. 4.6).

Задача 4.6. Решить задачу 4.3 при условии, что точка движется в сторону вращения, а $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$, $s = t^2 \text{ м}$, $t_1 = 2/3 \text{ с}$ (рис. 4.4).

Задача 4.7. Равнобедренный прямоугольный треугольник вращается вокруг своего катета равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$. Точка движется по гипотенузе согласно закону $s = \sqrt{5}(1+t^2) \text{ м}$; $t_1 = 1 \text{ с}$ (рис. 4.7).

Задача 4.8. Диск радиусом $R = \sqrt{3}/3 \text{ м}$ и вращается равноускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 2\sqrt{3} \text{ рад/с}^2$. По стороне AB вписанного равностороннего треугольника движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 2 \text{ м/с}^2$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она придет в положение B , если в этот момент $\omega = 6 \text{ рад/с}$ и $v_r = 5\sqrt{3}/12 \text{ м/с}$ (рис. 4.8).

Задача 4.9. Диск вращается равноускоренно из состояния покоя вокруг своего диаметра с угловым ускорением $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$. По радиусу диска из центра движется точка по закону $s = (1+t^2) \text{ м}$; $t_1 = 1 \text{ с}$ (рис. 4.9).

Задача 4.10. Квадрат со стороной 1 м равноускоренно вращается вокруг своей вершины O с угловым ускорением $\varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2$. По стороне AB движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 1 \text{ м/с}^2$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины B , если в этот момент $v_r = 0,5 \text{ м/с}$, а $\omega = 2 \text{ рад/с}$ (рис. 4.10).

Задача 4.11. Круглая пластинка вращается вокруг своего диаметра по закону $\varphi = (7t^2 - 11t) \text{ рад}$. По радиусу OA движется точка по закону $s = \sqrt{2}t^2 \text{ м}$; $t_1 = 1 \text{ с}$ (рис. 4.11).

Задача 4.12. Равносторонний треугольник со стороной 1 м вращается вокруг своей вершины O по закону $\varphi = \sqrt{3}(t^2 + 2t) \text{ рад}$. По стороне AB движется точка по закону $s = (7/4)t + 5/2 t^2 \text{ м}$; $t_1 = 0$ (рис. 4.12).

Задача 4.13. Полая трубка вращается равноускоренно из состояния покоя в плоскости чертежа с угловым ускорением $\varepsilon = 1 \text{ рад/с}^2$. Внутри трубки движется точка по закону $s = (1+t^2) \text{ м}$; $t_1 = 1 \text{ с}$ (рис. 4.13).

Задача 4.14. Квадрат со стороной 1 м вращается равноускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2$ вокруг центра O . По стороне AB движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 1 \text{ м/с}^2$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет положения B , если в момент $\omega = 2 \text{ рад/с}$, момент $v_r = 1 \text{ м/с}$ (рис. 4.14).

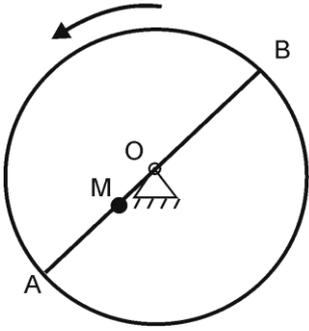


Рис. 4.2

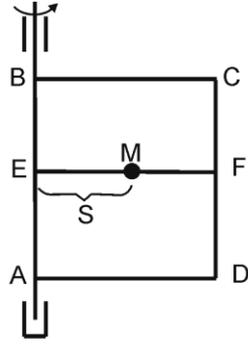


Рис. 4.3

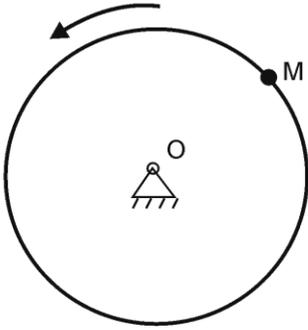


Рис. 4.4

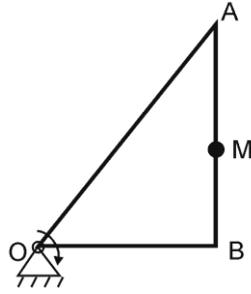


Рис. 4.5

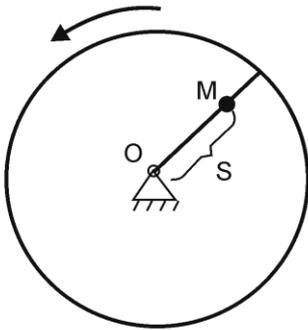


Рис. 4.6

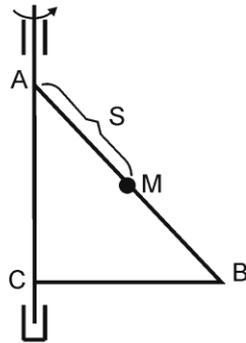


Рис. 4.7

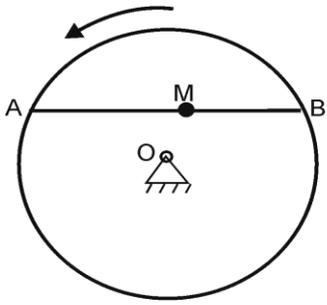


Рис. 4.8

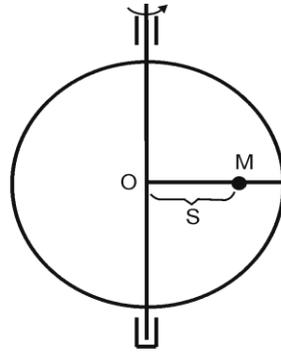


Рис. 4.9

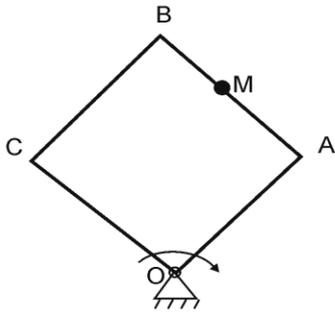


Рис. 4.10

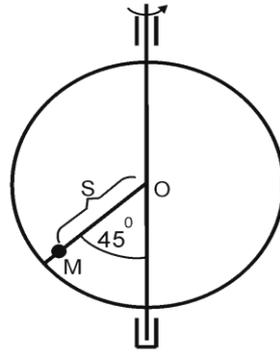


Рис. 4.11

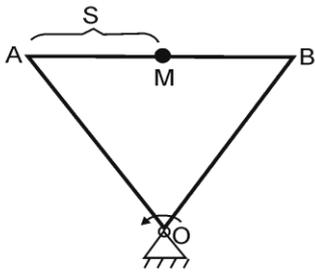


Рис. 4.12

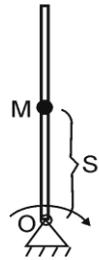


Рис. 4.13

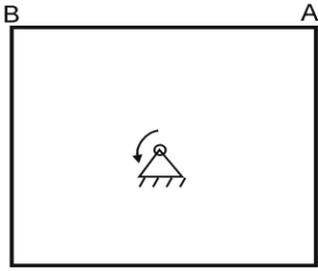


Рис. 4.14

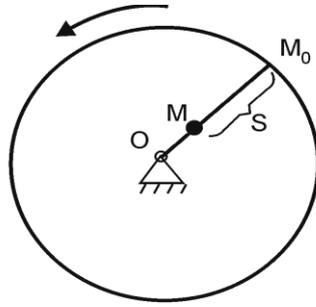


Рис. 4.15

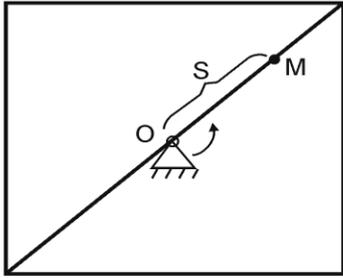


Рис. 4.16

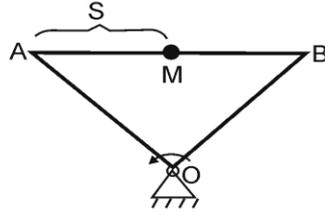


Рис. 4.17

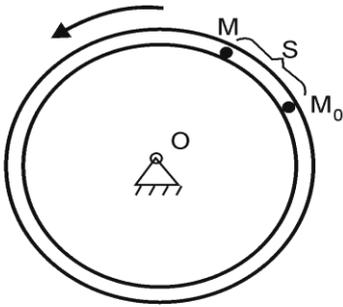


Рис. 4.18

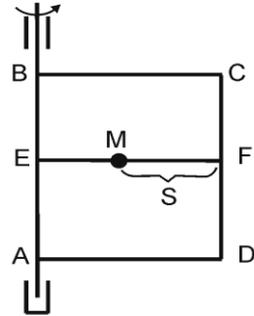


Рис. 4.19

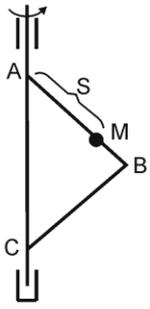


Рис. 4.20

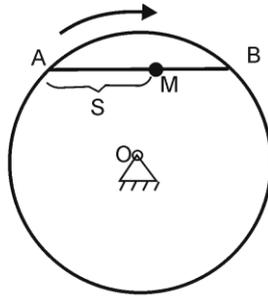


Рис. 4.21

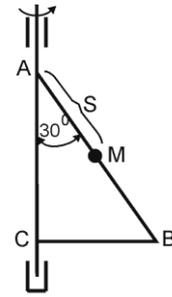


Рис. 4.26

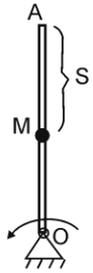


Рис. 4.22

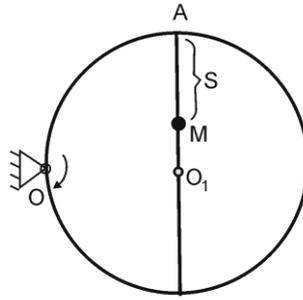


Рис. 4.23

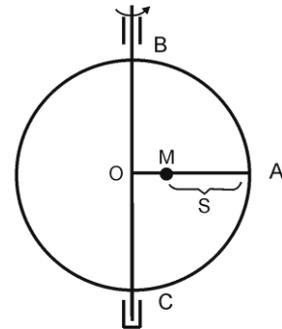


Рис. 4.27

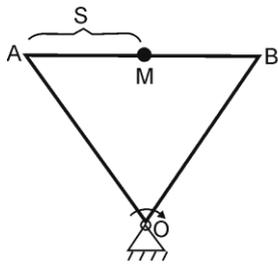


Рис. 4.24

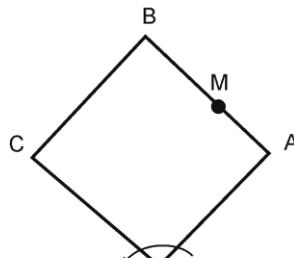


Рис. 4.25

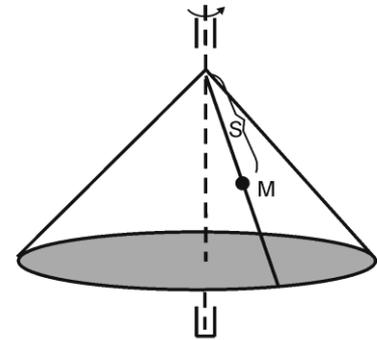


Рис. 4.28

Задача 4.15. Диск радиусом 0,6 м вращается по закону $\varphi = (2t^2 - 7t)$ рад вокруг оси O . К центру по радиусу диска движется точка по закону $s = 0,1t^2$ м; $t_1 = 2$ с (рис. 4.15).

Задача 4.16. Квадрат вращается вокруг своего центра O по закону $\varphi = (16t^2 - 28t)$ рад. По диагонали квадрата движется точка по закону $s = t^2$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.16).

Задача 4.17. Равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен $\sqrt{2}$ м вращается без начальной угловой скорости с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с² вокруг вершины O . По гипотенузе движется точка по закону $s = (t^2 - t + 2)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.17).

Задача 4.18. Полное кольцо радиусом $R = 1$ м вращается без начальной угловой скорости вокруг оси O с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с². Внутри кольца движется точка по закону $s = (t^2 - t + 1)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.18).

Задача 4.19. Прямоугольная пластинка $ABCD$ вращается вокруг стороны AB по закону $\varphi = (2t^2 - 7t)$ рад. Вдоль FE ($FE \perp AB$) движется точка по закону $s = 0,1t^2$ м. Ширина пластинки $BC = 0,6$ м; $t_1 = 2$ с (рис. 4.19).

Задача 4.20. Равнобедренный треугольник вращается вокруг гипотенузы AC без начальной угловой скорости с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с². По катету AB движется точка по закону $s = \sqrt{2}(5t^2 - 3t + 8)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.20).

Задача 4.21. Круглый диск радиусом $\sqrt{3}/3$ м вращается равноускоренно без начальной угловой скорости с угловым ускорением $\varepsilon = 2\sqrt{3}$ рад/с². По стороне AB вписанного шестиугольника движется точка по закону $s = \frac{\sqrt{3}}{6}(3t^2 - 1)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.21).

Задача 4.22. Решить задачу 4.18, предполагая, что точка движется в сторону, противоположную направлению вращения; $\varepsilon = 2$ рад/с²; $R = 1$ м; $s = t^2$ м (см. рис. 4.18).

Задача 4.23. Кривошип OA длиной 0,6 м вращается по закону $\varphi = (2t^2 - 7t)$ рад. Вдоль кривошипа от A к O движется точка по закону $s = 0,4t^2$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.22).

Задача 4.24. Круглый диск радиусом 1,5 м вращается в плоскости чертежа вокруг оси O по закону $\varphi = (t^2 - t)$ рад. По диаметру AB движется точка по закону $s = (t^2 - t + 1)$ м; $t_1 = 2$ с (рис. 4.23).

Задача 4.25. Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{3}/3$ м вращается равноускоренно без начальной угловой скорости с угловым ускорением $\varepsilon = 2\sqrt{3}$ рад/с². По стороне AB движется точка по закону $s = \frac{\sqrt{3}}{6}(3t^2 - 1)$ м; $t_1 = 1$ с (рис. 4.24).

Задача 4.26. Квадрат со стороной 1 м равноускоренно вращается вокруг своей вершины O с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с². По стороне AB движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 2$ м/с². Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины B , если в этот момент $v_r = 1$ м/с, а $\omega = 2$ рад/с (рис. 4.25).

Задача 4.27. Прямоугольный треугольник вращается вокруг своего катета AC по закону $\varphi = 0,1(t^2 + 8t)$ рад. По гипотенузе AB по закону $s = t^2 + 1$ м движется точка; $t_1 = 1$ с (рис. 4.26).

Задача 4.28. Диск радиусом 0,6 м вращается по закону $\varphi = (2t^2 - 7t)$ рад вокруг своего диаметра. По радиусу OA диска ($AO \perp BC$) от A к центру движется точка по закону $s = 0,1t^2$ м; $t_1 = 2$ с (рис.4.27).

Задача 4.29. Конус, имеющий прямой угол при вершине, вращается вокруг своей оси по закону $\varphi = (t^2 + 6t)/8$ рад. По образующей конуса движется точка по закону $s = \sqrt{2}(2t^2 - 3t + 5)$ м; $t_1 = 1$ с (рис.4.28).

Задача 4.30. Решить задачу 4.24 в предположении, что направление вращения диска изменилось на противоположное (см. рис. 4.23).