

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Оглавление

Общие указания по выполнению курсовых работ.....	2
Вопросы к разделам курса.....	Ошибка! Закладка не определена.
Задания к курсовой и контрольным работам	3
Примеры решения задач	17
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	Ошибка! Закладка не определена.

Общие указания по выполнению курсовых работ

Сопротивление материалов – наука о прочности, жёсткости и устойчивости при условии надёжности элементов инженерных конструкций. Методами сопротивления материалов ведутся практические расчёты и определяются *надёжные* размеры деталей машин, различных конструкций и сооружений. Под *надёжностью* понимают способность либо конструкции в целом, либо отдельных конструктивных элементов выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определённых нормативных пределах в течение требуемого промежутка времени.

Процесс получения знаний по курсу сопротивления материалов студентами - заочниками складывается из самостоятельного изучения разделов курса по учебникам с составлением конспектов, разбора и решения задач, приведённых в сборниках задач по сопротивлению материалов (как правило, в задачниках имеются рекомендации по решению или примеры решения; наряду с этим, в конце каждой главы учебника приводятся характерные для изучаемой темы задачи с подробным описанием их решения). В случае затруднений при освоении материала студент может получить, в зависимости от возможности, письменную или устную консультацию.

Выполнение предлагаемых курсовой работы либо контрольных заданий (в зависимости от требований, предъявляемых учебным планом) позволяет студенту закрепить и систематизировать самостоятельно освоенный материал. Задание представляет собой совокупность типовых задач (в ряде случаев взаимосвязанных) и вопросов, соответствующих изучаемым разделам дисциплины. Объём задания для конкретной специальности определяется числом разделов и детальностью их изучения, что напрямую связано с количеством задач и вопросов. В таблице 1 приведены номера задач, входящих в состав курсовых и контрольных работ в соответствии с названием специальности и согласно учебному плану.

Исходные данные на проектирование приводятся в вариантах заданий и выбираются из таблиц в соответствии со своим личным номером (шифром) студенческого билета

К оформлению работ предъявляются следующие требования:

- 1) курсовая работа выполняется чернилами, чётким почерком на листах формата А4, контрольная работа – в тетради с полями 4 см для замечаний рецензента;
- 2) на обложке тетради необходимо указать фамилию, имя и отчество студента, название факультета и специальность, учебный шифр;
- 3) титульный лист для курсовой работы оформляется в соответствии с образцом, представленным на рис. 1.
- 4) перед решением задачи надо полностью выписать её условие с численными данными и составить расчётную схему, на которой указать в числах все величины, используемые при расчёте;
- 5) решение должно сопровождаться краткими последовательными объяснениями, необходимо проставить размерности всех величин и подчеркнуть окончательные результаты.

В случае невыполнения какого-либо из требований работа студента не принимается на рецензирование.

При наличии ошибок допускаются исправления на отдельных листах, которые должны быть вложены в соответствующие места рецензированной работы. После устранения ошибок производится защита каждой работы, при этом учитываются теоретические знания студента по разделу и способность применять их к решению конкретных практических задач. При неудовлетворительной оценке работы студенту предлагается повторная защита.

Задания к курсовой и контрольным работам

Задача 1.

Плоская шарнирно-стержневая система загружена в узле силой F (рис. 2).

Требуется:

1. Определить усилия в стержнях.
2. Подобрать размеры поперечных сечений стержней. Стержень 1 стальной, круглого поперечного сечения, стержень 2 стальной квадратного сечения.
3. Вычислить удлинения (укорочения) стержней и построить план перемещений.
4. Определить перемещение узла.

При расчете считать, что устойчивость сжатых стержней (если таковые в системе имеются) обеспечена.

Для всех вариантов принять расчетное сопротивление стали $R = 240 \text{ МПа}$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Остальные данные взять из табл. 2.

Таблица 2

№ строки	Схема	$F, \text{ кН}$	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	Угол, град.	
					α	β
1	I	160	2,0	3,5	30	50
2	II	120	3,2	2,5	40	60
3	III	240	2,4	3,0	50	45
4	IV	320	4,0	2,4	60	40
5	V	280	2,5	5,0	30	60
6	VI	260	5,0	4,5	50	30
7	VII	140	4,5	3,6	40	30
8	VIII	160	3,6	3,8	70	50
9	IX	220	3,2	3,6	30	40
0	X	250	3,8	4,0	60	70
	е	д	в	б	г	а

Примечание. Для схем I, II, V, VIII и IX значение угла β -опустить

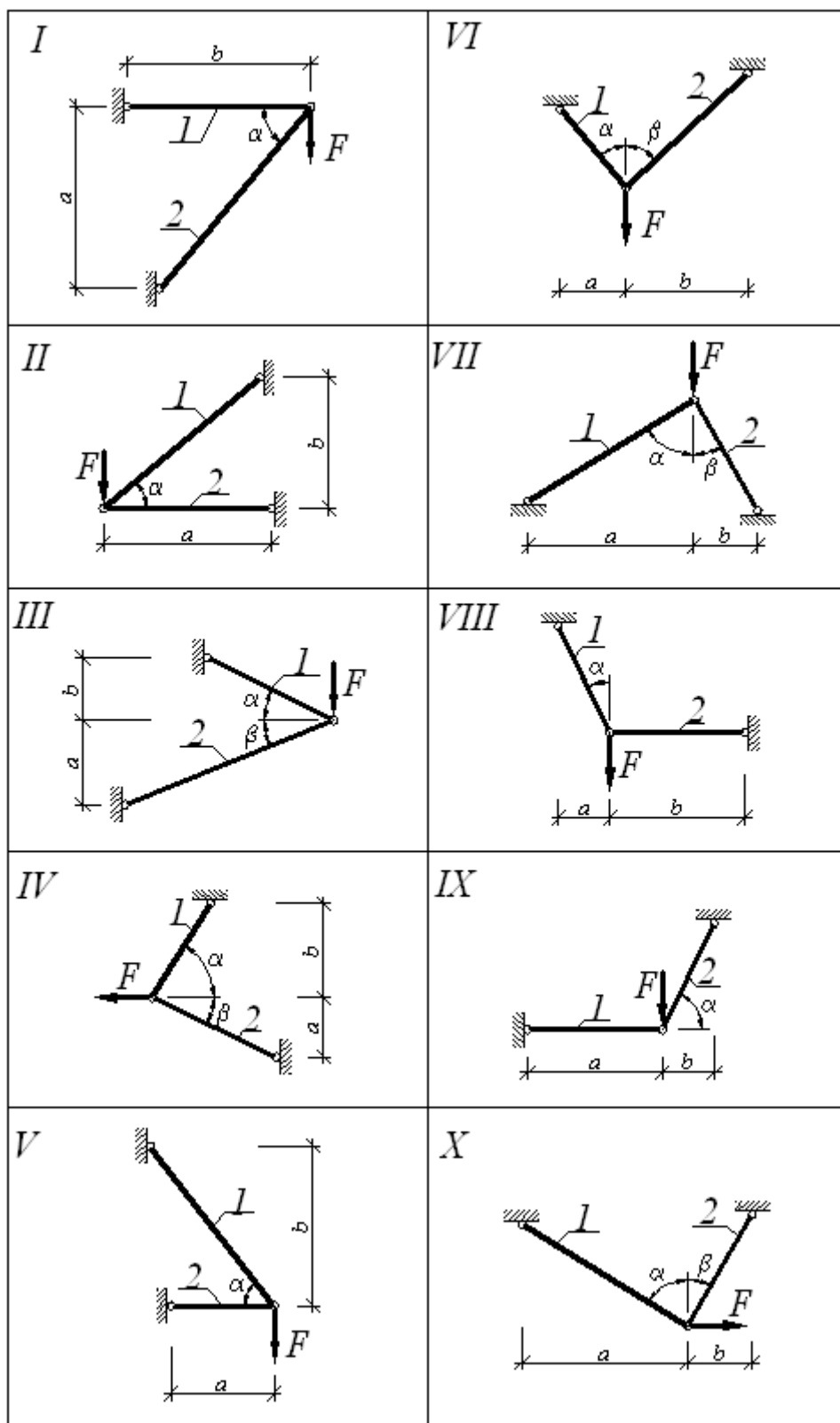


Рис. 2

Задача 2.

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и поддерживается двумя стержнями из пластичной стали (рис. 3).

Требуется:

1. Выполнить расчет системы по упругой стадии работы:
 - 1.1) подобрать сечение стержней на действие заданной нагрузки;
 - 1.2) определить в элементах системы температурные напряжения, вызванные изменением температуры стержня № 1;
 - 1.3) вычислить начальные (монтажные) напряжения в стержнях, вследствие неточности изготовления стержня № 2
 - 1.4) подсчитать суммарные напряжения в стержнях от совместного действия внешних факторов, перечисленных в пункте 1.1–1.3 и проверить их прочность.
2. Рассчитать заданную систему по методу предельного равновесия (по упруго-пластической стадии работы):
 - 2.1) определить расчётную несущую способность системы при сечениях стержней принятых по пункту 1.1;
 - 2.2) подобрать сечения стержней при заданной нагрузке.
3. Сравнить результаты расчёты системы по двум стадиям работы.

Данные плоской статически неопределимой системы (СНС), размеры ее элементов, соотношение площадей поперечного сечения стальных стержней, их физико-механические характеристики, изменение температуры одного из стержней и величину неточности изготовления другого стержня взять из табл. 3.

Для всех вариантов СНС принять модуль упругости стали $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент линейного расширения $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ °С⁻¹.

Таблица 3

№ строки	Схема	Нагр узка F , кН	Длины участков системы и стержней, м				Угол, град. β	Соотно- шение площадей сечений стержней A_1/A_2	Прира- щение темпера- туры 1-го стержня Δt , градус	Неточ- ность из- готовле- ния 2-го стержня Δ_0 , мм	Расчетное сопротив- ление стержня, МПа	
			a	b	c	d					№ 1 R_1	№ 2 R_2
1	I	400	2	2,2	2,4	4,2	60	1,8	+40	-1,2	235	345
2	II	240	2,8	2	2,4	3,6	45	0,6	-60	+1,0	280	240
3	III	320	2,2	3,6	2,0	3,2	60	1,2	-30	+0,8	365	240
4	IV	280	2,2	2,4	3,2	4,0	45	1,0	+45	-1,1	245	280
5	V	300	3,2	2,2	5,4	3,8	70	2,0	-35	-1,5	370	235
6	VI	340	2,6	2,8	2,0	4,8	75	2,0	+40	+1,2	345	285
7	VII	220	3,6	2,8	2,0	4,0	60	1,8	-50	+1,0	255	280
8	VIII	400	2,0	2,5	2,5	3,8	60	1,5	+30	-0,8	360	240
9	IX	320	3,0	3,0	2,4	3,6	45	1,0	-40	-1,2	245	355
0	X	280	2,2	2,6	3,0	3,0	60	0,8	+35	-1,0	280	360
<i>e</i>	<i>в</i>		<i>г</i>				<i>д</i>	<i>б</i>	<i>е</i>	<i>з</i>	<i>д</i>	

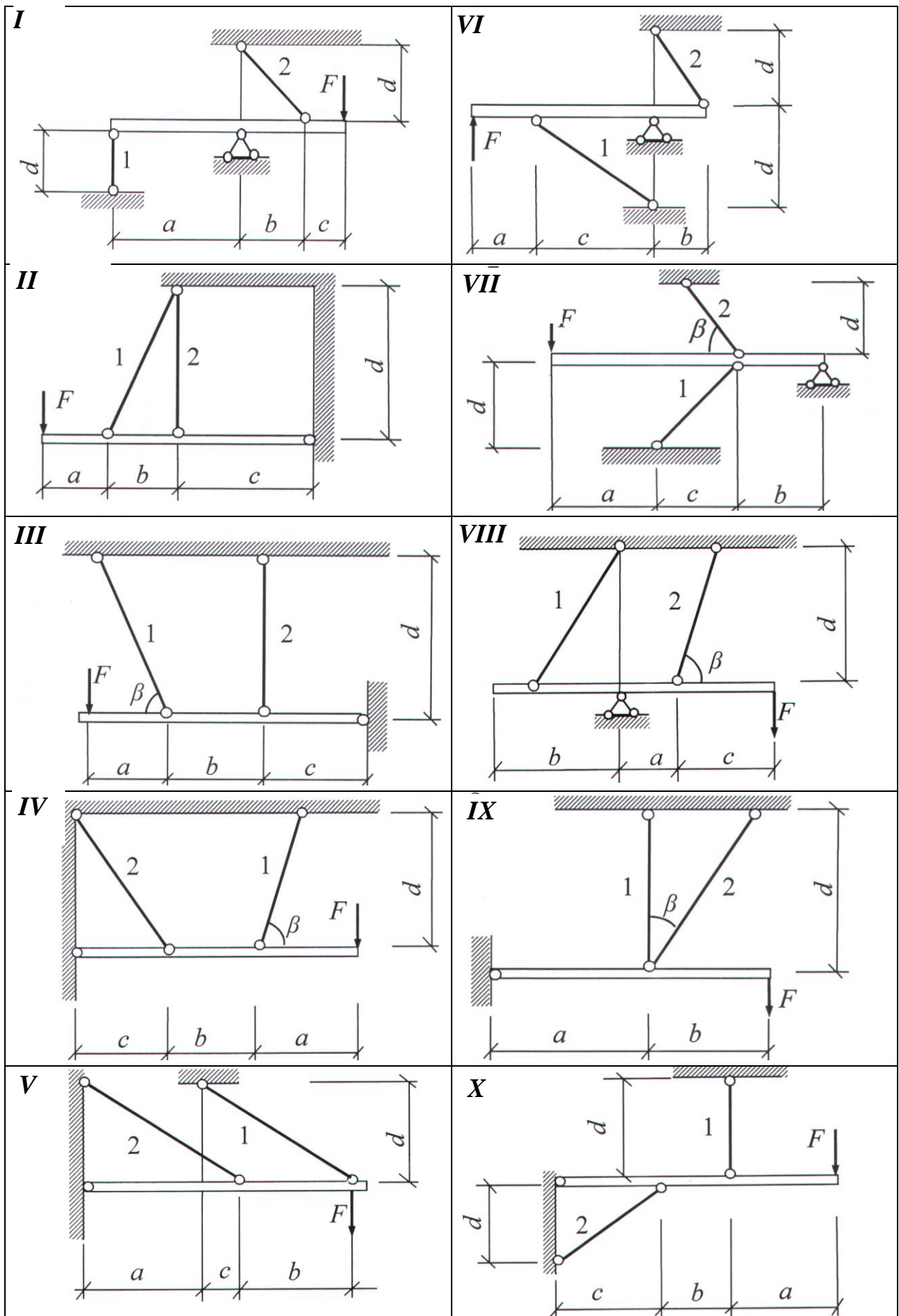


Рис. 3

Задача 3.

Задано сечение стального бруса, который состоит из листа и профильного проката – швеллера или двутавра. Одна ось (X или Y) является общей центральной осью составного сечения (рис. 4).

Требуется:

1. Привести геометрические характеристики простых составляющих сечения относительно их собственных центральных осей.
2. Вычертить сечение в масштабе с указанием основных размеров в числах и обозначением центральных осей простых составляющих сечения, параллельных вспомогательным осям.
3. Определить координаты центра тяжести всего сечения и построить на чертеже главные центральные оси, параллельные вспомогательным осям.
4. Выполнить проверку правильности выполнения третьего пункта путём вычисления статического момента всего сечения относительно общих центральных осей.
5. Определить значения главных центральных моментов инерции сечения.
6. Определить значения осевых моментов сопротивления (W_x, W_y).

Данные взять из табл. 4.

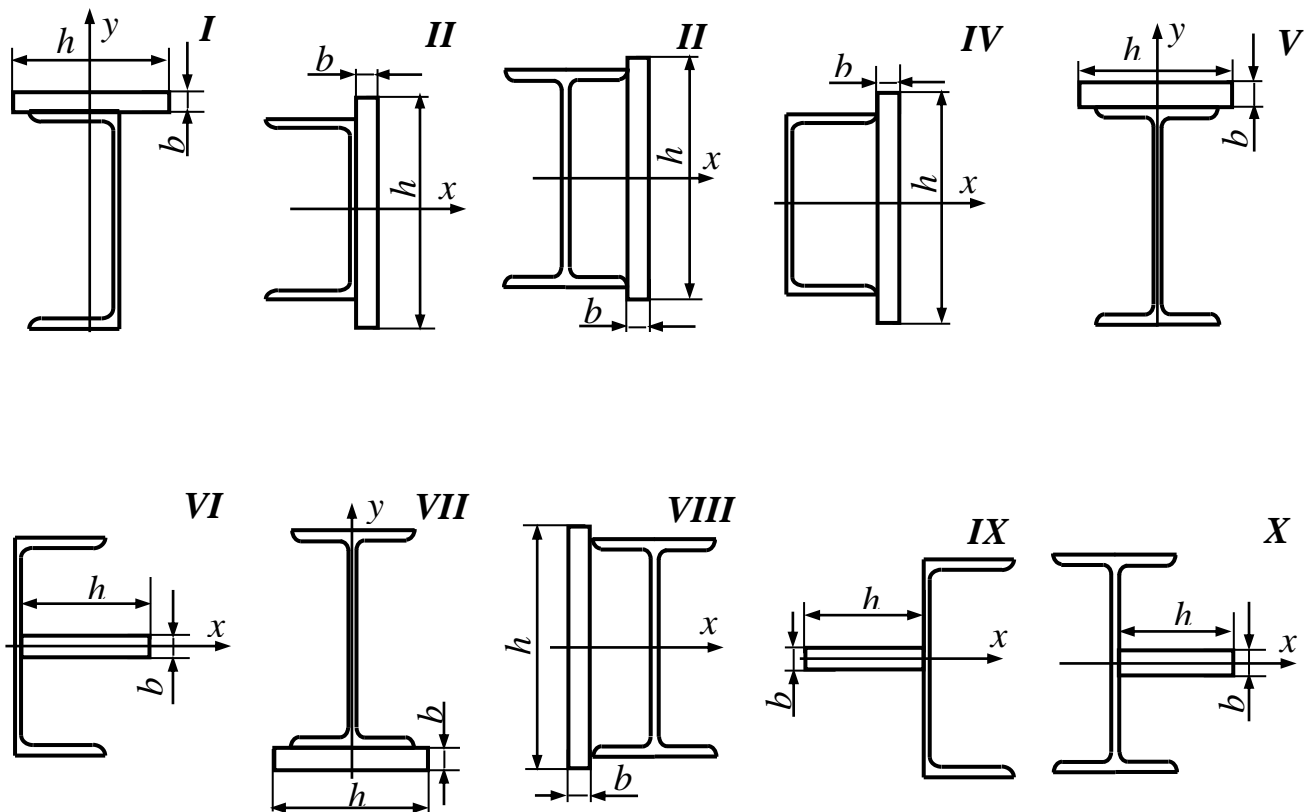


Рис.4

Таблица 4

№ строки	Схема	Швеллер №	Двутавр №	Размеры сечения листа, см	
				<i>h</i>	<i>b</i>
1	I	12	10	18	0,4
2	II	14	12	19	0,5
3	III	16	14	20	0,6
4	IV	18	16	21	0,7
5	V	18 ^a	18	22	0,8
6	VI	16 ^a	18 ^a	18	0,4
7	VII	14 ^a	14	20	0,6
8	VIII	16	16	19	0,5
9	IX	12	12	21	0,7
0	X	10	10	22	0,8
	<i>e</i>	<i>б</i>	<i>e</i>	<i>δ</i>	<i>z</i>

Задача 4.

Даны две схемы стальных балок (рис. 5)

Требуется:

Для схемы «а»:

1. Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M .
2. Проверить прочность по нормальным напряжениям в балке сложного поперечного сечения, уже рассмотренного в задаче 3.
3. Вычислить коэффициент использования прочности стали балки.

1. Определить прогиб конца консоли аналитическим методом, составляя и интегрируя дифференциальные уравнения изогнутой оси балки.

Для схемы «б»:

1. Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M .
2. Подобрать сечения следующей формы: прямоугольное ($h/b = k$); круглое; кольцевое ($\alpha = d/D$); состоящее из двух швеллеров; двутавровое.
3. Оценить эффективность формы сечения.

Для всех вариантов принять расчетное сопротивление стали $R = 240 \text{ МПа}$, модуль упругости (модуль Юнга) $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Остальные данные взять из табл. 5

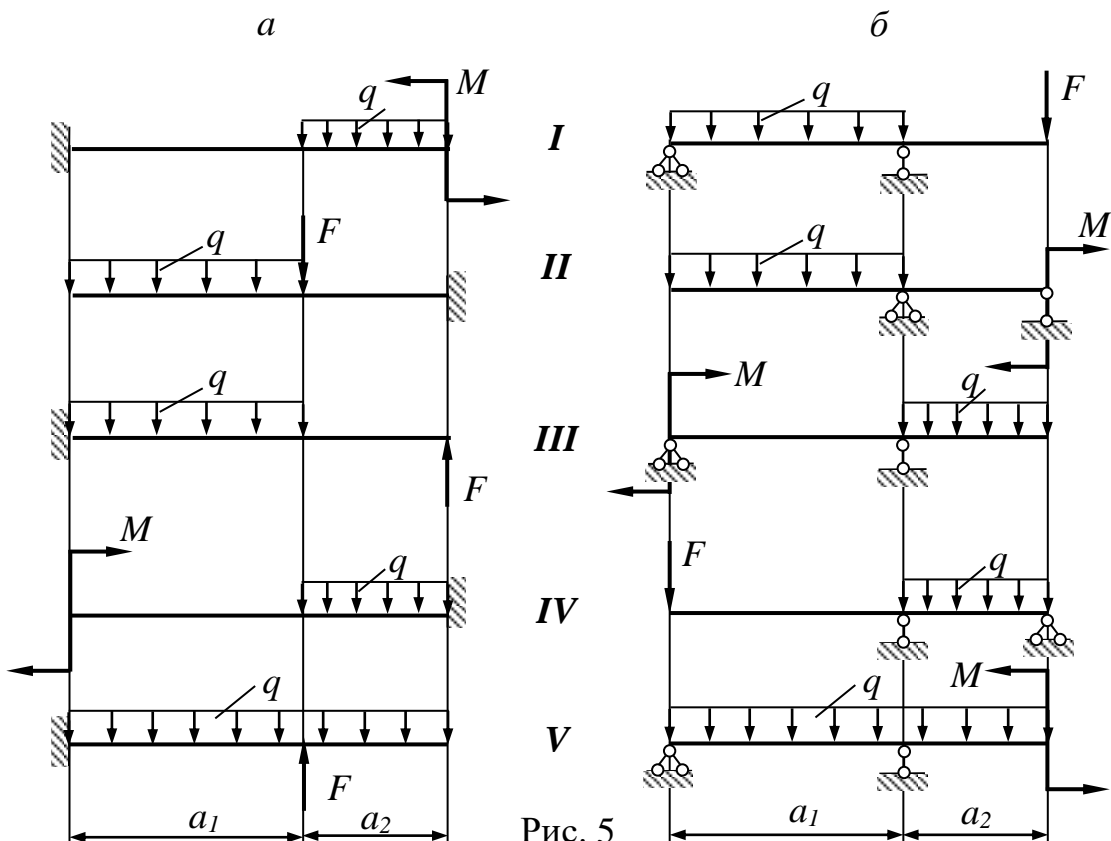


Рис. 5

Таблица 5

№ строки	Схема	$a_1, м$	$a_2, м$	$q, кН/м$	$F, кН$	$M, кН·м$	k	a
1	I	1.0	2.0	10	25	10	1.5	0.7
2	II	1.2	1.8	12	24	15	2.0	0.8
3	III	1.4	1.6	14	22	20	2.5	0.9
4	IV	1.6	1.4	16	20	25	3.0	0.8
5	V	1.2	1.8	18	18	30	2.5	0.7
6	I	2.0	1.0	20	16	35	2.0	0.8
7	II	1.8	1.2	22	15	30	1.5	0.7
8	III	1.6	1.4	24	14	25	2.0	0.9
9	IV	1.4	1.6	26	12	20	2.5	0.8
0	V	1.2	1.8	28	10	15	3.0	0.9
	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>e</i>	<i>б</i>

Задача 5.

Задана консольная балка постоянной жесткости ($EI_x = const$), рис. 6.

Требуется:

Определить по правилу Верещагина вертикальное перемещение точки «B»

Данные взять из табл. 6.

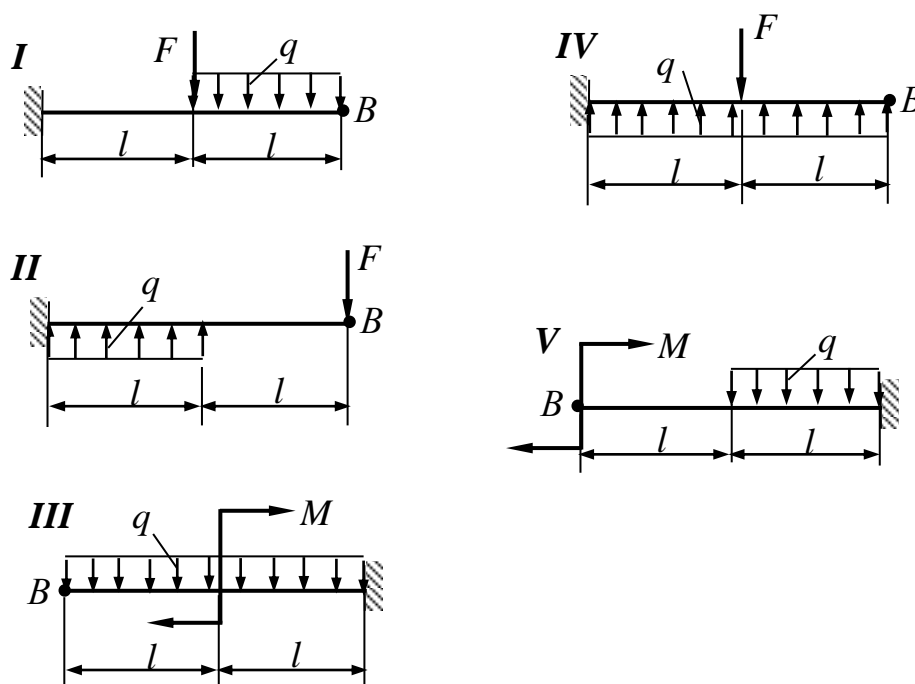


Рис. 6

Таблица 6

№ строки	Схема	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	$l, \text{м}$
1	I	6	20	10	1.1
2	II	7	10	12	1.2
3	III	8	5	14	1.3
4	IV	9	4	16	1.4
5	V	10	6	18	1.5
6	I	12	8	20	1.6
7	II	15	15	8	1.7
8	III	5	7	6	1.8
9	IV	20	12	7	1.9
0	V	16	14	5	2.0
	e	a	b	v	z

Задача 6.

Жесткая колонна заданного поперечного сечения (рис.7) сжимается силой F , параллельной оси колонны и приложенной в точке, показанной на схеме сечения. Расчетное сопротивление материала на растяжение $R_t = 3 \text{ МПа}$, на сжатие $R_c = 30 \text{ МПа}$.

Требуется:

1. Найти положение нулевой линии.
2. Вычислить наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения и построить эпюру напряжений. Дать заключение о прочности колонны.
3. Определить расчетную несущую способность (расчетную нагрузку) F_{max} при заданных размерах сечения.
4. Построить ядро сечения.

Числовые данные – в табл. 7.

Таблица 7

№ строки	Схема	Нагрузки $F, \text{кН}$	Размеры сечения, см		Точка приложения силы
			a	b	
1	I	120	24	10	1
2	II	160	30	12	2
3	III	180	32	20	3
4	IV	200	40	16	1
5	V	240	36	14	2
6	VI	280	28	20	3
7	VII	140	32	18	3
8	VII	220	24	16	2
9	IX	260	30	15	1
0	X	240	40	18	2
	d	e	v	z	b

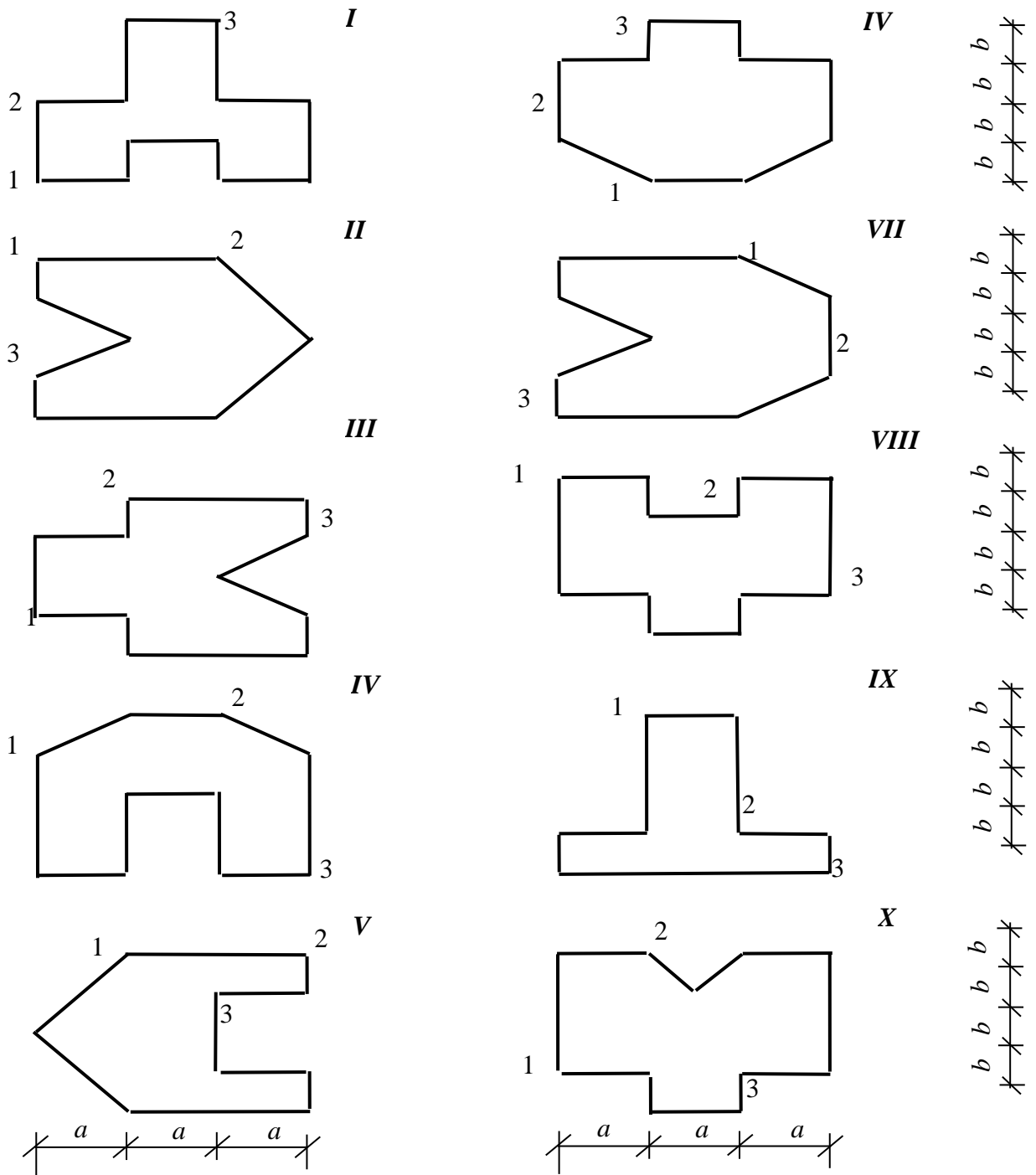


Рис. 7.

Задача 7.

Стальной стержень длиной l сжимается силой F (рис. 8).

Требуется:

1. Найти размеры поперечного сечения стержня при расчетном сопротивлении стали $R = 160 \text{ МПа}$, пользуясь методом последовательных приближений.
2. Определить величину критической силы, если предельная гибкость равна $\lambda_{пред} = 100$.
3. Вычислить коэффициент запаса устойчивости.

Данные взять из табл. 8.

Табл. 8

№ строки	Схема	Форма сечения	$F, \text{кН}$	$l, \text{м}$
1	I	I	100	2.1
2	II	II	200	2.2
3	III	III	300	2.3
4	IV	IV	400	2.4
5	I	V	500	2.5
6	II	VI	600	2.6
7	III	VII	700	2.7
8	IV	VIII	800	2.8
9	I	IX	900	2.9
0	II	X	1000	3.0
	e	a	b	v

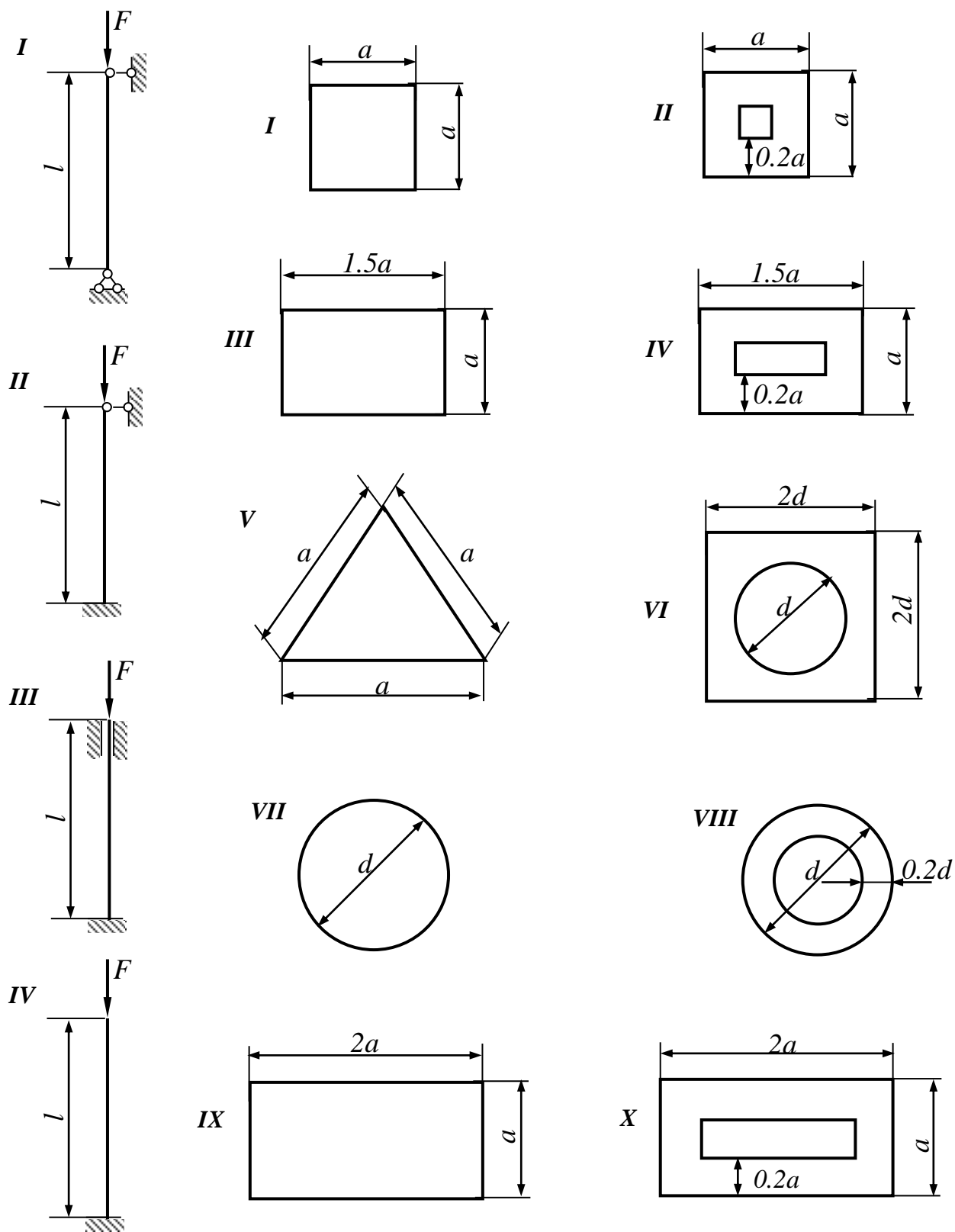


Рис. 8

Задача 8.

На балку, свободно лежащую на двух жёстких опорах (рис. 9), с высоты h падает груз F .

Требуется:

1. Найти наибольшее нормальное напряжение в балке.
2. Решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой равна α .
3. Сравнить полученные результаты.

Данные взять из табл. 9.

Таблица 9

№ строки	Схема	№ двуглава	$l, м$	$F, Н$	$h, м$	$\alpha, м/Н$
1	I	20	2.1	1000	0.10	$21 \cdot 10^{-6}$
2	II	20 ^a	2.2	900	0.20	$22 \cdot 10^{-6}$
3	III	24	2.3	800	0.03	$23 \cdot 10^{-6}$
4	IV	24 ^a	2.4	700	0.04	$24 \cdot 10^{-6}$
5	V	27	2.5	600	0.05	$25 \cdot 10^{-6}$
6	VI	27 ^a	2.6	500	0.06	$26 \cdot 10^{-6}$
7	VII	30	2.7	400	0.07	$27 \cdot 10^{-6}$
8	VIII	30 ^a	2.8	300	0.08	$28 \cdot 10^{-6}$
9	IX	33	2.9	1200	0.09	$29 \cdot 10^{-6}$
0	X	36	3.0	1100	0.04	$30 \cdot 10^{-6}$
	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>

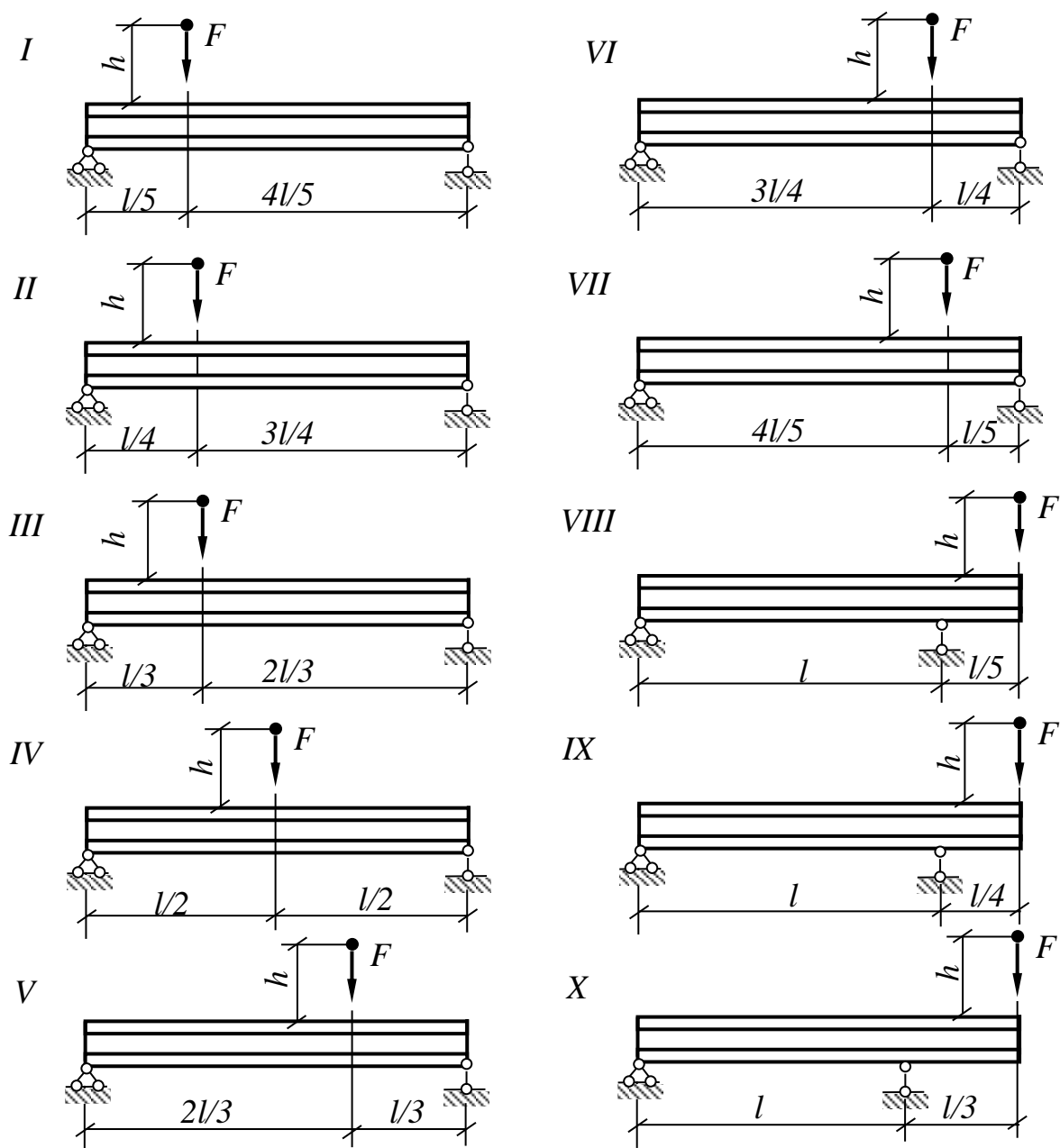


Рис. 9

Примеры решения задач

Задача 1.

Постановку задачи см. в практической части к курсовой работе (задача 1).

Исходные данные:

Сила $F = 100 \text{ кН}$; расчетное сопротивление стали $R = 160 \text{ МПа}$; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ (рис.10, а)

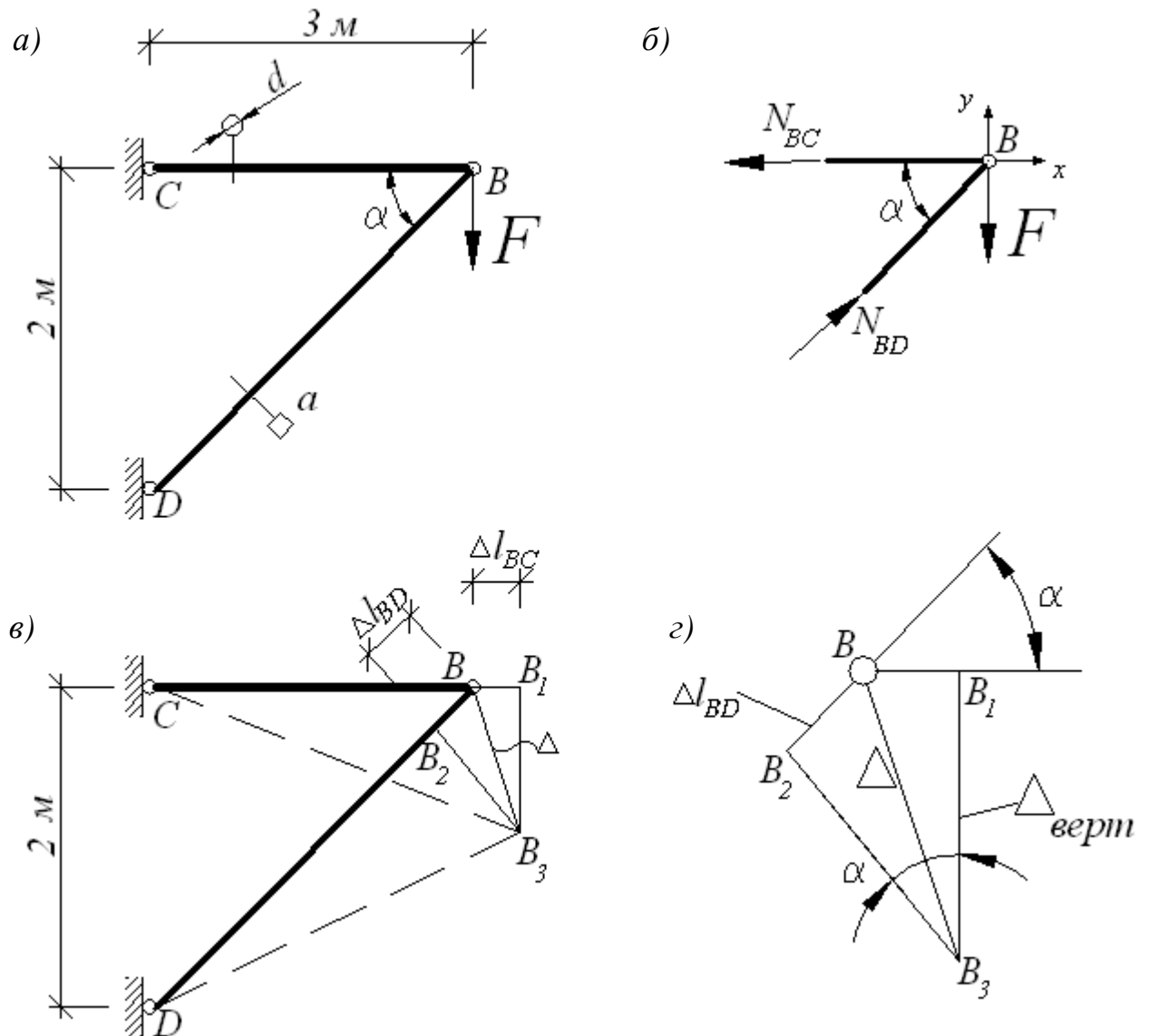


Рис. 10

Решение.

Мысленно вырезаем узел B , действие отброшенной части кронштейна заменяем искомыми внутренними усилиями. Для полученной плоской системы сходящихся сил составим уравнения равновесия (рис. 10, б)

$$\begin{aligned}\sum X &= -N_{BC} + N_{BD} \cos \alpha = 0 \\ \sum Y &= N_{BD} \sin \alpha - F = 0\end{aligned}$$

Решив уравнения, найдем внутренние усилия N_{BD} и N_{BC}

$$N_{BD} = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{100}{0,555} = 180,2 \text{ кН};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} = 0,667, \alpha = 33,7^\circ; \quad \sin \alpha = 0,555;$$

$$N_{BC} = N_{BD} \cos \alpha = 180,2 \cdot 0,832 = 150 \text{ кН}.$$

Полученные положительные значения внутренних усилий показывают, что предварительно выбранные направления усилий оказались верными, стержень BC растягивается, а стержень BD -сжимается.

Диаметр стержня BC находим из условия прочности:

$$\frac{N_{BC}}{A_{BC}} \leq R,$$

где $A_{BC} = \frac{\pi \cdot d^2}{4},$

откуда $d = \sqrt{\frac{N_{BC}}{R}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 150 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,5 \text{ см}.$

Размеры поперечного сечения стержня BD определим на условия прочности:

$$\frac{N_{BD}}{A_{BD}} \leq R,$$

где $A_{BD} = a^2,$

откуда $a = \sqrt{\frac{N_{BD}}{R}} = \sqrt{\frac{180,2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,4 \text{ см}.$

Перемещение узла B найдем с помощью графоаналитического метода, для чего вычислим, используя закон Гука, абсолютные деформации стержней BC и BD , предполагая их свободными в точке B :

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{EA_{BC}} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 3,5^2 \cdot 10^{-4}} = 23,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,234 \text{ см};$$

$$\Delta l_{BD} = -\frac{N_{BD} l_{BD}}{EA_{BD}} = -\frac{180,2 \cdot 10^3 \cdot 3,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,4^2 \cdot 10^{-4}} = -28,1 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,281 \text{ см};$$

где $l_{BD} = \frac{3}{\cos \alpha} = \frac{3}{0,832} = 3,6 \text{ м}.$

Положение узла B после деформации стержней определится в результате построения деформационного треугольника по сторонам $l_{BC} + \Delta l_{BC}$ и $l_{BD} - \Delta l_{BD}$.

Стержень BC удлинился на величину Δl_{BC} , концевое сечение переместилось в точку B_1 . Радиусом, равным CB_1 проведем из точки C дугу окружности. Так как перемещения малы, то дугу можно заменить касательной, проведенной через B_1 перпендикулярно оси стержня BC (рис. 10, в).

Стержень BD укоротился на Δl_{BD} , и концевое сечение переместилось в точку B_2 . Заменяя дугу, описанную из точки D радиусом DB_2 касательной, проведенной через B_2 перпендикулярно оси стержня BD , получим на пересечении перпендикуляров точку B_3 - новое положение узла B . Соединив точку B с B_3 найдем перемещение Δ узла B . На рис.10, в план перемещений изображен в увеличенном масштабе. План перемещений рекомендуется строить отдельно, как показано на рис.10, г. Из него следует, что горизонтальная составляющая перемещения $\Delta_{гор}$ узла B равна:

$$\Delta_{гор} = \Delta l_{BC} = 0,234 \text{ см.}$$

Вертикальную составляющую перемещения $\Delta_{верт}$ узла B легко найти, воспользовавшись теоремой аналитической геометрии – проекция замыкающей на любую ось равна алгебраической сумме проекций составляющих на ту же ось. Принимая за ось проекций направление Δl_{BD} получим:

$$-\Delta l_{BD} = \Delta l_{BC} \cos \alpha - \Delta_{верт} \sin \alpha ;$$

откуда
$$\Delta_{верт} = -\frac{\Delta l_{BD} + \Delta l_{BC} \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{0,281 + 0,234 \cdot 0,832}{0,555} = 0,857 \text{ см.}$$

Знак Δl_{BD} учтен при построении плана перемещений. Полное перемещение узла B будет равно:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{гор}^2 + \Delta_{верт}^2} = \sqrt{0,234^2 + 0,857^2} = 0,888 \text{ см.}$$

Планы перемещений являются важным средством определения перемещений узлов ферм. Они называются диаграммами Вилло, так как были предложены французским инженером Д.В. Вилло в 1877 году.

Задача 2

Постановку задачи см. в практической части задания.

Исходные данные

Жесткий брус закреплен одним концом в шарнирно-неподвижной опоре B и поддерживается стержнями 1 и 2 (рис. 11).

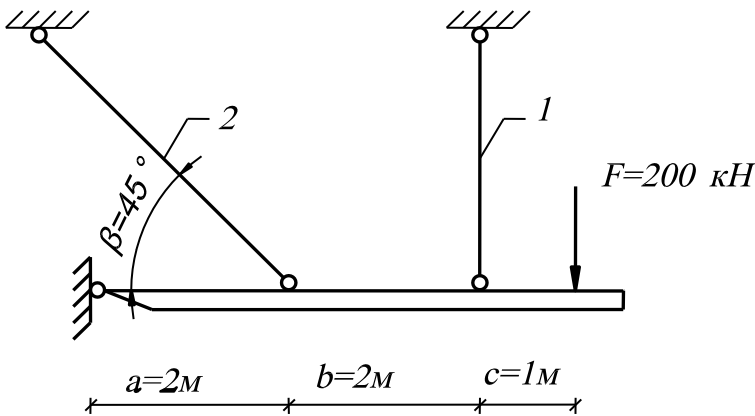


Рис. 11

Первый стержень из стали $C375$ длиной $l_1 = 2\text{ м}$ с расчетным сопротивлением $R_1 = 360\text{ МПа}$. Второй стержень из стали $C235$ длиной $l_2 = l_1 / \sin 45^\circ = 2,829\text{ м}$ с расчетным сопротивлением $R_2 = 230\text{ МПа}$. Модуль упругости стали $E = 2,06 \cdot 10^5\text{ МПа}$. Отношение площадей $A_2/A_1 = 2$. Остальные характеристики системы приведены на рисунке.

Решение.

1. *Расчёт системы по упругой стадии работы.* Определим число лишних связей (степень статической неопределимости).

$$L = C - Y = 2 - 1 = 1.$$

Система один раз статически неопределима.

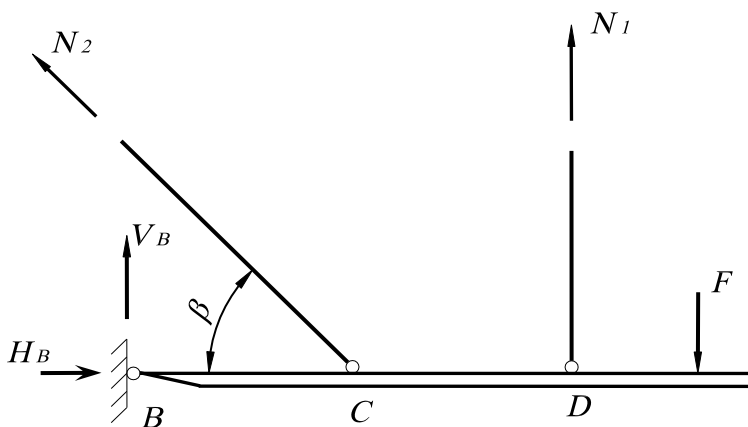


Рис. 12

1.1. *Подбор сечений стержней на заданную нагрузку.* Определим усилия в стержнях. Отбрасываем мысленно верхнее закрепление стержней и заменяем его действие неизвестными усилиями N_1 и N_2 , направленными вдоль стержней (рис. 12). Ограничимся составлением одного уравнения равновесия статики (реакции опоры B — V_B и H_B определять не будем)

$$\sum m_B = 0 \quad N_1 \cdot (a+b) + N_2 \cdot a \cdot \sin \beta - F(a+b+c) = 0. \quad (1)$$

Уравнение содержит два неизвестных, для раскрытия статической неопределимости рассмотрим условие совместности деформаций и перемещений заданной системы.

Пренебрегая деформацией бруса $B CD$ (брус абсолютно жесткий), получа-

ем при его повороте относительно опоры B под действием внешней нагрузки однозначную зависимость между перемещениями точек C и D , т.е. между деформациями стержней 1 и 2.

Отметим важную особенность решения таких задач. При повороте жесткого бруса точки C и D опишут дуги с соответствующими радиусами. Однако в связи с тем, что рассматриваются только упругие деформации, величина которых весьма мала по сравнению с размерами элементов системы, дугу всегда заменяем перпендикуляром, иными словами, точки C и D перемещаются вертикально и конечное их положение соответствует точкам C_1 и D_1 , лежащими на предполагаемой оси нагруженного бруса. Вследствие неразрывности деформаций в точки C_1 и D_1 переместятся и концы стержней 2 и 1.

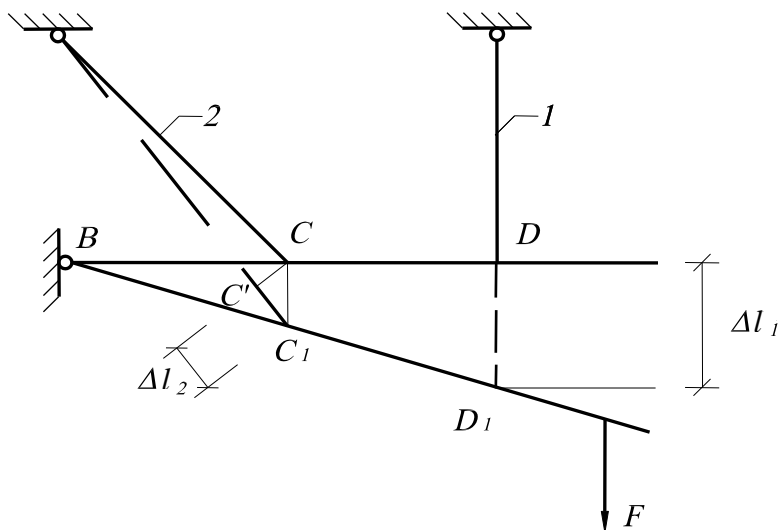


Рис. 13

Стержни удлинились на величину Δl_1 и Δl_2 соответственно. Перемещение точки D в положение D_1 определяет деформацию Δl_1 стержня 1. Для выделения на плане перемещений системы деформации стержня 2 из конца стержня (точка C) до деформации необходимо опустить перпендикуляр на его конечное положение (пунктирная прямая). Отрезок $CC_1 = \Delta l_2$.

Уравнение совместности деформацией составим, используя подобие треугольников BCC_1 и BDD_1

$$\frac{CC_1}{a} = \frac{DD_1}{a+b} \quad ; \text{ где } CC_1 = \Delta l_2 / \sin 45^\circ ; DD_1 = \Delta l_1$$

Отсюда
$$\frac{\Delta l_2}{\sin 45^\circ \cdot a} = \frac{\Delta l_1}{a+b}.$$

Выразим деформации Δl_1 и Δl_2 по закону Гука через усилия N_1 и N_2 .

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2 \cdot a \cdot \sin 45^\circ} = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A \cdot (a+b)} \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2) определим искомые усилия.

Из выражения (2)
$$N_2 = N_1 \cdot \frac{E \cdot a \cdot \sin 45^\circ}{E \cdot (a+b)} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{A_2}{A_1} = 0,5 N_1.$$

Подставляя $N_2 = 0,5 N_1$ в уравнение (1) получаем

$$N_1 = 212,44 \text{ кН},$$

тогда

$$N_2 = 106,22 \text{ кН.}$$

Площади сечения стержней подберем согласно плану решения проектно-решочной задачи из условия прочности второго стержня.

$$A_2 \geq \frac{N_2}{R_2} = \frac{106,22 \cdot 10^3 \text{ Н}}{230 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 0,462 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 4,62 \text{ см}^2.$$

С учетом заданного отношения площадей

$$A_1 = \frac{A_2}{2} = \frac{4,62}{2} = 2,31 \text{ см}^2.$$

Проверим прочность первого стержня

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{212,44 \cdot 10^3 \text{ Н}}{2,31 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 91,9 \cdot 10^7 \text{ Па} = 919 \text{ МПа} > R_1 = 360 \text{ МПа}.$$

Условие прочности стержня 1 не удовлетворяется.

Повторяем расчёт из условия обеспечения прочности первого стержня:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{R_1} = \frac{212,44 \cdot 10^3 \text{ Н}}{360 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 0,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 5,9 \text{ см}^2$$

Сохраняя соотношение площадей, $A_2 = 2A_1 = 11,8 \text{ см}^2$.

В первом стержне $\sigma_1 = R_1 = 360 \text{ МПа}$, а во втором

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{106,22 \cdot 10^3 \text{ Н}}{11,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 9 \cdot 10^7 \text{ Па} = 90 \text{ МПа} < R_2 = 230 \text{ МПа}$$

Прочность второго стержня используется только на 39,1%, что делает систему менее экономичной и более металлоемкой.

1.2. *Определение температурных напряжений* в стержнях статически неопределимой системы, сечение которых подобрано в предыдущем пункте расчёта.

Пусть первый стержень нагревается до 30° . Коэффициент линейного расширения для стали $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

При свободном расширении стержень 1 удлинился бы на вели-

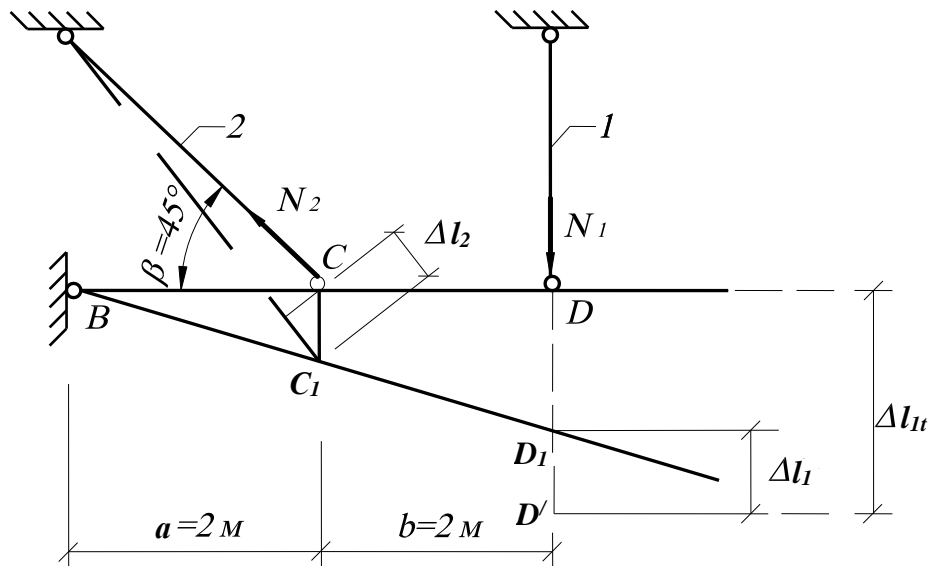


Рис. 14

чину $\Delta l_{It} = \alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t$. Однако такому удлинению будет препятствовать, посредством жесткого бруса BCD , стержень 2. В результате, в первом стержне появятся сжимающие напряжения, а во – втором - растягивающие. Направления внутренних температурных усилий в стержнях всегда согласованы со схемой деформаций стержней.

Используем только одно уравнение равновесия статики

$$\Sigma m_B = 0 \quad N_1 \cdot (a+b) - N_2 \cdot a \cdot \sin \beta = 0 \quad (3)$$

Недостающее уравнение, связывающее неизвестные усилия в стержнях, получим из рассмотрения условия совместности деформаций. Треугольники BCC_1 и BDD_1 подобны, тогда

$$\frac{CC_1}{a} = \frac{DD_1}{a+b}; \quad CC_1 = \Delta l_2 / \sin \beta; \quad DD_1 = \Delta l_{It} - \Delta l_1,$$

или

$$\frac{\Delta l_2}{\sin \beta \cdot a} = \frac{\Delta l_{It} - \Delta l_1}{a+b} \quad (4)$$

Выразим деформации в уравнении (4) по закону Гука через усилия:

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2 \cdot \sin \beta \cdot a} = \frac{\alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t - \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1}}{a+b}. \quad (5)$$

Решая систему уравнений (3) и (5), получаем

$$N_2 \frac{(\alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t - \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1}) E A_2 \cdot \sin \beta \cdot a}{(a+b) \cdot l_2} = \frac{\alpha \cdot l_1 \cdot \Delta t \cdot E A_2 \cdot \sin \beta \cdot a - \frac{l_1 \cdot E A_2 \cdot \sin \beta \cdot a}{E A_1} \cdot N_1}{(a+b) \cdot l_2}.$$

После подстановки в последнее выражение всех величин в основных единицах системы СИ получаем:

$$N_2 = 22782 - 0,5 N_1$$

Подставляя этот результат в уравнение (3)

$$N_1 = 6843 \text{ Н} = 6,84 \text{ кН},$$

$$N_2 = 19360 \text{ Н} = 19,36 \text{ кН}.$$

Положительные значения найденных внутренних усилий подтверждают правильность направления усилий - стержень 1 сжат, стержень 2 растянут. Температурные напряжения в стержнях

$$\sigma_{1t} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-6843}{5,9 \cdot 10^{-4}} = -1159 \cdot 10^4 \text{ Па} = -11,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{2t} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{19360}{11,8 \cdot 10^{-4}} = 1640 \cdot 10^4 \text{ Па} = 16,4 \text{ МПа}.$$

1.3. *Определение напряжений, возникающих при сборке системы, рассчитываемой выше. Длина стержня 2 меньше номинального размера на $\delta_2 = 0,5 \text{ мм}$.*

Для выяснения направления сил, которые возникают в стержнях при сборке системы, предположим, что сборку осуществили, растянув стержень 2 на δ_2 . Когда растянутый стержень 2 был шарниром соединен с жестким брусом и внешняя нагрузка удалена (используется принцип независимости действия сил), стержень в силу своей упругости поднял точку C бруса, повернув брус вокруг шарнира B и вызвал сжатие стержня 1. Полностью восстановить свою первоначальную длину стержень 2 не может - этому препятствует стержень 1, следовательно, стержень 2 остается растянутым на $\Delta l_2 < \delta_2$. Стержень 1 при этом сжат. На рис. 15 дано положение бруса после сборки системы, все перемещения показаны весьма преувеличенными. Усилия в стержнях строго согласованы со схемой деформаций. Ограничимся одним уравнением статики, связывающим два неизвестных усилия, $\Sigma m_B = 0$

$$N_1 \cdot (a + b) - N_2 \cdot a \cdot \sin \beta = 0 \quad (6)$$

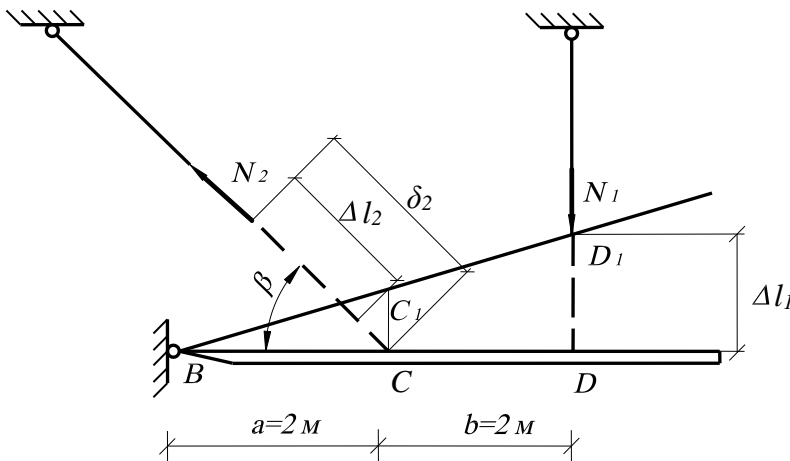


Рис. 15

Уравнение совместности деформаций составим, рассматривая подобие треугольников BCC_1 и BDD_1 :

$$\frac{CC_1}{a} = \frac{DD_1}{a + b},$$

где $CC_1 = (\delta_2 - \Delta l_2) / \sin \beta$;

$$DD_1 = \Delta l_1.$$

Тогда

$$\frac{\delta_2 - \Delta l_2}{\sin \beta \cdot a} = \frac{\Delta l_1}{a + b} \quad (7)$$

Деформации в уравнении (7) выразим по закону Гука через усилия:

$$\left(\delta_2 - \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} \right) \frac{1}{\sin \beta \cdot a} = \frac{N_1 \cdot l_1}{EA_1 \cdot (a + b)} \quad (8)$$

Откуда усилие N_1

$$N_1 = \frac{\left(\delta_2 - \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} \right) \cdot EA_1(a+b)}{\sin\beta \cdot a \cdot l_1} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot 10^{-3} - \frac{N_2 \cdot 2,829}{2,06 \cdot 10^{11} \cdot 11,8 \cdot 10^{-4}}}{0,707 \cdot 2} \cdot \frac{2,06 \cdot 10^{11} \cdot 5,9 \cdot 10^{-4} (2+2)}{2},$$

или после преобразований $N_1 = 8,596 \cdot 10^{-4} - 2,001 \cdot N_2$.

Подставляя этот результат в уравнение (6), находим монтажное усилие

$$N_2 = 36,5 \text{ кН}$$

Усилие в стержне 1 $N_1 = 12,9 \text{ кН}$.

Монтажные напряжения в стержнях:

в сжатом стержне 1 $\sigma_{10} = -\frac{N_1}{A_1} = -\frac{12,9 \cdot 10^3}{5,9 \cdot 10^{-4}} = -2,19 \cdot 10^7 \text{ Па} = -21,9 \text{ МПа};$

в растянутом стержне 2 $\sigma_{20} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{36,5 \cdot 10^3}{11,8 \cdot 10^{-4}} = 3,09 \cdot 10^7 \text{ Па} = 30,9 \text{ МПа}.$

1.4. *Суммарные напряжения* в стержнях от совместного действия внешних факторов (нагрузки, температуры и неточности изготовления).

Результирующее напряжение в первом стержне

$$\sigma_1 = \sigma_{1F} + \sigma_{1t} + \sigma_{10} = 360 - 11,6 - 21,9 = 326,5 \text{ МПа} < R_1,$$

то же во втором

$$\sigma_2 = \sigma_{2F} + \sigma_{2t} + \sigma_{20} = 90 + 16,4 + 30,9 = 137,3 \text{ МПа} < R_2.$$

Условия прочности удовлетворяются для обеих стержней. Размеры сечений стержней 1 и 2 в случае сочетания действия всех рассмотренных факторов несколько завышены, т.е. конструкция недостаточно экономична.

2. *Расчет заданной системы по методу предельного равновесия* (по упруго-пластической стадии работы).

2.1. *Определение расчетной несущей способности* системы при сечениях стержней, принятых по п.1 .

При расчете конструкций из пластичных материалов за пределом упругости учитывается перераспределение усилий в системах, считаемых статически неопределимыми при их упругой работе. Перераспределение усилий приводит к тому, что напряжения во всех стержнях в расчётном предельном состоянии достигают расчётного сопротивления, а система становится статически определимой.

Несущая способность системы определяется из уравнения моментов всех сил относительно шарнира B

$$F_{max} \cdot (a + b + c) - N_1 \cdot (a + b) - N_2 \cdot a \cdot \sin\beta = 0, \quad (9)$$

где $N_1 = R_1 \cdot A_1$ и $N_2 = R_2 \cdot A_2$.

Из выражения (9)

$$F_{max} = \frac{360 \cdot 10^6 \cdot 5,9 \cdot 10^{-4} \cdot (2 + 2) + 230 \cdot 10^6 \cdot 11,8 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 0,707}{2 + 2 + 1} = 246,6 \text{ кН}$$

Превышение расчётной несущей способности над заданной нагрузкой ($F=200$ кН) составило

$$\Delta F = \frac{F_{max} - F}{F} \cdot 100\% = 23,3\%$$

2.2. Подбор сечений стержней, при заданной нагрузке.

В уравнении равновесия $\Sigma m_B = 0$, аналогичному (9)

$$F \cdot (a + b + c) - R_1 \cdot A_1(a + b) - R_2 \cdot A_2 \cdot a \cdot \sin\beta = 0$$

неизвестным оказывается требуемая площадь сечения стержней, (соотношение площадей сохраняется неизменным $A_2 / A_1 = 2$),

тогда

$$A_1 = \frac{F(a + b + c)}{R_1 \cdot (a + b) + 2R_2 \cdot a \cdot \sin\beta} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 5}{360 \cdot 10^6 \cdot 4 + 2 \cdot 230 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0,707} = 4,78 \text{ см}^2$$

и $A_2 = 2A_1 = 9,56 \text{ см}^2$.

Суммарная площадь двух стержней $A_{tot}^{pl} = A_1 + A_2 = 14,34 \text{ см}^2$, против суммарной площади тех же стержней системы, определенной по упругой стадии $A_{tot}^e = 5,9 + 11,8 = 17,7 \text{ см}^2$.

Снижение расхода материала двух стержней при расчете статически неопределимой системы по методу предельного равновесия составило

$$\Delta A = \frac{A_{tot}^e - A_{tot}^{pl}}{A^{pl}} \cdot 100\% = \frac{17,7 - 14,34}{14,34} \cdot 100\% = 23,4\%.$$

В завершении примера расчёта статически неопределимых систем отметим, что учёт температурных напряжений, начальных (монтажных) напряжений, равно как и осадки опор в методе расчёта по предельному равновесию, излишен. Поскольку еще в предшествующий состоянию предельного равновесия момент система становится статически определимой, для которой указанные воздействия влияния не оказывают.

Задача 3 (рис. 16)

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 3).

Исходные данные.

Сложное сечение состоит из двух составляющих: 1 – швеллер № 20, 2 – прямоугольник с размерами $h_2 = 1 \text{ см}$, $b_2 = 12 \text{ см}$. Ось Y проходит через центр тяжести обоих составляющих (рис. 16, а).

Решение.

1. Геометрические характеристики швеллера относительно его собственных центральных осей (рис. 16, б) согласно ГОСТ 8240-72 следующие:

площадь $A_1 = 23,4 \text{ см}^2$,

высота сечения $h_1 = 20 \text{ см}$,

моменты инерции $I_{X_1} = 1520 \text{ см}^4$, $I_{Y_1} = 113 \text{ см}^4$,

абсцисса центра тяжести швеллера $x_0 = 2,07 \text{ см}$.

(ГОСТ прокатных профилей есть в приложениях всех литературных источников, приведённых в списке литературы).

Здесь и далее индекс в нижнем правом углу означает номер простой составляющей сечения. Например, швеллер, согласно принятой в задаче нумерации, имеет номер 1.

Геометрические характеристики прямоугольника относительно его собственных центральных осей (рис. 16, в) следующие:

площадь $A_2 = h_2 \cdot b_2 = 1 \cdot 12 = 12 \text{ см}^2$,

моменты инерции относительно собственных центральных осей

$$I_{X_2} = b_2 h_2^3 / 12 = 12 \cdot 1^3 / 12 = 1 \text{ см}^4, \quad I_{Y_2} = h_2 b_2^3 / 12 = 1 \cdot 12^3 / 12 = 144 \text{ см}^4.$$

2. Построение сечения в масштабе (см. рис. 16, а).

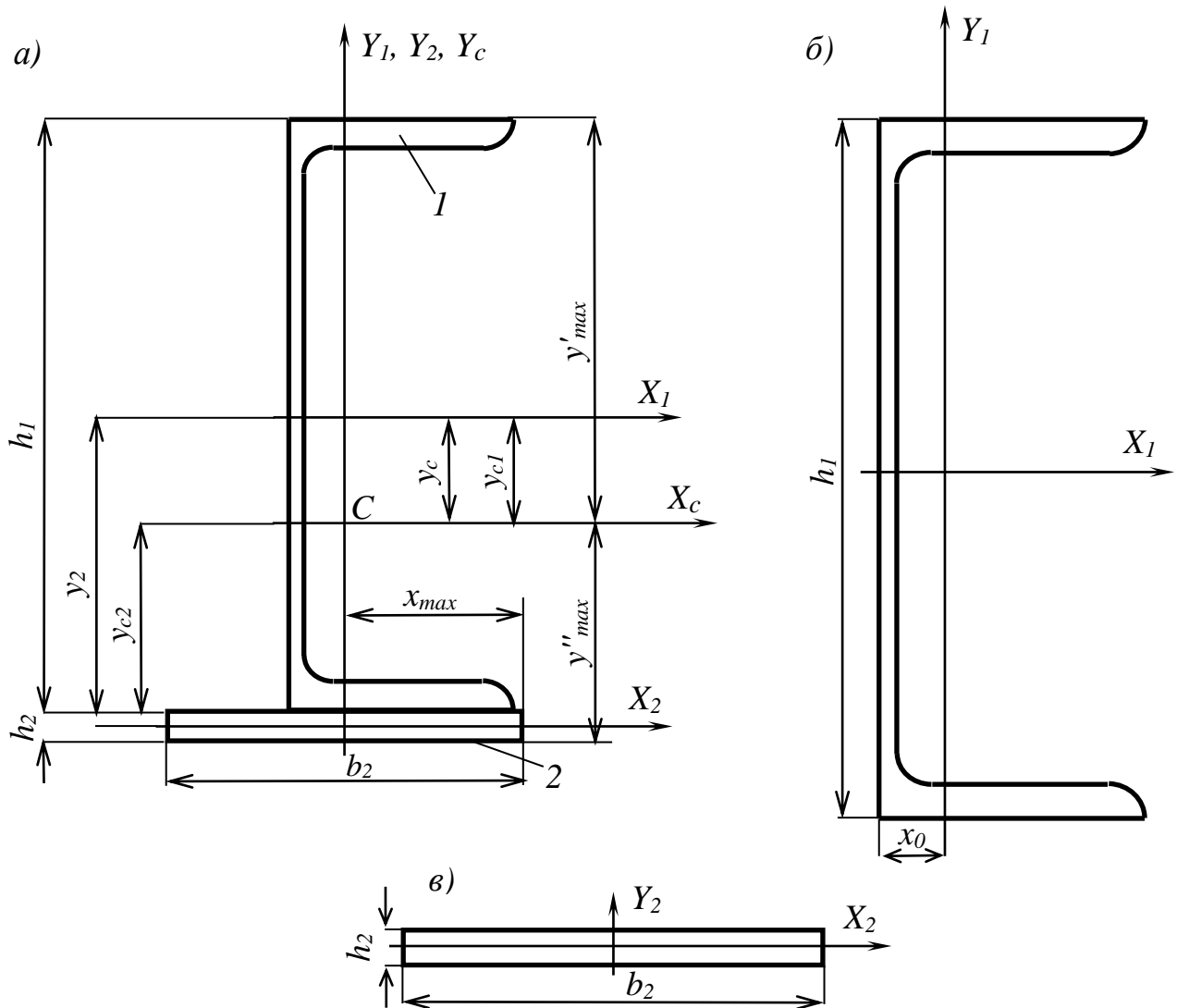


Рис. 16

3. Определение координаты центра тяжести сечения.

- *Строим вспомогательную систему координат.* В качестве вспомогательной системы координат выбираем центральные оси швеллера X_1 и Y_1 .
- *Определяем координаты центра тяжести сечения относительно вспомогательной системы координат.* Для рассматриваемого сечения необходимо вычислить только одну координату y_c , так как другая координата x_c известна. Поскольку центр тяжести всего сечения должен лежать на прямой, соединяющей центры тяжести простых составляющих (это правило действительно для сечений, состоящих их двух частей), то в нашем случае центр тяжести лежит на оси Y_1 (см. рис. 16, а), а значит координата $x_c = 0$.

Координата центра тяжести (к. ц. т.) сечения y_c определяется по формуле:

$$y_c = S_X / A,$$

где A – площадь всего сечения; S_X – статический момент всего сечения относительно оси X . Для рассматриваемого примера статический момент сечения следует обозначить, как S_{X_1} , так как y_c определяется относительно оси X_1 .

Рассматриваемое сечение сложное. Для определения статического момента сложного сечения существует формула

$$S_X = \sum_{i=1}^n {}^i S_X = \sum_{i=1}^n y_i A_i,$$

где n – число простых составляющих сложного сечения; ${}^i S_X$ – статический момент i –й составляющей сложного сечения; y_i , A_i – координата центра тяжести и площадь i –й составляющей сложного сечения. Применительно к нашей задаче формула примет следующий вид:

$$S_{X_1} = {}^1 S_{X_1} + {}^2 S_{X_1} = y_1 A_1 + y_2 A_2.$$

Так как координата y в прямоугольной системе координат представляет собой кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от центра тяжести соответствующей фигуры до оси X , то:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -\left(\frac{h_2}{2} + \frac{h_1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{20}{2}\right) = -10,5 \text{ см};$$

A_1 и A_2 определены в пункте I. Подставим в формулу полученные значения:

$$S_{X_1} = 0 \cdot 23,4 + (-10,5 \cdot 12) = -126 \text{ см}^3.$$

Площадь сложного сечения $A = \sum_{i=1}^n A_i$. Тогда для рассматриваемого случая:

$$A = A_1 + A_2 = 23,4 + 12 = 35,4 \text{ см}^2.$$

Следовательно,
$$y_c = \frac{S_{X_1}}{A} = \frac{-126}{35,4} = -3,56 \text{ см}.$$

Для случая, когда неизвестной является координата x_c , задача решается аналогично с учётом соответствующих изменений.

- Показываем на чертеже центральные оси всего сечения X_c и Y_c .

Причём эти оси строим параллельно вспомогательным осям, как показано на рис. 16, а.

4. Проводим проверку правильности определения центра тяжести сечения.

В основе проверки лежит положение о том, что статические моменты сечения относительно центральных осей равны нулю. Значит, в нашем случае следует вычислить статические моменты сечения относительно полученных центральных осей X_c и Y_c , при этом координаты ц. т. простых составляющих относительно этих осей:

$$x_{c1} = x_1 - x_c = 0 - 0 = 0 \text{ см}, \quad x_{c2} = x_2 - x_c = 0 - 0 = 0 \text{ см};$$

$$y_{c1} = y_1 - y_c = 0 - (-3,56) = 3,56 \text{ см},$$

$$y_{c2} = y_2 - y_c = -10,5 - (-3,56) = -6,94 \text{ см}.$$

Статические моменты сечения относительно осей X_c и Y_c :

$$S_{X_c} = {}^1S_{X_c} + {}^2S_{X_c} = y_{c1}A_1 + y_{c2}A_2 = 3,56 \cdot 23,4 + (-6,94) \cdot 12 = 83,30 - 83,28 = 0,02 \approx 0$$

$$S_{Y_c} = 0. \text{ Иными словами, координаты ц. т. всего сечения вычислены правильно.}$$

5. Определяем главные центральные моменты инерции сечения.

- *Вычисляем центробежный момент инерции всего сечения.*

Ось Y_c - центральная ось всего сечения и Y_1, Y_2 - центральные оси простых составляющих – совпадают. Оси X_1 и Y_1 - главные оси швеллера, значит центробежный момент инерции швеллера относительно них $I_{X_1Y_1} = 0$. Оси X_2 и Y_2 - главные оси прямоугольника (так как оси X_2 и Y_2 - оси симметрии прямоугольника), то есть $I_{X_2Y_2} = 0$. В этом случае центробежный момент инерции всего сечения в соответствии с формулой изменения центробежных моментов инерции при параллельном переносе осей (см. теорию):

$$I_{X_cY_c} = {}^1I_{X_cY_c} + {}^2I_{X_cY_c} = (I_{X_1Y_1} + x_{c1}y_{c1}A_1) + (I_{X_2Y_2} + x_{c2}y_{c2}A_2) = (0 + 0) + (0 + 0) = 0.$$

- *Находим главные оси всего сечения.*

Так как центробежный момент инерции сечения относительно главных осей равен нулю, то в нашем случае оси X_c и Y_c - главные оси инерции всего сечения.

- *Вычисляем главные центральные моменты инерции всего сечения.*

Поскольку главными центральными моментами инерции являются моменты инерции относительно главных центральных осей, то вычисления моментов инерции будем производить относительно осей X_c и Y_c .

Воспользовавшись формулой определения осевых моментов инерции сложного сечения и формулой перехода между параллельными осями для осевых моментов инерции (см. теорию), получим

$$I_{X_c} = {}^1I_{X_c} + {}^2I_{X_c} = (I_{X_1} + y_{c1}^2 A_1) + (I_{X_2} + y_{c2}^2 A_2) = (1520 + 3,56^2 \cdot 23,4) + \\ + (1 + (-6,94)^2 \cdot 12) = 2395,52 \text{ см}^4, \\ I_{Y_c} = {}^1I_{Y_c} + {}^2I_{Y_c} = (I_{Y_1} + x_{c1}^2 A_1) + (I_{Y_2} + x_{c2}^2 A_2) = (113 + 0^2 \cdot 23,4) + (144 + 0^2 \cdot 12) = 257 \text{ см}^4.$$

6. Определяем значения осевых моментов сопротивления.

Осевые моменты сопротивления в нашем случае вычисляются по формулам

$$W_{X_c} = I_{X_c} / y_{max}; \quad W_{Y_c} = I_{Y_c} / x_{max},$$

где x_{max} и y_{max} - расстояния от соответствующих осей до наиболее удалённых точек сечения (см. рис. 16, а).

Здесь:
$$x_{max} = \frac{b_2}{2} = 6 \text{ см};$$

$$y'_{max} = \frac{h_1}{2} + y_c = 10 + 3,56 = 13,56 \text{ см};$$

$$y''_{max} = \frac{h_1}{2} - y_c + h_2 = 10 - 3,56 + 1 = 7,44 \text{ см}.$$

Тогда: $W'_{X_c} = 2395,52 / 13,56 = 176,66 \text{ см}^3$; $W''_{X_c} = 2395,52 / 7,44 = 321,98 \text{ см}^3$;

$$W_{Y_c} = 257 / 6 = 42,83 \text{ см}^3.$$

Задача 4

Схема «а» (рис. 17)

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 4, схема «а»).

Исходные данные.

$$F = 15 \text{ кН}, \quad q = 10 \text{ кН/м}, \quad a_1 = 2 \text{ м}, \quad a_2 = 1 \text{ м}, \quad R = 200 \text{ МПа}.$$

Решение.

1. Построим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

• *Получим выражения для Q и M по участкам.* Заданная балка имеет два участка нагружения: по длине первого участка распределена равномерная нагрузка q , прекращение действия которой означает начало второго участка (см. рис. 17, а). На рис. z_1 и z_2 - координаты поперечных сечений первого и второго участков. Для каждого участка выбирается своя система координат.

$$I\text{-й участок:} \quad 0 \leq z_1 \leq a_1$$

Рассматривая равновесие левой отсечённой части балки (см. рис. 17, б), запишем выражения для $Q(z_1)$ и $M(z_1)$

$$Q(z_1) = F - q z_1. \quad (10)$$

$$M(z_1) = F z_1 - q z_1 \cdot \frac{z_1}{2}. \quad (11)$$

Выражение (10) представляет собой уравнение наклонной прямой. Для её построения достаточно вычислить поперечную силу в двух точках:

$$\text{в начале участка при } z_1 = 0, \quad Q(z_1) = F = 15 \text{ кН};$$

$$\text{в конце участка при } z_1 = a_1 = 2 \text{ м}, \quad Q(z_1) = F - q a_1 = 15 - 10 \cdot 2 = -5.$$

Отметим, что на рассматриваемом участке поперечная сила меняет знак, пересекая ось эпюры. Согласно дифференциальной зависимости между Q и M в сечении, где $Q = 0$ (см. ответ на вопрос 3 раздела б), изгибающий момент принимает экстремальное значение.

Определим координату интересующего нас сечения.

$$\text{При } z_1 = z_0 \quad Q(z_0) = F - q z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = \frac{F}{q} = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ м}$$

Эпюра изгибающих моментов M представляет квадратную параболу (выражение (11)), для её построения подсчитаем координаты M в трёх точках:

$$z_1 = 0, \quad M(z_1) = 0;$$

$$z_1 = a_1 = 2 \text{ м} \quad M(z_1) = F a_1 - \frac{q a_1^2}{2} = 15 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_1 = z_0 = 1,5 \text{ м} \quad M(z_0) = F z_0 - \frac{q z_0^2}{2} = 15 \cdot 1,5 - \frac{10 \cdot 1,5^2}{2} = 11,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

II –й участок: $0 \leq z_2 \leq a_2$

Рассматривая равновесие левой части, отсечённой сечением с координатой z_2 (см. рис. 17, в), запишем выражения для $Q(z_2)$ и $M(z_2)$.

$$Q(z_2) = F - q a_1 = 15 - 10 \cdot 2 = -5 \text{ кН} = \text{const}.$$

Полученное выражение представляет собой уравнение прямой, параллельной оси эпюры.

$$M(z_2) = F(a_1 + z_2) - q a_1(0,5 a_1 + z_2).$$

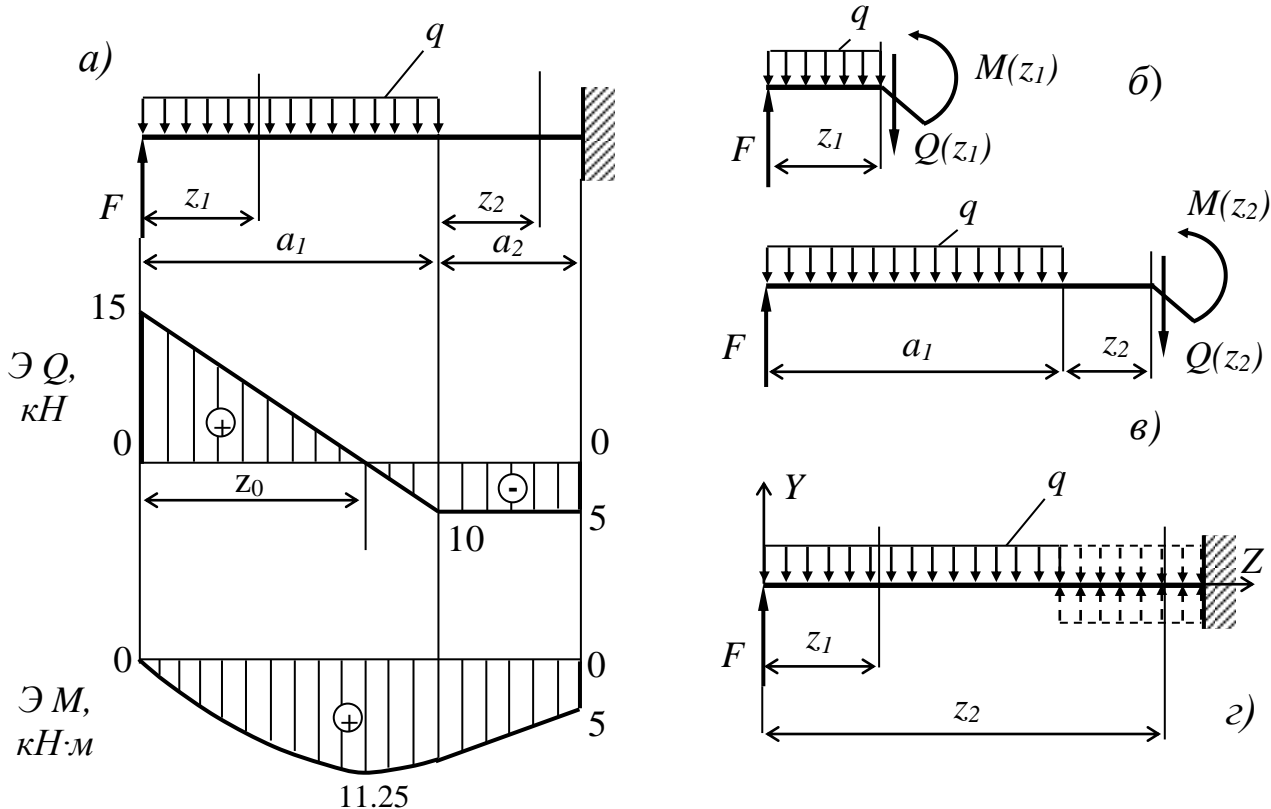


Рис. 17

В данном случае мы получили уравнение прямой, наклонной к оси эпюры. Для её построения определим координаты двух крайних точек.

$$z_2 = 0, \quad M(z_2) = F a_1 - 0,5 q a_1^2 = 15 \cdot 2 - 0,5 \cdot 10 \cdot 2^2 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = a_2 = 1 \text{ м}, \quad M(z_2) = F(a_1 + a_2) - q a_1(0,5 a_1 + a_2) = 15(2 + 1) - 10 \cdot 2(0,5 \cdot 2 + 1) = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

- Строим эпюры Q и M . Результат представлен на рис. 17, а.

2. Проверка прочности балки проводится по поперечному сечению, рассмотренному в задаче 3, где изгибающий момент на эпюре достигает наибольшего значения независимо от знака.

Для этого следует воспользоваться формулой:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{11,25 \cdot 10^3}{176,66 \cdot 10^{-6}} = 0,06368 \cdot 10^9 \text{ Па} = 63,68 \text{ МПа} < R = 200 \text{ МПа},$$

следовательно, прочность обеспечена.

3. Определяем коэффициент использования прочности стали

$$\Delta = \frac{\sigma_{max}}{R} \cdot 100 \% = \frac{63,68}{200} \cdot 100 \% = 31,84 \%$$

Коэффициент использования прочности составляет около 32%. В хорошо подобранных сечениях перенапряжение или недонапряжение не превышает $\pm 5\%$.

4. Определяем прогиб конца консоли аналитическим методом

- Составляем приближённые дифференциальные уравнения изогнутой оси балки по участкам с соблюдением условий Клебша (см. ответ на вопрос 11 раздела б).

Необходимо отметить, что в этом случае выбирается только одна система координат с началом в крайней левой точке балки (см. рис. 17, з). Если в этой точке балка жёстко или шарнирно зафиксирована, то прежде чем приступить к составлению уравнений, необходимо определить реакции в опорах.

Для нашего случая:

$$\text{I-й участок: } 0 \leq z_1 \leq a_1, \quad EI_X y''(z_1) = F z_1 - \frac{q z_1^2}{2};$$

$$\text{II-й участок: } a_1 \leq z_2 \leq (a_1 + a_2), \quad EI_X y''(z_2) = F z_2 - \frac{q z_2^2}{2} + \frac{q(z_2 - a_1)^2}{2}.$$

- Дважды интегрируем дифференциальные уравнения

$$\text{I-й участок: } \begin{cases} EI_X y'(z_1) = F z_1^2 / 2 - q z_1^3 / 6 + C_1 & (12) \\ EI_X y(z_1) = F z_1^3 / 6 - q z_1^4 / 24 + C_1 z_1 + D_1. & (13) \end{cases}$$

$$\text{II-й участок: } \begin{cases} EI_X y'(z_2) = F z_2^2 / 2 - q z_2^3 / 6 + q(z_2 - a_1)^3 / 6 + C_2 & (14) \\ EI_X y(z_2) = F z_2^3 / 6 - q z_2^4 / 24 + q(z_2 - a_1)^4 / 24 + C_2 z_2 + D_2. & (15) \end{cases}$$

- Рассматриваем граничные условия и доказываем равенство постоянных интегрирования на обоих участках

При $z_1 = z_2 = a_1$ (на границе двух смежных участков балки) $y'_1 = y'_2$, $y_1 = y_2$, так как они являются углами поворота и прогибами, соответственно, одного и того же сечения.

Тогда, учитывая формулы (12) и (14), получим:

$$\frac{Fa_1^2}{2} - \frac{qa_1^3}{6} + C_1 = \frac{Fa_1^2}{2} - \frac{qa_1^3}{6} + \frac{q(a_1 - a_1)^3}{6} + C_2, \text{ откуда } C_1 = C_2 = C.$$

Приравнивая прогибы, из выражений (13) и (15) имеем:

$$\frac{Fa_1^3}{6} - \frac{qa_1^4}{24} + Ca_1 + D_1 = \frac{Fa_1^3}{6} - \frac{qa_1^4}{24} + \frac{q(a_1 - a_1)^4}{24} + Ca_1 + D_2, \text{ откуда } D_1 = D_2 = D.$$

Следовательно, приём Клебша сводит решение задачи к вычислению только двух постоянных интегрирования C, D .

- Из начальных условий определяем значения постоянных интегрирования C и D

Первое условие: при $z_2 = a_1 + a_2 = 3\text{ м}$, $y'(z_2) = 0$, в защемленном конце балки угол поворота равен нулю. Тогда, согласно уравнению (14):

$$EI_X y'_{(z_2=3)} = 15 \cdot 3^2 / 2 - 10 \cdot 3^3 / 6 + 10 \cdot (3 - 2)^3 / 6 + C = 0.$$

Откуда $C = -24,2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$

Второе условие: при $z_2 = a_1 + a_2 = 3\text{ м}$, $y(z_2) = 0$, так как в заделке балки прогиб равен нулю. Из выражения (15) найдем вторую постоянную интегрирования

$$EI_X y_{(z_2=3)} = 15 \cdot 3^3 / 6 - 10 \cdot 3^4 / 24 + 10 \cdot (3 - 2)^4 / 24 + C \cdot 3 + D = 0.$$

Откуда $D = 33,4 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$

- Вычисляем прогиб конца консоли

Для этого воспользуемся формулой (13), при $z_1 = 0$:

$$y(z_1) = D / EI_X = \frac{38,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2395,52 \cdot 10^{-8}} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8 \text{ мм}.$$

Согласно принятому направлению координатных осей (см. рис. 17, з), при решении задачи аналитическим методом знак «+» указывает на то, что прогиб конца консоли балки направлен вверх.

Задача 4

Схема «б» (рис. 18)

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 4, схема «б»).

Исходные данные.

$$M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad q = 16 \text{ кН/м}, \quad a_1 = 1 \text{ м}, \quad a_2 = 2 \text{ м}, \quad R = 160 \text{ МПа}.$$

Решение.

1. Построим эпюры Q и M .

• Определяем опорные реакции балки. Заданная балка зафиксирована в двух сечениях с помощью шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной опор (см. рис. 18). Характер прикладываемой нагрузки обуславливает необходимость определения только вертикальных реакций опор R_A и R_B , так как горизонтальная составляющая реакции в опоре A равна нулю ($H_A = 0$).

$$\sum M_A = 0, \quad R_B a_2 - q a_2 \frac{a_2}{2} - M = 0 \Rightarrow R_B = \frac{0,5 \cdot q a_2^2 + M}{a_2} = \frac{0,5 \cdot 16 \cdot 2^2 + 20}{2} = 26 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A a_2 - M + q a_2 \frac{a_2}{2} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{0,5 \cdot q a_2^2 - M}{a_2} = \frac{0,5 \cdot 16 \cdot 2^2 - 20}{2} = 6 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - q a_2; \quad 6 + 26 - 32 = 0; \quad 0 \equiv 0.$

Полученное тождество свидетельствует о правильности результатов.

• Записываем уравнения для Q и M по участкам. Для каждого участка выбирается своя система координат

I -й участок: $0 \leq z_1 \leq a_1$

Рассматриваем равновесие левой части балки

$$Q(z_1) = 0, \quad M(z_1) = M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м} = \text{const}.$$

II -й участок: $0 \leq z_2 \leq a_2$

Рассматриваем равновесие правой части балки

$$Q(z_2) = -R_B + q z_2.$$

$$z_2 = 0, \quad Q(z_2) = -R_B = -26 \text{ кН}; \quad z_2 = a_2, \quad Q(z_2) = -R_B + q a_2 = -26 + 32 = 6 \text{ кН}.$$

$$M(z_2) = R_B \cdot z_2 - 0,5 \cdot q z_2^2.$$

$$z_2 = 0, \quad M(z_2) = 0;$$

$$z_2 = a_2 = 2 \text{ м}, \quad M(z_2) = R_B \cdot a_2 - 0,5 \cdot q a_2^2 = 26 \cdot 2 - 0,5 \cdot 16 \cdot 2^2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\text{При } z_2 = z_0 \quad Q(z_0) = -R_B + qz_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{R_B}{q} = \frac{26}{16} = 1,625 \text{ м,}$$

$$\text{тогда } M(z_0) = R_B z_0 - \frac{qz_0^2}{2} = 26 \cdot 1,625 - \frac{16 \cdot 1,625^2}{2} = 21,125 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

- Строим эюры Q и M . Результат представлен на рис. 18.

2. Подбор сечений указанных в задании форм.

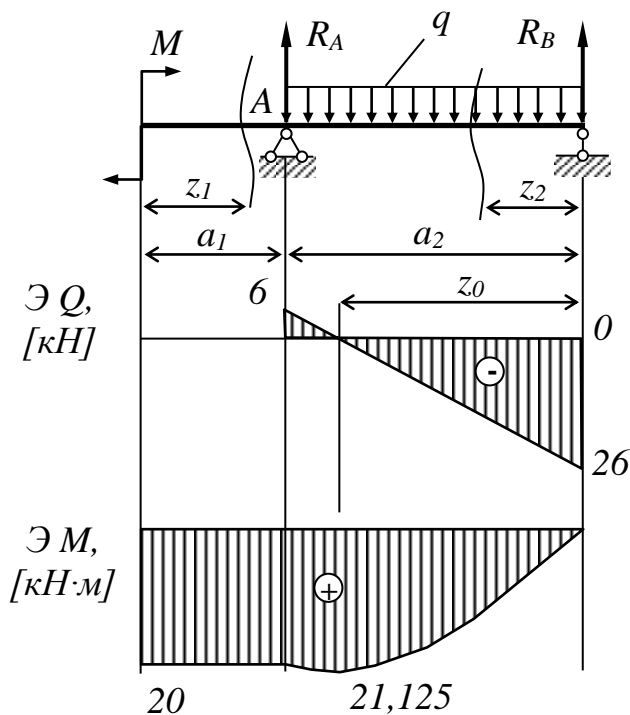


Рис. 18

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям для пластичных материалов:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_X} \leq R$$

Отсюда требуемый момент сопротивления

$$W_X^{mp} \geq \frac{|M_{max}|}{R}$$

При $M_{max} = 21,125 \text{ кН} \cdot \text{м}$, предельное значение момента сопротивления:

$$W_X = \frac{21,125 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,132 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 132 \text{ см}^3.$$

- Подбираем прямоугольное сечение. Соотношение сторон $h/b = 2$ (рис. 19).

Так как для прямоугольного сечения момент сопротивления относительно оси X (см. рис. 19) $W_X = bh^2/6$ и по условию $b = h/2$, то:

$$h = \sqrt[3]{12W_X} = \sqrt[3]{12 \cdot 0,132 \cdot 10^{-3}} = 0,1166 \text{ м} = 11,66 \text{ см,}$$

$$b = h/2 = 11,66/2 = 5,83 \text{ см,}$$

$$A^{np} = h \cdot b = 0,1166 \cdot 0,0583 = 67,98 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

- Подбираем круглое сечение.

Для круглого сечения осевой момент сопротивления (рис. 20) $W_X = \pi \cdot D^3/32$; тогда

$$D = \sqrt[3]{32W_X/\pi} = \sqrt[3]{32 \cdot 0,132 \cdot 10^{-3}/\pi} = 0,1104 \text{ м} = 11 \text{ см;}$$

$$A^{kp} = \pi \cdot D^2/4 = \pi \cdot 0,1104^2/4 = 0,0096 \text{ м}^2.$$

• Подбираем кольцевое сечение. Отношение диаметров $\alpha = d/D = 0,8$ (рис. 21).

Для кольцевого сечения осевой момент сопротивления $W_X = \pi \cdot D^3 / 32 \cdot (1 - \alpha^4)$. Тогда

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W_X}{\pi(1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,132 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (1-0,8^4)}} = 0,1316 \text{ м} = 13,16 \text{ см};$$

$$d = D \cdot 0,8 = 0,1316 \cdot 0,8 = 0,1053 \text{ м} = 10,53 \text{ см};$$

$$A^{ки} = \pi \cdot D^2 \cdot (1 - \alpha^2) / 4 = \pi \cdot 0,1316^2 \cdot (1 - 0,8^2) / 4 = 48,97 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

• Подбираем сечение, состоящее из двух швеллеров.

В основе определения осевого момента сопротивления лежит соотношение

$$W_X = I_X / y_{max}$$

(см. решение задачи 3, пункт VI).

С учётом того, что рассматриваемое сечение состоит из двух равных частей (рис. 22)

$$W_X = \frac{I_X^{шв1} + I_X^{шв2}}{y_{max}} = \frac{2 \cdot I_X^{шв}}{y_{max}} = 2 \cdot \frac{I_X^{шв}}{y_{max}} = 2 \cdot W_X^{шв}.$$

Требуемый момент сопротивления одного швеллера

$$W_X^{шв} = 0,066 \text{ м}^3 = 66 \text{ см}^3.$$

По таблице ГОСТ 8240-89 выбираем швеллер № 14 с ближайшим большим моментом сопротивления ${}^{ГОСТ}W_X^{шв} = 70,2 \text{ см}^3$. Площадь сечения балки из двух швеллеров:

$$A = 2 \cdot {}^{ГОСТ}A^{шв} = 2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4} = 31,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 31,2 \text{ см}^2$$

• Подбираем двутавровое сечение.

Как и в предыдущих четырех случаях, момент сопротивления двутавра W_X (рис. 23) должен быть не менее требуемого

$$W_X = \frac{21,125 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,132 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 132 \text{ см}^3.$$

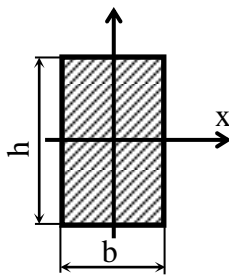


Рис. 19

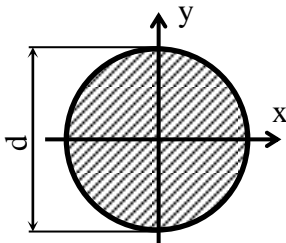


Рис. 20

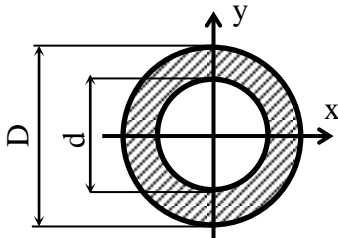


Рис. 21

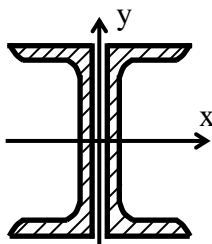


Рис. 22

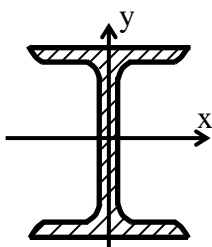


Рис. 23

По таблице ГОСТ 8239-89 принимаем двутавровую балку № 18 с ближайшим значением момента сопротивления, значение которого отвечает условию проектировочной задачи:

$${}_{ГОСТ}W_X^{\partial\delta} = 143 \text{ см}^3; \quad {}_{ГОСТ}A^{\partial\delta} = 23,4 \text{ см}^2.$$

3. Оцениваем эффективность формы сечения.

Для чего сравниваем площади всех подобранных сечений.

$$\frac{A^{np}}{A^{\partial\delta}} = \frac{67,98}{23,40} = 2,91; \quad \frac{A^{кр}}{A^{\partial\delta}} = \frac{96,00}{23,40} = 4,10;$$

$$\frac{A^{ки}}{A^{\partial\delta}} = \frac{48,97}{23,40} = 2,09; \quad \frac{A^{ш\delta}}{A^{\partial\delta}} = \frac{31,20}{23,40} = 1,33.$$

Наиболее эффективной формой сечения балки (балка с наименьшим весом) является двутавровое сечение, наименее эффективной – круглое сплошное сечение.

Задача 5 (рис. 24)

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 5).

Исходные данные.

$F = 15 \text{ кН}$, $q = 10 \text{ кН/м}$, $a_1 = 1 \text{ м}$, $a_2 = 2 \text{ м}$, жесткость балки (EI_X) - постоянная.

Решение.

Определение вертикального перемещения сечения «В» выполняется в следующей последовательности:

- Строим эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки, то есть грузовую эпюру (рис. 24, б).
- Рассматриваем единичное состояние системы: к заданной конструкции в требуемом направлении прикладываем единичную безразмерную силу в том сечении, линейное перемещение которого требуется определить (рис. 24, в).
- Строим единичную эпюру, то есть эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки (рис. 24, г).
- Приводим в соответствие участки грузовой и единичной эпюр: каждому участку грузовой эпюры должен соответствовать участок единичной эпюры, ограниченный прямой (не ломаной) линией.

В примере вдоль всей длины балки единичная эпюра ограничена прямой, однако её следует разбить на два участка, так как грузовая эпюра состоит из двух участков, площади которых ω_1 и ω_2 (см. рис. 24, б).

- Определяем площади отдельных участков грузовой эпюры и соответствующие им абсциссы центров тяжести.

Так как участки грузовой эпюры представляют собой фигуры, площади и центры тяжести которых определить затруднительно, разобьём их на более простые составляющие с площадями ω'_1 , ω''_1 , ω'_2 , ω''_2 (см. рис. 20, б).

$$\omega'_1 = 0,5 \cdot 5 \cdot a_1 = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad z'_{c1} = \frac{1}{3} a_1;$$

$$\omega''_1 = 5 \cdot a_1 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad z''_{c1} = 0,5 a_1;$$

$$\omega'_2 = \frac{q a_2^3}{12} = \frac{10 \cdot 8}{12} = 6,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 \text{ (1/1, стр.442);}$$

$$z'_{c2} = 0,5 a_2;$$

$$\omega''_2 = 0,5 \cdot 10 \cdot a_2 = 0,5 \cdot 10 \cdot 2 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$z''_{c2} = \frac{2}{3} a_2.$$

• Определяем ординаты на единичной эпюре под центрами тяжести простых составляющих отдельных участков грузовой эпюры. Для определения ординат используем подобие треугольников, у которых отношения катетов равны (см. рис. 20, з).

$$\frac{2}{y'_2} = \frac{a_2}{z'_{c2}} \Rightarrow y'_2 = \frac{2 \cdot z'_{c2}}{a_2} = \frac{2 \cdot 0,5 a_2}{a_2} = 1 \text{ м};$$

$$\frac{2}{y''_2} = \frac{a_2}{z''_{c2}} \Rightarrow y''_2 = \frac{2 \cdot z''_{c2}}{a_2} = \frac{2 \cdot (2/3) a_2}{a_2} = \frac{4}{3} \text{ м}.$$

Аналогично:

$$y'_1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ м}, \quad y''_1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ м}.$$

• Записываем формулу Верещагина для рассматриваемой задачи. При этом учитываем: если грузовая и единичная эпюры на участке имеют одинаковый знак, то произведение $\omega \cdot y$ положительно, если разный знак – отрицательно.

Если общий вид формулы Верещагина:

гина: $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i y_i}{(EI_X)_i}$, то для рассматриваемой задачи она принимает вид:

$$\Delta_B = \frac{1}{EI_X} (\omega'_1 \cdot y'_1 + \omega''_1 \cdot y''_1 + \omega'_2 \cdot y'_2 + \omega''_2 \cdot y''_2) = \frac{1}{EI_X} \left(2,5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 6,67 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{4}{3} \right),$$

$$\Delta_B = \frac{38,03}{EI_X}.$$

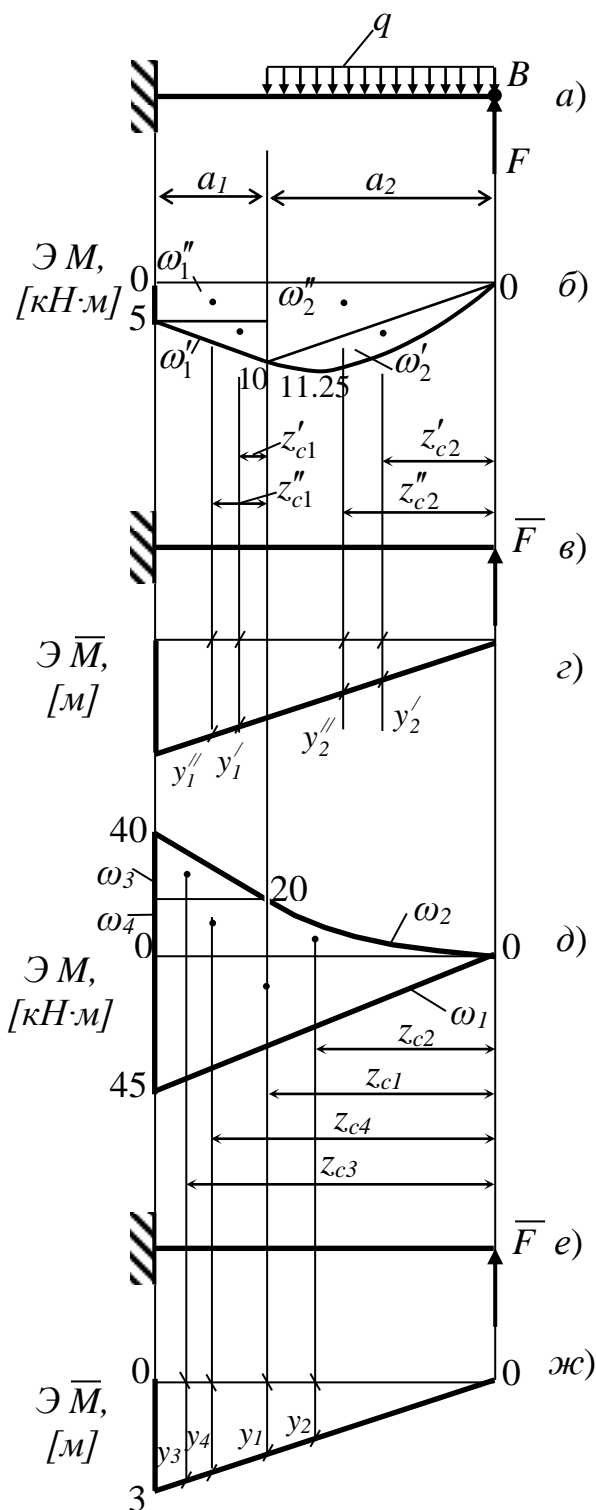


Рис. 24

Положительное значение Δ_B указывает, что перемещение конца консоли направлено в сторону действия единичной нагрузки \bar{F} .

- Можно воспользоваться иным подходом для решения поставленной задачи. Ввиду того, что грузовая эпюра изгибающих моментов имеет сложные очертания, её можно «расслоить», то есть построить эпюру моментов от каждой нагрузки в отдельности (рис. 24, д).

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} 45 \cdot 3 = 67,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; & z_{c1} &= \frac{2}{3} (a_1 + a_2) = \frac{2}{3} 3 = 2 \text{ м}; & y_1 &= \frac{2}{3} 3 = 2 \text{ м}; \\ \omega_2 &= \frac{1}{3} 20 \cdot 2 = 13,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; & z_{c2} &= \frac{3}{4} a_2 = \frac{3}{4} 2 = 1,5 \text{ м}; & y_2 &= \frac{3}{4} 2 = \frac{3}{2} \text{ м}; \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} (40 - 20) \cdot 1 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; & z_{c3} &= a_2 + \frac{2}{3} a_1 = 2 + \frac{2}{3} 1 = 2,7 \text{ м}; & y_3 &= 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \text{ м}; \\ \omega_4 &= 20 \cdot 1 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; & z_{c4} &= a_2 + \frac{1}{2} a_1 = 2 + 0,5 = 2,5 \text{ м}; & y_4 &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ м}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{1}{EI_x} (\omega_1 \cdot y_1 - \omega_2 \cdot y_2 - \omega_3 \cdot y_3 - \omega_4 \cdot y_4) = \\ &= \frac{1}{EI_x} (67,5 \cdot 2 - 13,33 \cdot 1,5 - 10 \cdot 2,7 - 20 \cdot 2,5) = \frac{38,34}{EI_x} \end{aligned}$$

Полученный результат отличается от предыдущего на 0,8%, что лежит в пределах допустимой погрешности. При решении можно воспользоваться любым удобным для студента подходом.

Задача 6

Условия задачи см. в практической части задания.

Исходные данные. Короткая колонна, поперечное сечение которой изображено на рис. 25, сжимается продольной силой $F=200 \text{ кН}$, приложенной в точке K . Размеры сечения $a=40 \text{ см}$, $b=16 \text{ см}$.

Решение.

1. Определение координат центра тяжести сечения.

Поперечное сечение колонны имеет ось симметрии X_c , следовательно центр тяжести лежит на этой оси и для отыскания координаты x_c относительно вспомогательной оси Y_0 (см. рис. 25) сложное сечение разбиваем на три прямоугольника

$$x_c = \frac{\sum S_{y_0}}{\sum A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{80 \cdot 16 \cdot 80 + 80 \cdot 32 \cdot 40 + 80 \cdot 16 \cdot 80}{80 \cdot 16 + 80 \cdot 32 + 80 \cdot 16} = 60 \text{ см}$$

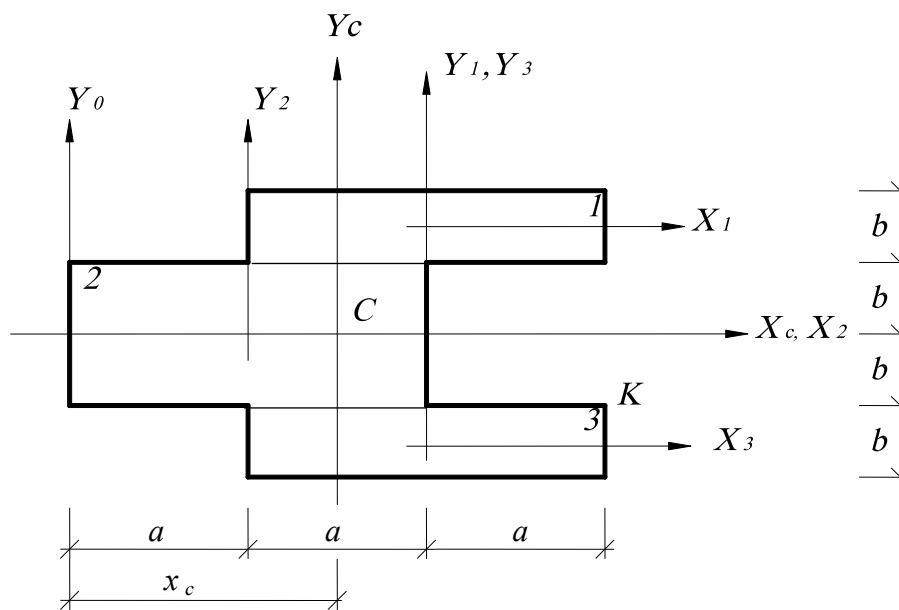


Рис. 25

2. Геометрические характеристики сечения.

Для вычисления главных центральных моментов инерции воспользуемся зависимостью между моментами инерции при параллельном переносе осей. (подробнее см. задачу 3).

$$I_{x_c} = \sum (I_{x_i} + y_{c_i}^2 A_i) = \left(\frac{80 \cdot 16^3}{12} + 24^2 \cdot 80 \cdot 16 \right) \cdot 2 + \frac{80 \cdot 32^3}{12} = 1747626 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c} = \sum (I_{y_i} + x_{c_i}^2 \cdot A_i) = \left(\frac{16 \cdot 80^3}{12} + 20^2 \cdot 16 \cdot 80 \right) \cdot 2 + \left(\frac{32 \cdot 80^3}{12} + 20^2 \cdot 32 \cdot 80 \right) = 4778667 \text{ см}^4.$$

Определяем квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_{xc}}{A} = \frac{1747626}{5120} = 341,3 \text{ см}^2$$

$$i_y^2 = \frac{I_{yc}}{A} = \frac{4778667}{5120} = 933,3 \text{ см}^2$$

Координаты точки приложения силы F

$$x_f = 60 \text{ см}, \quad y_f = -16 \text{ см}$$

3. Положение нулевой линии

$$x_o = -\frac{i_y^2}{x_f} = -\frac{933,3}{60} = -15,55 \text{ см}$$

$$y_o = -\frac{i_x^2}{y_f} = -\frac{341,3}{-16} = 21,33 \text{ см}$$

По найденным отрезкам, отсекаемым на осях координат, проводим нулевую линию (рис. 26).

4. *Определение наибольших сжимающих и растягивающих напряжений.*
Эпюра σ .

Наиболее удаленные от нулевой линии точки: $B (-60; 16)$ и $D (60; -32)$. Напряжения в этих опасных точках с координатами x_{dan}, y_{dan} не должны превосходить соответствующего расчетного сопротивления

$$\sigma = -\frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_f \cdot y_{dan}}{i_x^2} + \frac{x_f \cdot x_{dan}}{i_y^2} \right) \leq R.$$

Растягивающее напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\frac{200 \cdot 10^3}{0,512} \left(1 + \frac{(-16) \cdot 10^{-2} \cdot 16 \cdot 10^{-2}}{341,3 \cdot 10^{-4}} + \frac{60 \cdot 10^{-2} \cdot (-60) \cdot 10^{-2}}{933,3 \cdot 10^{-4}} \right) = \\ &= 1,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,4 \text{ МПа} < R_t = 3 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Сжимающее напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_D &= -\frac{200 \cdot 10^3}{0,512} \left(1 + \frac{(-16) \cdot 10^{-2} \cdot (-32) \cdot 10^{-2}}{341,3 \cdot 10^{-4}} + \frac{60 \cdot 10^{-2} \cdot 60 \cdot 10^{-2}}{933,3 \cdot 10^{-4}} \right) = \\ &= -2,48 \text{ МПа} < R_c = 30 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Прочность колонны обеспечена.

По результатам расчета напряжений σ_B и σ_D на рис. 26 построена эпюра σ

5. Вычисление расчетной несущей способности колонны F_{max} .

Поскольку при заданном значении сжимающей силы прочность материала колонны существенно недоиспользована, найдем максимальное значение внешней нагрузки, приравнявая наибольшие напряжения σ_t и σ_c расчётным сопротивлениям.

$$F_{max} \leq \frac{R_t \cdot A}{1 + \frac{y_f \cdot y_B}{i_x^2} + \frac{x_f \cdot x_B}{i_y^2}} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 0,512}{3,607} = 425,8 \text{ кН}$$

$$F_{max} \leq \frac{R_c \cdot A}{1 + \frac{y_f \cdot y_D}{i_x^2} + \frac{x_f \cdot x_D}{i_y^2}} = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 0,512}{6,357} = 2416 \text{ кН}$$

Окончательно выбираем меньше значение $F_{max}=425,8 \text{ кН}$, обеспечивающее прочность как растянутой, так и сжатой зон сечения.

6. Построение ядра сечения.

Чтобы получить очертание ядра сечения, необходимо рассмотреть все возможные положения касательных к контуру сечения и, предполагая, что эти касательные являются нулевыми линиями, вычислить координаты граничных точек ядра относительно главных центральных осей сечения. Соединяя затем эти точки, получим очертание ядра сечения.

Касательная 1-1: $y_o = 32 \text{ см}$,

$$y_f = -\frac{i_x^2}{y_o} = -\frac{341,3}{32} = -10,66 \text{ см}.$$

Касательная 2-2: $x_o = 60 \text{ см}$, $x_f = -\frac{i_y^2}{x_o} = -\frac{933,3}{60} = -15,55 \text{ см}.$

Касательная 3-3: $y_o = -32 \text{ см}$, $y_f = -\frac{341,3}{(-32)} = 10,66 \text{ см}.$

Касательная 4-4: $\text{tg}\alpha = \frac{16}{40} = 0,4$; $\alpha = 22^\circ$;

$$c = \frac{b}{\text{tg}\alpha} = \frac{16}{0,4} = 40 \text{ см}; \quad x_o = c + x_c = -40 - 60 = -100 \text{ см};$$

$$d = 20 \cdot \text{tg}\alpha = 20 \cdot 0,4 = 8 \text{ см}; \quad y_o = -32 - 8 = -40 \text{ см};$$

$$x_f = -\frac{933,3}{(-100)} = 9,33 \text{ см};$$

$$y_f = -\frac{341,1}{(-40)} = 8,53 \text{ см.}$$

Касательная 5-5: $x_o = -60 \text{ см}; x_f = -\frac{933,3}{(-60)} = 15,55 \text{ см.}$

Касательная 6-6: $x_o = -100 \text{ см}; x_f = 9,33 = 15,55 \text{ см};$
 $y_o = 40 \text{ см}; y_f = -8,53 \text{ см.}$

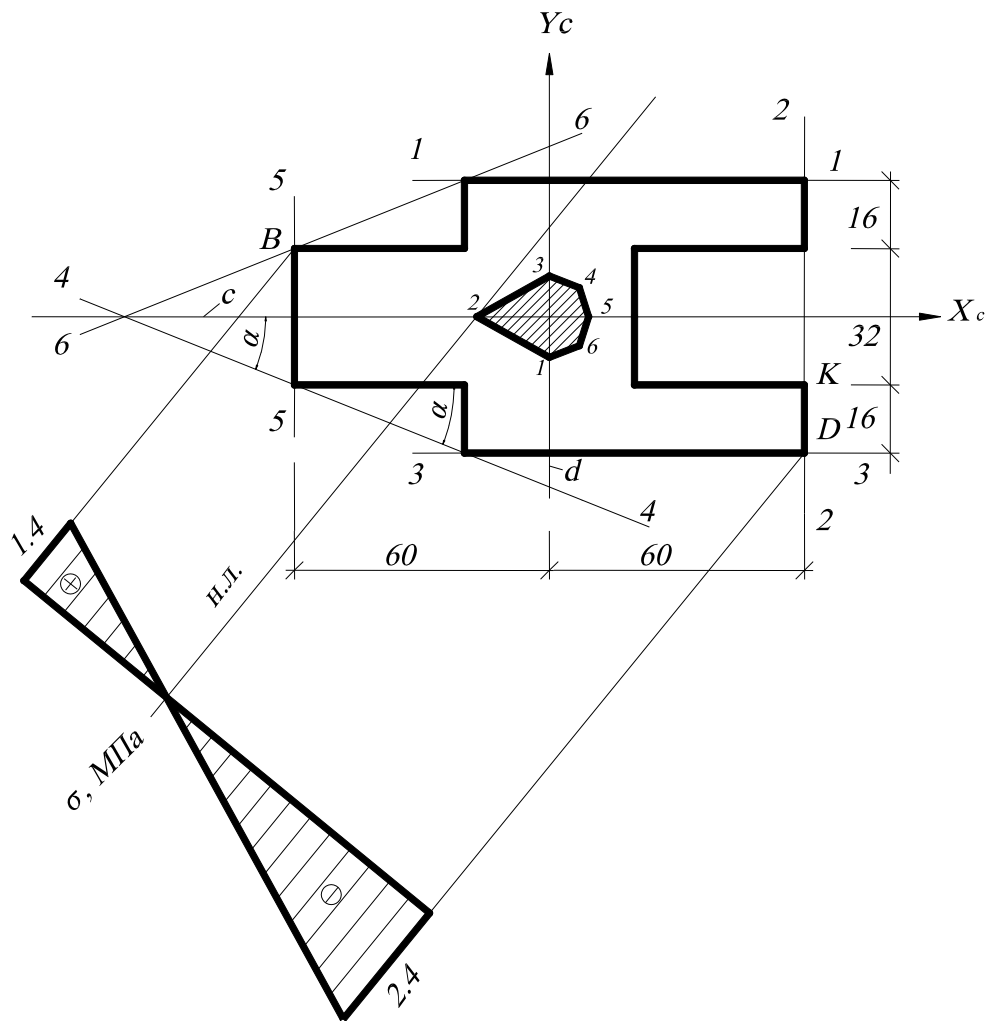
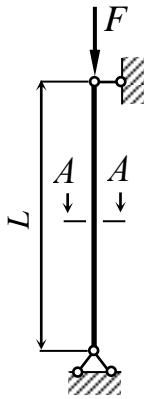


Рис. 26

Задача 7 (рис. 27)

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 7).

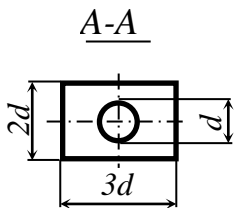


Исходные данные.

$F = 400 \text{ кН}$, $L = 3 \text{ м}$, $R = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 1$
 (μ – коэффициент приведенной длины стержня, зависящий от характера закрепления его концов).

Решение.

1. Размеры поперечного сечения стержня определим исходя из условия устойчивости



тогда

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi R, \quad (16)$$

$$A = \frac{F}{\varphi R},$$

где φ – коэффициент снижения расчетного сопротивления материала при продольном изгибе.

Рис. 27

В расчётной формуле (16) имеются две неизвестные величины – коэффициент φ и искомая площадь A . Поэтому при подборе сечения необходимо использовать метод последовательных приближений.

- Для упрощения расчётов выразим геометрические характеристики сечения через модуль его размеров d .

Минимальный момент инерции (потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жёсткости) определяется следующим образом:

$$I_{min} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3d(2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 1,95d^4.$$

Площадь поперечного сечения:

$$A = 2d \cdot 2d - \frac{\pi d^2}{4} = 5,21d^2,$$

отсюда

$$d = 0,44\sqrt{A}. \quad (17)$$

Минимальный радиус инерции:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{1,95d^4}{5,21d^2}} = 0,61d$$

$$i_{min} = 0,61d \quad (18)$$

• *Приближение 1.* В первом приближении коэффициент продольного изгиба обычно принимают $\varphi_1 = 0,5$, тогда

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,005 \text{ м}^2.$$

Используя соотношения (17) и (18), получим:

$$d_1 = 0,44 \sqrt{0,005} = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,1 \text{ см},$$

$$i_{\min 1} = 0,61 d_1 = 0,61 \cdot 3,1 \cdot 10^{-2} = 1,89 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Расчётная гибкость колонны:

$$\lambda_1 = \frac{\mu L}{i_{\min 1}} = \frac{1 \cdot 3}{1,89 \cdot 10^{-2}} = 159.$$

По таблице (/1/, табл. 13.1, с. 493) определяем значение коэффициента φ'_1 , соответствующего гибкости $\lambda_1 = 159$.

$$\lambda = 150 \rightarrow \varphi = 0,32;$$

$$\lambda = 160 \rightarrow \varphi = 0,29.$$

Путём линейной интерполяции:

$$\varphi'_1 = 0,32 - \frac{0,32 - 0,29}{10} \cdot 9 = 0,293.$$

Проверим выполнение условия устойчивости в первом приближении.

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,005} = 80000 \cdot 10^3 \text{ Па} = 80 \text{ МПа} > \varphi'_1 R = 0,293 \cdot 160 = 46,88 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет:

$$\Delta \sigma_1 = \frac{\sigma_1 - \varphi'_1 R}{\varphi'_1 R} \cdot 100\% = \frac{80 - 46,88}{46,88} \cdot 100\% = 70,65\%,$$

что недопустимо. Следовательно, необходимо уточнение требуемых размеров сечения.

Приближение 2. Для ускорения процесса подбора за новое значение коэффициента φ'_2 принимаем среднее арифметическое первых двух

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,293}{2} = 0,396.$$

Тогда площадь сечения:

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,396 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,0063 \text{ м}^2.$$

Диаметр: $d_2 = 0,44\sqrt{0,0063} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,5 \text{ см},$

радиус инерции: $i_{\min 2} = 0,61d_2 = 0,61 \cdot 3,5 \cdot 10^{-2} = 2,135 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$

Гибкость колонны:

$$\lambda_2 = \frac{\mu L}{i_{\min 2}} = \frac{1 \cdot 3}{2,135 \cdot 10^{-2}} = 140,5.$$

Определяем значение коэффициента φ'_2 , соответствующего этой гибкости:

$$\lambda = 140 \rightarrow \varphi = 0,36;$$

$$\lambda = 150 \rightarrow \varphi = 0,32;$$

$$\varphi'_2 = 0,36 - \frac{0,36 - 0,32}{10} \cdot 0,5 = 0,358.$$

Проверим выполнение условия устойчивости. Рабочие напряжения

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,0063} = 63492 \cdot 10^3 \text{ Па} = 63,492 \text{ МПа}.$$

Расчётное сопротивление, гарантирующее устойчивость прямолинейной формы равновесия

$$\varphi'_2 R = 0,358 \cdot 160 = 57,28 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 > \varphi'_2 R \quad (63,492 \text{ МПа} > 57,28 \text{ МПа}).$$

В этом случае перенапряжение составляет:

$$\Delta\sigma_2 = \frac{\sigma_2 - \varphi'_2 R}{\varphi'_2 R} \cdot 100\% = \frac{63,492 - 57,28}{57,28} \cdot 100\% = 10,84\%,$$

что опять недопустимо, так как перенапряжение превышает 5%. Следовательно, необходимо третье приближение.

• *Приближение 3.* В третьем приближении коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,396 + 0,358}{2} = 0,377,$$

после чего повторяем расчётный цикл.

Площадь сечения:

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,377 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,0066 \text{ м}^2.$$

Диаметр: $d_3 = 0,44\sqrt{0,0066} = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,6 \text{ см};$

радиус инерции: $i_{min3} = 0,61d_3 = 0,61 \cdot 3,6 \cdot 10^{-2} = 2,196 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$

Гибкость колонны:

$$\lambda_3 = \frac{\mu L}{i_{min3}} = \frac{1 \cdot 3}{2,196 \cdot 10^{-2}} = 136,6.$$

Определяем значение коэффициента φ'_3 , соответствующего этой гибкости:

$$\lambda = 130 \rightarrow \varphi = 0,40;$$

$$\lambda = 140 \rightarrow \varphi = 0,36;$$

$$\varphi'_3 = 0,40 - \frac{0,40 - 0,36}{10} \cdot 6,6 = 0,374.$$

Рабочие напряжения третьего приближения:

$$\sigma_3 = \frac{F}{A_3} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,0066} = 60606 \cdot 10^3 \text{ Па} = 60,606 \text{ МПа}.$$

Расчётное сопротивление при расчёте на устойчивость

$$\varphi'_3 R = 0,374 \cdot 160 = 59,84 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_3 > \varphi'_3 R \quad (60,606 \text{ МПа} > 59,84 \text{ МПа}).$$

Перенапряжение материала составляет:

$$\Delta\sigma_3 = \frac{\sigma_3 - \varphi'_3 R}{\varphi'_3 R} \cdot 100\% = \frac{60,606 - 59,84}{59,84} \cdot 100\% = 1,28\% < 5\%.$$

что допустимо. Окончательно принимаем:

$$d = 0,036 \text{ м} = 36 \text{ мм}$$

следовательно, сечение имеет размеры $72 \times 108 \text{ см}$,

$$I_{min} = 1,95d^4 = 1,95 \cdot 3,6^4 = 327,5 \text{ см}^4,$$

$$\lambda = 136,6.$$

2. Находим величину критической силы.

Так как $\lambda > \lambda_{пред}$, то есть $136,6 > 100$, то используем формулу Эйлера для определения критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 327,5 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 3)^2} = 718,29 \cdot 10^3 \text{ Н} = 718,29 \text{ кН}.$$

3. Коэффициент запаса устойчивости.

$$k_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{718,29}{400} = 1,8.$$