

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2. Плоское напряженное состояние. Кручение.

Задача № 2.1. Исследование плоского напряженного состояния по заданным напряжениям на произвольных площадках. Проверка прочности.

Задача № 2.2. Подбор сечения составного стержня (вала), работающего на кручение.

Задача № 2.1. Исследование плоского напряженного состояния по заданным напряжениям на произвольных площадках. Проверка прочности.

Задание: Исходные данные к задаче выбираются по табл. 2.1 и схемам на рис. 2.1.

1. Найдите нормальное, касательное и полное напряжения на наклонной площадке.

2. Найдите величины главных напряжений и угол наклона главных площадок к заданным площадкам. Покажите главные площадки с действующими на них напряжениями на рисунке.

3. Определите величины наибольших касательных напряжений: наибольшего касательного напряжения для заданного плоского напряженного состояния ($\max \tau$) и максимального касательного напряжения для заданного элементарного параллелепипеда (т. е. полученного при исследовании объемного напряженного состояния – τ_{\max}). Покажите на рисунке площадки, на которых действуют эти напряжения ($\max \tau$ и τ_{\max}). Найдите нормальные напряжения на этих площадках.

4. Проверьте прочность материала заданного элементарного параллелепипеда. Найдите действительный коэффициент запаса прочности. Покажите на рисунке опасные площадки.

5. Найдите величины относительных продольных деформаций по главным направлениям и относительную объемную деформацию. Покажите деформации на рисунке.

6*. Постройте следы предельных поверхностей, соответствующие используемым теориям прочности. Покажите точку, изображающую заданное напряженное состояние, найдите графически действительный коэффициент запаса прочности.

Примечание. Пункты 1–3 следует выполнить двумя способами: аналитическим и графическим.

Таблица. 2.1

A	№ схемы на рис. 7	σ_{x_1} , МПа	σ_{x_2} , МПа	B	τ_{xz} , МПа	β , град	C	$\sigma_{\text{пред}}$, МПа	Материал
0	1	10	-20	0	30	15	0	240	Сталь
1	2	-20	30	1	-40	30	1	180/600	Чугун
2	3	50	40	2	50	45	2	150	Бронза
3	4	-30	-50	3	-60	60	3	150/500	Чугун
4	1	-10	30	4	10	75	4	210	Дюрал.
5	2	20	-40	5	-20	15	5	160/480	Чугун
6	3	-70	-60	6	20	30	6	260	Сталь
7	4	40	30	7	-10	45	7	120	Бронза
8	4	-80	70	8	-30	60	8	180/600	Чугун
9	3	60	-30	9	40	75	9	200	Дюрал.

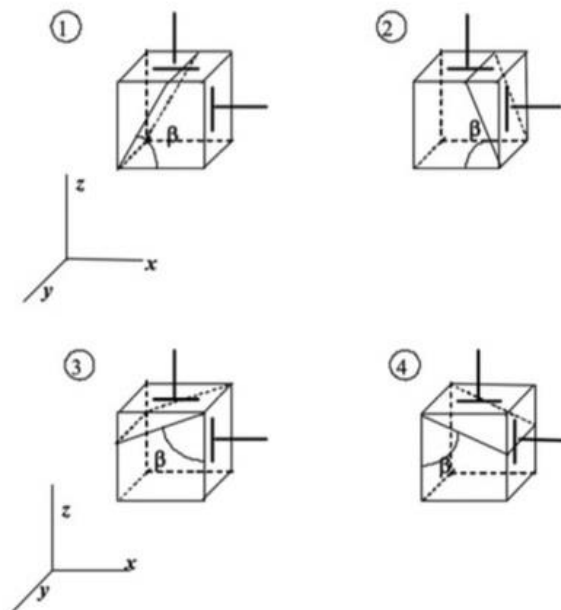


Рис. 2.2

Пример решения задачи 2.1.

Условие задачи

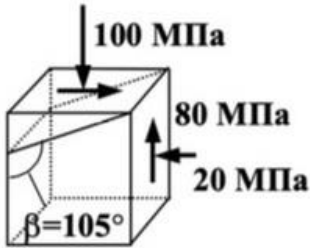


Рис. 2.3. Заданное напряженное состояние в условии задачи № 7

Элемент, выделенный из тела, находится в плоском напряженном состоянии (рис. 2.3). По граням элемента заданы нормальные и касательные напряжения, значения которых приведены на рисунке.

Материал элемента – сталь с такими характеристиками: предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона

$\nu = 0,3$; модуль сдвига $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0,77 \cdot 10^5$ МПа; нормируемый коэффициент запаса прочности $n = 1,5$.

Требуется:

- 1) найти нормальное, касательное и полное напряжения на наклонной площадке, заданной углом $\beta = 105^\circ$ (см. рис. 2.3);
- 2) определить величины главных напряжений и положение главных площадок;
- 3) найти наибольшее касательное напряжение и положение площадки, по которой оно действует;
- 4) оценить прочность материала в точке и показать вероятное направление плоскости сдвига или отрыва (опасной площадки);
- 5) найти величины относительных продольных деформаций в исходной системе координат xuz и по главным направлениям; вычислить относительную объемную деформацию.

Примечание. Пп. 1–3 следует выполнить двумя способами: аналитическим и графическим.

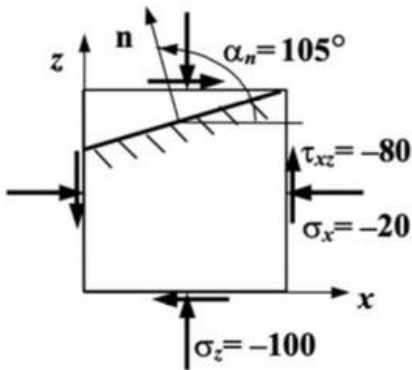


Рис. 2.4. Определение напряжений на заданной наклонной площадке

Решение

Изобразим элемент в виде плоского рисунка, на котором должна быть указана система координат (см. рис. 2.4). Введенная система координат позволяет присвоить напряжениям обозначения: $\sigma_x = -20$ МПа, $\sigma_z = -100$ МПа, $\tau_{xz} = -80$ МПа.

На рисунке следует показать также наклонную площадку, указать штриховкой ее внутреннюю сторону, задать внешнюю нормаль к площадке.

Аналитический способ исследования напряженного состояния

Определение напряжений на наклонной площадке. Напряжения, действующие на наклонной площадке (см. рис. 2.4), находим по формулам (5.2а) и (5.2.б). В этих формулах положение площадки задает угол α_n между нормалью \mathbf{n} к площадке и осью x . Этот угол нельзя путать с углом β , указанным на рис. 2.3.

Можно отсчитывать угол α_n не от оси x , а от оси z , но тогда в формулах (5.2а) и (5.2.б). напряжения σ_x , σ_z надо поменять местами

и напряжение τ_{xz} заменить напряжением τ_{zx} . Надо выбирать более удобный способ.

Используем угол α_n между \mathbf{n} и осью x , отсчитывая его от оси x к нормали \mathbf{n} : $\alpha_n = 105^\circ$ (см. рис. 2.4). Значение угла положительное, так как угол отсчитывается против часовой стрелки.

Согласно (2.2а) и (2.2б)

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos(2\alpha_n) - \tau_{xz} \sin(2\alpha_n) = \frac{-20 - 100}{2} + \\ &+ \frac{-20 - (-100)}{2} \cos(2 \cdot 105^\circ) - (-80) \sin(2 \cdot 105^\circ) = -134,6 \text{ МПа}, \\ \tau_n &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin(2\alpha_n) + \tau_{xz} \cos(2\alpha_n) = \\ &= \frac{-20 - (-100)}{2} \sin(2 \cdot 105^\circ) - (-80) \cos(2 \cdot 105^\circ) = 49,3 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Получившееся нормальное напряжение σ_n отрицательно, значит, оно направлено к площадке (сжимающее). Касательное напряжение τ_n положительно, это значит, что оно обходит площадку по часовой стрелке.

Используем теперь угол α_n между нормалью \mathbf{n} и осью z , отсчитывая его от z к \mathbf{n} : $\alpha_n = 15^\circ$. Формулы (5.2а) и (5.2.б) записываем в измененном виде:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos(2\alpha_n) - \tau_{zx} \sin(2\alpha_n) = \\ &= \frac{-100 - 20}{2} + \frac{-100 - (-20)}{2} \cos(2 \cdot 15^\circ) - 80 \sin(2 \cdot 15^\circ) = -134,6 \text{ МПа}, \\ \tau_n &= \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \sin(2\alpha_n) + \tau_{zx} \cos(2\alpha_n) = \\ &= \frac{-100 - (-20)}{2} \sin(2 \cdot 15^\circ) + 80 \cos(2 \cdot 15^\circ) = 49,3 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

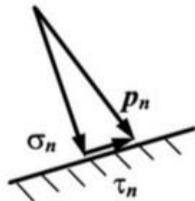


Рис. 2.5. Напряжения на наклонной площадке

Абсолютная величина полного напряжения (или просто полное напряжение)

$$p_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} = \sqrt{(-134,6)^2 + (49,3)^2} = 143,4 \text{ МПа}.$$

Вычисленные напряжения показаны на рис. 2.5.

Определение главных напряжений и главных направлений. Согласно (2.5) главные напряжения

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_{\text{гл}} \\ \sigma''_{\text{гл}} \end{array} \right\} = \frac{(-20) + (-100)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{[-20 - (-100)]^2 + 4(-80)^2} =$$

$$= -60 \pm 89,44 \text{ МПа}.$$

После вычисления главные напряжения следует пронумеровать согласно убыванию. Чтобы не путать напряжения до и после нумерации, специально используются для этих напряжений разные обозначения. Главные напряжения, пронумерованные согласно их величине,

$$\sigma_1 = 29,44 \text{ МПа}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -149,44 \text{ МПа}.$$

Найдем положение главных площадок. Сказанное о способах вычисления напряжений по наклонной площадке относится и к способам вычисления положения главных площадок. Здесь мы вычислим углы $\alpha'_{гл}$, $\alpha''_{гл}$, определяющие положения главных площадок, одним способом: будем отсчитывать эти углы от направления оси x . Углы являются решениями уравнения (5.7):

$$\operatorname{tg}(2\alpha_{гл}) = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = -\frac{2(-80)}{-20 - (-100)} = 2,$$

то есть

$$\alpha'_{гл} = 31,7^\circ, \quad \alpha''_{гл} = 121,7^\circ.$$

Получены два значения угла, которые отвечают площадкам с

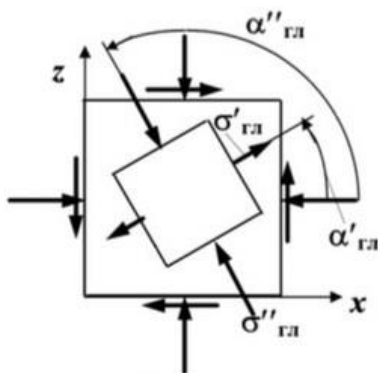


Рис. 2.6. Определение положения главных площадок

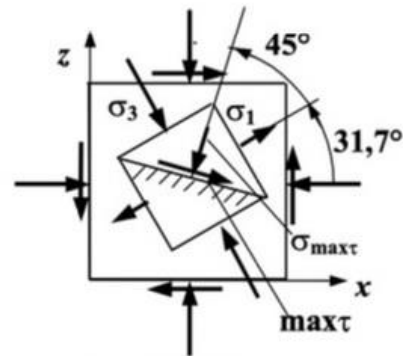


Рис. 2.7. Площадка с максимальным касательным напряжением

напряжениями σ_1 , σ_3 (рис. 2.6). Выясним, какому из этих напряжений соответствует угол $\alpha'_{гл}$. Для этого определим по формуле (5.8) знак второй производной $d^2\sigma_n/d\alpha_n^2$ при $\alpha_n = \alpha'_{гл}$:

$$\frac{d^2\sigma_n}{d\alpha_n^2} = -2[-20 - (-100)]\cos(2 \cdot 31,7^\circ) + 4(-80)\sin(2 \cdot 31,7^\circ) < 0.$$

Знак отрицательный, следовательно, по этой площадке действует большее из найденных главных напряжений – напряжение σ_1 . Теперь можно в соответствии с нумерацией главных напряжений пронумеровать и углы: $\alpha_1 = 31,7^\circ$, $\alpha_3 = 121,7^\circ$.

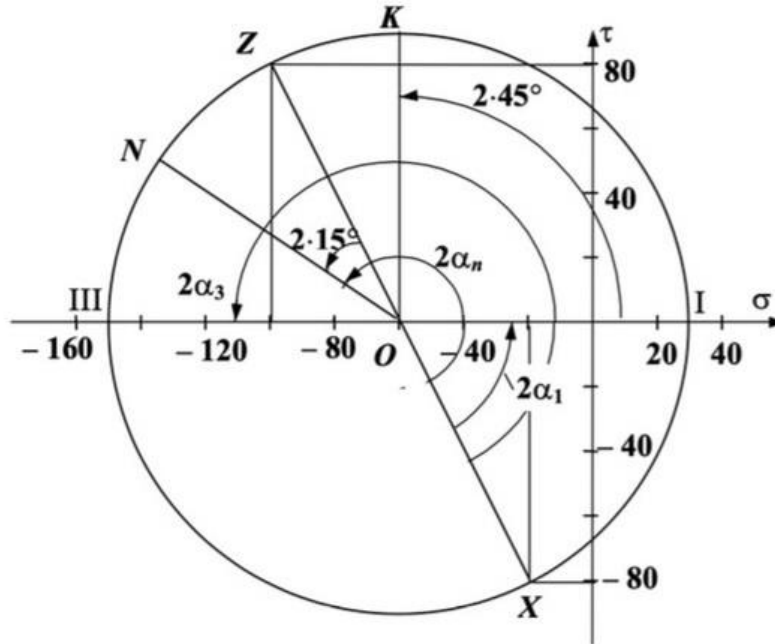


Рис. 2.8. Круг Мора, изображающий заданное плоское напряженное состояние

Углы α_1 , α_3 , определяют положения главных площадок. Отмеченные на рисунке углы дают удвоенные значения α_1 , α_3 . По рисунку сразу видно, какому главному напряжению соответствует каждое значение угла. Графически найденные значения: $2\alpha_1 \approx 63^\circ$, $2\alpha_3 \approx 243^\circ = 180^\circ + 63^\circ$. Графический способ дает возможность проверить аналитическое решение, поэтому в расчетной работе следует рядом с кругом напряжений на отдельном рисунке показать положения главных площадок и напряжения на них.

Площадке, по которой действует максимальное касательное напряжение, соответствует точка K круга. Координаты точки K дают значения $\max \tau \approx 89$ МПа, $\sigma_{\max \tau} = -60$ МПа.

Найдем с помощью круга напряжений напряжения на наклонной площадке. Построим на круге точку N , соответствующую наклонной площадке. Для этого отложим от радиуса OX (соответствующего оси x) против часовой стрелки угол $2\alpha_n = 2 \cdot 105^\circ$, либо от радиуса OZ (соответствующего оси z) в том же направлении угол $2 \cdot 15^\circ$. Координаты точки N дают напряжения на наклонной площадке: $\sigma_n \approx -135$ МПа, $\tau_n \approx 49$ МПа.

Полное представление о напряженном состоянии дают три круга напряжений. Точки каждого круга соответствуют площадкам, которые перпендикулярны одной из главных площадок. Круги строятся по главным напряжениям. Обычно изображение напряженного состояния в виде трех кругов Мора используется в качестве иллюстрации, а не в качестве способа вычисления, поэтому данный рисунок можно выполнить в меньшем масштабе и не обязательно на милли-

метровке. Все три круга напряжений для рассматриваемого напряженного состояния показаны на рис. 2.9. Построенный на рис. 2.8 круг напряжений соответствует площадкам, перпендикулярным плоскости чертежа (перпендикулярным второй главной площадке). Из рис. 2.9 видно, что максимальное касательное напряжение τ_{\max} определяется по большому кругу.

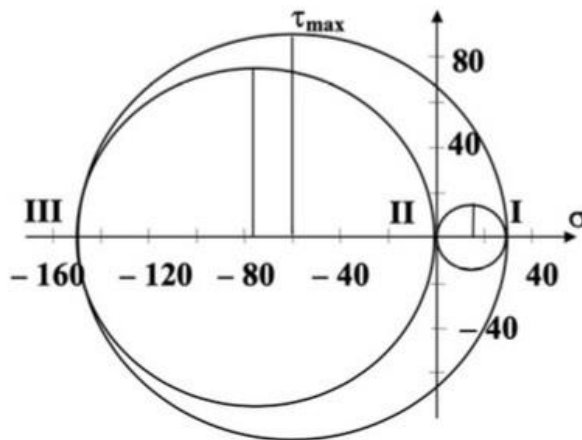


Рис. 2.9. Круги Мора, изображающие объемное напряженное состояние

Проверка прочности.

Главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ уже известны (вычислены выше).

Начать решение вопроса нужно с выбора соответствующей материалу теории прочности. По условию задачи материал – сталь (пластичный материал), поэтому используем третью и четвертую теории прочности.

Согласно третьей теории прочности эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 29,44 - (-149,44) = 178,9 \text{ МПа}.$$

Сравнение $\sigma_{\text{экр}}$ с пределом текучести σ_T показывает, что материал работает упруго. Действительно,

$$\sigma_{\text{экр}} = 178,9 \text{ МПа} < \sigma_T = 240 \text{ МПа}.$$

Но условие прочности не выполнено:

$$\sigma_{\text{экр}} = 178,9 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Это означает, что не обеспечен нормативный коэффициент запаса прочности. Конструкцию, имеющую точку с такими напряжениями, эксплуатировать запрещается. Действительный (фактический) коэффициент запаса

$$n_{\text{действ}} = \sigma_T / \sigma_{\text{экв}} = 240 / 178,9 = 1,33$$

меньше нормативного $n = 1,5$.

Согласно четвертой теории прочности

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(29,44)^2 + (-149,44)^2 + (29,44 - (-149,44))^2]} = 167,0 \text{ МПа}, \\ \sigma_T &= 240 > 167,0 > [\sigma]_p = 160 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Условие прочности не выполнено и согласно четвертой теории. Однако фактический коэффициент запаса оказывается другим:

$$n_{\text{действ}} = 240 / 167 = 1,44.$$

Положения опасных площадок согласно третьей и четвертой теориям приведены на рис. 2.10, 2.11. По площадке, показанной жирной линией на рис. 2.10, действует максимальное касательное напряжение. Эта площадка перпендикулярна к площадке 2 и наклонена под углом в 45° к площадкам 1 и 3. Площадка, показанная жирной линией на рис. 2.11, соответствует четвертой теории прочности. Она равно наклонена ко всем трем главным площадкам.

Специально обратим внимание на способ изображения опасных площадок: эти площадки показаны с привязкой к исходному элементу. Так необходимо сделать и при оформлении задачи.

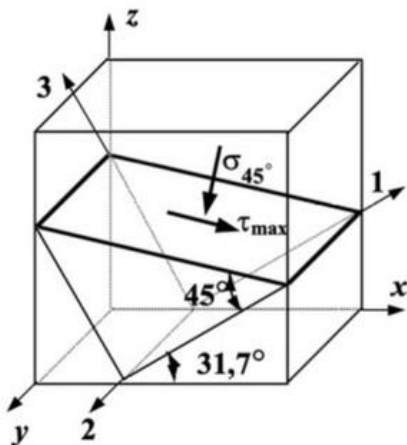


Рис. 2.10. Опасная площадка по третьей теории прочности

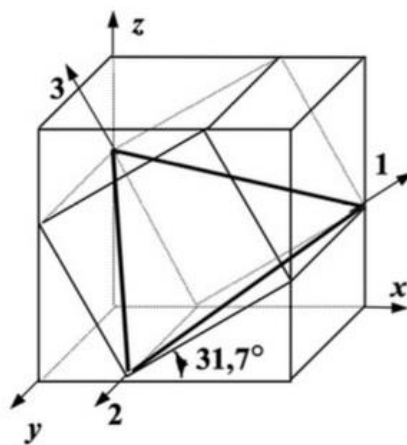


Рис. 2.11. Опасная площадка по четвертой теории прочности

Положение исходного элемента по отношению к конструкции, из которой вырезан элемент, известно. Примененный способ изображения опасных площадок позволяет указать эти площадки непосредственно на конструкции.

Определение деформаций в точке. Следует начать с выяснения, работает ли материал в упругой области. Вычисленное выше эквивалентное напряжение оказалось меньше предела текучести. Это означает, что уровень напряжений соответствует упругой стадии деформирования и можно использовать обобщенный закон Гука.

Если уровень напряжений соответствует неупругой стадии деформирования, то закон Гука определяет только упругую часть полных деформаций. В задаче при этой ситуации нужно вычислить только упругую составляющую деформации, отметив это примечанием в тексте.

Линейные деформации в направлении осей x, y, z

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}[-20 - 0,3(0 + (-100))] = 5 \cdot 10^{-5}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}[0 - 0,3(-100 + (-20))] = 1,8 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}[-100 - 0,3(-20 + 0)] = -4,7 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Угловая деформация

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} = \frac{1}{0,77 \cdot 10^5}(-80) = -1,04 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx -0,06^\circ.$$

Знак минус означает, что угол (\vec{dx}, \vec{dz}) уменьшается. Две другие угловые деформации отсутствуют: $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$, так как равны нулю соответствующие касательные напряжения.

Линейные деформации вдоль главных направлений 1, 2, 3

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}[-20 - 0,3(0 + (-100))] = 5 \cdot 10^{-5}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}[0 - 0,3(-100 + (-20))] = 1,8 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}[-100 - 0,3(-20 + 0)] = -4,7 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Угловая деформация

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} = \frac{1}{0,77 \cdot 10^5}(-80) = -1,04 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx -0,06^\circ.$$

Знак минус означает, что угол (dx , dz) уменьшается. Две другие угловые деформации отсутствуют: $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$, так как равны нулю соответствующие касательные напряжения.

Линейные деформации вдоль главных направлений 1, 2, 3

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [29,44 - 0,3(0 - 149,44)] = 3,714 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [0 - 0,3(-149,44 + 29,44)] = 1,80 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-149,44 - 0,3(29,44 + 0)] = -7,914 \cdot 10^{-4}.$$

Относительная объемная деформация

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -2,4 \cdot 10^{-4}.$$

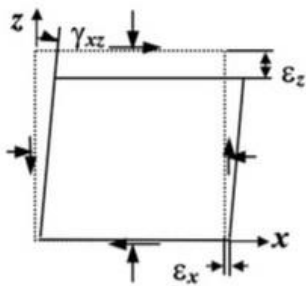


Рис. 2.12. Деформации элемента по заданным направлениям x, z

В результате деформации тела элемент перемещается как жесткое целое и деформируется. На рис. 2.12 жирной линией изображен деформированный элемент. Недеформированный элемент показан штриховой линией. Перемещение элемента как жесткого целого не изображено. Этот элемент получает угловые и линейные деформации.

Деформированный элемент, грани которого в исходном недеформированном состоянии были параллельны главным площадкам, показан на рис. 2.13. Этот элемент получает только линейные деформации.

Рис. 2.12, 2.13 разъясняют результаты вычислений. Условно исходные длины ребер элемента считаются равными единице. При этом линейные относительные деформации в направлении этих ребер равны абсолютным изменениям длин. В исходном недеформированном состоянии грани элемента параллельны координатным плоскостям системы координат xuz .

В результате деформации тела элемент перемещается как жесткое целое и деформируется.

На рис. 2.12 жирной линией изображен

деформированный элемент. Недеформированный элемент показан штриховой линией. Перемещение элемента как жесткого целого не изображено. Этот элемент получает угловые и линейные деформации.

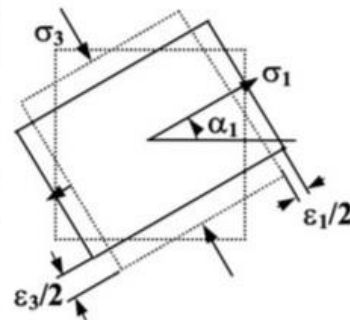


Рис. 2.13. Деформации элемента по главным направлениям 1, 3