

В. А. ДИЕВСКИЙ, И. А. МАЛЫШЕВА

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## СБОРНИК ЗАДАНИЙ



ББК 22.21

Д 44

Диевский В. А., Малышева И. А.

Д 44 Теоретическая механика. Сборник заданий: Учебное пособие. 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 192 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0709-5

Учебное пособие соответствует содержанию федеральной дисциплины ЕН.Ф.06 «Теоретическая механика» государственных образовательных стандартов по направлениям подготовки бакалавров и дипломированных специалистов — 150300 «Прикладная механика», 635500 «Строительство», 551500 «Приборостроение» и других технических специальностей. Книга содержит задания по теоретической механике и предназначена для изучения методов решения типовых задач по дисциплинам «Теоретическая механика», «Техническая механика» и «Прикладная механика».

Пособие содержит по 30 вариантов заданий и типовые задачи с решениями по 5 темам статики, 4 темам кинематики и 8 темам динамики; задания могут использоваться как для текущего контроля усвоения знаний, так и для формирования на их основе курсовых работ. Оно представляет все основные разделы теоретической механики: «Статика», «Кинематика», «Динамика материальной точки и общие теоремы динамики», «Основы аналитической механики» и «Малые колебания механических систем и элементарная теория удара». Ко всем заданиям даны ответы.

Книга также будет полезна инженерам и научным работникам для углубления знаний по основам теоретической механики. Может быть использована в системах непрерывного профессионального образования.

ББК 22.21

**Рецензенты:**

Заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор **П. Е. ТОВСТИК**;

Заведующий кафедрой теоретической механики и баллистики Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ», заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор **Г. Т. АЛДОШИН**.

Обложка  
**А. Ю. ЛАПШИН**

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.  
Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2009

© В. А. Диевский,  
И. А. Малышева, 2009

© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2009

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическая механика играет существенную роль в подготовке инженеров прежде всего строительного, механического, энергетического, машиностроительного и транспортного профилей. Изучая эту науку, студенты знакомятся с основными законами и принципами, необходимыми для усвоения многих общеинженерных дисциплин, таких как сопротивление материалов, строительная механика, теория механизмов и машин и др. Разработка конструкций зданий и сооружений, а также создание машин, механизмов и многих видов приборов невозможны без применения теорем и принципов теоретической механики.

Хорошее усвоение курса теоретической механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков решения задач.

Предлагаемая книга содержит задания по теоретической механике и предназначена для изучения методов решения типовых задач. Пособие содержит по 30 вариантов заданий по 5 темам статики, 4 темам кинематики и 8 темам динамики. Приведенные задания могут использоваться как для текущего контроля усвоения знаний, так и для формирования на их основе курсовых работ. По каждой теме в книге приводятся также типовые задачи с решениями, демонстрирующие различные типы задач, встречающиеся на практике. В конце книги приведены ответы ко всем заданиям, округленные до трех значащих цифр.

Пособие представляет все основные разделы теоретической механики: «Статика», «Кинематика», «Динамика материальной точки и общие теоремы динамики», «Основы

аналитической механики» и «Малые колебания механических систем и элементарная теория удара» и полностью соответствует учебным программам технических вузов.

Рекомендуется использовать сборник заданий совместно с учебником В. А. Диевского «Теоретическая механика», где содержатся все необходимые теоретические положения.

В основу данной книги положен многолетний опыт преподавания авторами теоретической механики в Военном инженерно-техническом университете. При создании пособия авторы обращались также к опыту работы в этом направлении специалистов других вузов, прежде всего школ А. А. Яблонского и С. М. Тарга. При этом авторы стремились сделать задания менее громоздкими, сохраняя сущность рассматриваемых методов расчета.

Основная часть материала пособия подготовлена В. А. Диевским и И. А. Малышевой. Общая редакция пособия проведена В. А. Диевским. В создание книги внесли свой вклад также К. С. Куликова, А. Л. Лопатухин, Л. С. Потеева, В. П. Романов, Н. Л. Смирнова, А. О. Юлина и др.

Авторы выражают глубокую признательность всем коллегам, сделавшим ценные замечания по содержанию пособия, особенно профессорам Г. Т. Алдошину и П. Е. Товстику и доценту И. Е. Лопатухиной за внимательное рецензирование рукописи.

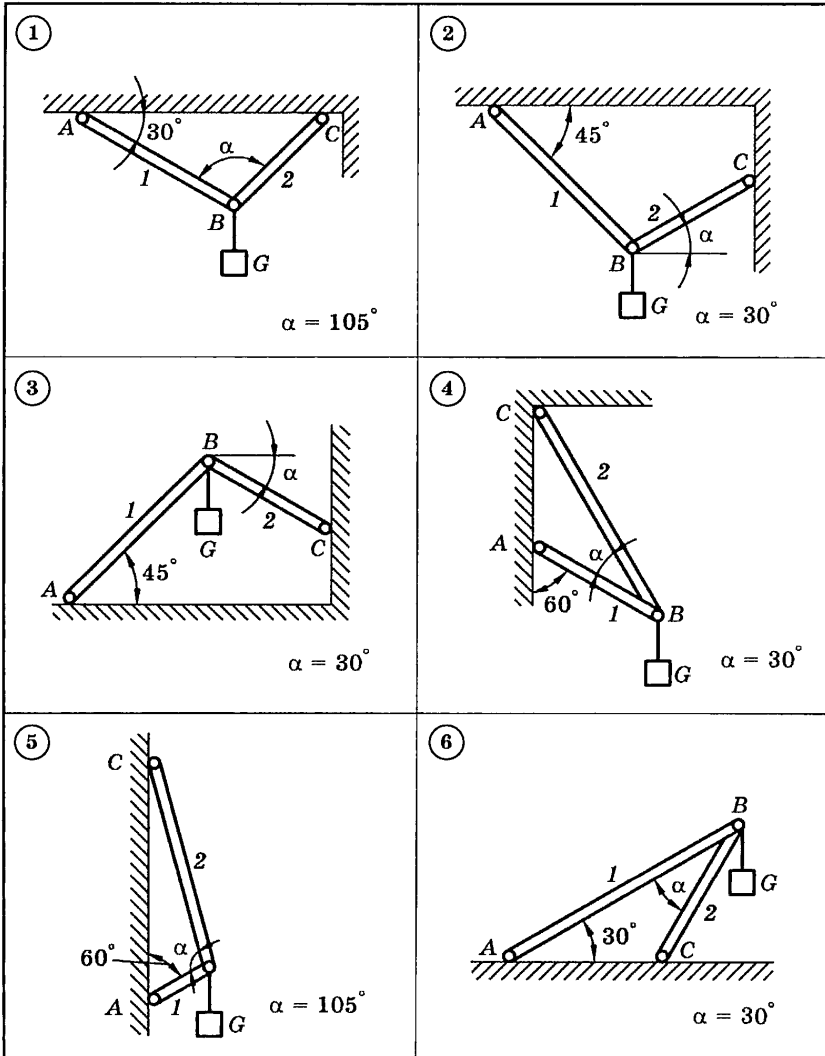


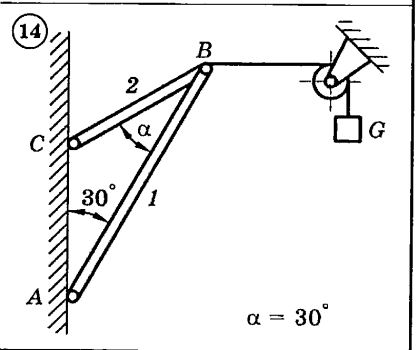
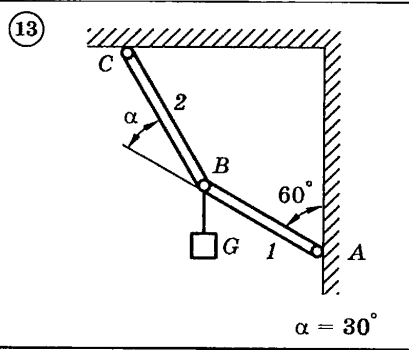
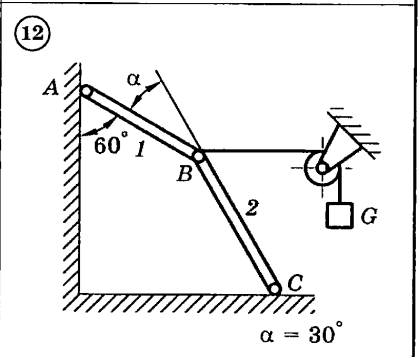
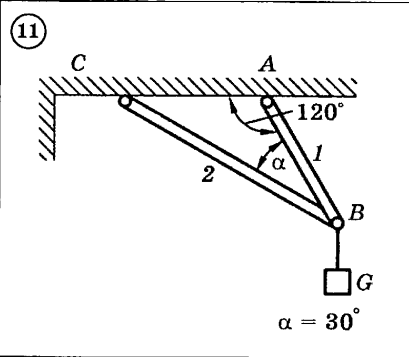
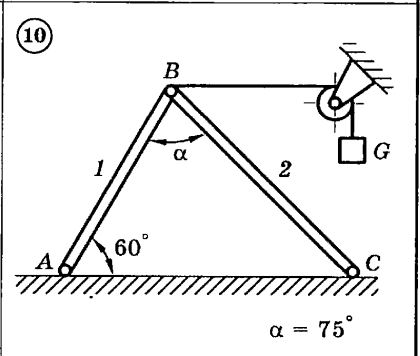
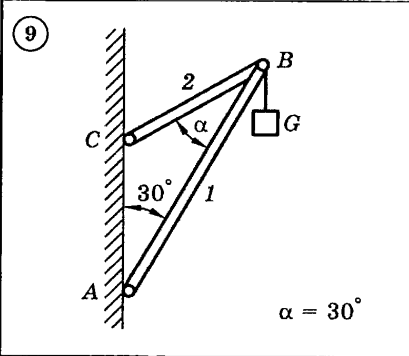
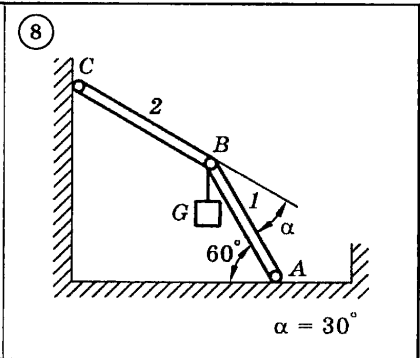
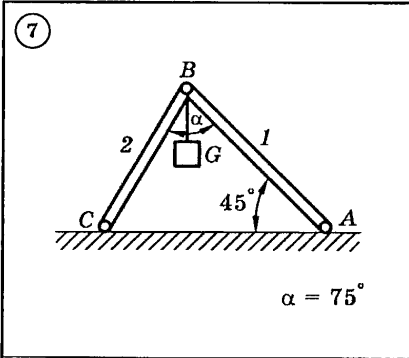
# СТАТИКА

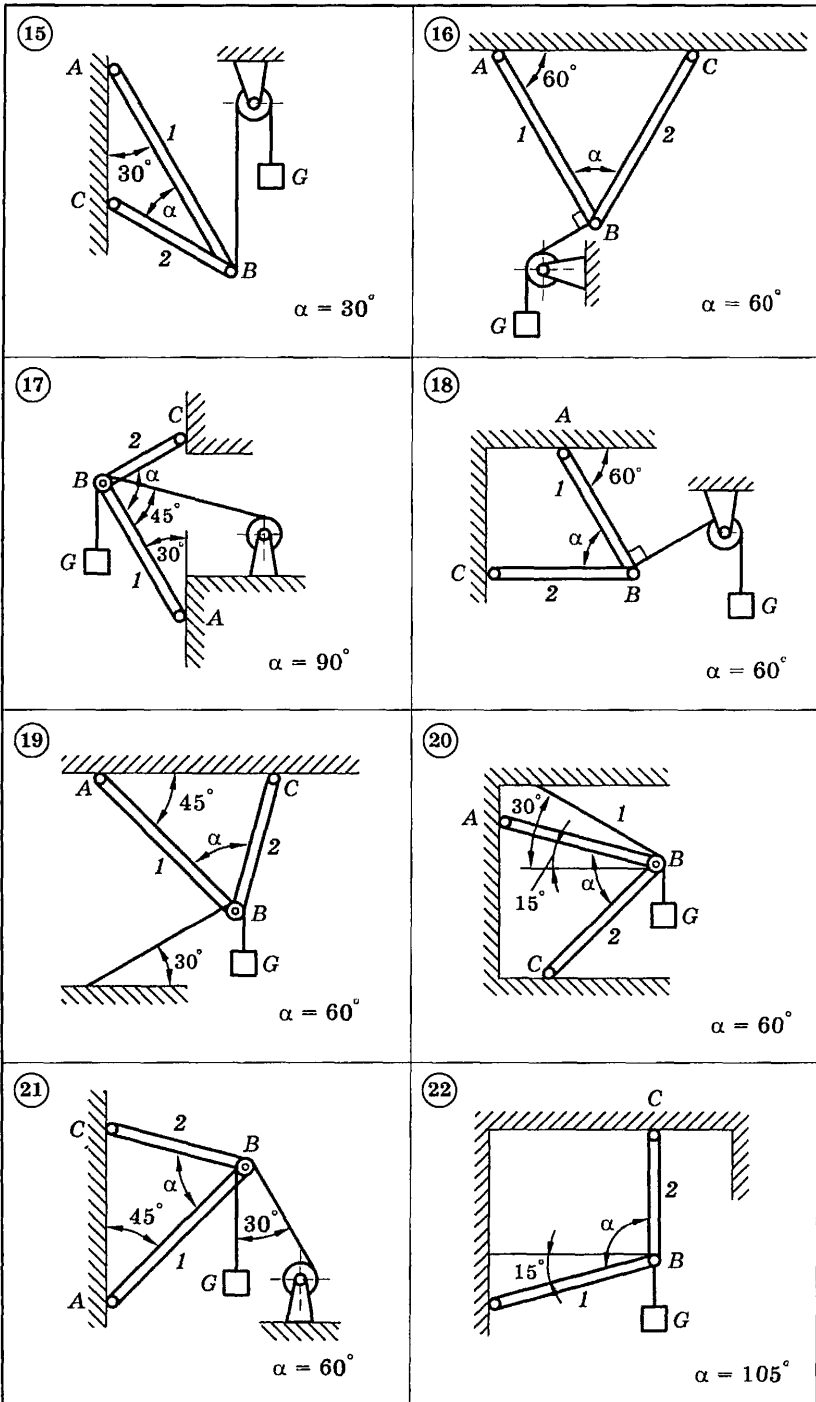
## ЗАДАНИЕ С1

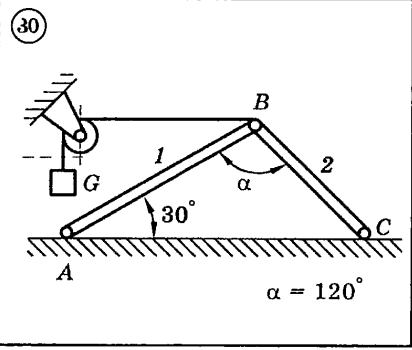
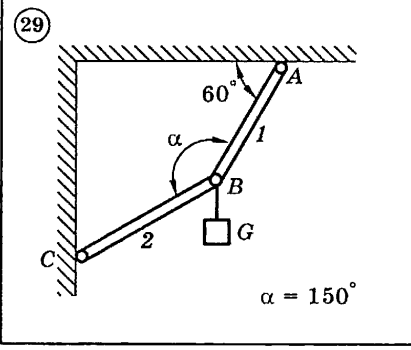
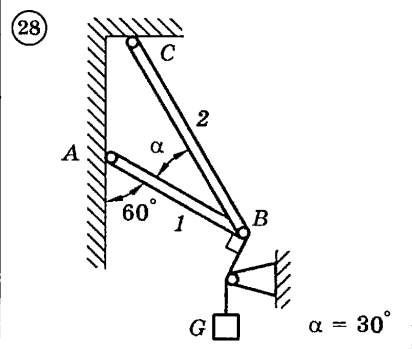
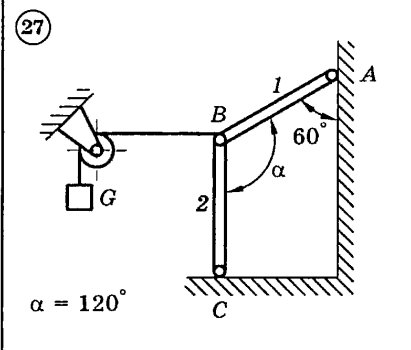
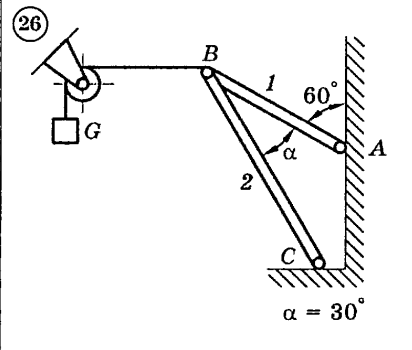
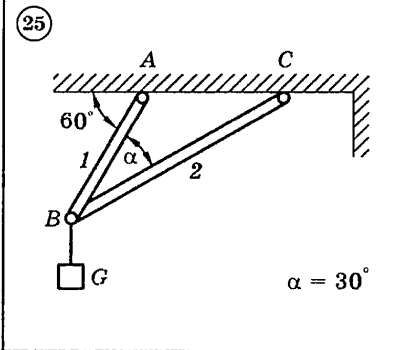
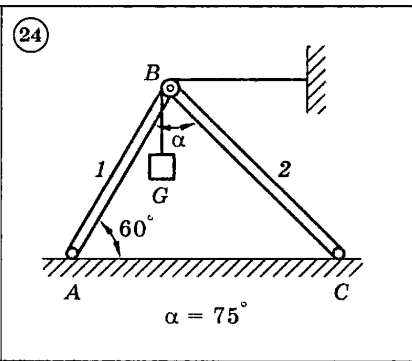
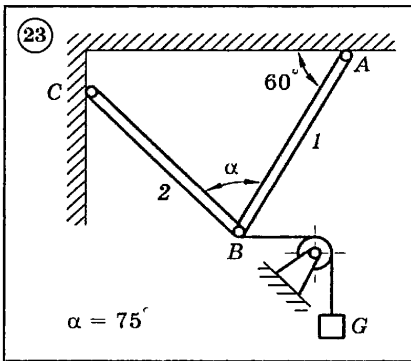
# СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Для представленных на схемах 1–30 механических систем найти усилия в опорных стержнях 1 и 2. Вес груза  $G = 10$  кН, стержни, блоки и тросы невесомы.









## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

### СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

#### ЗАДАЧА 1

Груз весом  $G = 2$  кН (рис. 1) удерживается краном, состоящим из двух невесомых стержней в шарнирах  $AB$  и  $AC$ , прикрепленных к вертикальной стене и составляющих с ней углы  $\alpha_1 = 60^\circ$  и  $\alpha_2 = 40^\circ$ . В точке  $A$  подвешен блок, через который перекинут грузовой трос, идущий к блоку в точке  $D$  и составляющий со стеной угол  $\alpha_3 = 60^\circ$ .

Весом троса и блока, а также размерами блока можно пренебречь. Определить усилия в стержнях.

**Решение.** Рассмотрим находящийся в равновесии груз (рис. 2).

На него действуют две силы: сила тяжести  $\bar{G}$  и сила натяжения троса  $\bar{N}_1$ . Поскольку система сил уравновешена, можно сделать очевидный вывод: сила натяжения троса направлена внутрь троса и по модулю равна весу груза  $N_1 = G$ .

Если для любого блока (рис. 3) пренебречь трением на его оси, то силы натяжения ветвей его троса одинаковы  $N_1 = N_2$  (что легко видеть из уравнения моментов относительно центра блока).

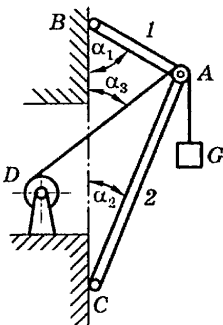


Рис. 1

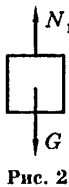


Рис. 2

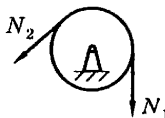


Рис. 3

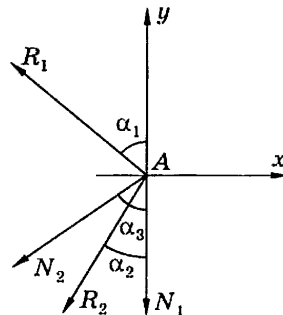


Рис. 4

Теперь в качестве объекта равновесия можно рассмотреть мысленно вырезанный узел в точке  $A$  (или, что то же самое, блок с прилежащей к нему частью троса). На этот узел будут действовать силы натяжения ветвей троса  $N_1$  и  $N_2$  и реакции  $R_1$  и  $R_2$  стержней  $AB$  и  $AC$  (рис. 4).

Реакции опорных стержней направлены, как известно, вдоль этих стержней. Направим их внутрь стержней, считая изначально стержни растянутыми.

Составим теперь уравнения равновесия как уравнения проекций сил на оси  $x$  и  $y$  (для системы сходящихся сил), учитывая, что силы  $R_1$ ,  $R_2$  и  $N_2$  составляют углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  с осью  $y$ .

$$\begin{aligned} \sum F_{hx} &= 0; & -R_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_3 - R_2 \sin \alpha_2 &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; & R_1 \cos \alpha_1 - N_2 \cos \alpha_3 - R_2 \cos \alpha_2 - N_1 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что  $N_1 = N_2 = 2$  кН, получаем

$$\begin{aligned} R_1 \sin \alpha_1 + R_2 \sin \alpha_2 &= -N_2 \sin \alpha_3 = -\sqrt{3}; \\ R_1 \cos \alpha_1 - R_2 \cos \alpha_2 &= N_2 \cos \alpha_3 + N_1 = 3. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, находим  $R_1 = 0,611$  кН,  $R_2 = -3,52$  кН. Знак «минус» у величины реакции  $R_2$  означает, что она имеет направление, противоположное принятому, то есть стержень  $AC$  не растянут, а сжат.

Ответ:  $R_1 = 0,611$  кН,  $R_2 = -3,52$  кН.

## ЗАДАЧА 2

На невесомую балку, закрепленную с помощью неподвижного шарнира в точке  $A$  и троса в точке  $B$ , действует сила  $\vec{F}$ , модуль которой  $F = 5$  кН (рис. 5). Учитывая указанные на рисунке геометрические размеры, определить реакции опор балки.

**Решение.** Рассмотрим балку, воспользуемся принципом освобожденности от связей, отбросим их и введем соответствующие реакции.

Реакция троса в точке  $B$ , как известно, направлена по тросу, а реакция шарнирно-неподвижной опоры имеет неизвестное направление.

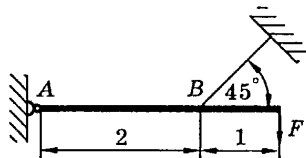


Рис. 5

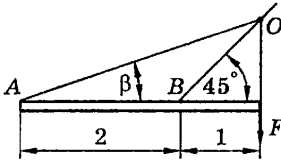


Рис. 6

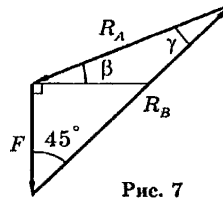


Рис. 7

Однако в данном случае определить ее направление позволяет теорема о трех силах, согласно которой линии действия трех непараллельных сил, под действием которых тело находится в равновесии, должны пересекаться в одной точке. В рассматриваемой схеме это будет точка  $O$  пересечения линий действия силы  $F$  и линии троса (рис. 6).

Таким образом, реакция в точке  $A$  проходит по линии  $AO$  под углом  $\beta$ , величину которого найдем из треугольника:  $\operatorname{tg} \beta = 1/3$  и  $\beta = \operatorname{arctg} 1/3$ .

Для определения величин реакций могут быть применены три способа: графический, графоаналитический и аналитический.

**1. Графический способ.** Следует построить в масштабе замкнутый силовой многоугольник, начиная с известной силы  $\bar{F}$ , а затем в произвольной последовательности остальные силы  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$ .

Например, можно провести из конца силы  $\bar{F}$  линию действия реакции  $\bar{R}_B$ , а из ее начала — линию действия  $\bar{R}_A$  до их пересечения. Силы должны быть направлены в одну сторону по пути обхода контура (рис. 7).

Затем, измеряя отрезки и сравнивая их с масштабом, можно узнать величины неизвестных сил.

**2. Графоаналитический способ.** Здесь также строится силовой многоугольник, но только в виде геометрической схемы, рассматривая которую можно вычислить неизвестные стороны треугольника.

Для схемы (рис. 7) согласно теореме синусов получаем

$$\frac{F}{\sin \gamma} = \frac{R_A}{\sin 45^\circ} = \frac{R_B}{\sin(90^\circ + \beta)},$$

где  $\gamma = 180^\circ - 45^\circ - (90^\circ + \beta) = 45^\circ - \beta$ .

Из этих уравнений имеем

$$R_A = F \frac{\sin 45^\circ}{\sin \gamma} = 7,9 \text{ кН}; \quad R_B = F \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} = 10,6 \text{ кН}.$$



**3. Аналитический способ.** Здесь не требуется построения силового многоугольника, необходима лишь расчетная схема с направлениями реакций (рис. 8). При этом не имеет значения, в какую сторону по линии действия направлять неизвестные силы.

Выбирая координатные оси  $x$  и  $y$ , записываем уравнения равновесия в проекциях на эти оси:

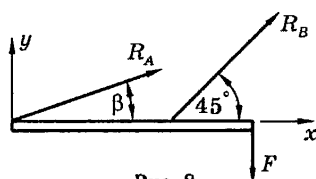


Рис. 8

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & R_A \cos \beta + R_B \cos 45^\circ &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; & R_A \sin \beta + R_B \sin 45^\circ - F &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$R_A = \frac{F}{\sin \beta - \cos \beta} = -7,9 \text{ кН}; \quad R_B = -R_A \frac{\cos \beta}{\cos 45^\circ} = 10,6 \text{ кН}.$$

Отрицательный знак у величины  $R_A$  означает, что действительное направление этой реакции противоположно выбранному на схеме.

О т в е т:  $R_A = -7,9 \text{ кН}; R_B = 10,6 \text{ кН}.$

### ЗАДАЧА 3

Подвеска идеального блока  $O$  лебедки состоит из трех невесомых стержней в шарнирах: двух горизонтальных  $AO$  и  $BO$ , составляющих углы  $45^\circ$  с перпендикуляром к стене  $DO$ , и стержня  $CO$ , составляющего угол  $60^\circ$  с вертикальной линией стены  $DE$  (рис. 9).

Через блок перекинут трос, на одном конце которого подвешен неподвижный груз весом  $G = 10 \text{ кН}$ . Другой конец, уходящий на лебедку, в точке  $E$  стены составляет угол  $30^\circ$  с вертикалью  $DE$ . Определить усилия в стержнях подвески.

Решение. В качестве объекта, равновесие которого следует рассмотреть, выберем блок вместе с прилегающей к нему частью троса (узел в точке  $O$ ).

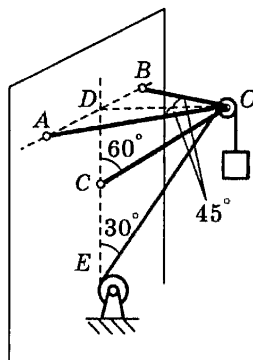


Рис. 9

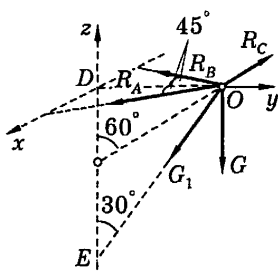


Рис. 10

При условии, что размерами его можно пренебречь, действующие на него силы представляют собой систему сходящихся сил. Учитывая, что реакции опорных стержней направлены по линиям этих стержней, а силы натяжения — по тросу, получаем расчетную схему (рис. 10).

Здесь  $G_1 = G$  — сила натяжения ветви троса, идущей к лебедке в точке  $E$ ; направления реакций стержней выбраны в предположении, что стержни  $AO$  и  $BO$  растянуты, а стержень  $CO$  — сжат.

Для удобства геометрического рассмотрения начало координат взято в точке  $D$ , ось  $x$  направлена по линии  $AB$ , ось  $y$  — по  $DO$ , ось  $z$  — по  $DE$ .

Записываем теперь условие уравновешенности системы сходящихся сил.

$$\sum \vec{F}_k = 0 \text{ в проекциях на декартовы оси:}$$

$$x: R_A \sin 45^\circ - R_B \sin 45^\circ = 0;$$

$$y: -R_A \cos 45^\circ - R_B \cos 45^\circ + R_C \sin 60^\circ - G \sin 30^\circ = 0;$$

$$z: R_C \cos 60^\circ - G_1 \cos 30^\circ - G = 0.$$

Решая эту систему, находим значения усилий в стержнях подвески:

$$R_C = 37,3 \text{ кН}; R_A = R_B = 19,3 \text{ кН}.$$

Все усилия получились положительными, значит их направления были изначально взяты правильно.

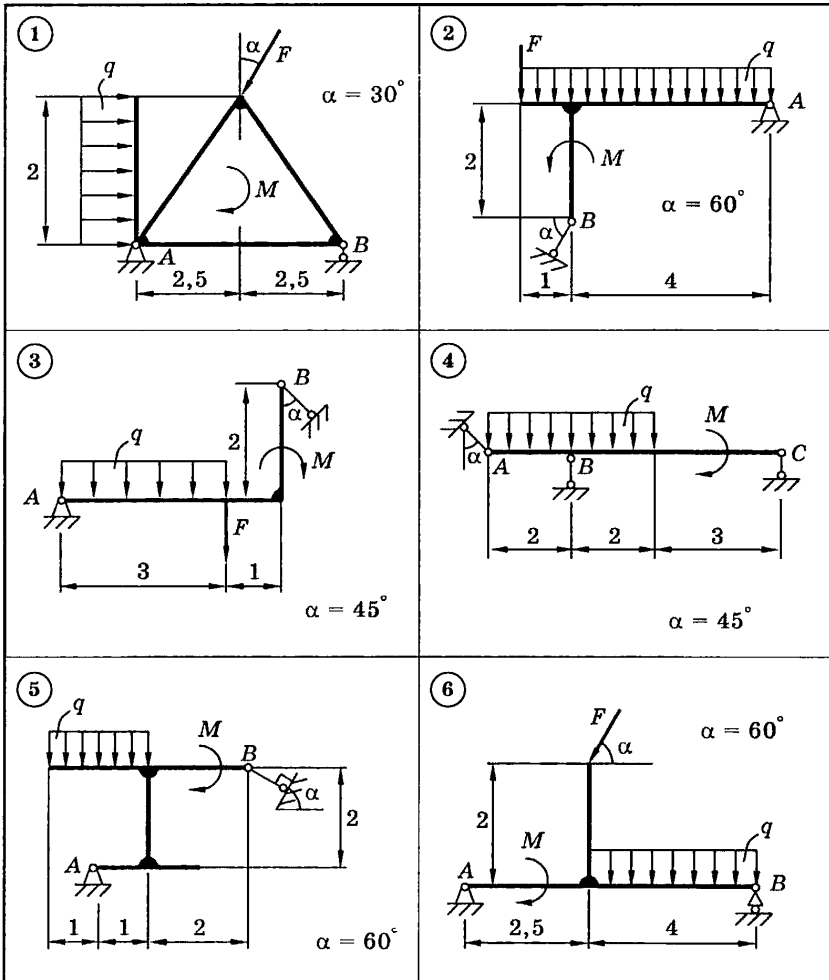
Можно отметить при этом, что усилия в стержнях подвески оказались значительно большими, чем вес удерживаемого ими груза, и существенно зависят от геометрических параметров (углов) самой конструкции подвески.

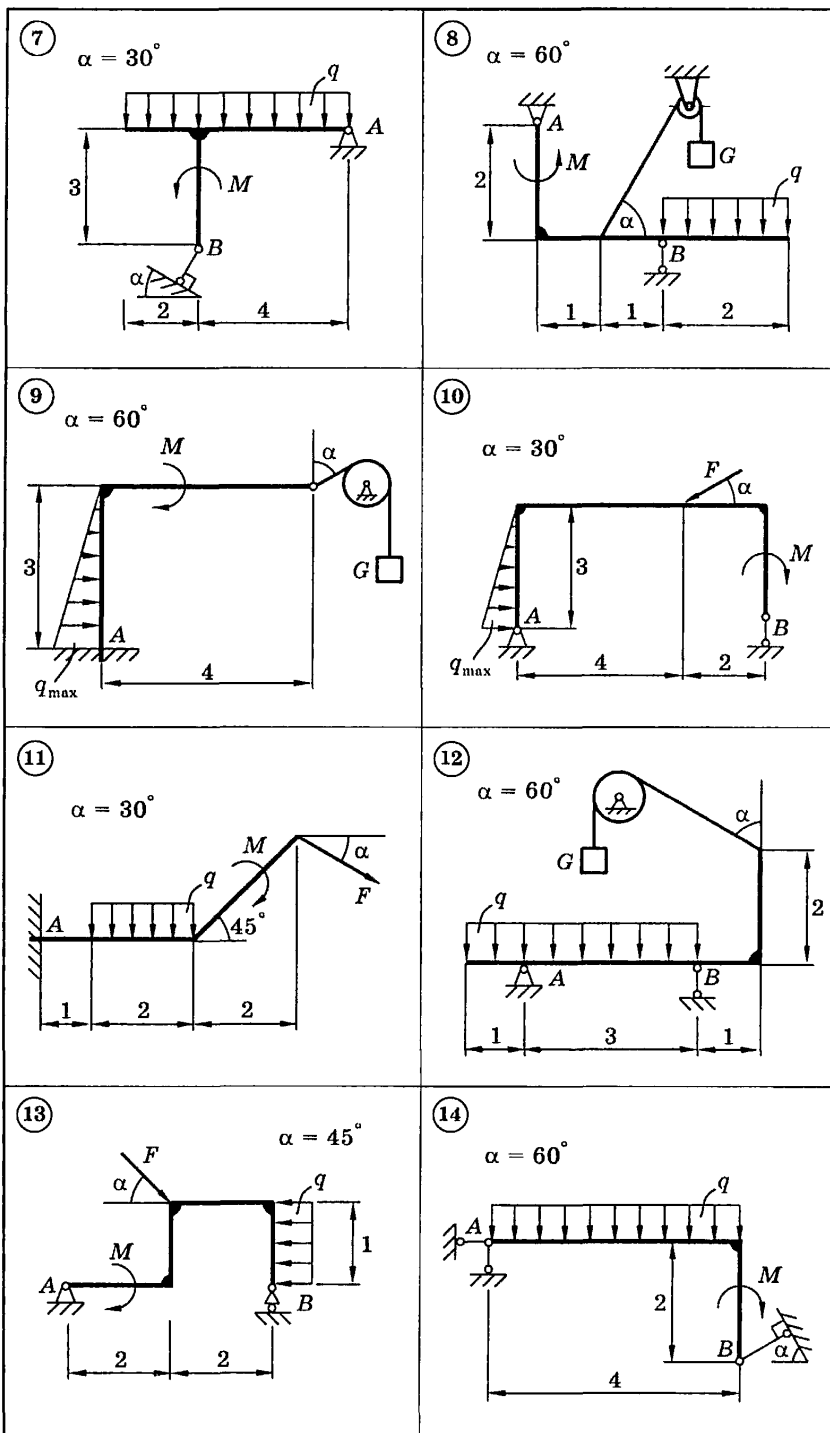
$$\text{Ответ: } R_C = 37,3 \text{ кН}; R_A = R_B = 19,3 \text{ кН}.$$

## ЗАДАНИЕ С2

### ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

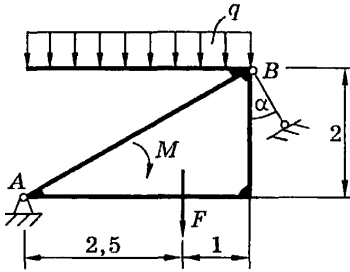
Для представленных на схемах 1–30 тел определить реакции опор. Приведенные на схемах нагрузки имеют следующие величины: вес груза  $G = 10$  кН, сила  $F = 10$  кН, момент пары сил  $M = 20$  кН·м, интенсивность распределенной силы  $q = 5$  кН/м, а также  $q_{\max} = 5$  кН/м. Размеры указаны в метрах. Весом тела следует пренебречь.





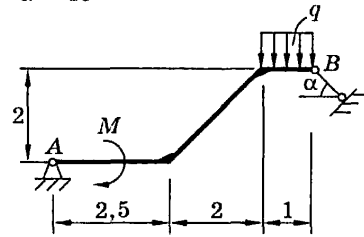
15

$\alpha = 30^\circ$



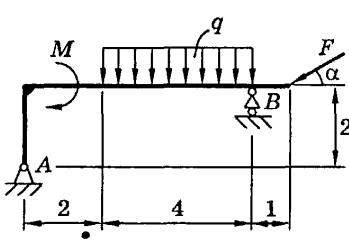
16

$\alpha = 45^\circ$



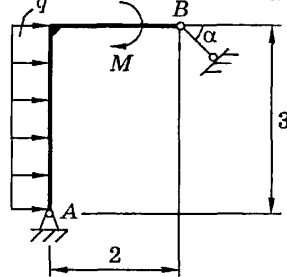
17

$\alpha = 30^\circ$



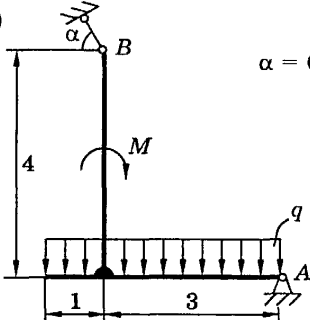
18

$\alpha = 45^\circ$



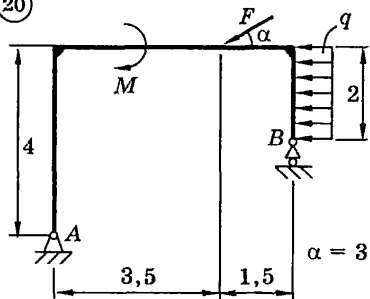
19

$\alpha = 60^\circ$



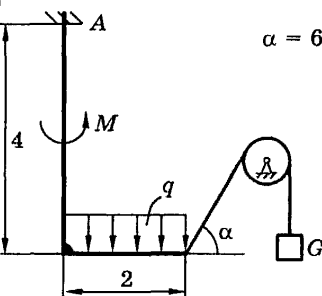
20

$\alpha = 30^\circ$



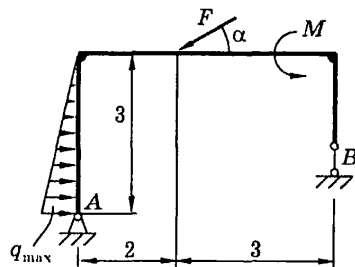
21

$\alpha = 60^\circ$



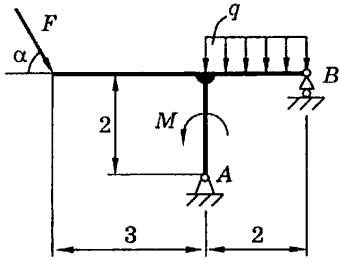
22

$\alpha = 30^\circ$



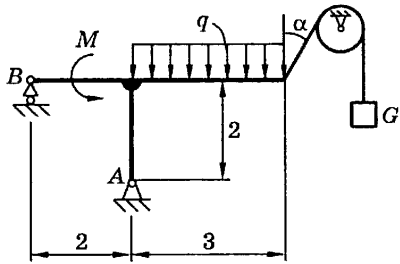
23

$\alpha = 60^\circ$



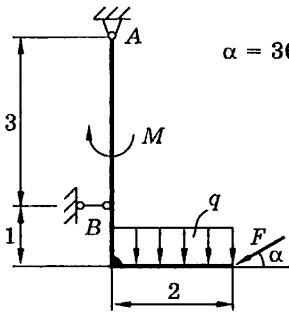
24

$\alpha = 30^\circ$



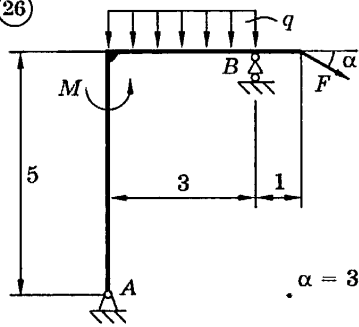
25

$\alpha = 30^\circ$



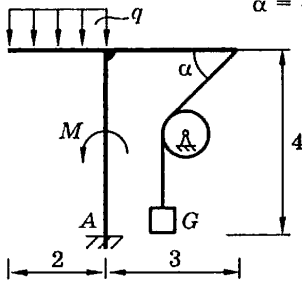
26

$\alpha = 30^\circ$



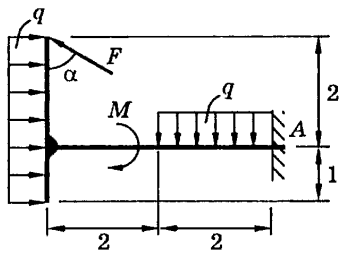
27

$\alpha = 45^\circ$



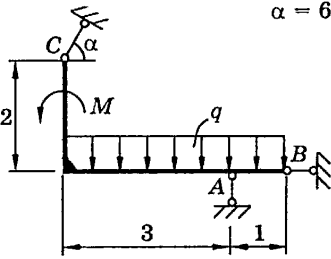
28

$\alpha = 60^\circ$



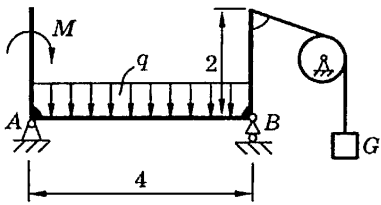
29

$\alpha = 60^\circ$



30

$\alpha = 60^\circ$



## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

### ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

#### ЗАДАЧА 1

Определить реакции опор  $A$  и  $B$  однородной балки весом  $G = 8$  кН, находящейся под действием силы  $F = 6$  кН (действующей под углом  $\alpha = 45^\circ$ ) и равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью  $q = 3$  кН/м. Схема балки и геометрические размеры в метрах показаны на рис. 11.

**Решение.** Воспользуемся принципом освобождения от связей, отбросим их и введем соответствующие реакции. В точке  $B$  балка имеет скользящую (шарнирно-подвижную) опору, реакция которой  $R_B$  имеет известное направление (перпендикулярно опорной поверхности).

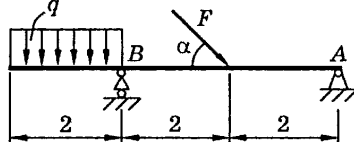


Рис. 11

Реакция шарнирно-неподвижной опоры в точке  $A$  имеет неизвестное направление, и ее следует разложить на составляющие по осям  $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$  (рис. 12).

Распределенную по длине  $l = 2$  м нагрузку заменим сосредоточенной силой:  $Q = q \cdot l = 3 \cdot 2 = 6$  кН и приложим в середине участка распределения. Учтем также силу тяжести балки  $G$ , приложенную посередине балки.

Составим уравнения равновесия балки в следующей форме: одно уравнение проекций и два уравнения моментов. Такой выбор формы уравнений определяется тем, что в данном случае и в точке  $A$ , и в точке  $B$  пересекаются по две неизвестные силы. Кроме того, для удобства составления уравнений моментов силу  $\vec{F}$  можно разложить на составляющие по

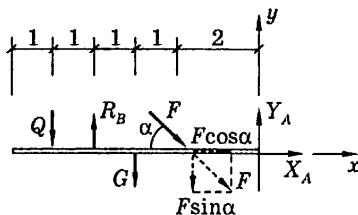


Рис. 12

осям:  $F \cos \alpha$  и  $F \sin \alpha$  и использовать затем теорему Вариньона, согласно которой момент равнодействующей системы сил равен сумме моментов исходных сил.

Уравнения равновесия получаем в виде

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & F \cos \alpha + X_A &= 0; \\ \sum M_A(\bar{F}_k) &= 0; & Q \cdot 5 - R_B \cdot 4 + G \cdot 3 + F \sin \alpha \cdot 2 &= 0; \\ \sum M_B(\bar{F}_k) &= 0; & Q \cdot 1 - G \cdot 1 - F \sin \alpha \cdot 2 + Y_A \cdot 4 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения с учетом исходных данных, находим

$$X_A = -4,24 \text{ кН}; R_B = 15,6 \text{ кН}; Y_A = 2,62 \text{ кН}.$$

Отрицательный знак у величины  $X_A$  указывает на то, что ее действительное направление противоположно принятому.

Силу, передаваемую через шарнир  $A$ , можно вычислить, складывая векторно реакции  $X_A$  и  $Y_A$ :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 4,98 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности решения можно составить, например, сумму проекций сил на ось  $y$  и убедиться в том, что она (с небольшой погрешностью, определенной приближенностью вычислений) равна нулю:

$$\sum F_{ky} = -Q + R_B - G - F \sin \alpha + Y_A = 0.$$

О т в е т:  $X_A = -4,24 \text{ кН}; R_B = 15,6 \text{ кН}; Y_A = 2,62 \text{ кН}.$

## ЗАДАЧА 2

Определить реакции в заделке невесомой консольной балки (рис. 13), находящейся под действием пары сил с моментом  $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$  и линейно распределенной нагрузкой с максимальной интенсивностью  $q_{\max} = 1,5 \text{ кН/м}$ . Длина балки  $l = 12 \text{ м}$ .

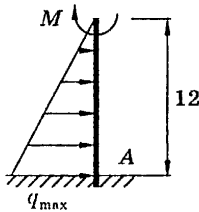


Рис. 13

Решение. Воспользуемся принципом освобождения от связей, отбросим связи и введем реакции, которые для заделки будут представлять собой две составляющие силы реакции по осям  $X_A$  и  $Y_A$  и пару с моментом  $M_A$  — моментом заделки (рис. 14).



Кроме того, распределенную силу заменим сосредоточенной, равной в данном случае площади треугольника нагрузки:

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} l = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 12 = 9 \text{ кН},$$

и проходящей через центр тяжести этого треугольника, то есть на расстоянии  $1/3$  от основания и  $2/3$  от вершины (4 м и 8 м).

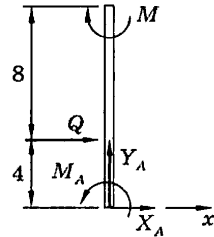


Рис. 14

Для расчетной схемы составляем два уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$  и одно уравнение моментов относительно точки  $A$ :

$$x : X_A + Q = 0; \quad y : Y_A = 0;$$

$$M_A : M_A - Q \cdot 4 - M = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$X_A = -Q = -9 \text{ кН}; \quad Y_A = 0;$$

$$M_A = Q \cdot 4 + M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, реакция в заделке представлена силой 9 кН, направленной влево, и парой с моментом 40 кН·м, действующей против часовой стрелки.

Ответ:  $X_A = -9 \text{ кН}; Y_A = 0; M_A = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

### ЗАДАЧА 3

Однородный стержень  $AB$  (рис. 15) длиной  $2l$  опирается на гладкий выступ в точке  $D$  и удерживается невесомой нитью  $OA$  длиной  $l$ . Определить угол  $\varphi$  между линией стержня и горизонтом. Расстояние  $|OD|$  равно  $l$ .

Решение. Освободимся от связей и введем реакции (рис. 16):

Из геометрии имеем  $|DE| = |AK| = l \sin 2\varphi$ .

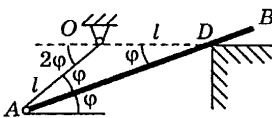


Рис. 15

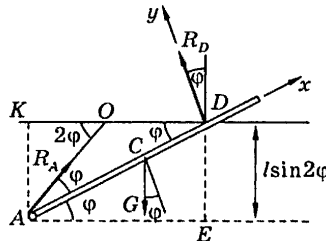


Рис. 16

Тогда

$$|AD| = \frac{|DE|}{\sin \varphi} = 2l \cos \varphi,$$

и  $|CD| = 2l \cos \varphi - l = l(2 \cos \varphi - 1)$ .

Составляем уравнения равновесия:

$$x: R_A \cos \varphi - G \sin \varphi = 0;$$

$$y: R_A \sin \varphi - G \cos \varphi + R_D = 0;$$

$$M_D: -R_A \sin \varphi \cdot 2l \cos \varphi + G \cos \varphi l(2 \cos \varphi - 1) = 0.$$

Из первого уравнения следует  $R_A = G \operatorname{tg} \varphi$ ; подставляя это выражение в третье уравнение, после сокращения получаем  $-2 \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi - \cos \varphi = 0$ , или  $4 \cos^2 \varphi - \cos \varphi - 2 = 0$ .

Отсюда

$$\cos \varphi = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{33}) \approx 0,843$$

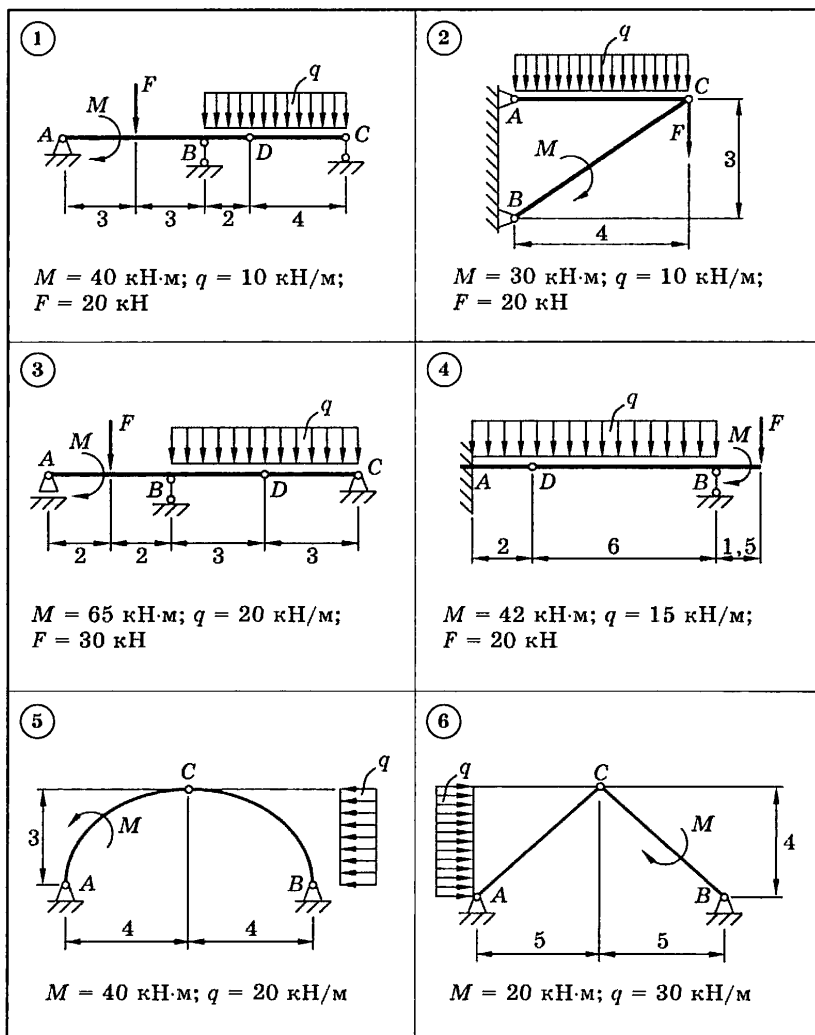
и  $\varphi = \arccos 0,843 \approx 32,5^\circ$ .

Ответ:  $\varphi \approx 32,5^\circ$ .

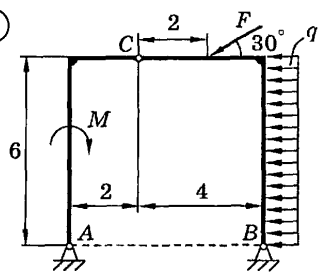
### ЗАДАНИЕ С3

## ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ (СИСТЕМА ТЕЛ)

Для представленных на схемах 1–30 составных конструкций найти реакции опор. Размеры указаны в метрах. Весом элементов конструкций пренебречь.

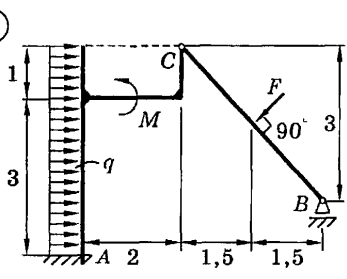


7



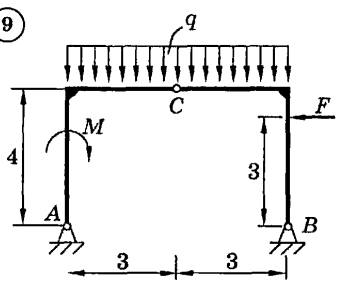
$M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 10 \text{ кН/м};$   
 $F = 15 \text{ кН}$

8



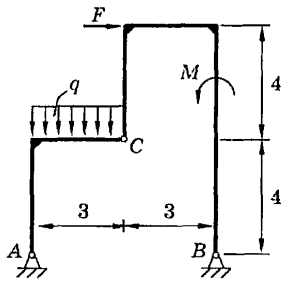
$M = 11 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 4 \text{ кН/м};$   
 $F = 13 \text{ кН}$

9



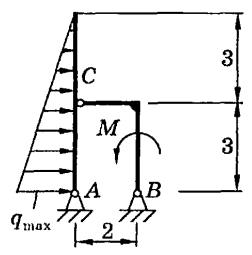
$M = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 20 \text{ кН/м};$   
 $F = 30 \text{ кН}$

10



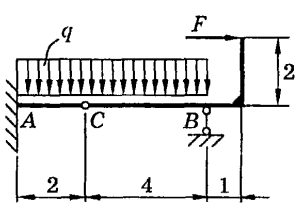
$M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 10 \text{ кН/м};$   
 $F = 20 \text{ кН}$

11



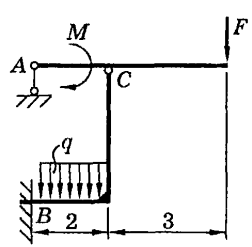
$M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q_{\text{max}} = 40 \text{ кН/м}$

12



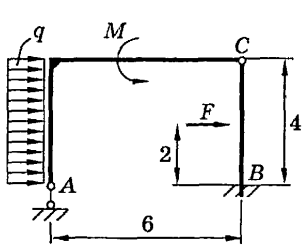
$q = 20 \text{ кН/м}; F = 50 \text{ кН}$

13

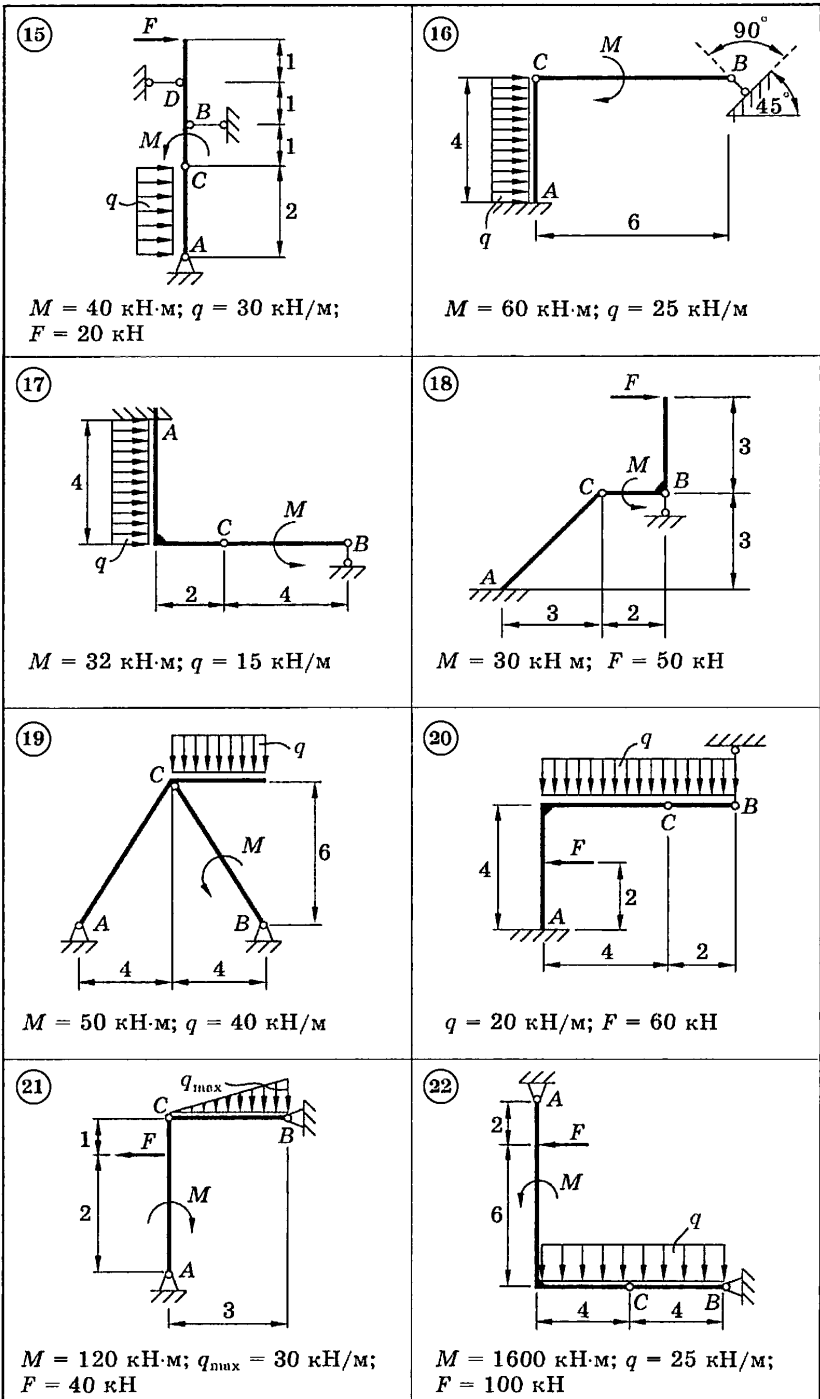


$M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 20 \text{ кН/м};$   
 $F = 20 \text{ кН}$

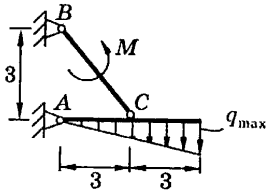
14



$M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 10 \text{ кН/м};$   
 $F = 30 \text{ кН}$

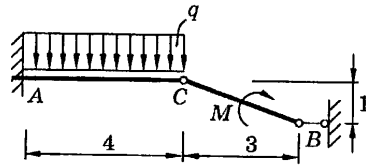


23



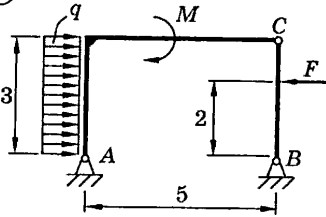
$M = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}; q_{\text{max}} = 12 \text{ кН/м}$

24



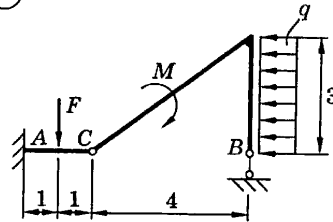
$M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 40 \text{ кН/м}$

25



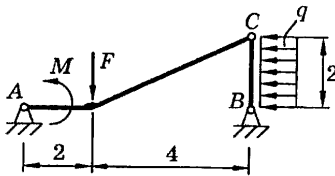
$M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 20 \text{ кН/м}; F = 60 \text{ кН}$

26



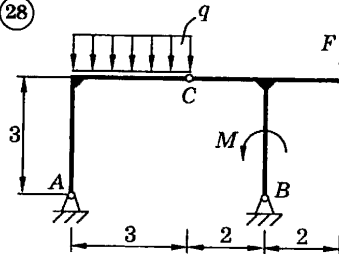
$M = 35 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 30 \text{ кН/м}; F = 50 \text{ кН}$

27



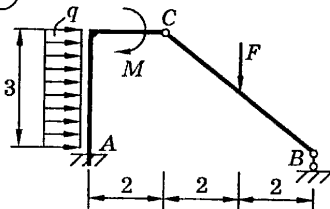
$M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 25 \text{ кН/м}; F = 40 \text{ кН}$

28



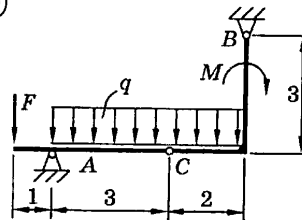
$M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 10 \text{ кН/м}; F = 50 \text{ кН}$

29



$M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 10 \text{ кН/м}; F = 30 \text{ кН}$

30



$M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 20 \text{ кН/м}; F = 100 \text{ кН}$

## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

### ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ (СИСТЕМА ДВУХ ТЕЛ)

#### ЗАДАЧА 1

Конструкция состоит из двух невесомых балок, шарнирно соединенных в точке  $C$  (рис. 17). Балка  $AC$  опирается в точке  $B$  на шарнирно-неподвижную опору и удерживается на левом конце опорным стержнем. Балка  $CD$  опирается правым концом на абсолютно гладкую плоскость, составляющую угол  $\alpha = 60^\circ$  с горизонтом. На систему действует пара сил с моментом  $M = 20$  кН·м и равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью  $q = 2$  кН/м. Определить реакции опор и усилие, передаваемое через шарнир. Геометрические размеры даны в метрах.

**Решение.** Если рассмотреть равновесие всей конструкции в целом, освободиться от связей и ввести реакции, учитывая, что реакция прямолинейного опорного стержня направлена по стержню, реакция шарнирно-неподвижной опоры имеет неизвестное направление и ее следует разложить на составляющие по осям, а реакция при опирании тела на абсолютно гладкую плоскость перпендикулярна этой плоскости (нормальная реакция), то расчетная схема будет иметь вид, показанный на рис. 18.

Здесь распределенная нагрузка заменена сосредоточенной силой

$$Q = q \cdot 6 = 12 \text{ кН.}$$

Система сил на схеме имеет четыре неизвестных, следовательно, они не могут быть определены из трех уравнений для плоской системы сил.

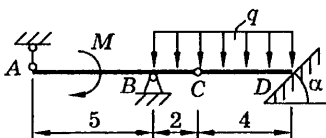


Рис. 17

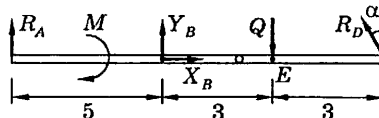


Рис. 18

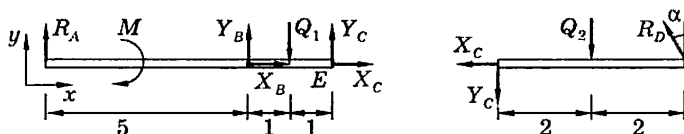


Рис. 19

Для решения задачи расчленим конструкцию на отдельные тела, мысленно разделив ее по шарниру, через который передается усилие неизвестного направления (рис. 19).

При направлении составляющих  $X_C$  и  $Y_C$  для левой и правой балок учтен принцип (закон) равенства действия и противодействия. Введенные силы:

$$Q_1 = q \cdot 2 = 4 \text{ кН}; \quad Q_2 = q \cdot 4 = 8 \text{ кН}.$$

Уравнения для правой части:

$$\begin{aligned} x: & -X_C - R_D \sin \alpha = 0; \\ y: & -Y_C - Q_2 + R_D \cos \alpha = 0; \\ M_D: & Y_C \cdot 4 + Q_2 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $Y_C = -4$  кН;  $R_D = 8$  кН;  $X_C = -4\sqrt{3}$  кН.

Уравнения для левой части:

$$\begin{aligned} x: & X_B + X_C = 0; \\ y: & R_A + Y_B - Q_1 + Y_C = 0; \\ M_B: & -R_A \cdot 5 - M - Q_1 \cdot 1 + Y_C \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $X_B = 4\sqrt{3}$  кН;  $R_A = -6,4$  кН;  $Y_B = 14,4$  кН.

Для проверки правильности полученного решения можно составить уравнения равновесия для всей конструкции (рис. 18), например:

$$\begin{aligned} \sum M_E(\bar{F}_k) &= -R_A \cdot 8 - M - Y_B \cdot 3 + R_D \cos \alpha \cdot 3 = \\ &= 6,4 \cdot 8 - 20 - 14,4 \cdot 3 + 8 \cdot 1/2 \cdot 3 = 63,2 - 63,2 = 0. \end{aligned}$$

Расчет произведен верно.

Ответ:  $X_B = 4\sqrt{3}$  кН;  $R_A = -6,4$  кН;  $Y_B = 14,4$  кН;  $X_C = -4\sqrt{3}$  кН;  $R_D = 8$  кН;  $Y_C = -4$  кН.

## ЗАДАЧА 2

Конструкция состоит из двух тел, соединенных шарнирно в точке  $C$ . Тело  $AC$  закреплено с помощью заделки, тело  $BC$  имеет шарнирно-подвижную (скользящую) опору (рис. 20). На тела системы действуют распределенная по



линейному закону сила с максимальной интенсивностью  $q_{\max} = 2 \text{ кН/м}$ , сила  $F = 4 \text{ кН}$  под углом  $\alpha = 30^\circ$  и пара сил с моментом  $M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Геометрические размеры указаны в метрах. Определить реакции опор и усилие, передаваемое через шарнир. Вес элементов конструкции не учитывать.

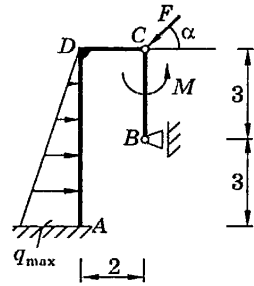


Рис. 20

**Решение.** Если рассмотреть равновесие всей конструкции в целом, учитывая, что реакция заделки состоит из силы неизвестного направления и пары, а реакция скользящей опоры перпендикулярна опорной поверхности, то расчетная схема будет иметь вид, представленный на рис. 21.

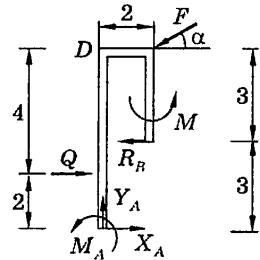


Рис. 21

Здесь равнодействующая распределенной нагрузки

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot 6 = 6 \text{ кН}$$

расположена на расстоянии двух метров ( $1/3$  длины  $AD$ ) от точки  $A$ ;  $M_A$  — неизвестный момент заделки.

В данной системе сил четыре неизвестных реакции ( $X_A, Y_A, M_A, R_B$ ), и их нельзя определить из трех уравнений плоской системы сил.

Поэтому расчленим систему на отдельные тела по шарниру (рис. 22).

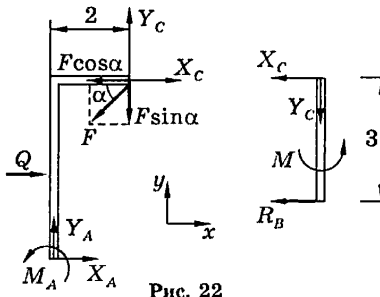


Рис. 22

Силу, приложенную в шарнире, следует при этом учитывать лишь на одном теле (любом из них).

Уравнения для тела  $BC$ :

$$x: -X_C - R_B = 0; \quad y: -Y_C = 0; \quad M_C: M - R_B \cdot 3 = 0.$$

Отсюда  $X_C = -1$  кН;  $Y_C = 0$ ;  $R_B = 1$  кН.

Уравнения для тела AC:

$$x: X_A + Q - F \cos \alpha - X_C = 0;$$

$$y: Y_A - F \sin \alpha + Y_C = 0;$$

$$M_A: M_A - Q \cdot 2 + F \cos \alpha \cdot 6 - F \sin \alpha \cdot 2 + Y_C \cdot 2 - X_C \cdot 6 = 0.$$

Здесь при вычислении момента силы  $F$  относительно точки  $A$  использована теорема Вариньона: сила  $F$  разложена на составляющие  $F \cos \alpha$  и  $F \sin \alpha$  и определена сумма их моментов.

Из последней системы уравнений находим:

$$X_A = -1,54 \text{ кН}; Y_A = 2 \text{ кН}; M_A = -10,8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для проверки полученного решения можно составить суммы проекций и моментов сил для всей конструкции (см. рис. 21), например:

$$\begin{aligned} \sum M_D(\bar{F}_K) &= M_A + X_A \cdot 6 + Q \cdot 4 - F \sin \alpha \cdot 2 + M - R_B \cdot 3 = \\ &= 10,8 - 9,24 + 24 - 4 + 3 - 3 = -27,04 + 27 \approx 0. \end{aligned}$$

Решение выполнено верно. То обстоятельство, что сумма моментов оказалась равна нулю приблизительно, определено погрешностью вычислений.

В данном случае погрешность оказалась равной

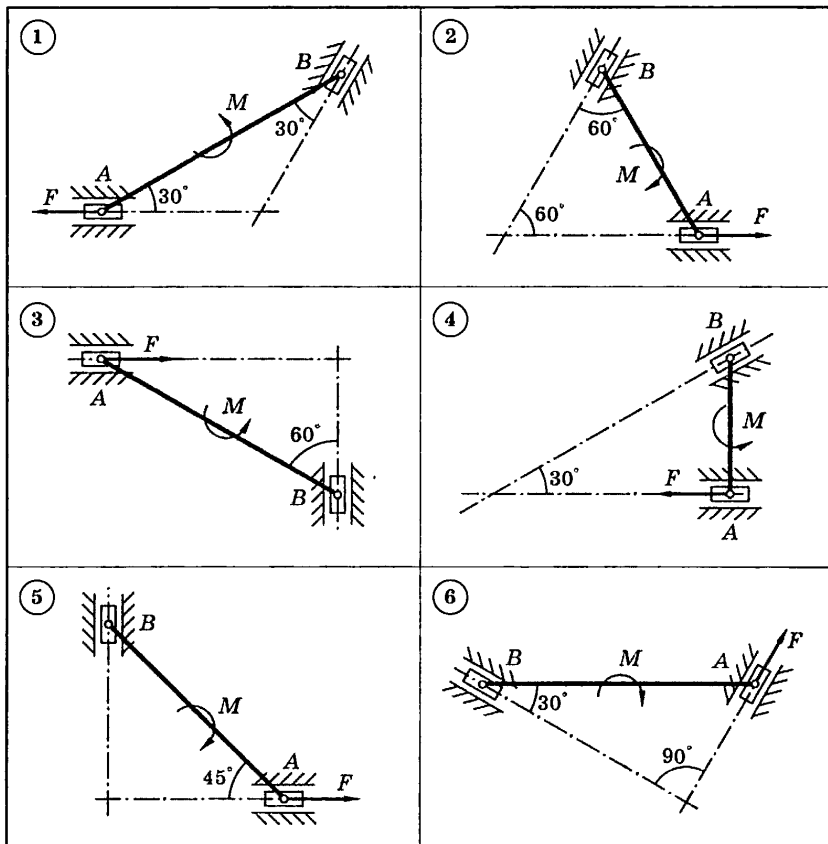
$$\frac{0,04}{27} \approx 0,15\%.$$

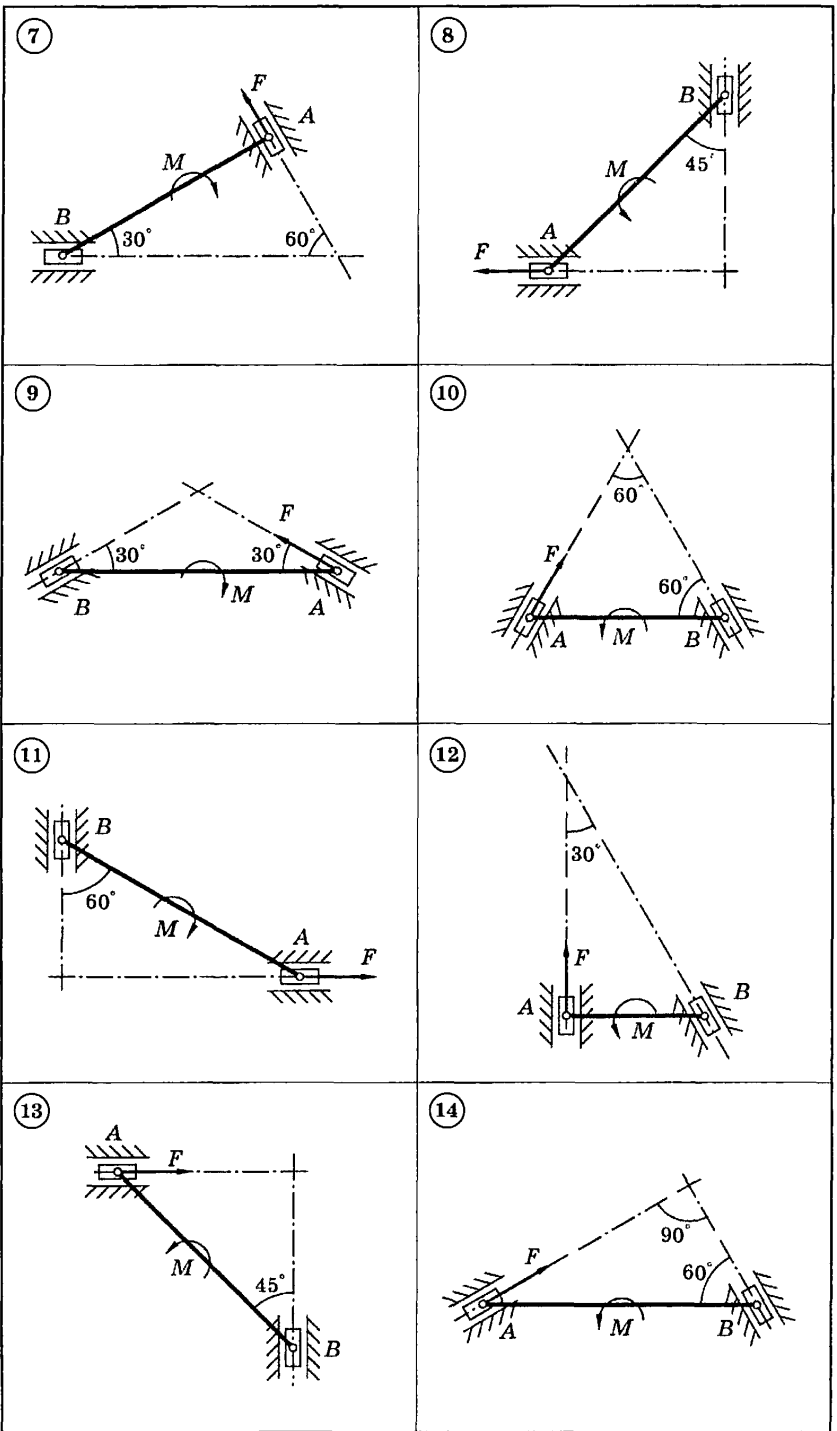
Ответ:  $X_A = -1,54$  кН;  $Y_A = 2$  кН;  $M_A = -10,8$  кН·м;  $X_C = -1$  кН;  $Y_C = 0$ ;  $R_B = 1$  кН.

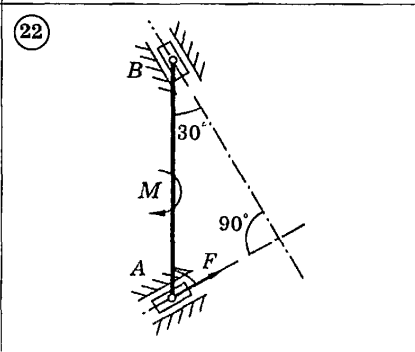
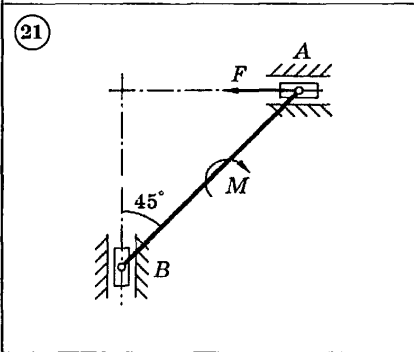
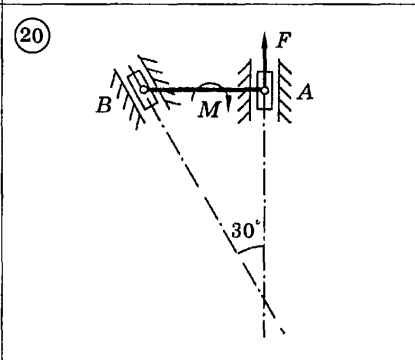
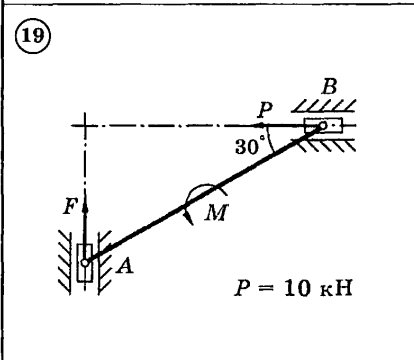
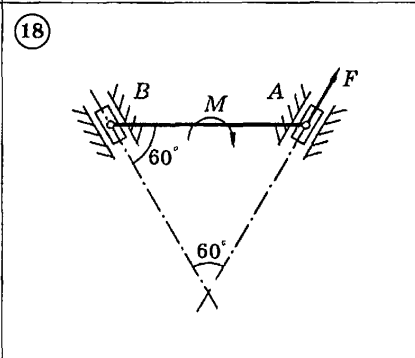
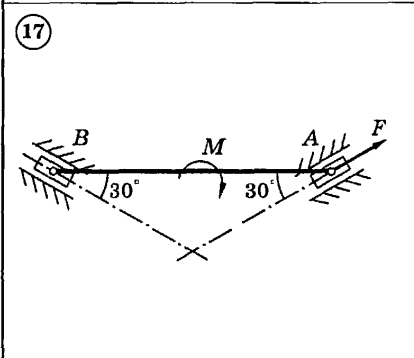
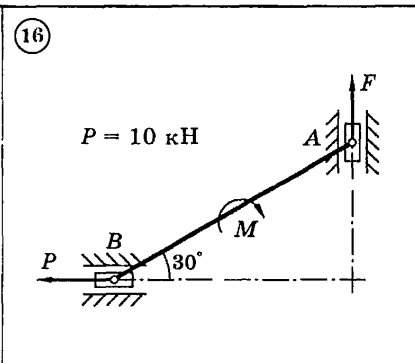
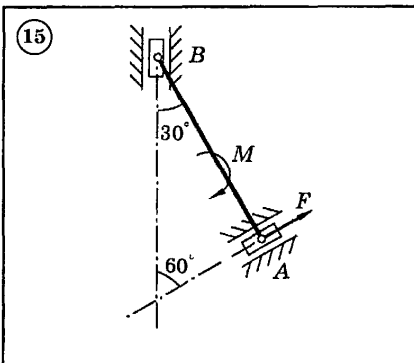
## ЗАДАНИЕ С4

### СИСТЕМА СИЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

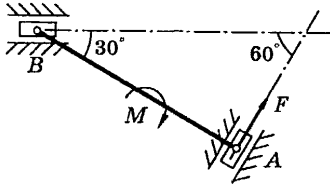
Для представленных на схемах 1–30 механизмов, расположенных в вертикальной плоскости, определить значения силы  $F$  из условия равновесия механизмов. Механизм состоит из однородного тонкого стержня  $AB$  длиной  $l = 4$  м и весом  $G = 15$  кН и двух невесомых ползунов  $A$  и  $B$ , которые могут перемещаться по направляющим. На стержень действует пара сил с моментом  $M = 20$  кН·м. Трение у ползуна  $B$  отсутствует, коэффициент трения ползуна  $A$  по направляющей  $f = 0,4$ . Размерами ползунов пренебречь.



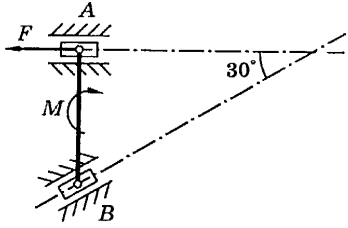




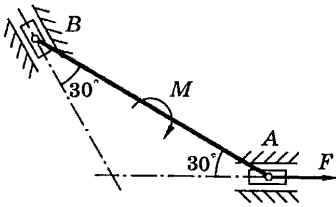
23



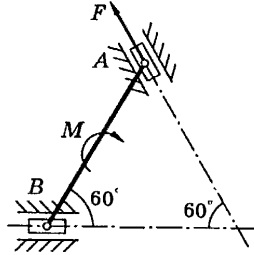
24



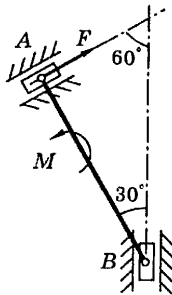
25



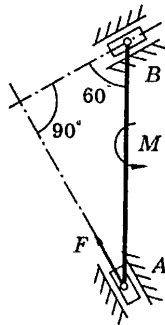
26



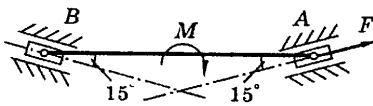
27



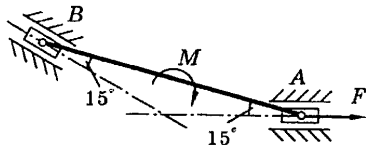
28



29



30



## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

### СИСТЕМА СИЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

#### ЗАДАЧА 1

На верхней грани бруса  $A$  (рис. 23) весом  $G_1 = 200$  Н находится брус  $B$  весом  $G_2 = 100$  Н. Брус  $A$  опирается нижней гранью на горизонтальную поверхность, причем коэффициент трения между ними  $f_1 = 0,1$ . Коэффициент трения между брусами  $f_2 = 0,5$ . На брус  $B$  действует сила  $P = 60$  Н под углом  $\alpha = 30^\circ$ .

Будет ли брус  $B$  двигаться относительно бруса  $A$ ? Будет ли брус  $A$  двигаться относительно горизонтальной поверхности?

**Решение.** Для того чтобы ответить на первый вопрос задачи, следует рассмотреть равновесие бруса  $B$  (рис. 24).

Составим уравнения равновесия в проекциях на оси:

$$x: F_{\text{тр}2} - P \cos \alpha = 0;$$

$$y: N_2 - G_2 - P \sin \alpha = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$F_{\text{тр}2} = P \cos \alpha \approx 52 \text{ Н};$$

$$N_2 = G_2 + P \sin \alpha = 130 \text{ Н}.$$

Учтем теперь закон Кулона для силы трения:  $F_{\text{тр}2}^{\text{max}} = f_2 N_2 = 65$  Н.

Таким образом, сила трения оказалась меньше ее максимального значения, и, следовательно, брус  $B$  двигаться относительно бруса  $A$  не будет.

Для того чтобы ответить на второй вопрос задачи, можно рассмотреть равновесие обоих брусков (рис. 25).

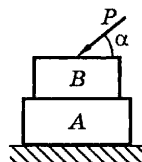


Рис. 23

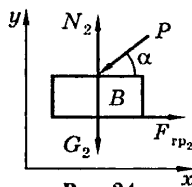


Рис. 24

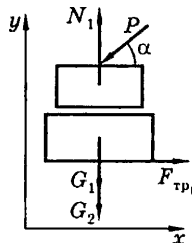


Рис. 25

Составим уравнения равновесия в проекциях на оси:

$$x: F_{\text{тр}1} - P \cos \alpha = 0;$$

$$y: N_1 - G_1 - G_2 - P \sin \alpha = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$F_{\text{тр}1} = P \cos \alpha \approx 52 \text{ Н};$$

$$N_1 = G_1 + G_2 + P \sin \alpha = 330 \text{ Н}.$$

Учтем теперь закон Кулона для силы трения

$$F_{\text{тр}1}^{\text{max}} = f_1 N_1 = 33 \text{ Н}.$$

Таким образом, в этом случае необходимая для равновесия сила трения оказалась больше ее максимального значения, и, следовательно, брус  $A$  станет двигаться относительно горизонтальной поверхности.

О т в е т. Брусы будут двигаться вместе относительно горизонтальной поверхности.

## ЗАДАЧА 2

Лестница весом  $G = 100 \text{ Н}$  опирается на горизонтальный пол и вертикальную стену (рис. 26). Стена гладкая, а трение лестницы о пол характеризуется коэффициентом трения между ними  $f = 0,4$ . Под каким углом  $\alpha$  следует поставить лестницу, чтобы по ней мог подняться наверх человек  $G_1 = 800 \text{ Н}$ ?

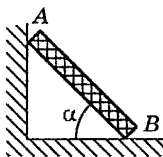


Рис. 26

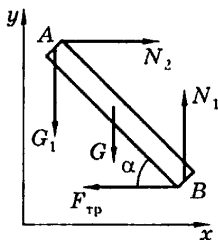


Рис. 27

**Решение.** Покажем на схеме силы, действующие на лестницу с поднявшимся наверх человеком (рис. 27): силы тяжести, нормальные реакции и силу трения, направив ее противоположно возможному движению. Составим уравнения равновесия в виде двух уравнений проекций сил на оси и уравнения моментов сил относительно точки  $B$ , обозначив длину лестницы буквой  $l$ .



$$x: N_2 - F_{\text{тр}} = 0; \quad y: N_1 - G - G_1 = 0;$$

$$M_B: G_1 l \cos \alpha + G \frac{l}{2} \cos \alpha - N_2 l \sin \alpha = 0.$$

Последнее уравнение после его деления на  $l \cos \alpha$  принимает вид

$$G_1 + 0,5G - N_2 \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Учтем также, рассматривая предельное состояние равновесия, соответствующее минимальному значению угла  $\alpha$ , закон Кулона для силы трения:

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}^{\max} = fN_1.$$

Из этих уравнений найдем  $N_2 = F_{\text{тр}} = f(G + G_1)$ ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2G_1 + G}{2f(G_1 + G)} \approx 2,36; \quad \alpha = \operatorname{arctg} 2,36 \approx 67^\circ.$$

Ответ:  $\alpha \geq 67^\circ$ .

### ЗАДАЧА 3

Определить силу  $F$ , необходимую для равномерного качения катка радиусом  $r = 30$  см и весом  $G = 300$  кН по горизонтальной плоскости (рис. 28), если коэффициент трения качения  $f_k = 0,5$  см, а угол  $\alpha = 30^\circ$ .

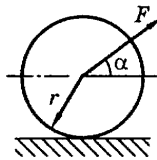


Рис. 28

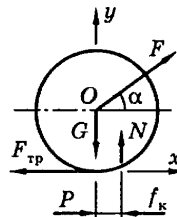


Рис. 29

Решение.

*Первый вариант.* Рассмотрим силы, действующие на каток (рис. 29). Сопротивление качению учтем за счет смещения нормальной реакции на величину  $f_k$  (первая модель учета сопротивления качению). Составим уравнения для плоской системы сил:

$$x: F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0; \quad y: N - G + F \sin \alpha = 0$$

$$M_P: -F \cos \alpha \cdot r + N f_k = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$N = F \frac{r \cdot \cos \alpha}{f_k}; \quad F = \frac{G}{\sin \alpha + \frac{r \cdot \cos \alpha}{f_k}} = 5,72 \text{ кН};$$

$$F_{\text{тр}} = F \cos \alpha = 4,95 \text{ кН}; \quad N = 297 \text{ кН}.$$

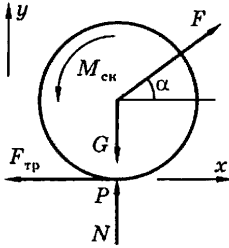


Рис. 30

*Второй вариант.* Рассмотрим расчетную схему (рис. 30), учитывая сопротивление качению за счет введения момента сопротивления качению:

$$M_{\text{ск}} = N f_k, \quad (*)$$

не смещая нормальную реакцию (вторая модель учета сопротивление качению).

Уравнения равновесия:

$$x: F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0; \quad y: N - G + F \sin \alpha = 0;$$

$$M_P: -F \cos \alpha \cdot r + M_{\text{ск}} = 0.$$

Решая эту систему уравнений, с учетом равенства (\*), приходим к тем же результатам, что и в первом варианте.

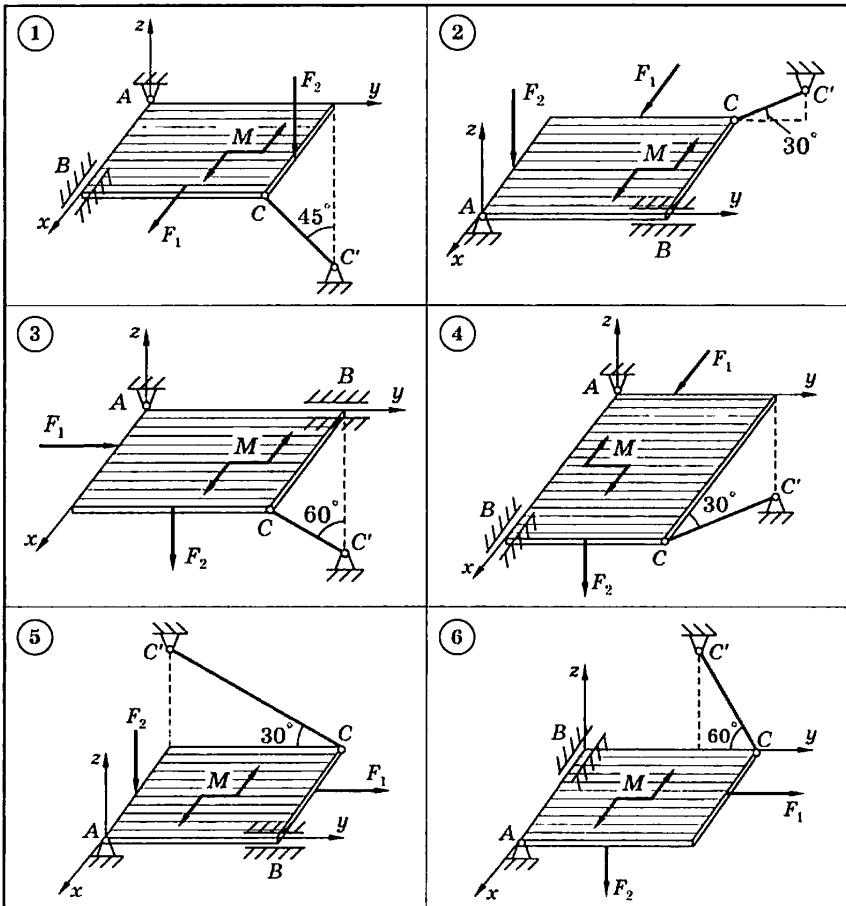
3. Отметим, что для того, чтобы качение катка происходило без проскальзывания, коэффициент трения скольжения должен быть достаточно большим, а именно:  $f > \frac{f_k}{r}$ , и в нашем случае  $f > \frac{1}{60}$ .

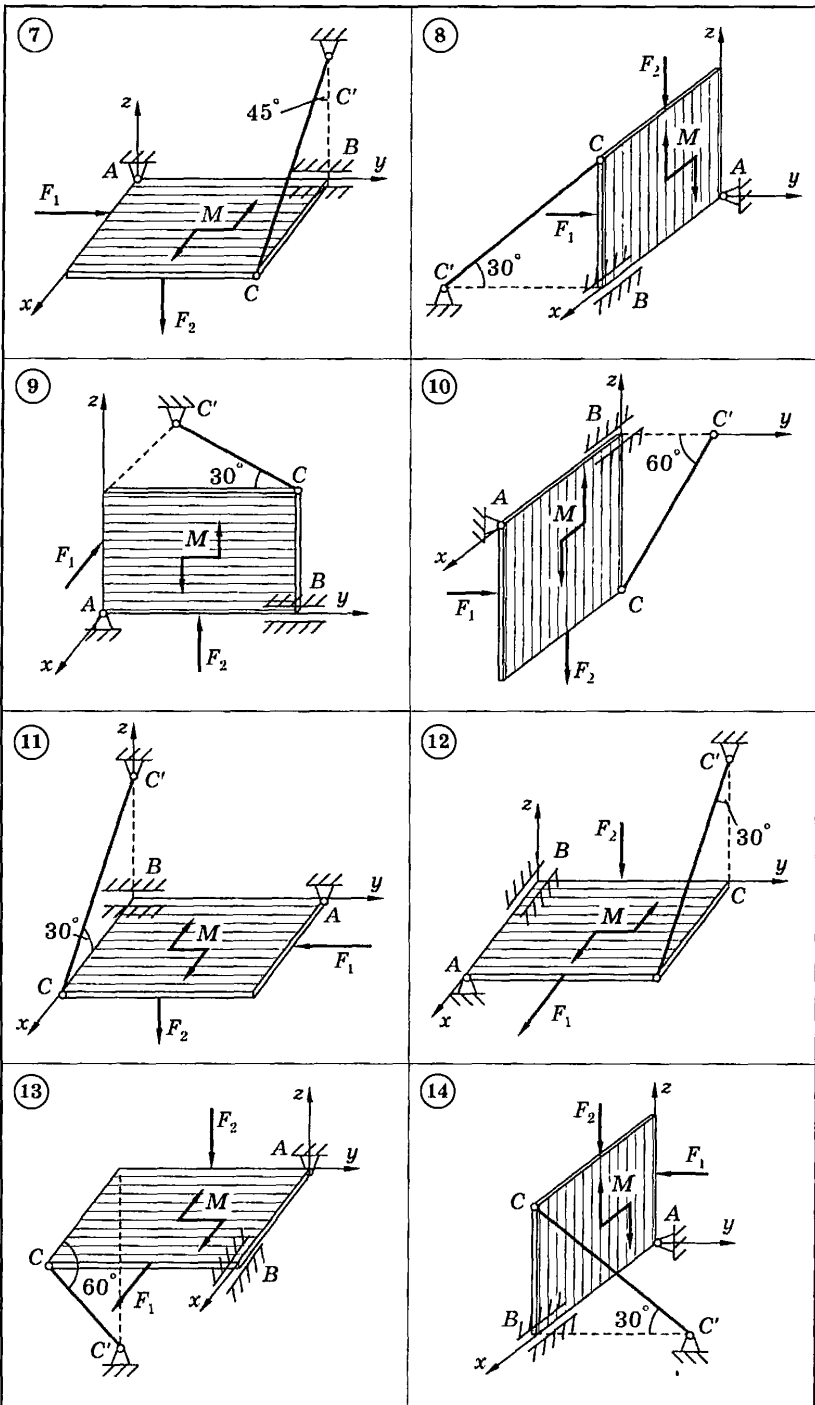
Ответ:  $F = 5,72 \text{ кН}$ .

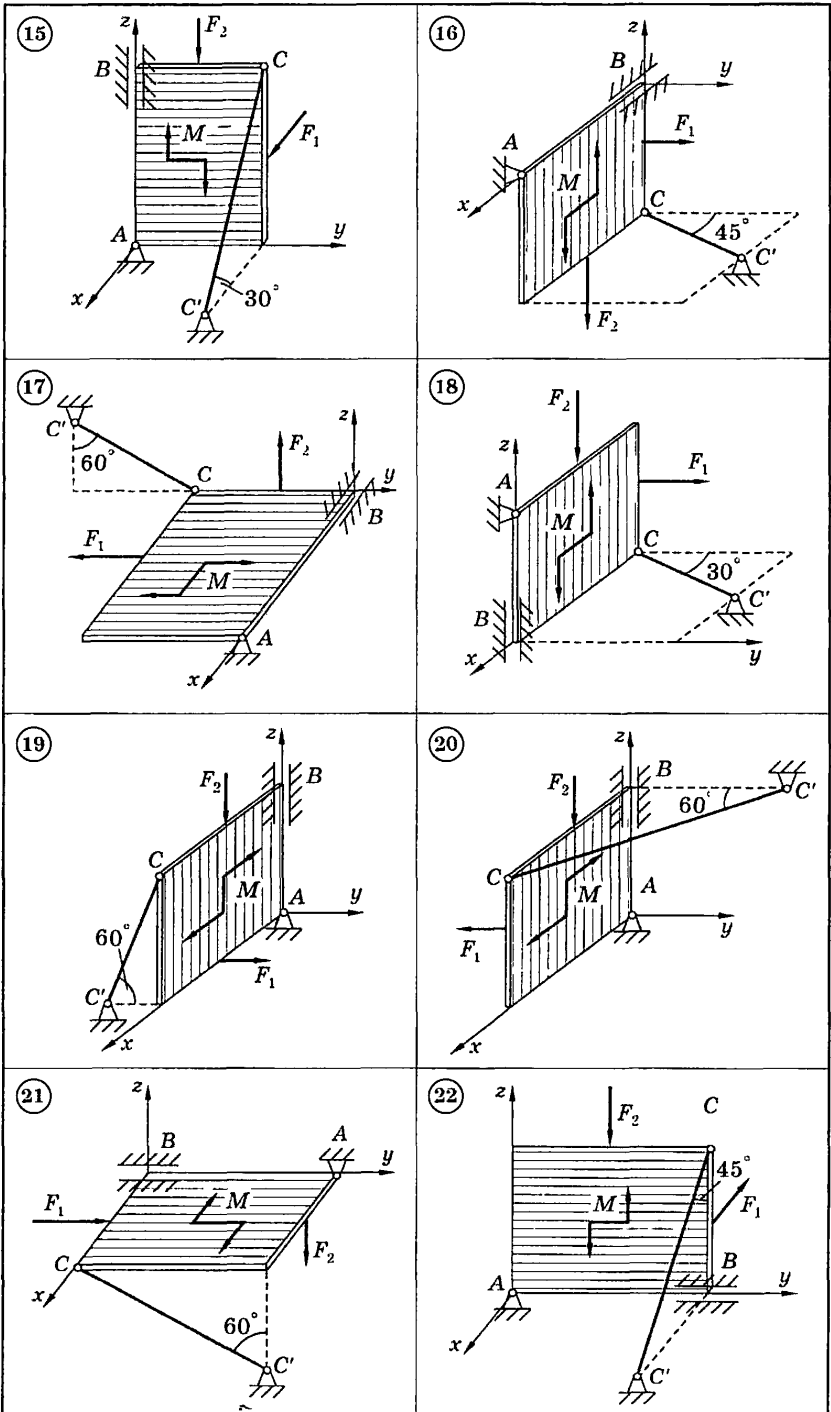
## ЗАДАНИЕ С5

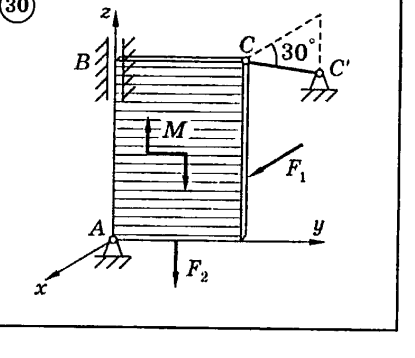
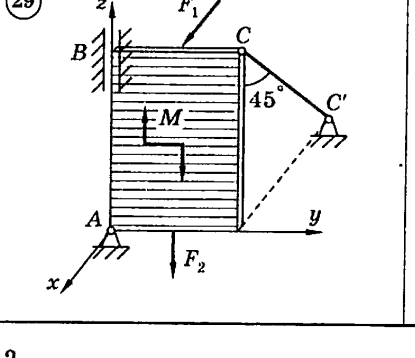
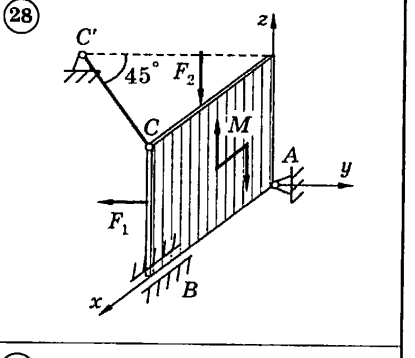
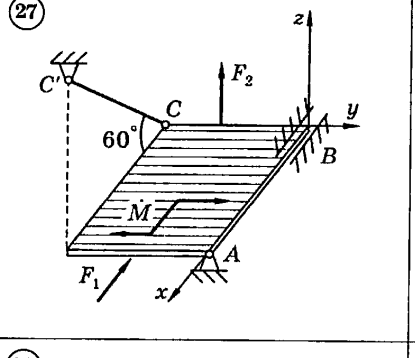
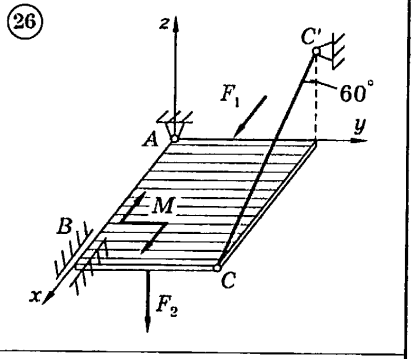
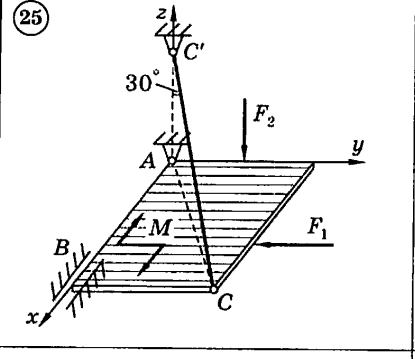
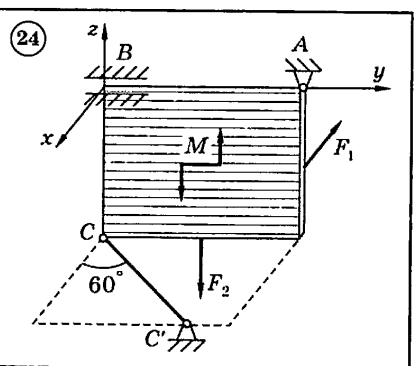
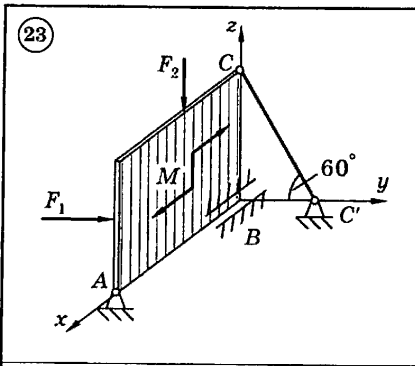
### ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Для представленных на схемах 1–30 тел определить реакции опор. Тело представляет собой однородную прямоугольную плиту весом  $G = 12$  кН, имеющую размеры  $|AB| = 6$  м и  $|BC| = 2$  м. Плита закреплена с помощью трех опор: шарнирно-неподвижной опоры (сферический шарнир) в точке  $A$ , подшипниковой опоры в точке  $B$  и опорного стержня в точке  $C$ . На плиту действует: пара сил с моментом  $M = 10$  кН·м, и в серединах соответствующих сторон — горизонтальная сила  $F_1 = 6$  кН и вертикальная сила  $F_2 = 8$  кН.









# ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

### ЗАДАЧА 1

Конструкция, состоящая из двух жестко соединенных прямоугольных однородных плит — вертикальной 1 и горизонтальной 2 (рис. 31), закреплена с помощью трех опор: шарнирно-неподвижной опоры (сферический шарнир) в точке  $A$ , короткой подшипниковой опоры в точке  $B$  и горизонтального опорного стержня в точке  $C$ . Вес плит:  $G_1 = 3$  кН,  $G_2 = 2$  кН. На плиту 2 в горизонтальной плоскости действует сила  $F = 6$  кН под углом  $\alpha = 30^\circ$ , а в плоскости плиты 1 действует пара сил с моментом  $M = 4$  кН·м. Геометрические размеры в метрах показаны на рисунке. Требуется определить величины реакций опор.

**Решение.** Воспользуемся принципом освобожденности от связей, мысленно отбросим опоры и введем реакции. В сферическом шарнире реакцию неизвестного направления разложим на составляющие по осям  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ ; опора в точке  $B$  не препятствует движению вдоль оси  $x$ , и реакция будет иметь только составляющие  $\bar{Y}_B$  и  $\bar{Z}_B$ ; реакция опорного стержня  $\bar{R}_C$  направлена по оси стержня (рис. 32). Учтем также силы тяжести плит  $\bar{G}_1$  и  $\bar{G}_2$ .

Получили расчетную схему с шестью неизвестными реакциями. Поскольку число уравнений равновесия для произвольной пространственной системы сил также равно шести, то система является статически определимой.

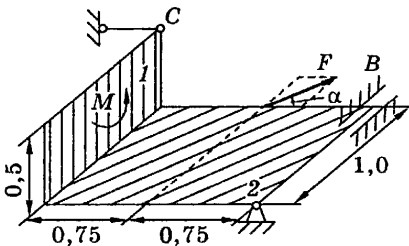


Рис. 31

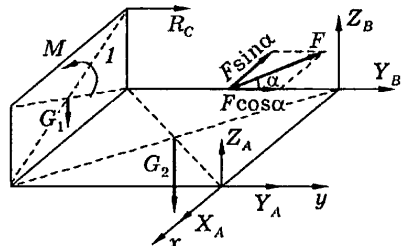


Рис. 32

Начало координат системы отсчета лучше всего взять в точке  $A$  (см. рис. 32), где проходят линии действия максимального числа неизвестных реакций.

Составляем уравнения проекций сил на координатные оси:

$$\begin{aligned}x: X_A - F \sin \alpha &= 0; \\y: Y_A + Y_B + R_C + F \cos \alpha &= 0; \\z: Z_A + Z_B - G_1 - G_2 &= 0.\end{aligned}$$

При составлении уравнений моментов сил относительно координатных осей применим известный способ вычисления момента силы относительно любой оси:

1. Сила проектируется на плоскость, перпендикулярную оси.

2. Определяется произведение модуля этой проекции на ее плечо относительно точки пересечения оси с плоскостью.

3. Вычисляется момент силы относительно оси как это произведение, взятое со знаком «плюс» или «минус».

Правило взятия знака следующее: если глядя навстречу оси, видеть вращение, которое пытается произвести проекция силы на плоскость, происходящим против часовой стрелки, то берется знак «плюс», иначе берется «минус».

Кроме этого учтем, что 1) пара сил с моментом  $M$  действует в плоскости, перпендикулярной оси  $y$ , и должна войти в соответствующее уравнение; 2) при записи момента силы  $F$  относительно оси  $z$  следует использовать теорему Вариньона, разложив эту силу на составляющие по осям ( $F \cos \alpha$  и  $F \sin \alpha$ ).

Уравнения моментов сил:

$$M_x: G_1 \cdot 1,5 + G_2 \cdot 0,75 - R_C \cdot 0,5 = 0;$$

$$M_y: M + Z_B \cdot 1 - G_1 \cdot 0,5 - G_2 \cdot 0,5 = 0;$$

$$M_z: -Y_B \cdot 1 - R_C \cdot 1 - F \cos \alpha \cdot 1 - F \sin \alpha \cdot 0,75 = 0.$$

Решая получившуюся систему уравнений, находим

$$X_A = F \sin \alpha = 3 \text{ кН}; \quad R_C = 3G_1 + 1,5G_2 = 10,5 \text{ кН};$$

$$Z_B = 0,5(G_1 + G_2) - M = -1,5 \text{ кН}; \quad Z_A = G_1 + G_2 - Z_B = 6,5 \text{ кН};$$

$$Y_B = -(R_C + F \cos \alpha + 0,75F \sin \alpha) \approx -17,9 \text{ кН};$$

$$Y_A = -Y_B - R_C - F \cos \alpha = 2,25 \text{ кН}.$$

Реакции опор в точках  $A$  и  $B$ :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} \approx 7,50 \text{ кН}; \quad R_B = \sqrt{Y_B^2 + Z_B^2} \approx 18,0 \text{ кН}.$$

Ответ:  $R_A = 7,50 \text{ кН}$ ;  $R_B = 18,0 \text{ кН}$ ;  $R_C = 10,5 \text{ кН}$ .



# КИНЕМАТИКА

ЗАДАНИЕ К1  
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

В соответствии с заданными уравнениями движения (варианты 1–30) определить траекторию движения точки. Для заданного момента времени  $t$  найти положение точки на траектории, ее скорость и ускорение (показать их на рисунке), а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Данные, необходимые для вычисления, представлены ниже. Координаты  $x$  и  $y$  даны в метрах, время в секундах.

№ вар.	$x$	$y$	$t$	№ вар.	$x$	$y$	$t$
1	$3t^2 + 6t + 12$	$t^2 + 2t + 6$	2	16	$6t^3 + 12$	$2t^3 + 3$	1
2	$2t$	$2t^2 + 3t + 1$	1	17	$4t + 5$	$5t^2 + 1$	1
3	$2\cos(\pi t)$	$2\sin(\pi t)$	1/4	18	$4\cos(\pi t)$	$4\sin(\pi t)$	1/3
4	$3t + 3$	$-3/(t + 1)$	0	19	$-t - 1$	$-2/(t + 1)$	0
5	$2\cos(\pi t/3)$	$5\sin(\pi t/3)$	1	20	$\cos(\pi t^2/6) + 8$	$5\sin(\pi t^2/6)$	2
6	$8t^2 + 7$	$12t^2 + 11$	1/2	21	$t^4 + 2t + 1$	$2t^4 + 4t + 5$	1
7	$t^2 - 4t + 1$	$t + 1$	1	22	$t^2$	$1,5t - 1$	1
8	$3\cos(\pi t^2/6)$	$3\sin(\pi t^2/6)$	1	23	$9\cos(\pi t^2/4)$	$9\sin(\pi t^2/4)$	1
9	$-2t - 2$	$-4/(t+1)$	0	24	$-5t - 5$	$-5/(t + 1)$	0
10	$4\cos(\pi t/3) + 3$	$9\sin(\pi t/3)$	1	25	$32\cos(\pi t/8)$	$4\sin(\pi t/8)$	2
11	$2t^3 + 8t + 12$	$t^3 + 4t + 3$	1	26	$t^8 + 1$	$t^8 - 6$	1
12	$3t + 1$	$2t^2 + 4$	2	27	$t^2 + 3$	$t + 2$	1
13	$\cos(\pi t^2/3)$	$\sin(\pi t^2/3)$	1	28	$4\cos(t)$	$4\sin(t)$	$\pi/3$
14	$7t + 1$	$-8/(7t + 1)$	4/7	29	$2,5t$	$-10/(5t + 1)$	1
15	$16\cos(\pi t/16)$	$4\sin(\pi t/16)$	4	30	$-\cos(\pi t^2/6)$	$3\sin(\pi t^2/6) + 4$	1

## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

### КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

#### ЗАДАЧА 1

Точка  $M$  движется в плоскости  $xOy$  согласно уравнениям:

$$x = \pi t; \quad y = \sin \pi t,$$

где  $x, y$  — в сантиметрах;  $t$  — в секундах.

Определить траекторию, скорость и ускорение точки, а также радиус кривизны траектории для момента времени  $t = \frac{1}{4}$  с.

**Решение.** Для определения траектории точки исключим из уравнений движения время:  $t = \frac{x}{\pi}$ , тогда  $y = \sin x$ . Траектория точки — синусоида (рис. 33).

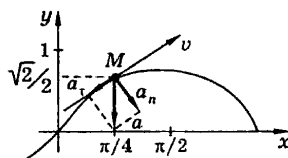


Рис. 33

Определим положение точки на траектории. Имеем при

$$t = \frac{1}{4} \text{ с: } x = \frac{\pi}{4} = 0,785 \text{ см; } y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 \text{ см}$$

— точка  $M$  на траектории.

Получим проекции скорости точки на оси координат, дифференцируя координаты по времени:

$$v_x = \dot{x} = \pi = 3,14 \text{ см/с; } v_y = \dot{y} = \pi \cos \pi t \Big|_{t=\frac{1}{4}} = \pi \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,22 \text{ см/с.}$$

По найденным проекциям определим модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \pi \sqrt{\frac{3}{2}} = 3,85 \text{ см/с.}$$

Определим проекции ускорения точки на оси координат, дифференцируя проекции скорости:

$$a_x = \dot{v}_x = 0; \quad a_y = \dot{v}_y = -\pi^2 \sin \pi t \Big|_{t=\frac{1}{4}} = -\pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -6,98 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 6,98 \text{ см/с}^2.$$

В соответствии с величинами проекций скорости и ускорения изобразим их на рис. 33.

Поскольку точка описывает криволинейную траекторию, то ее ускорение можно представить в виде векторной суммы двух составляющих:  $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ , где  $\vec{a}_\tau$  — касательное ускорение,  $\vec{a}_n$  — нормальное ускорение точки.

Вектор  $\vec{a}_\tau$  направлен по касательной, то есть по одной линии со скоростью; вектор  $\vec{a}_n$  направлен по главной нормали (перпендикулярно касательной) и всегда внутрь траектории.

Модуль касательного ускорения равен

$$a_\tau = \left| \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \right| = \pi^2 \frac{1}{\sqrt{6}} = 4,03 \text{ см/с}^2.$$

В данном случае направления векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{a}_\tau$  противоположны (рис. 33), поэтому движение точки замедленное.

Так как векторы  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  всегда взаимно перпендикулярны, то модуль полного ускорения точки равен  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ .

Отсюда находим модуль нормального ускорения

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \pi^2 \frac{1}{\sqrt{3}} = 5,69 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории определяем из формулы для нормального ускорения  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ , а именно:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2,60 \text{ см.}$$

Ответ:  $v = 3,85 \text{ см/с}$ ;  $a = 6,98 \text{ см/с}^2$ ;  $\rho = 2,60 \text{ см}$ .

## ЗАДАЧА 2

Точка  $M$  движется на плоскости по окружности радиуса  $R = 10 \text{ см}$  согласно уравнению

$$s(t) = 5\pi \sin \frac{\pi}{6} t \text{ см.}$$

Найти положение точки на траектории, а также скорость и ускорение точки в момент времени  $t = 7 \text{ с}$ .

Решение. При задании движения точки естественным способом должны быть известны ее траектория, начало отсчета, положительное направление дуговой координаты, а также уравнение движения точки по траектории  $s(t)$ .

Выберем в качестве начала отсчета верхнюю точку окружности и положительное направление — по часовой стрелке.

При  $t = 7$  с положение точки  $M$  на траектории (рис. 34) определяется величиной дуговой координаты

$$s(7) = 5\pi \sin \frac{7}{6}\pi = -2,5\pi,$$

что соответствует углу  $\alpha = \frac{|s|}{R} = \frac{\pi}{4}$  рад =  $45^\circ$ .

При естественном способе задания движения точки ее скорость определяется выражением  $\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}$ , где  $v_\tau$  — проекция скорости на касательную, которая равна производной по времени от дуговой координаты  $v_\tau = \dot{s} = \frac{5}{6}\pi^2 \cos \frac{\pi}{6}t$ .

При  $t = 7$  с получаем  $v_\tau = -7,12$  см/с, и модуль скорости равен  $v = 7,12$  см/с.

Знак «минус» у величины  $v_\tau$  означает, что точка движется в сторону убывания дуговой координаты  $s(t)$ , то есть в сторону ее отрицательных значений.

Ускорение точки является векторной суммой двух его составляющих:  $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ , где  $\vec{a}_\tau$  — касательное ускорение,  $\vec{a}_n$  — нормальное ускорение.

Направление вектора  $\vec{a}_\tau$  определяется знаком величины  $\dot{v}_\tau$ , вектор  $\vec{a}_n$  всегда направлен перпендикулярно касательной внутрь траектории. Проекция ускорения точки на касательную равна  $a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{s} = -\frac{5}{36}\pi^3 \sin \frac{\pi}{6}t$ .

При  $t = 7$  с получаем  $a_\tau = 2,15$  см/с<sup>2</sup>.

Знаки  $v_\tau$  и  $a_\tau$  различны, поэтому движение точки по траектории в данный момент времени является замедленным.

Модуль нормального ускорения равен

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = 5,07 \text{ см/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 5,51 \text{ см/с}^2.$$

Векторы  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}_\tau$ ,  $\vec{a}_n$ ,  $\vec{a}$  показаны на рис. 34.

Ответ:  $v = 7,12$  см/с;  $a = 5,51$  см/с<sup>2</sup>.

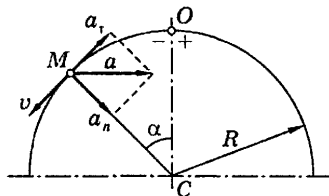


Рис. 34

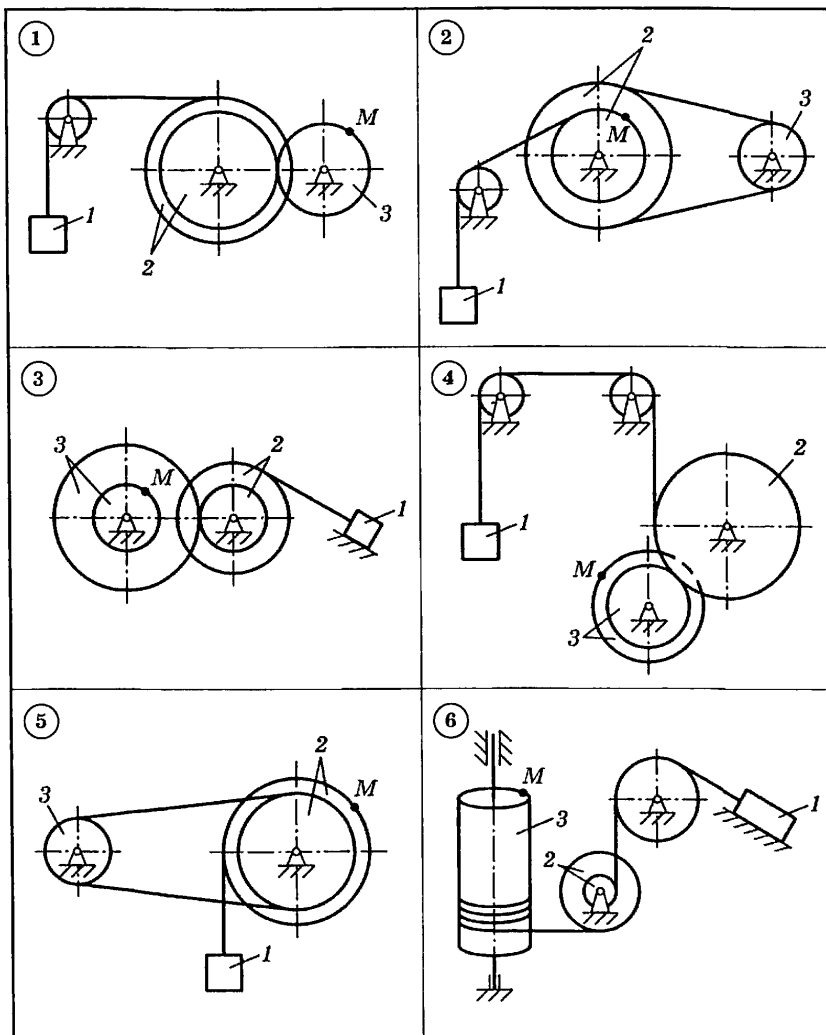
## ЗАДАНИЕ К2

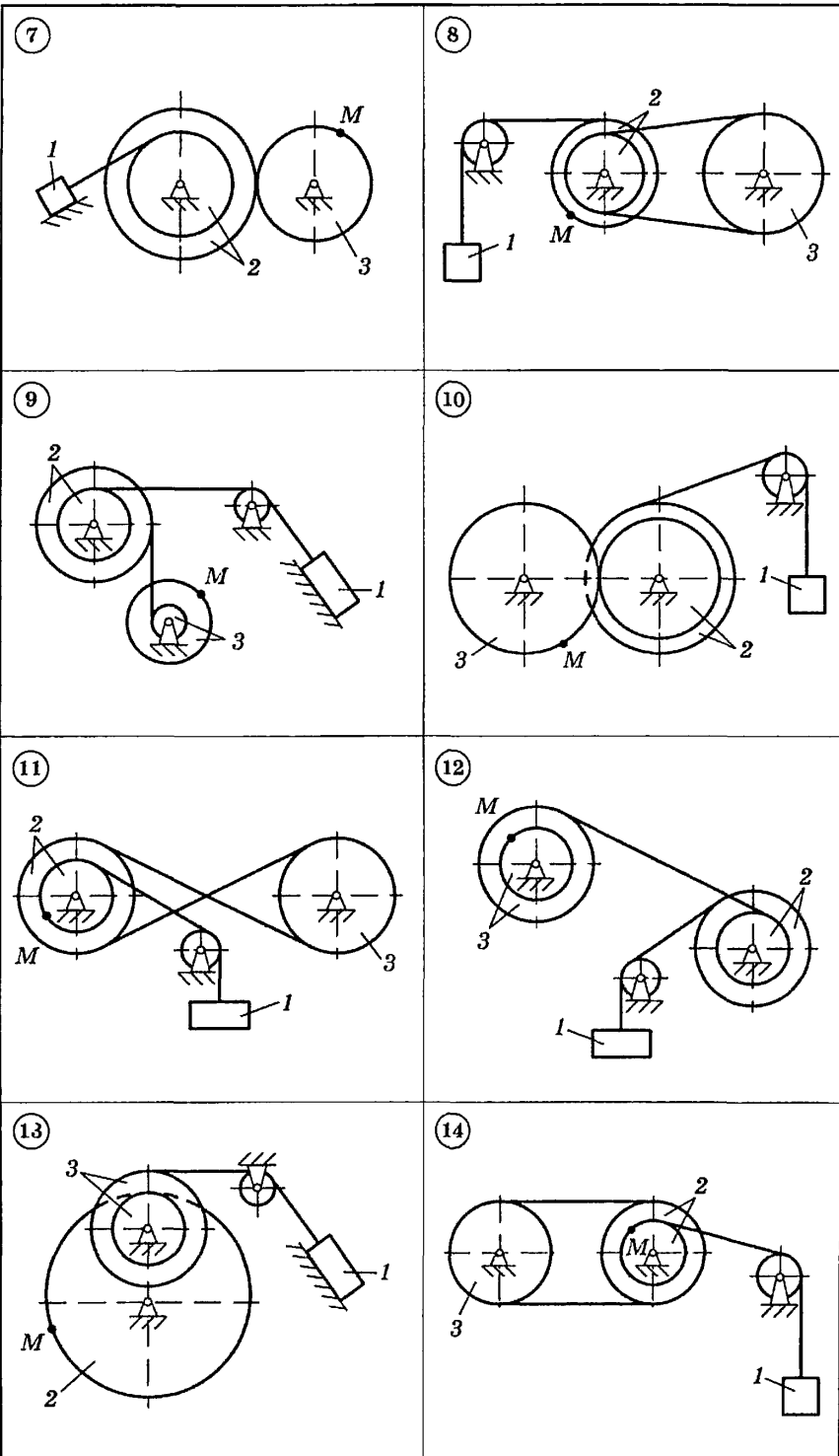
# ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для приведенных ниже схем механизмов 1–30 по известным характеристикам движения груза 1 — скорости  $v_{1x}$  и ускорению  $a_{1x}$ , или по заданному уравнению движения тела 1 —  $x(t)$ , или по заданному уравнению движения вала 3 —  $\varphi_3(t)$  определить и показать на рисунке скорость и ускорение точки  $M$ , а также скорость и ускорение груза 1 в данный момент времени. Исходные данные, включая радиусы шестерен, шкивов и барабанов, приведены в таблице.

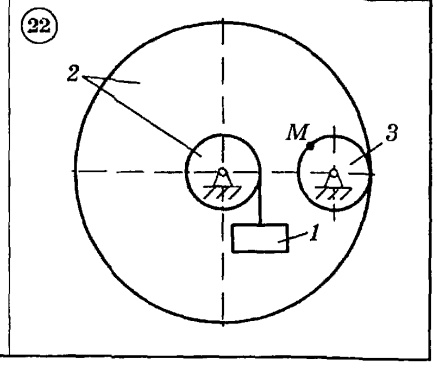
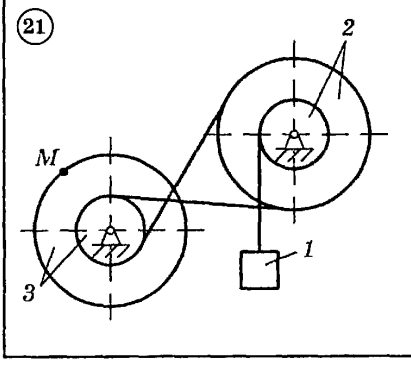
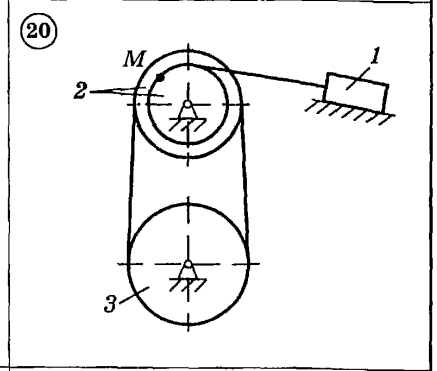
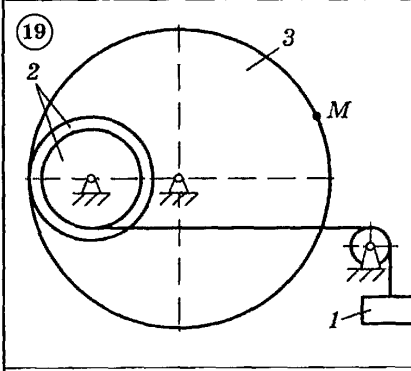
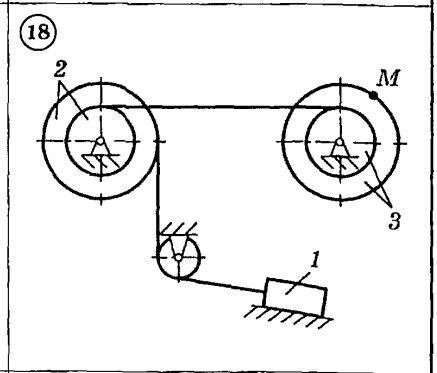
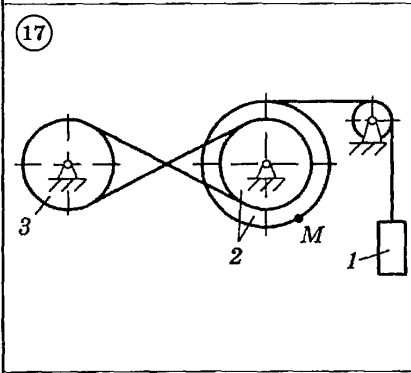
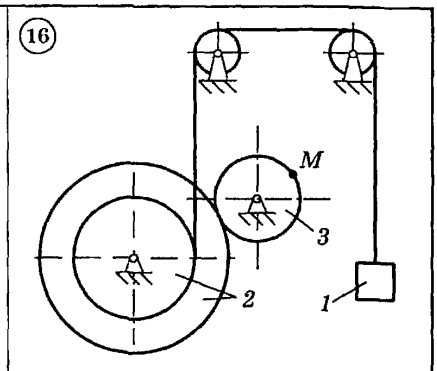
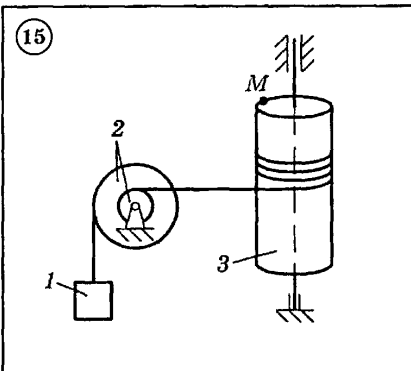
№ вар.	Характеристики или уравнения движения	Радиусы, см				Время, с
		$R_2$	$r_2$	$R_3$	$r_3$	
1	$v_{1x} = 0,5 \text{ м/с}; a_{1x} = -0,7 \text{ м/с}^2$	60	45	36	—	—
2	$\varphi_3 = 3t^2 + 5 \text{ рад}$	40	25	20	—	1
3	$x = 5t^2 \text{ м}$	20	10	30	10	0,5
4	$v_{1x} = 0,25 \text{ м/с}; a_{1x} = 0,6 \text{ м/с}^2$	80	—	60	45	—
5	$\varphi_3 = 0,5t^3 - 2t^2 \text{ рад}$	20	15	10	—	2
6	$x = 12,8t^3 \text{ м}$	40	20	100	—	0,25
7	$v_{1x} = -0,5 \text{ м/с}; a_{1x} = 1,0 \text{ м/с}^2$	100	60	75	—	—
8	$\varphi_3 = t - 2e^{0,5t} \text{ рад}$	30	20	40	—	1
9	$x = 42t - 0,6t^3 \text{ м}$	40	30	30	15	5
10	$v_{1x} = 1,0 \text{ м/с}; a_{1x} = 2,0 \text{ м/с}^2$	60	45	60	—	—
11	$\varphi_3 = t^3 - 7t \text{ рад}$	15	10	15	—	2
12	$x = 42t - 5t^2 \text{ м}$	30	15	40	20	4
13	$v_{1x} = 0,6 \text{ м/с}; a_{1x} = -0,9 \text{ м/с}^2$	80	—	45	30	—
14	$\varphi_3 = 4t - 0,5t^2 \text{ рад}$	15	10	15	—	3
15	$x = 4(1 + e^{-0,8t}) \text{ м}$	50	20	60	—	1
16	$v_{1x} = 1,5 \text{ м/с}; a_{1x} = 4,5 \text{ м/с}^2$	100	60	30	—	—
17	$\varphi_3 = 5[1 - \cos(\pi t/6)] \text{ рад}$	20	15	15	—	1
18	$x = 5t - 0,5t^3 \text{ м}$	32	16	32	16	2
19	$v_{1x} = 0,4 \text{ м/с}; a_{1x} = 0,4 \text{ м/с}^2$	45	35	105	—	—
20	$\varphi_3 = 8\sin(\pi t/3) \text{ рад}$	15	10	20	—	1
21	$x = 5t - 15\sin(\pi t/6) \text{ м}$	40	18	40	18	2
22	$v_{1x} = 0,8 \text{ м/с}; a_{1x} = 12,8 \text{ м/с}^2$	35	10	10	—	—

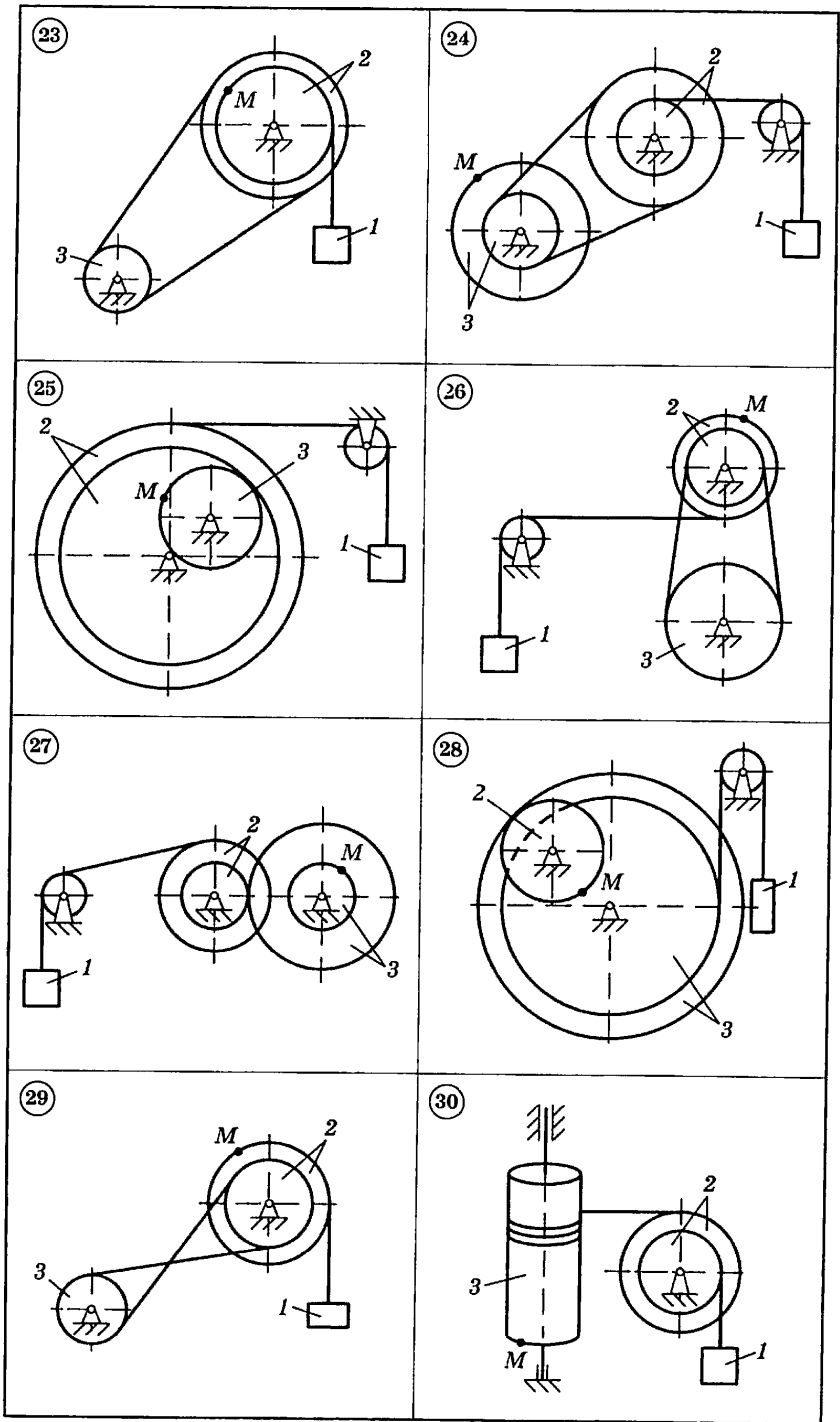
№ вар.	Характеристики или уравнения движения	Радиусы, см				Время, с
		$R_2$	$r_2$	$R_3$	$r_3$	
23	$\varphi_3 = 10t - 2t^2$ рад	20	15	10	—	2
24	$x = 0,5[1 - \cos(\pi t)]$ м	40	20	40	15	1/6
25	$v_{1x} = 0,8$ м/с; $a_{1x} = 4,8$ м/с <sup>2</sup>	40	30	15	—	—
26	$\varphi_3 = t^2 - e^t$ рад	15	10	20	—	0,5
27	$x = 22t - 5t^2$ м	25	20	50	25	2
28	$v_{1x} = 0,7$ м/с; $a_{1x} = -4,9$ м/с <sup>2</sup>	15	—	40	35	—
29	$\varphi_3 = t^3 - t^2 - 5t$ рад	25	15	10	—	1
30	$x = 4t - 0,6e^{5t}$ м	30	15	20	—	0,1











# ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

## ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### ЗАДАЧА 1

Лебедка (рис. 35), поднимающая груз по наклонной плоскости, состоит из двух валов 1 и 2 с шестернями (зубчатыми колесами), числа зубьев которых равны соответственно  $z_1 = 12$  и  $z_2 = 48$ . К валу 2 прикреплен барабан радиусом  $r = 0,3$  м, на который наматывается грузовой трос. Вал 1 вращается равноускоренно с угловым ускорением  $\varepsilon_1 = 8 \text{ с}^{-2}$ . Определить скорость, ускорение и перемещение груза, а также ускорение точки  $B$  барабана в момент времени  $t = 1$  с. В начальный момент времени система находилась в покое.

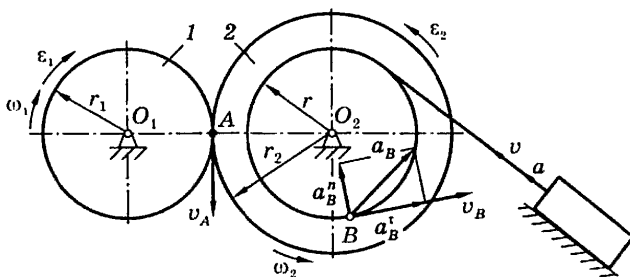


Рис. 35

**Решение.** Найдем угловую скорость  $\omega_1$  ведущего вала 1 из условия, что оно вращается с угловым ускорением  $\varepsilon_1 = \text{const}$ , учитывая, что  $\frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon_1$ . Интегрируя последнее уравнение по времени, получаем  $\omega_1 = \int \varepsilon_1 dt = \varepsilon_1 t + C_1$ .

Постоянную интегрирования получаем из начального условия: при  $t = 0$   $\omega_1 = 0$  (система находилась в покое), следовательно  $C_1 = 0$ .

Итак, угловая скорость вала 1 определяется уравнением  $\omega_1 = \varepsilon_1 t = 8t$ .

При  $t = 1$  с получаем  $\omega_1 = 8 \text{ с}^{-1}$ .

Шестерни 1 и 2 взаимодействуют без проскальзывания. Поэтому скорости точек их касания (точка А) будут одинаковы:  $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ .

Отсюда находим угловую скорость  $\omega_2$  вала 2, учитывая, что  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}$ :

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = \omega_1 \frac{z_1}{z_2} = 2t \Big|_{t=1\text{ с}} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Угловое ускорение вала 2 равно  $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 2 \text{ с}^{-2}$ .

Поскольку трос нерастяжим и относительно барабана не проскальзывает, то скорость груза  $v$  будет равна скорости любой из точек на ободе барабана, в частности, скорости точки В:  $v = v_B = \omega_2 r = 0,6t \Big|_{t=1\text{ с}} = 0,6 \text{ м/с}$ .

Ускорение точки В равно векторной сумме касательного (вращательного) и нормального (центростремительного) ускорений:  $\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\tau} + \vec{a}_B^n$ .

Направление вращательного ускорения определяется направлением углового ускорения  $\varepsilon_2$ , а его модуль равен  $a_B^{\tau} = \varepsilon_2 r = 0,6 \text{ м/с}^2$ . Центростремительное ускорение направлено к оси вращения вала 2 и равно по модулю  $a_B^n = \omega_2^2 r = 1,2 \text{ м/с}^2$ .

Модуль ускорения точки В

$$a_B = \sqrt{(a_B^{\tau})^2 + (a_B^n)^2} = 1,34 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение груза можно найти, взяв производную по времени от его скорости, так как это касательное ускорение:  $a = \dot{v} = 0,6 \text{ м/с}^2$ .

Перемещение груза определяется интегрированием модуля скорости по времени:

$$s = \int_0^t v dt = 0,3t^2 \Big|_{t=1\text{ с}} = 0,3 \text{ м}.$$

О т в е т:  $v = 0,6 \text{ м/с}$ ;  $a = 0,6 \text{ м/с}^2$ ;  $s = 0,3 \text{ м}$ ;  $a_B = 1,34 \text{ м/с}^2$ .

## ЗАДАЧА 2

Маховик радиусом  $R = 0,5 \text{ м}$  вращается так, что его угловая скорость меняется в соответствии с уравнением  $\omega = 0,25e^{2t} \text{ с}^{-1}$ . Для момента времени  $t = 0,5 \text{ с}$  после начала движения определить скорость и ускорение точки на

ободу маховика. Установить, за какое время маховик сделает 100 полных оборотов.

**Решение.** Для момента времени  $t = 0,5$  с получаем  $\omega = 0,680$  с<sup>-1</sup>, и скорость точки на ободу маховика равна  $v = \omega R = 0,340$  м/с.

Угловое ускорение маховика

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 0,5 e^{2t} \Big|_{t=0,5\text{ с}} = 1,36 \text{ с}^{-2}.$$

Ускорение точки на ободу маховика равно сумме двух составляющих ускорений:  $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ , где  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  — касательное (вращательное) и нормальное (центростремительное) ускорения точки.

Учитывая, что вращательное ускорение равно по модулю  $a_\tau = \varepsilon R$ , найдем  $a_\tau = 0,680$  м/с<sup>2</sup>; центростремительное ускорение  $a_n = \omega^2 R = 0,231$  м/с<sup>2</sup>.

Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 0,718 \text{ м/с}.$$

Направления скорости и ускорений показаны на рис. 36.

Поскольку значения величин угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые знаки, вращение тела ускоренное. Соответственно, совпадают по направлению угловая скорость и угловое ускорение тела, а также скорость точки и вращательное ускорение.

Поворот маховика на 100 полных оборотов соответствует углу его поворота  $\varphi = 200\pi$  рад. Выражение для угла поворота найдем из уравнения  $\omega = \dot{\varphi}$ . Имеем

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = 0,125 e^{2t} \Big|_0^t = 0,125(e^{2t} - 1).$$

Итак,  $0,125(e^{2t} - 1) = 200\pi$ , откуда находим  $t = 4,26$  с.  
 Ответ:  $v = 0,340$  м/с;  $a = 0,718$  м/с<sup>2</sup>;  $t = 4,26$  с.

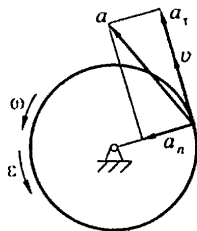
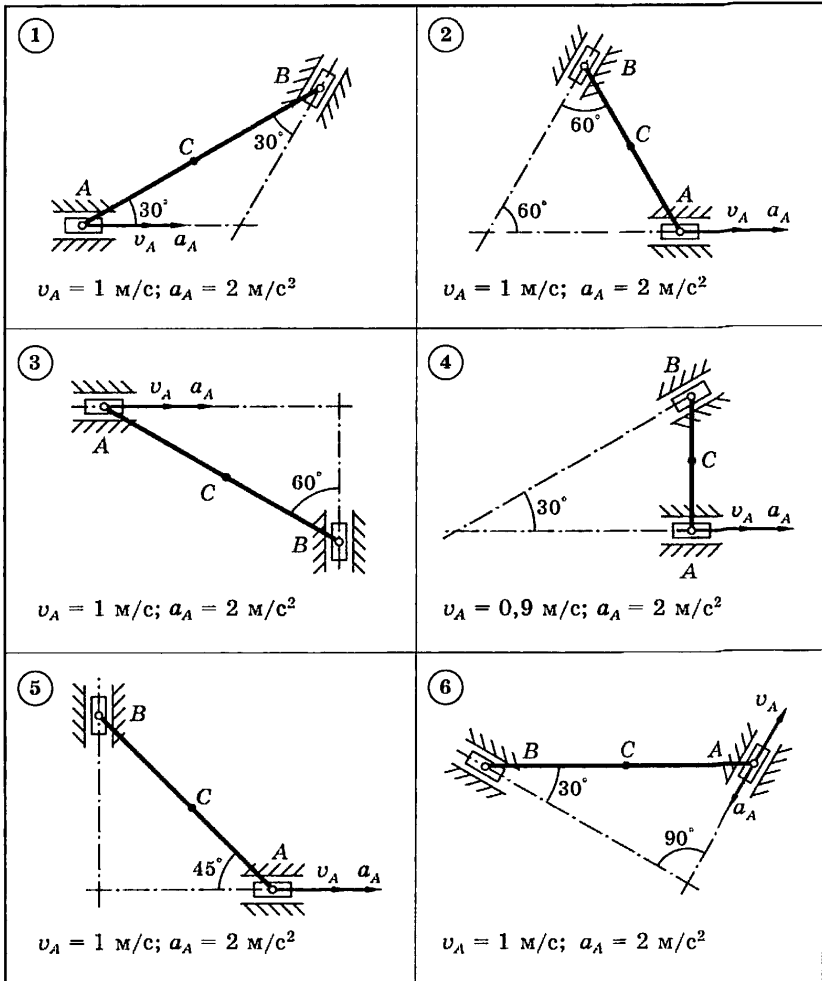


Рис. 36

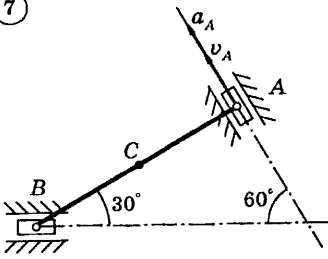
### ЗАДАНИЕ К3

## ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для представленных на схемах 1–30 механизмов, состоящих из шатуна  $AB$  длиной 2 м и двух ползунов, по заданным величинам скорости и ускорения ползуна  $A$  определить скорость и ускорение ползуна  $B$  и средней точки  $C$  шатуна, а также угловую скорость и угловое ускорение шатуна.

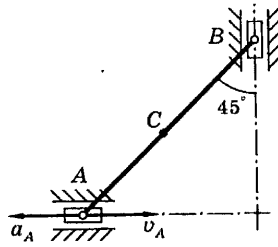


7



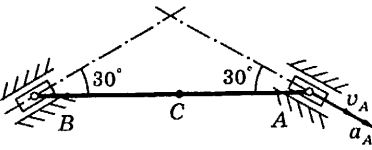
$v_A = 0,3 \text{ m/c}; a_A = 1 \text{ m/c}^2$

8



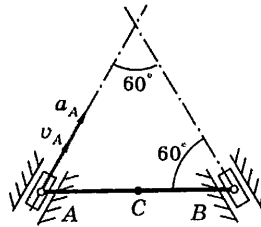
$v_A = 2 \text{ m/c}; a_A = 4 \text{ m/c}^2$

9



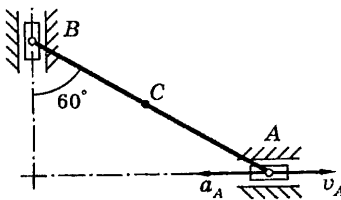
$v_A = 2 \text{ m/c}; a_A = 2 \text{ m/c}^2$

10



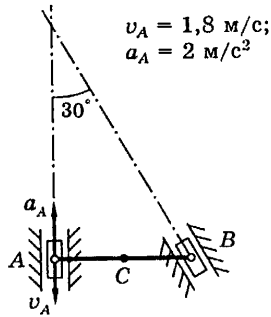
$v_A = 2 \text{ m/c}; a_A = 2 \text{ m/c}^2$

11



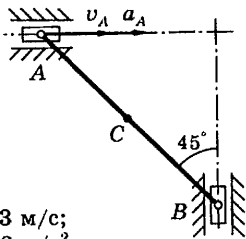
$v_A = 2 \text{ m/c}; a_A = 2 \text{ m/c}^2$

12



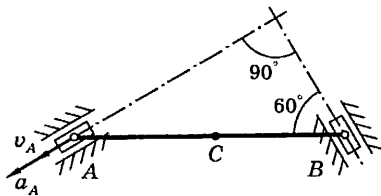
$v_A = 1,8 \text{ m/c}; a_A = 2 \text{ m/c}^2$

13

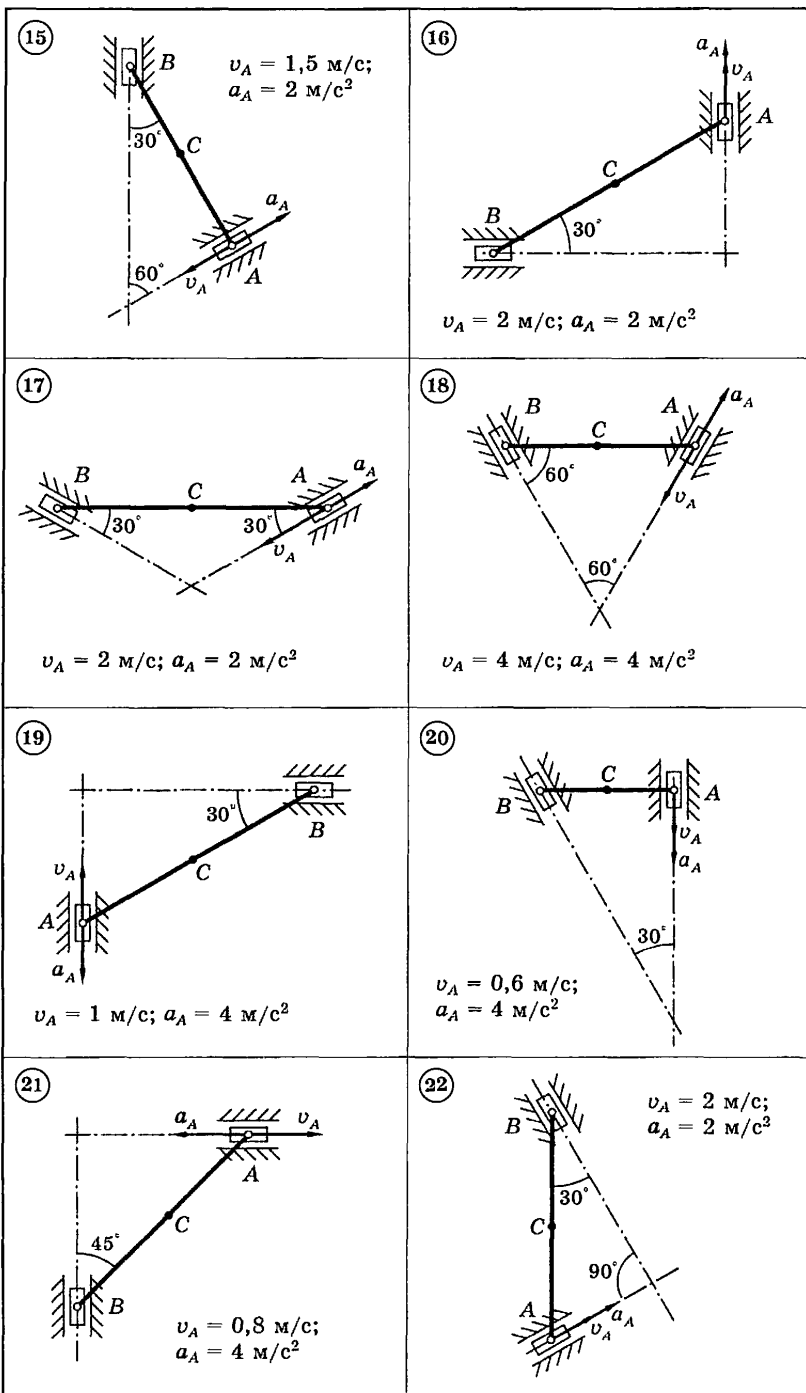


$v_A = 3 \text{ m/c}; a_A = 2 \text{ m/c}^2$

14

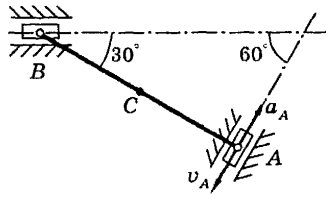


$v_A = 1 \text{ m/c}; a_A = 2 \text{ m/c}^2$



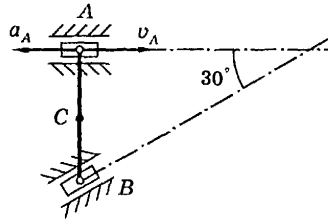


23



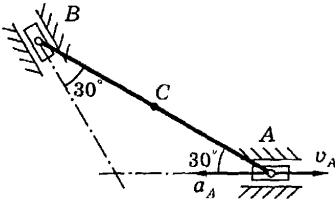
$$v_A = 0,9 \text{ M/c}; a_A = 2 \text{ M/c}^2$$

24



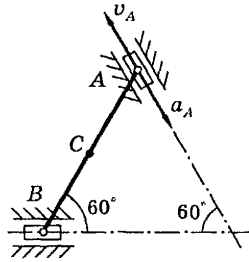
$$v_A = 1,2 \text{ M/c}; a_A = 2 \text{ M/c}^2$$

25



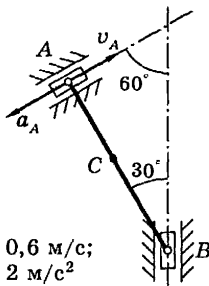
$$v_A = 1 \text{ M/c}; a_A = 2 \text{ M/c}^2$$

26



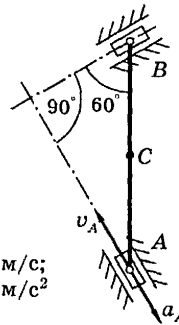
$$v_A = 0,8 \text{ M/c}; a_A = 2 \text{ M/c}^2$$

27



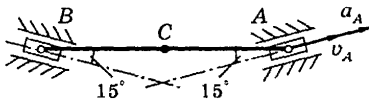
$$v_A = 0,6 \text{ M/c}; a_A = 2 \text{ M/c}^2$$

28



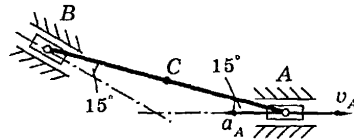
$$v_A = 4 \text{ M/c}; a_A = 1 \text{ M/c}^2$$

29



$$v_A = 1 \text{ M/c}; a_A = 2 \text{ M/c}^2$$

30



$$v_A = 2 \text{ M/c}; a_A = 2 \text{ M/c}^2$$

## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

# ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### ЗАДАЧА 1

Колесо радиуса  $r = 1$  м катится без скольжения ускоренно по прямолинейному рельсу, имея в данный момент времени скорость центра  $v_O = 1$  м/с и ускорение центра  $a_O = 1$  м/с<sup>2</sup> (рис. 37). Определить угловую скорость и угловое ускорение колеса, скорости и ускорения точек его обода  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_4$ , а также установить положение МЦС и МЦУ колеса.

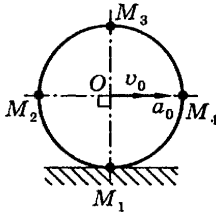


Рис. 37

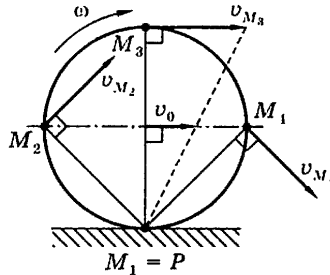


Рис. 38

**Решение.**

1. *Определение скоростей.* У колеса, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности, МЦС (точка  $P$ ) находится в точке касания с этой поверхностью (рис. 38). В данном случае это точка  $M_1$  ( $M_1 = P$ ):  $v_{M_1} = 0$ .

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям от этих точек до МЦС:  $v_M = \omega |MP|$ , где  $\omega$  — угловая скорость тела. Применяем эту формулу к точке  $O$ :  $v_O = \omega |OP| = \omega r$ , откуда  $\omega = v_O/r = 1$  с<sup>-1</sup>.

Для точек  $M_2$  и  $M_3$  расстояния до точки  $P$  одинаковы, поэтому одинаковы и модули скоростей этих точек:

$$v_{M_2} = v_{M_4} = \omega |M_2P| = \omega r \sqrt{2} = v_O \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ м/с.}$$

Скорость точки  $M_3$   $v_{M_3} = \omega |M_3P| = \omega 2r = 2v_O = 2$  м/с. Направления скоростей перпендикулярны отрезкам, соединяющим точки с МЦС.

Для вычисления скоростей можно было использовать также и теорему о сложении скоростей, выбрав в качестве полюса центр колеса:  $\bar{v}_M = \bar{v}_O + \bar{v}_{MO}$ , где  $v_{MO} = \omega|MO|$ . Скорость  $\bar{v}_{MO}$  перпендикулярна отрезку  $MO$  и направлена по ходу вращения.

Можно было также пользоваться и следствием из этой теоремы о равенстве проекций скоростей точек на ось, проходящую через эти точки.

**2. Определение ускорений.** Вычислим сначала угловое ускорение колеса, формально дифференцируя выражение угловой скорости

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_O}{r} \right) = \frac{\dot{v}_O}{r} = \frac{a_O}{r} = 1 \text{ с}^{-2}.$$

В данном случае использован тот факт, что движение центра колеса прямолинейное и, следовательно, касательное ускорение точки  $a_\tau = \dot{v}$  совпадает с полным ускорением.

Для вычисления ускорений точек колеса применим теорему о сложении ускорений:  $\bar{a}_M = \bar{a}_O + \bar{a}_{MO} = \bar{a}_O + \bar{a}_{MO}^i + \bar{a}_{MO}^n$ , выбрав в качестве полюса центр колеса. Вращательное ускорение точки относительно полюса  $a_{MO}^i = \varepsilon|MO|$  и направлено перпендикулярно отрезку  $MO$  по ходу углового ускорения, а центростремительное  $a_{MO}^n = \omega^2|MO|$  всегда направлено от точки к полюсу.

Тогда для точек  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_4$  получим  $a_{MO}^i = \varepsilon r = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $a_{MO}^n = \omega^2 r = 1 \text{ м/с}^2$ . Направления их показаны на рис. 39.

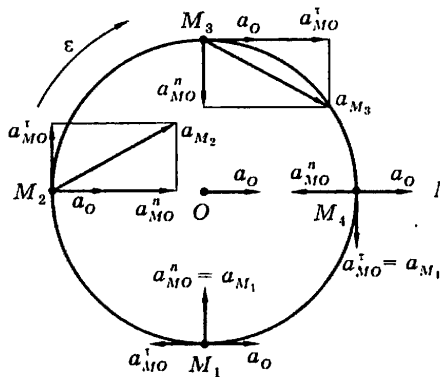


Рис. 39

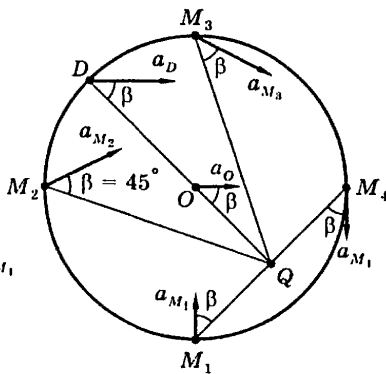


Рис. 40

Складывая в каждой точке три вектора, модули которых равны по  $1 \text{ м/с}^2$ , получаем  $a_{M_1} = a_{M_4} = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $a_{M_2} = a_{M_3} = \sqrt{5} \text{ м/с}^2$ .

3. *Определение положения МЦУ.* Найти положение МЦУ (точки  $Q$ , ускорение которой равно нулю) можно на основании известных положений:

а) все ускорения составляют один и тот же угол  $\beta$  с направлениями из этих точек на МЦУ:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

В данном случае  $\operatorname{tg} \beta = 1$  и  $\beta = 45^\circ$ . Повернув каждое ускорение на угол  $\beta$  по ходу углового ускорения, мы на пересечении лучей и получим точку  $Q$  (рис. 40). Итак, МЦУ колеса при принятых исходных данных оказывается на середине отрезка  $M_1M_4$ ;

б) ускорения точек пропорциональны расстояниям от этих точек до МЦУ:

$$a_M = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} |MQ|.$$

В силу одинаковости расстояний до МЦУ в данном случае оказываются равны между собой модули ускорений  $a_O = a_{M_1} = a_{M_4}$ , а также  $a_{M_2} = a_{M_3}$ . Из всех точек колеса самое большое ускорение будет иметь точка  $D$  (рис. 40):

$$a_D = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} |DQ| = \sqrt{2} \left( r + r \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + \sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

Ответ:

$$\omega = 1 \text{ с}^{-1}; \quad \varepsilon = 1 \text{ с}^{-2}; \quad v_{M_1} = 0; \quad v_{M_2} = v_{M_4} = \sqrt{2} \text{ м/с};$$

$$v_{M_3} = 2 \text{ м/с}; \quad a_{M_1} = a_{M_4} = 1 \text{ м/с}^2; \quad a_{M_2} = a_{M_3} = \sqrt{5} \text{ м/с}^2.$$

## ЗАДАЧА 2

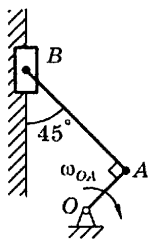


Рис. 41

Кривошип  $OA$  длиной  $0,2 \text{ м}$  вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega_{OA} = 10 \text{ с}^{-1}$  и приводит в движение шатун  $AB$  длиной  $1 \text{ м}$ . Ползун  $B$  движется по вертикали. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также скорость и ускорение ползуна в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с вертикалью угол  $45^\circ$  (рис. 41).

Решение.

1. *Определение скоростей.* Вычислим скорость точки  $A$  как точки вращающегося кривошипа:

$$v_A = \omega_{OA} |OA| = 2 \text{ м/с.}$$

Она направлена перпендикулярно  $OA$  (рис. 42).

Скорость  $v_B$  ползуна направлена по направляющей вертикально.

Для шатуна  $AB$ , совершающего плоское движение, теперь известны направления скоростей двух его точек:  $A$  и  $B$ . Восстанавливая перпендикуляры к векторам этих скоростей, находим точку  $P$  их пересечения — МЦС шатуна.

Используя известную формулу для скоростей точек при плоском движении, получаем  $v_A = \omega_{AB} |AP|$ ;  $v_B = \omega_{AB} |BP|$ .

Из треугольника  $ABP$  имеем  $|AP| = 1 \text{ м}$ ;  $|BP| = \sqrt{2} \text{ м}$ , и тогда

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{|AP|} = 2 \text{ с}^{-1}; \quad v_B = 2\sqrt{2} \text{ м/с.}$$

2. *Определение ускорений.* Вычислим сначала ускорение точки  $A$  как точки кривошипа:  $\bar{a}_A = \bar{a}_A^v + \bar{a}_A^n$ .

Здесь вращательное ускорение  $a_A^v = \varepsilon_{OA} |OA| = 0$ , так как  $\varepsilon_{OA} = \dot{\omega}_{OA} = 0$ , поскольку  $\omega_{OA} = \text{const}$ .

Тогда полное ускорение точки  $A$  равно центростремительному

$$a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 |OA| = 20 \text{ м/с}^2$$

и направлено к оси вращения — точке  $O$  (рис. 43).

Для вычисления ускорения точки  $B$  воспользуемся теоремой о сложении ускорений, взяв точку  $A$  в качестве полюса:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^v + \bar{a}_{BA}^n. \quad (*)$$

Центростремительное ускорение точки  $B$  в относительном вращении вокруг точки  $A$  по модулю равно  $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 |AB| = 4 \text{ м/с}^2$ , и направлено от точки  $B$  к полюсу — точке  $A$ .

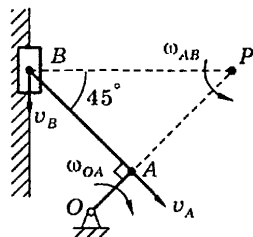


Рис. 42

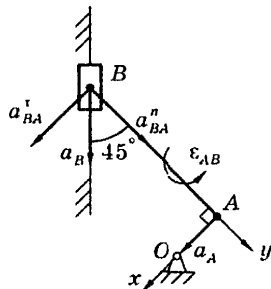


Рис. 43

Модуль вращательного ускорения  $a_{BA}^t$  определяется по формуле  $a_{BA}^t = \varepsilon_{AB}|AB|$  и пока не может быть вычислен, поскольку неизвестна величина углового ускорения  $\varepsilon_{AB}$ . Направление вектора  $\bar{a}_{BA}^t$  также не может быть определено однозначно, так как неизвестно направление углового ускорения, т. е. неизвестно, ускоренным или замедленным является поворот шатуна. Примем пока этот поворот ускоренным, тогда направление  $\bar{\omega}_{OA}$  совпадет с направлением  $\bar{\omega}_{OA}$ , а вектор  $\bar{a}_{BA}^t$  направим перпендикулярно отрезку  $BA$  по ходу углового ускорения.

Вектор ускорения точки  $B$  направлен по вертикальной прямолинейной направляющей. Будем пока считать движение ползуна ускоренным и направим ускорение  $\bar{a}_B$  в ту же сторону, что и скорость  $\bar{v}_B$  (рис. 42, 43).

Теперь в равенстве (\*) все ускорения имеют определенное направление, и мы можем записать это уравнение в проекциях на выбранные оси:

$$x: a_B \sin 45^\circ = a_A + a_{BA}^t; \quad y: a_B \cos 45^\circ = a_{BA}^n.$$

Из последнего уравнения получаем  $a_B = a_{BA}^n \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ м/с}^2$ , тогда из первого уравнения

$$a_{BA}^t = a_B \frac{\sqrt{2}}{2} - a_A = -16 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^t}{|AB|} = -16 \text{ с}^{-2}.$$

Отрицательные знаки у величин  $a_{BA}^t$  и  $\varepsilon_{AB}$  показывают, что их истинные направления противоположны принятым.

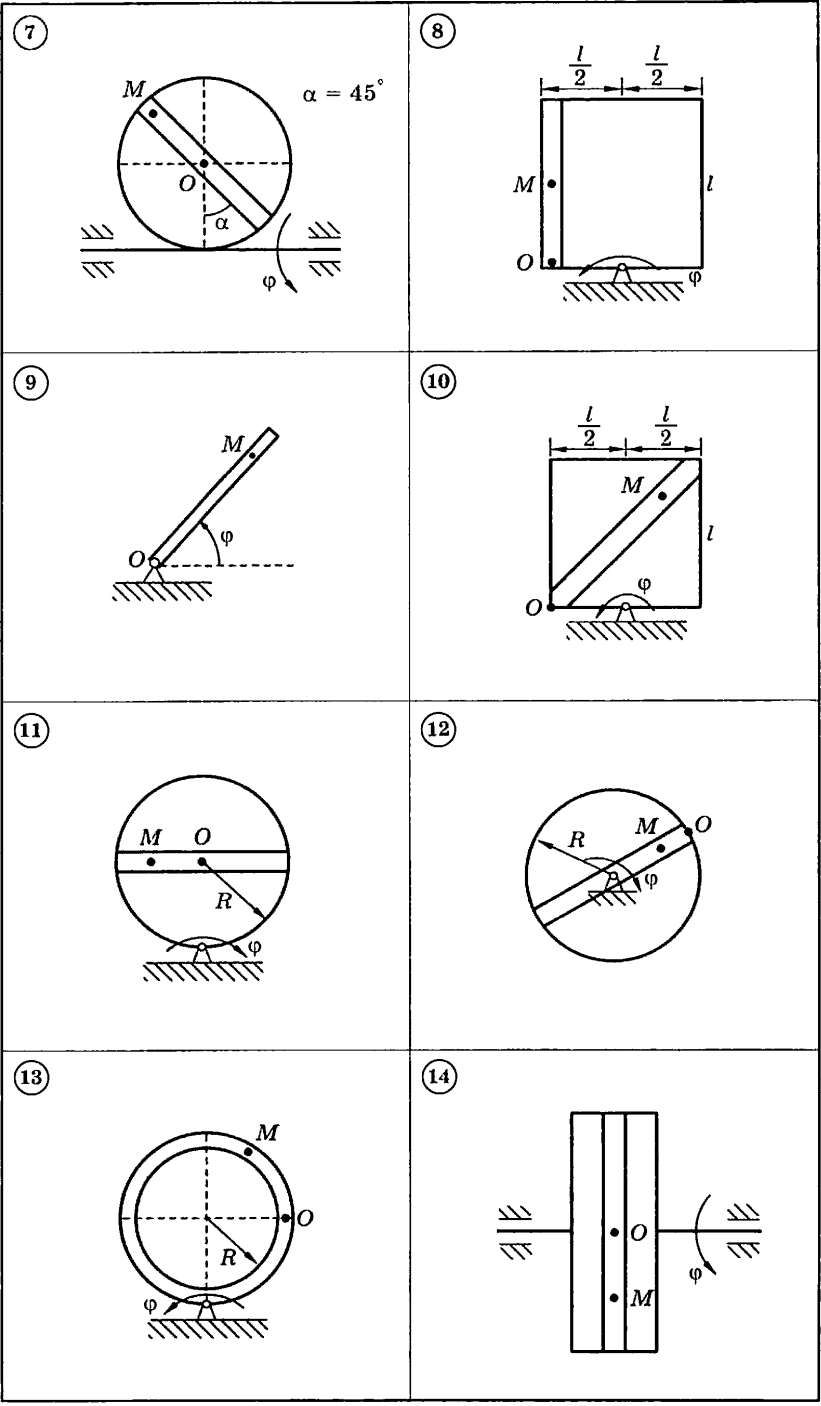
О т в е т:  $\omega_{AB} = 2 \text{ с}^{-1}$ ;  $\varepsilon_{AB} = -16 \text{ с}^{-2}$ ;  $v_B = 2\sqrt{2} \text{ м/с}$ ;  $a_B = 4\sqrt{2} \text{ м/с}^2$ .

## ЗАДАНИЕ К4

### СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

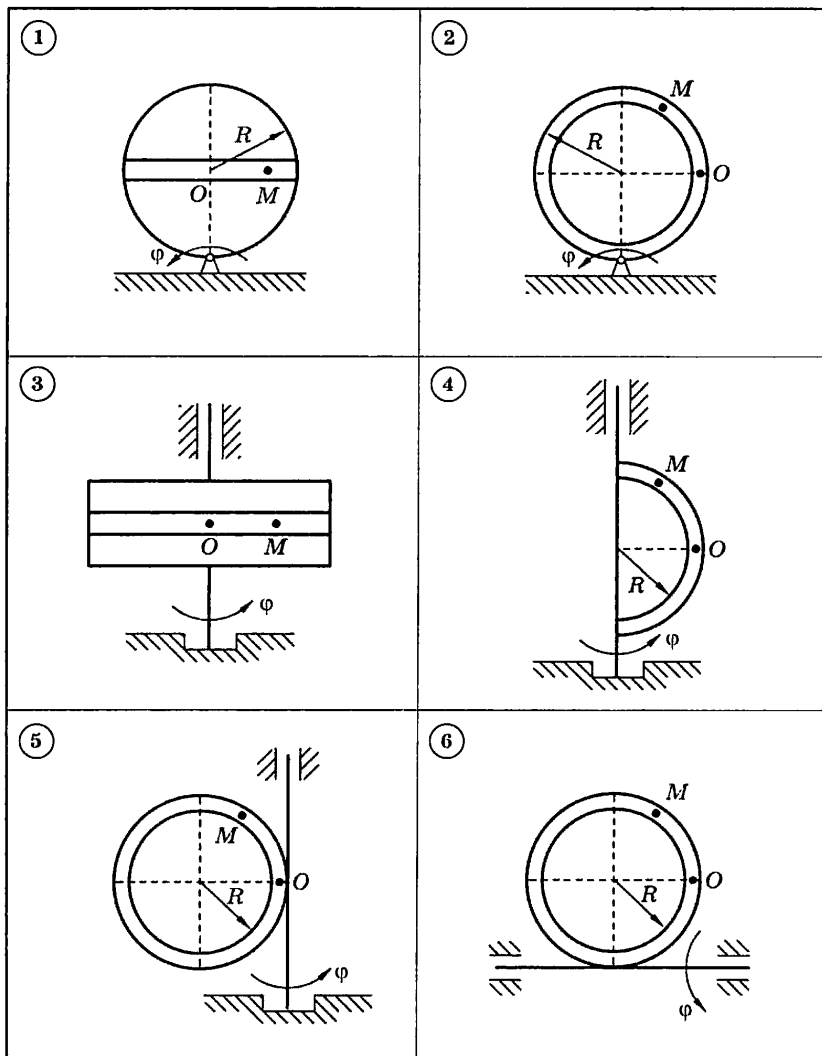
В приведенных ниже схемах 1–30 рассматривается движение точки  $M$  в желобе вращающегося тела. По заданным в таблице уравнениям относительного движения  $OM(t)$ , переносного движения  $\varphi(t)$  и геометрическим размерам определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в указанный момент времени.

№ вар.	$OM(t)$ , м	$\varphi(t)$ , рад	$R$ или $L$ , м	$t$ , с
1	$t^2 - t$	$0,5t^2 + t$	20	1
2	$5\pi(2t^2 + t)$	$2t^2$	15	1
3	$5(t^2 - t)$	$0,5t^2 + t$		2
4	$5\pi(t^2 - 3)$	$3t^2 - 8t$	20	2
5	$10\pi t^2$	$2t^2 - t$	20	1
6	$15\pi(t^2 - 2t)$	$6t - 4t^2$	30	2
7	$t^2 + 3t - 1$	$2t^2 - 3t$		1
8	$t^3 - 4t$	$0,5t^2$	6	2
9	$2t^3 - t$	$4t - t^2$		1
10	$t^3 - t$	$4t - t^2$	4	1
11	$2t^2 + 2t$	$0,5t^2$	4	1
12	$4t^2 + 6t$	$2t^2 - 6t$	40	2
13	$5\pi(2t^2 - t)$	$t^2 + t$	10	1
14	$t^2 - 2t + 1$	$0,5t^2 + 2t$		2
15	$5\pi(t^2 - 2)$	$2(t^2 - t)$	20	1
16	$15\pi t^2$	$t^2 + t$	10	1
17	$5\pi(2t^2 - t)$	$t^2 + t$	20	1
18	$t^3 - 2t^2 + 8$	$3t^2 - 8t$		2
19	$8t^2 - 2t$	$4t^2$	2	0,5
20	$10\pi t^2$	$4t^2 - 2t$	20	1
21	$t^4 - 4t$	$3t^2 - 8t$		2
22	$3t^2 - t$	$t^2 + 3t$	2	1
23	$10\sin(\pi t/6)$	$t^2$		1

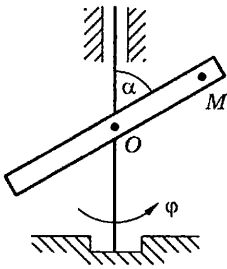




№ вар.	$OM(t)$ , м	$\varphi(t)$ , рад	$R$ или $l$ , м	$t$ , с
24	$10\pi(t^2 - t)$	$4t^2 - 2t$	10	1
25	$10\pi t^2$	$2t^2 - t$	30	1
26	$5\pi t^2$	$t^2 + t$	20	1
27	$20\pi t^2$	$t^2 + t$	20	1
28	$-3t^2$	$4(t^2 - 3t)$		2
29	$3\sqrt{2}(t^2 + t - 1)$	$t^2 - t$	6	1
30	$4t^2$	$2t - 0,5t^2$	4	1

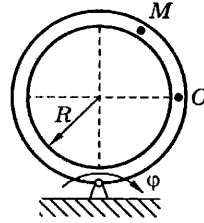


23

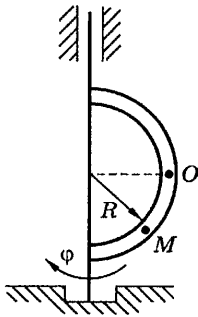


$\alpha = 60^\circ$

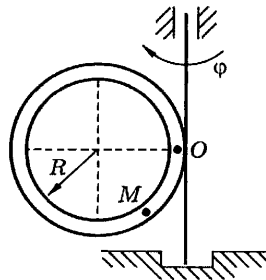
24



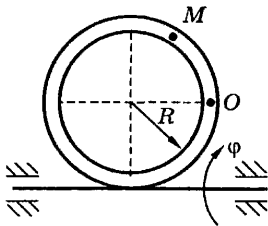
25



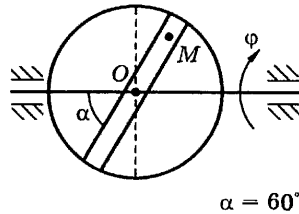
26



27

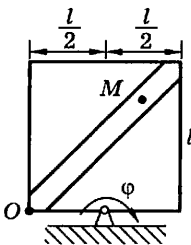


28

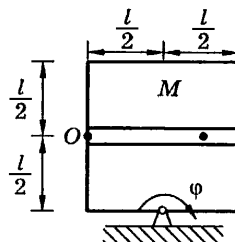


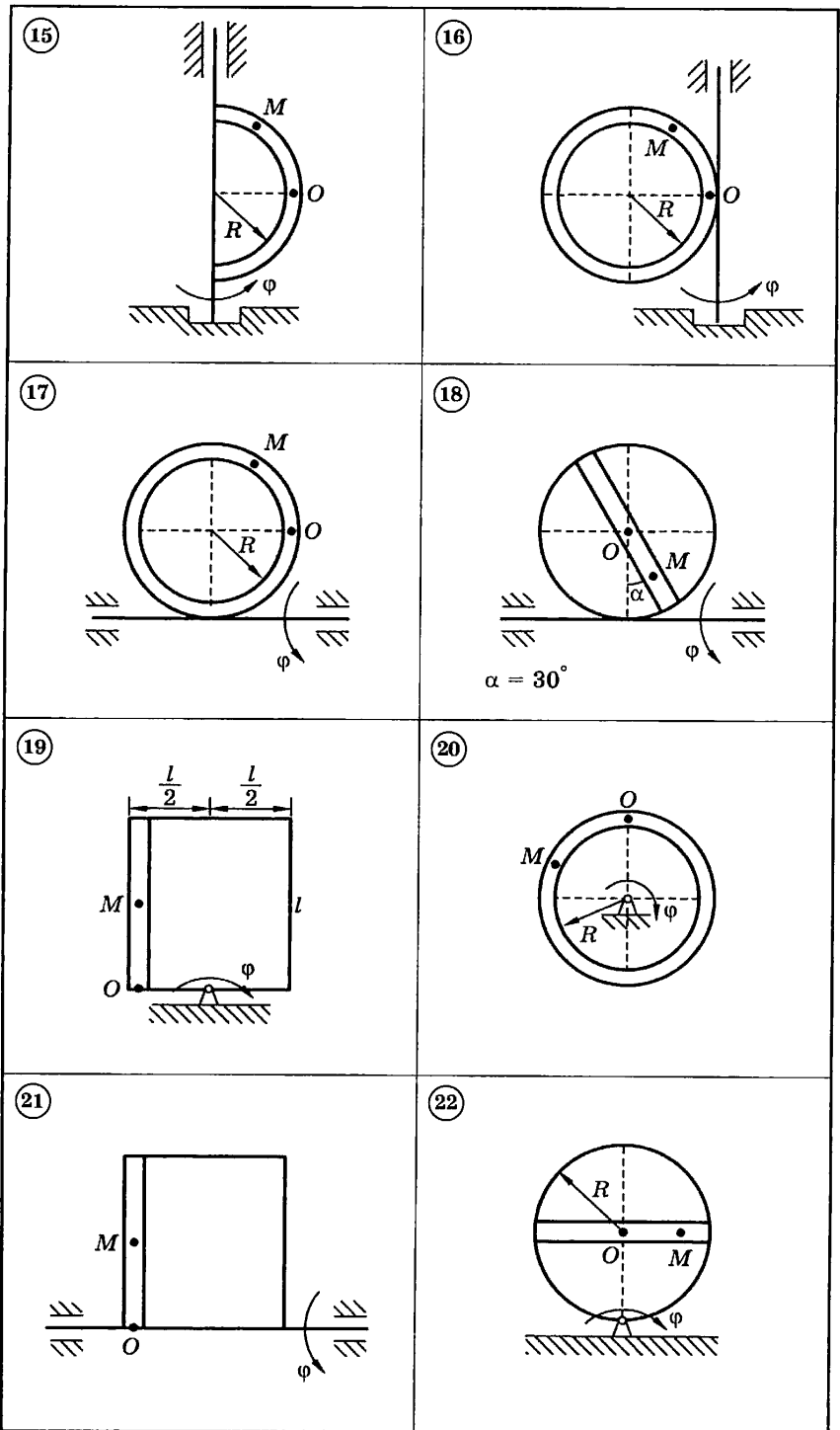
$\alpha = 60^\circ$

29



30





## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

# СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

### ЗАДАЧА 1

Тело  $D$  движется поступательно вдоль оси  $x$  так, что координата некоторой его точки меняется как  $x_D = t^3 + t^2$ , м (рис. 44).

По желобу  $OA$ , который представляет собой дугу окружности радиуса  $R = 20$  м тела движется точка  $M$  так, что длина дуги  $OM = s = 5\pi t^2$ , м. Для момента времени  $t = 1$  с определить абсолютную скорость  $\bar{v}_a$  и абсолютное ускорение  $\bar{a}_a$  точки  $M$ .

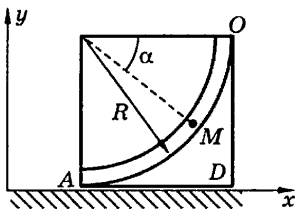


Рис. 44

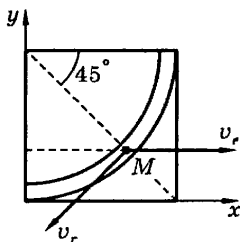


Рис. 45

**Решение.**

1. *Определение  $\bar{v}_a$ .* Согласно теореме о сложении скоростей, абсолютная скорость равна векторной сумме относительной и переносной скоростей:  $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$ .

Относительную скорость точки (скорость по отношению к телу  $D$ ) находим, вычисляя ее алгебраическое значение как производную от дуговой координаты по времени:  $v_{r\tau} = \dot{s} = 10\pi t$ , и при  $t = 1$  с получаем  $v_r = |\dot{s}| = 10\pi \approx 31,4$  м/с.

Чтобы определить направление этой скорости, следует установить, где находится точка  $M$  в данный момент времени.

Вычисляя длину дуги  $|OM|_{t=1\text{ с}} = 5\pi$  м, определяем значение угла  $\alpha$ :  $\alpha = \frac{|OM|}{R} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$  — точка  $M$  находится в середине дуги  $OA$  (рис. 45).

Скорость  $\bar{v}_r$  точки направлена по касательной к ее траектории (окружности) в сторону увеличения длины дуги (дуговой координаты), так как алгебраическое значение скорости положительно.

Переносной скоростью по определению будет скорость той точки тела  $D$ , с которой в данный момент времени совпадает точка  $M$ .

В имеющемся случае поступательного движения тела скорости всех его точек одинаковы (это скорость тела  $D$ ), и тогда, поскольку движение прямолинейное, переносную скорость можно найти как производную от координаты:

$$v_e = |\dot{v}_e| = |v_{ex}| = |\dot{x}_D| = 3t^2 + 2t,$$

и при  $t = 1$  с получаем  $v_e = 5$  м/с. Направлена она по оси  $x$ , так как  $v_{ex} > 0$ .

Складывать векторы  $\bar{v}_r$  и  $\bar{v}_e$  удобнее всего с помощью проекций. Проектируя равенство  $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$  на оси (рис. 45), получаем

$$v_{ax}} = -v_r \cos 45^\circ + v_e = -17,2; \quad v_{ay} = -v_r \sin 45^\circ = -22,2$$

и окончательно  $v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} \approx 28,1$  м/с.

2. *Определение  $\bar{a}_a$ .* Согласно теореме Кориолиса, абсолютное ускорение равно векторной сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_{cor}.$$

В данном случае кориолисова ускорения  $\bar{a}_{cor} = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$  не будет, так как переносное движение поступательное и его угловая скорость  $\omega_e = 0$ .

Относительное ускорение  $\bar{a}_r$  в общем случае будет складываться из касательного и нормального:  $\bar{a}_r = \bar{a}_r^t + \bar{a}_r^n$ .

Касательное относительное ускорение  $\bar{a}_r^t$  вычисляем через производную от алгебраического значения скорости:  $\bar{a}_r^t = \dot{v}_r = 10\pi \approx 31,4$  м/с и  $a_r^t = |\bar{a}_r^t|$ .

Ускорение  $\bar{a}_r^t$  направлено туда же, куда и скорость  $\bar{v}_r$ , так как знаки их алгебраических значений совпадают (ускоренное движение).

Нормальное относительное ускорение  $\bar{a}_r^n$  находим через скорость и радиус кривизны траектории:

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{v_r^2}{R} = 49,3 \text{ м/с}^2.$$

Оно направлено к центру окружности желоба (рис. 46).

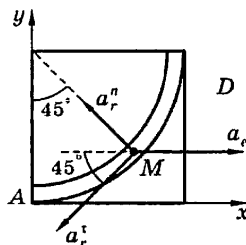


Рис. 46

Переносное ускорение (поскольку движение тела  $D$  поступательное и прямолинейное) ищем, дифференцируя найденную ранее переносную скорость

$$a_e = |\dot{\bar{a}}_e^r| = |\dot{\bar{v}}_e| = 6t + 2,$$

и при  $t = 1$  с имеем  $a_e = 8$  м/с<sup>2</sup>. Это ускорение совпадает по направлению с  $\bar{v}_e$ . Проектируя на оси уравнение  $\bar{a}_a = \bar{a}_r^i + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e$ , получим проекции вектора абсолютного ускорения:

$$a_{ax} = -a_r^i \cos 45^\circ - a_r^n \sin 45^\circ + a_e \approx -49,1,$$

$$a_{ay} = -a_r^i \sin 45^\circ + a_r^n \cos 45^\circ \approx 12,7.$$

И окончательно:  $a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \approx 50,7$  м/с<sup>2</sup>.

Ответ:  $v_a = 28,1$  м/с;  $a_a \approx 50,7$  м/с<sup>2</sup>.

## ЗАДАЧА 2

Тело  $D$  вращается в плоскости рисунка (рис. 47) вокруг оси  $O_1$  так, что его угол поворота равен

$$\varphi_D = (t^2 + 2t) \text{ рад.}$$

По желобу  $OA$  движется точка  $M$  так, что алгебраическое значение длины дуги равно

$$OM = s = (25\pi t^2 - 5\pi t) \text{ см.}$$

Желоб является окружностью радиусом  $R = 20$  см, расстояние  $|O_1A| = b = 10$  см. Для момента времени  $t = 1$  с определить абсолютную скорость  $\bar{v}_a$  и абсолютное ускорение  $\bar{a}_a$  точки  $M$ .

Решение.

1. *Определение  $\bar{v}_a$ .* По теореме о сложении скоростей имеем  $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$ .

Относительную скорость точки (скорость по отношению к телу  $D$ ) находим, вычисляя ее алгебраическое значение

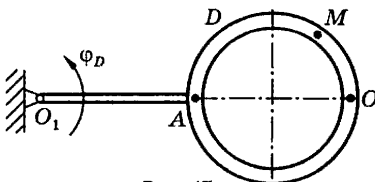


Рис. 47

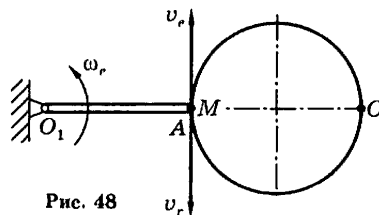


Рис. 48

ние как производную от дуговой координаты по времени:  $\vec{v}_r = \dot{s} = 50\pi t - 5\pi|_{t=1\text{ с}} = 45\pi \text{ см/с} \approx 1,41 \text{ м/с}$  и  $v_r = |\vec{v}_r|$ .

Чтобы найти ее направление, установим, где находится точка  $M$ . При  $t = 1 \text{ с}$ , получив  $OM = 20\pi \text{ см}$ , устанавливаем, что длина дуги составляет половину длины окружности, то есть точка  $M$  находится в точке  $A$  желоба (рис. 48).

Скорость  $\vec{v}_r$  точки направлена по касательной к ее траектории в сторону увеличения дуговой координаты, так как алгебраическое значение скорости положительно.

Переносной скоростью по определению будет скорость той точки вращающегося тела  $D$ , с которой совпадает точка  $M$ , то есть скорость точки  $A$ :

$$v_e = v_A = \omega_e b,$$

где алгебраическое значение угловой скорости переносного движения равно

$$\tilde{\omega}_e = \dot{\phi}_D = 2t + 2.$$

Таким образом, при  $t = 1 \text{ с}$  получаем  $\tilde{\omega}_e = \omega_e = 4 \text{ с}^{-1}$  и  $v_e = 0,40 \text{ м/с}$ . Алгебраическое значение угловой скорости положительно, следовательно, вращение происходит по направлению угла поворота. Переносная скорость направлена перпендикулярно отрезку  $O_1A$  по ходу вращения.

Поскольку векторы  $\vec{v}_r$  и  $\vec{v}_e$  направлены противоположно, то модуль абсолютной скорости равен  $v_a = v_r - v_e \approx 1,01 \text{ м/с}$ .

2. *Определение  $\vec{a}_a$ .* По теореме Кориолиса  $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{cor}$  или

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_{cor}. \quad (*)$$

Вычислим и покажем на рисунке все пять ускорений (рис. 49).

Относительное касательное ускорение вычисляем через его алгебраическое значение:  $\vec{a}_r^t = \dot{\vec{v}}_r = 50\pi \text{ см/с}^2 \approx 1,57 \text{ м/с}^2$ .

Ускорение  $\vec{a}_r^t$  направлено туда же, куда и скорость  $\vec{v}_r$ , так как знаки их алгебраических значений совпадают (ускоренное движение):  $a_r^t = |\vec{a}_r^t|$ .

Относительное нормальное ускорение направлено к центру желоба и равно

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} \approx 9,99 \text{ м/с}^2.$$

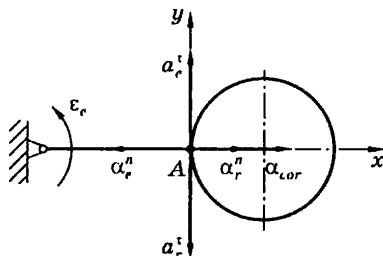


Рис. 49

Переносное ускорение в данном случае — это ускорение точки  $A$  тела  $D$ .

Так как алгебраическое значение углового ускорения равно его модулю

$$\tilde{\varepsilon}_e = \dot{\tilde{\omega}}_e = 2 \text{ с}^{-2} = \varepsilon_e,$$

то переносное вращательное ускорение получается

$$a_e^{\ddagger} = \varepsilon_e \cdot b = 0,20 \text{ м/с}^2.$$

Оно направлено перпендикулярно  $O_1A$  по ходу углового ускорения, и поскольку алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения совпадают по знаку (ускоренное вращение), следовательно,  $\vec{a}_e^{\ddagger}$  совпадает с  $\vec{v}_e$ .

Переносное центростремительное ускорение направлено к оси  $O_1$  и равно

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot b = 1,60 \text{ м/с}^2.$$

Кориолисово ускорение  $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ , и его модуль равен

$$a_{cor} = 2\omega_e v_r \sin(\tilde{\omega}_e, \vec{v}_r).$$

Так как вектор угловой скорости тела лежит на оси вращения, то в данном случае он перпендикулярен плоскости чертежа и угол между ним и вектором относительной скорости равен  $90^\circ$ . Тогда  $a_{cor} = 2 \cdot 4 \cdot 45\pi \text{ см/с}^2 \approx 11,3 \text{ м/с}^2$ .

Направление кориолисова ускорения может быть найдено или по общему правилу для векторного произведения, или по специальному правилу Жуковского. В нашем случае достаточно повернуть скорость  $\vec{v}_r$  на  $90^\circ$  по ходу вращения тела.

Сложение векторов произведем с помощью проекций. Спроектировав равенство (\*) на оси, получим

$$a_{ax} = a_r^n - a_e^n + a_{cor} = 19,7; \quad a_{ay} = -a_r^{\ddagger} + a_e^{\ddagger} = -1,37$$

и окончательно  $a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \approx 19,8 \text{ м/с}^2$ .

Ответ:  $v_a = 1,01 \text{ м/с}$ ;  $a_a = 19,8 \text{ м/с}^2$ .



# ДИНАМИКА

ЗАДАНИЕ Д1

**ДИНАМИКА  
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

**Силы, заданные формулами, измеряют в Н.**

1. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, опускается без начальной скорости тело. Определить, в течение какого времени тело опустится на высоту  $h = 10$  м по вертикали, если коэффициент трения скольжения  $f = 0,1$ .

2. На тело массой  $m$ , движущееся по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси  $x$ , действует сила, проекция которой равна  $F_x = 0,25tx$ . В начальный момент тело находилось в покое в точке  $x_0 = 1$  м. Определить скорость тела в момент, когда координата станет равной  $x = 5$  м.

3. Сила тяги винтов вертолета массой  $m$  при его вертикальном подъеме из состояния покоя в 1,5 раза превышает его вес. Сопротивление воздуха пропорционально скорости  $\vec{R} = -0,7m\vec{v}$ . Определить скорость подъема в момент  $t = 5$  с, а также максимальную скорость вертолета.

4. Лодке массой  $m = 100$  кг сообщается начальная скорость  $v_0 = 4$  м/с. При движении на лодку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости  $R = 5v^2$ . Определить, в течение какого времени скорость лодки уменьшится в два раза.

5. Телу сообщается начальная скорость  $v_0 = 6,6$  м/с, и оно начинает скользить вверх по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Коэффициент трения скольжения  $f = 0,2$ . Определить время достижения наивысшего положения тела и пройденный телом за это время путь.

6. На тело массой  $m$ , движущееся по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси  $x$ , действует сила, проекция которой равна  $F_x = -0,36tx$ . В начальный момент  $x_0 = 0$  и проекция скорости  $v_{x0} = 3$  м/с. Определить максимальное значение координаты  $x$  тела.

7. Груз массой  $m = 10$  кг опускается вертикально на парашюте без начальной скорости. Сопротивление возду-

ха пропорционально скорости  $\bar{R} = -20\bar{v}$ . Определить скорость груза в момент времени  $t = 1$  с.

8. В момент выключения мотора катер массой  $m = 200$  кг имел скорость  $v_0$ . Определить путь, который пройдет катер до того момента времени, когда скорость катера уменьшится в десять раз. Сила сопротивления движению пропорциональна квадрату скорости  $R = 8v^2$ .

9. Тело начинает скользить вниз по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, с начальной скоростью  $v_0 = 2$  м/с. Коэффициент трения скольжения  $f = 0,4$ . Определить путь, пройденный телом за время  $t = 2$  с.

10. Материальная точка массой  $m = 2$  кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси  $x$  под действием силы, проекция которой равна  $F_x = 3(1 - 0,5t)$ . Определить скорость и координату точки в тот момент времени, когда сила станет равной нулю. Начальную координату точки считать нулевой.

11. Лодке массой  $m = 50$  кг сообщается начальная скорость  $v_0 = 2,7$  м/с. При движении на лодку действует сила сопротивления, пропорционально скорости  $\bar{R} = -5\bar{v}$ . Определить скорость лодки в момент времени  $t = 10$  с.

12. Лыжник массой  $m = 70$  кг опускается без начальной скорости по склону, составляющему угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, не отталкиваясь палками. Длина спуска  $l = 100$  м, коэффициент трения скольжения лыж о снег  $f = 0,1$ . Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости  $R = 0,4v^2$ . Определить скорость лыжника в конце спуска.

13. После полученного толчка тело начинает скользить вверх по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 20^\circ$  с горизонтом. Коэффициент трения скольжения тела о плоскость  $f = 0,1$ . Определить значение начальной скорости, при котором путь, пройденный телом до остановки, будет равен  $s = 8,5$  м.

14. Материальная точка массой  $m = 2$  кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси  $x$  под действием силы, проекция которой равна  $F_x = 3(1 - 0,5t)$ . Определить максимальное значение координаты  $x$  тела и путь, пройденный точкой за время  $t = 6$  с. Начальную координату точки считать нулевой.

15. Тело массой  $m = 4$  кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси  $x$  под действием силы, проекция которой зависит от времени и скорости тела, и равна  $F_x = 9t/v$ . Определить путь, пройденный точкой за время  $t = 4$  с.

16. Самолет массой  $m = 10^3$  кг летит горизонтально под действием силы тяги, развиваемой двигателем, горизонтальная составляющая которой равна  $F = 3,82$  кН. Сила лобового сопротивления зависит от скорости самолета, и равна  $R = 0,05v^2$ . Определить расстояние, пройденное самолетом, за то время, когда его скорость изменится от 100 м/с до 200 м/с.

17. Поезд общей массой 400 т движется по прямолинейному горизонтальному участку пути, и имеет в начальный момент торможения скорость  $v_0 = 54$  км/ч. Определить силу торможения (считая ее постоянной), если длина тормозного пути равна  $s = 100$  м.

18. Тело массой  $m = 3$  кг движется по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси  $x$  под действием силы, проекция которой зависит от времени, и равна  $F_x = 6\pi \cos 2t$ . В начальный момент  $x_0 = 0$  и проекция скорости  $v_{x0} = 2$  м/с. Определить значение координаты  $x$  тела в момент  $t = 0,5\pi$  с.

19. В момент прекращения работы двигателей судно массой 300 т имело скорость  $v_{x0} = 10$  м/с. Определить время, прошедшее до остановки судна, если сила сопротивления воды зависит от скорости и равна  $R = 2 \cdot 10^4(2 + v)$ .

20. Вертикальный спуск парашютиста массой  $m$  происходит без начальной скорости с высоты  $h = 200$  м при наличии силы сопротивления воздуха, пропорциональной квадрату скорости,  $R = 3mv^2$ . Определить скорость парашютиста в момент приземления.

21. Тормозной путь автомобиля, движущегося по прямолинейному горизонтальному участку пути, составил  $s = 17$  м. Величина силы сопротивления движению составляет 0,3 от веса автомобиля. Определить начальную скорость торможения и время, прошедшее до остановки.

22. Тело массой  $m = 4$  кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси  $x$  под действием силы, проекция которой зависит от времени, и равна  $F_x = 5 \sin 0,5t$ . В начальный момент  $x_0 = 0$ .

Определить значение координаты  $x$  тела в момент времени  $t = \pi$  с.

23. Тело массой  $m = 2$  кг, брошенное вертикально вверх со скоростью  $v_0 = 40$  м/с, испытывает сопротивление воздуха пропорционально скорости  $\bar{R} = -0,1\bar{v}$ . Определить, через какое время тело достигнет наивысшего положения.

24. Поезд движется по прямолинейному горизонтальному участку пути, и имеет в начальный момент торможения скорость  $v_0 = 72$  км/ч. Величина силы сопротивления движению составляет 0,2 от веса поезда. Определить время, прошедшее до остановки, и пройденный путь.

25. Материальная точка массой  $m = 5$  кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси  $x$  под действием силы, проекция которой равна  $F_x = 10 - 3t$ . Начальная координата точки  $x_0 = 2$  м. Определить момент времени, когда точка вернется в начальное положение.

26. Для измерения глубины котлована на его дно бросают без начальной скорости груз массой  $m$ , который через  $t = 4$  с достигает дна. Сопротивление воздуха пропорционально скорости  $\bar{R} = -0,98m\bar{v}$ . Определить глубину котлована.

27. Тело, которому сообщили начальную скорость  $v_0 = 5$  м/с, начинает скользить по шероховатой горизонтальной плоскости и останавливается за время  $t = 2$  с. Определить коэффициент трения скольжения и путь, пройденный телом.

28. Материальная точка массой  $m = 1$  кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси  $x$  под действием силы, проекция которой равна  $F_x = 2 - 3t^2$ . Определить скорость и координату точки в момент времени  $t = 2$  с. Начальную координату точки считать нулевой.

29. Тело массой  $m = 15$  кг поднимается по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, получив начальную скорость  $v_0 = 10$  м/с. Сопротивление среды пропорционально скорости  $\bar{R} = -1,5\bar{v}$ . Определить время, прошедшее до остановки тела.

30. Тело массой  $m = 10$  кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси  $x$  под действием силы, проекция которой равна  $F_x = 20 - e^{0,5t}$ . Определить скорость и координату тела в момент времени  $t = 2$  с. Начальную координату точки считать нулевой.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ  
ДИНАМИКА  
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ЗАДАЧА 1

Груз массой  $m = 100$  кг, подвешенный на невесомом тросе длиной  $l = 3$  м, в результате толчка стал двигаться, как конический маятник, причем трос отклонен от вертикали на угол  $\alpha = 60^\circ$  (рис. 50). Определить скорость груза  $v$  и силу натяжения троса  $R$ .

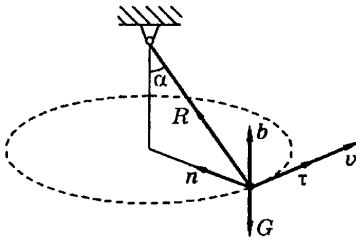


Рис. 50

**Решение.** Рассматривая груз как материальную точку, применим для описания его движения дифференциальные уравнения в проекциях на естественные оси: касательную  $\bar{\tau}$ , нормаль  $\bar{n}$ , бинормаль  $\bar{b}$  (рис. 50).

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\bar{\tau}}; \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_{\bar{n}}; \quad F_{\bar{b}} = 0.$$

На груз действуют две силы: сила тяжести  $\bar{G}$  и реакция троса  $\bar{R}$ .

Уравнения движения принимают вид

$$m \frac{dv}{dt} = 0; \quad m \frac{v^2}{\rho} = R \sin \alpha; \quad R \cos \alpha - G = 0.$$

Из первого уравнения следует, что  $v = \text{const}$ , то есть груз движется равномерно. Из третьего уравнения находим силу натяжения троса (учитывая  $G = mg$ )

$$R = \frac{G}{\cos \alpha} = 2mg \approx 2 \text{ кН}.$$

Сила натяжения вдвое больше веса груза.

Из второго уравнения определим скорость груза, учитывая, что радиус кривизны его траектории (окружности в горизонтальной плоскости)  $\rho = l \sin \alpha$ .

Тогда

$$m \frac{v^2}{l \sin \alpha} = 2mg \sin \alpha \text{ и } v = \sin \alpha \sqrt{2gl} \approx 6,6 \text{ м/с.}$$

Ответ:  $v = 6,6 \text{ м/с}$ ;  $R = 2 \text{ кН}$ .

## ЗАДАЧА 2

Материальной точке сообщается начальная скорость  $v_0 = 7 \text{ м/с}$ , в результате чего она проходит по горизонтальной шероховатой плоскости расстояние  $l = 10,1 \text{ м}$  и падает с нее. Коэффициент трения скольжения  $f = 0,2$ . Определить скорость  $v$ , длину полета  $L$ , глубину падения  $H$  точки в момент  $t = 5 \text{ с}$  после начала движения. Сопротивление среды не учитывать (рис. 51).

**Решение.** Рассмотрим движение точки на прямолинейном участке  $AB$  (рис. 52).

Определим скорость точки в конце этого участка. Начало осей координат совместимо с началом движения. Начальные условия при  $t = 0$  имеют вид

$$x_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = v_{x0} = v_0;$$

$$y_0 = 0; \quad \dot{y}_0 = v_{y0} = 0.$$

На основании принципа освобождения от связей рассматриваем точку как свободную, на которую действует сила тяжести  $m\vec{g}$ , нормальная реакция  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ .

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых осях:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky},$$

в данном случае с учетом того, что  $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$  и  $\ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = 0$ , принимают вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = -F_{\text{тр}}; \quad 0 = mg - N.$$

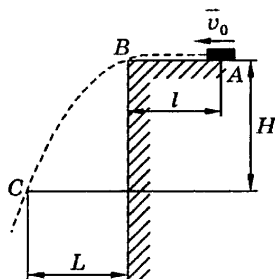


Рис. 51

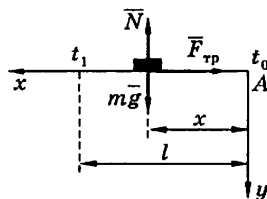


Рис. 52

Отсюда  $N = mg$ . Используя закон Кулона для силы трения  $F_{\text{тр}} = fN$ , получаем  $F_{\text{тр}} = fmg$ . Тогда

$$\frac{dv_x}{dt} = -fg. \quad (*)$$

Заметим, что при заданных условиях движение точки не зависит от ее массы.

Разделим переменные  $t$  и  $v_x$  в уравнении (\*) и проинтегрируем его, пользуясь неопределенными интегралами

$$\int dv_x = -\int fgdt \text{ и } v_x = -fgt + C_1.$$

Учитывая начальное условие, определим постоянную интегрирования  $C_1 = v_0$ . Тогда формула изменения скорости точки на участке  $AB$  принимает вид

$$v_x = v_0 - fgt. \quad (**)$$

Если же пользоваться определенными интегралами, то необходимость в постоянной интегрирования отпадает. Из (\*) получаем

$$\int_{v_0}^{v_x} dv_x = -\int_0^t fgdt.$$

Здесь нижние пределы интегралов соответствуют начальным условиям, а верхние — произвольному моменту времени.

Из последнего уравнения находим  $v_x \Big|_{v_0}^{v_x} = -fgt \Big|_0^t$ , делаем подстановку  $v_x - v_0 = -fgt$  и получаем то же решение:  $v_x = v_0 - fgt$ .

Для того чтобы вычислить время  $t_1$  преодоления материальной точкой пути  $AB$  и ее скорость в момент прохождения точки  $B$ , необходимо использовать условие  $|AB| = l = 10,1$  м.

При этом возможны два варианта дальнейшего решения задачи.

1. Перепишем уравнение (\*\*), учитывая, что  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - fgt.$$

Разделив здесь переменные и проинтегрировав (например, с использованием определенных интегралов) это уравнение, получим  $\int_0^x dx = \int_0^t (v_0 - fgt)dt$ , откуда  $x = v_0t - fg \frac{t^2}{2}$ .



Из последнего уравнения можно определить время, когда величина  $x$  будет равна  $l$ . Решая квадратное уравнение  $\frac{fg}{2}t^2 - v_0t + l = 0$  или  $0,98t^2 - 7t + 10,1 = 0$ , отыскиваем два значения:  $t_1 \approx 2$  с и  $t_1 = 5,1$  с. Второе значение времени физически не реализуется, так как предполагает дальнейшее движение точки по горизонтали, а затем возврат ее в точку  $B$ , что невозможно, поскольку после точки  $B$  материальная точка перестает взаимодействовать с поверхностью и начинает падать.

Таким образом, время  $t_1 = 2$  с и, подставляя его в формулу (\*\*), находим скорость точки в конце участка  $AB$ :  $v_1 = v_0 - fgt_1 \approx 3,1$  м/с.

2. Другой вариант решения предполагает проведение в уравнении (\*) следующей замены:  $\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx} v_x$ . Тогда уравнение (\*) примет вид

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = -fg.$$

После разделения переменных интегрируем

$$\int_{v_0}^{v_1} v_x dv_x = - \int_0^x fg dx, \quad \frac{v_x^2}{2} \Big|_{v_0}^{v_1} = -fgx \Big|_0^x,$$

и делаем подстановки:  $\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -fgx$ .

Отсюда  $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2fgl} \approx 3,1$  м/с.

Теперь из уравнения (\*\*) определяем время

$$t_1 = \frac{v_0 - v_1}{fg} \approx 2 \text{ с.}$$

Рассмотрим далее криволинейное движение точки на участке  $BC$  (рис. 53).

Начало отсчета времени совместим с моментом начала падения. Начальные условия в выбранных осях координат принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0 \\ x = 0; \quad \dot{x} = 3,1 \text{ м/с;} \\ y = 0; \quad \dot{y} = 0. \end{aligned}$$

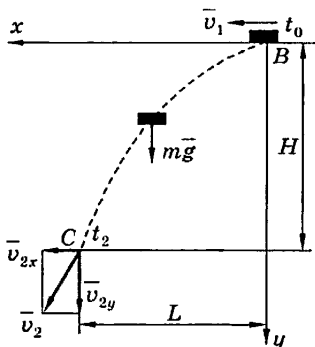


Рис. 53

На точку действует только сила тяжести  $m\bar{g}$ . Запишем дифференциальные уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = mg,$$

или  $\frac{dv_x}{dt} = 0; \quad \frac{dv_y}{dt} = g.$

Разделив переменные и проинтегрировав эти уравнения, получим

$$v_x = C_3; \quad v_y = gt + C_4.$$

В соответствии с начальными условиями постоянные интегрирования равны  $C_3 = v_1$  и  $C_4 = 0$ .

Тогда имеем  $v_x = v_1 = \text{const}$ ,  $v_y = gt$ .

Рассматриваемое время свободного падения точки, отсчитываемое от положения  $B$ , равно  $t_2 = t - t_1 = 3$  с.

Вычислим скорость  $v_2$  точки в момент  $t_2 = 3$  с (положение  $C$  на траектории)

$$v_{2x} = v_1 = 3,1 \text{ м/с}; \quad v_{2y} = gt_2 = 29,4 \text{ м/с};$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 29,6 \text{ м/с}.$$

Дифференциальные уравнения движения точки на участке  $BC$  представим в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = v_1; \quad \frac{dy}{dt} = gt.$$

Разделяя переменные и интегрируя эти уравнения, получаем

$$x = v_1 t + C_5; \quad y = gt^2/2 + C_6.$$

Постоянные интегрирования определяем по заданным начальным условиям (при  $t = 0$   $x = 0$ ;  $y = 0$ ), а именно:  $C_5 = C_6 = 0$ .

Уравнения движения точки имеют вид  $x = v_1 t$ ;  $y = gt^2/2$ .

При заданном  $t_2 = 3$  с находим дальность полета  $L = x(t_2) = 9,3$  м и глубину падения  $H = y(t_2) = 44,1$  м.

Ответ:  $v = 29,6$  м/с;  $L = 9,3$  м;  $H = 44,1$  м.

### ЗАДАЧА 3

Решить задачу 2 для материальной точки массой  $m = 1$  кг, учитывая, что во время падения (участок  $BC$ ) точка испытывает силу сопротивления движению, пропорциональную первой степени скорости  $\bar{R} = -k\bar{v}$ , где  $k = 0,8$  Н·с/м — коэффициент сопротивления.

Решение. Рассмотрим движение на участке  $BC$  (рис. 54). Начальные условия остаются прежними, так как на участке  $AB$  сила сопротивления не учитывается и движение точки не зависит от ее массы:  $t = 0$

$$x = 0; \quad \dot{x} = v_1; \quad y = 0; \quad \dot{y} = 0.$$

На точку действует, кроме силы тяжести, также сила сопротивления среды, направленная по касательной к траектории в данной точке в сторону, противоположную скорости, т. е.  $R_x = -kv_x$ ;  $R_y = -kv_y$ .

Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{x} = -kv_x; \quad m\ddot{y} = mg - kv_y$$

или 
$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x; \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{k}{m}\left(\frac{m}{k}g - v_y\right).$$

Разделив переменные и проинтегрировав (с использованием определенных интегралов) уравнения, получим решение

$$\int_{v_1}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t \frac{k}{m} dt; \quad \int_0^{v_y} \frac{dv_y}{\frac{mg}{k} - v_y} = \int_0^t \frac{k}{m} dt;$$

$$\ln v_x - \ln v_1 = -\frac{k}{m}t; \quad \ln\left(\frac{mg}{k} - v_y\right) - \ln\left(\frac{mg}{k}\right) = -\frac{k}{m}t.$$

Отсюда после преобразований найдем

$$v_x = v_1 e^{-\frac{k}{m}t}; \quad v_y = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Из этих соотношений видно, что при  $t \rightarrow \infty$   $v_x \rightarrow 0$ ;  $v_y \rightarrow \frac{mg}{k} = v_{уст}$  — установившееся значение скорости, соответствующее случаю уравновешенности системы из силы тяжести  $mg$  и силы сопротивления среды  $kv$ :  $kv = mg$ .

Вычислим значение скорости точки через  $t = 3$  с после начала падения (положение  $C$ )

$$v_{2x} = 0,28 \text{ м/с}; \quad v_{2y} = 11,1 \text{ м/с}; \quad v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} \approx 11,1 \text{ м/с}.$$

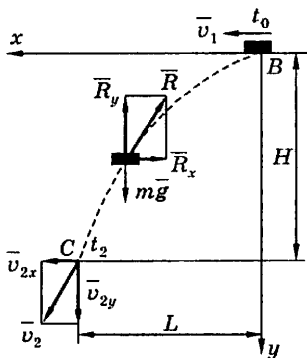


Рис. 54

Определим уравнения движения точки на участке  $BC$  в условиях влияния сопротивления среды.

Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = v_1 e^{-\frac{k}{m}t}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{m}{k} g \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

Разделив переменные, найдем, что

$$dx = v_1 e^{-\frac{k}{m}t} dt; \quad dy = \frac{m}{k} g dt - \frac{m}{k} g e^{-\frac{k}{m}t} dt.$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим их общее решение:

$$x = -v_1 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + C_3; \quad y = \frac{m}{k} gt + \frac{m^2}{k^2} g e^{-\frac{k}{m}t} + C_4.$$

Согласно начальным условиям (при  $t = 0$   $x = 0$ ;  $y = 0$ ) постоянные интегрирования равны

$$C_3 = v_1 \frac{m}{k}, \quad C_4 = -\frac{m^2}{k^2} g.$$

Подставив значения  $C_3$  и  $C_4$  в общее решение уравнений, получим уравнения движения точки на участке  $BC$ :

$$x = v_1 \frac{m}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right); \quad y = \frac{m}{k} gt - \frac{m^2}{k^2} g \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

При заданном  $t = 3$  с найдем, что дальность полета равна  $L = 3,5$  м, а глубина падения  $H = 22,8$  м.

Ответ:  $v = 11,1$  м/с;  $L = 3,5$  м;  $H = 22,8$  м.

ЗАДАНИЕ Д2

**ДИНАМИКА  
ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

Моменты, заданные формулами, измеряются в Н·м.

1. Вентилятор, вращавшийся с угловой скоростью  $\omega_0 = 3$  рад/с, тормозится силами сопротивления, момент которых  $M = 25\omega^2$ . Момент инерции вентилятора относительно оси вращения равен  $J = 40$  кг·м<sup>2</sup>. Определить, в течение какого времени угловая скорость вентилятора уменьшится в два раза.

2. Вращавшийся с угловой скоростью  $\omega_0 = 2,5$  рад/с ротор электродвигателя начинает тормозиться силами аэродинамического сопротивления, момент которых  $M_1 = 15\omega$ , и силами трения в подшипниках, момент которых  $M_2 = 30$  Н·м. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен  $J = 100$  кг·м<sup>2</sup>. Определить, в течение какого времени ротор остановится.

3. Вентилятор, вращавшийся с угловой скоростью  $\omega_0 = 6$  рад/с, тормозится силами сопротивления, момент которых  $M_1 = 30\omega^2$ , и силами трения с моментом  $M_2 = 300$  Н·м. Момент инерции его относительно оси вращения равен  $J = 50$  кг·м<sup>2</sup>. Определить, за какое время вентилятор остановится.

4. К валу, находившемуся в покое, прикладывается вращающий момент  $M_1 = 0,8$  Н·м. При этом возникают силы, момент которых  $M_2 = 5 \cos(\pi t)$ . Момент инерции вала относительно оси вращения равен  $J = 0,1$  кг·м<sup>2</sup>. Определить угловую скорость вала через 2,5 с после начала движения.

5. Твердое тело, вращавшееся с угловой скоростью  $\omega_0 = 8$  рад/с, начинает тормозиться силами сопротивления, моменты которых  $M_1$  и  $M_2$ . Момент  $M_1$  от трения в подшипниках постоянен  $M_1 = 150$  Н·м. Тормозящий момент  $M_2$  пропорционален угловой скорости  $M_2 = 25\omega$ . Момент инерции тела относительно оси вращения равен

$J = 140 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Определить, через какой промежуток времени тело остановится.

6. Маховик массой 500 кг и радиусом 60 см приводится во вращение из состояния покоя моментом  $M_1 = 470 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . При этом маховик испытывает силы сопротивления с моментом  $M_2 = 8,5\omega^2$ . Маховик считать однородным диском. Определить, по истечении какого времени угловая скорость маховика станет равной 6 рад/с.

7. Вращавшийся с некоторой угловой скоростью ротор электродвигателя начинает тормозиться силами аэродинамического сопротивления, момент которых равен  $M = 12\omega^2$ . Момент инерции ротора относительно оси вращения равен  $J = 150 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Определить угол, на который повернется ротор до того момента времени, когда его угловая скорость уменьшится в два раза.

8. Платформа, находившаяся в покое, приводится во вращение постоянным моментом  $M_1 = 1800 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . При этом возникает момент сил сопротивления  $M_2 = 120\omega$ . Радиус инерции платформы относительно оси вращения равен  $\rho = 1,5 \text{ м}$ , ее масса  $m = 500 \text{ кг}$ . Определить угловую скорость платформы через 5 с после начала движения.

9. Платформа, вращавшаяся с угловой скоростью  $\omega_0 = 3 \text{ рад/с}$ , начинает тормозиться силами сопротивления, момент которых равен  $M = 10\omega(\omega + 3)$ . Момент инерции платформы относительно оси вращения равен  $J = 435 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Определить число оборотов платформы с момента начала торможения и до ее остановки.

10. Маховик начинает вращаться из состояния покоя, причем вращающий момент зависит от угла его поворота:  $M = 2470\varphi - 3\varphi^3$ . Момент инерции маховика относительно оси вращения  $J = 1000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Установить зависимость угловой скорости маховика от угла поворота. Определить значение угловой скорости в тот момент времени, когда маховик сделает 5 оборотов.

11. На тормозящийся вал действует постоянный момент сил трения в подшипниках  $M_1 = 80 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и момент сил сопротивления, вызываемый электромагнитной муфтой  $M_2 = 60(1 - e^{-1,2t})$ . Начальная угловая скорость вала равна  $\omega_0 = 15 \text{ рад/с}$ . Момент инерции тела относительно оси вращения равен  $J = 50 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Определить угловую скорость вала в момент времени  $t = 3 \text{ с}$ .

12. Вал, вращавшийся с угловой скоростью  $\omega_0 = 9$  рад/с, начинает тормозиться силами сопротивления, моменты которых  $M_1$  и  $M_2$ . Тормозящий момент  $M_1$  пропорционален угловой скорости  $M_1 = 15\omega$ . Момент  $M_2$  от трения в подшипниках постоянен и равен  $M_2 = 100$  Н·м. Вал считать однородным цилиндром массой 200 кг и радиусом 60 см. Определить угловую скорость вала через 1,5 с после начала торможения.

13. Движущий момент электродвигателя обратно пропорционален квадрату угловой скорости  $M = \frac{1,5}{\omega^2}$ . Момент инерции ротора относительно оси вращения равен  $J = 50$  кг·м<sup>2</sup>. Определить, через какое время угловая скорость ротора утроится, если начальная угловая скорость равна  $\omega_0 = 0,5$  рад/с.

14. Маховик, находившийся в покое, приводится во вращение постоянным моментом  $M_1 = 2000$  Н·м. При этом возникает момент сил сопротивления, пропорциональный угловой скорости:  $M_2 = 100\omega$ . Момент инерции маховика относительно оси вращения равен  $J = 250$  кг·м<sup>2</sup>. Определить число оборотов маховика за 10 с после начала движения.

15. Барабан массой 200 кг и радиусом 80 см приводится во вращение из состояния покоя постоянной силой  $F_1 = 30$  Н, приложенной по касательной к его ободу. При этом возникает сила сопротивления, пропорциональная угловой скорости  $F_2 = 15\omega$ , Н, приложенная на расстоянии  $r = 45$  см от оси вращения. Барабан считать однородным цилиндром. Определить угловую скорость барабана через 15 с после начала вращения.

16. К ведущему валу редуктора при пуске прикладывается вращающий момент, который зависит от его угловой скорости:  $M = 18(1 - 0,5\omega)$ . Момент инерции вала относительно оси вращения  $J = 36$  кг·м<sup>2</sup>. Определить угол, на который повернется вал за 15 с после начала пуска.

17. На тормозящийся вал действует момент сил сопротивления, равный  $M = 120(1 - e^{-0,6t})$ . Момент инерции тела относительно оси вращения равен  $J = 150$  кг·м<sup>2</sup>. Начальная угловая скорость вала равна  $\omega_0 = 10$  рад/с. Определить значение угла поворота вала в момент времени  $t = 5$  с.

18. Барабан массой 600 кг и радиусом 80 см приводится во вращение из состояния покоя постоянным моментом

$M_1 = 500$  Н·м. При этом барабан испытывает силы сопротивления, момент которых  $M_2 = 6\omega^2$ . Барабан считать однородным диском. Определить угловую скорость барабана в тот момент времени, когда он повернется на угол  $\varphi = 4\pi$  рад.

19. Вал, вращавшийся с угловой скоростью  $\omega_0 = 2,5$  рад/с, начинает испытывать воздействие сил, момент которых  $M = 50\sin(\pi t)$ . Момент инерции вала относительно оси вращения равен  $J = 10$  кг·м<sup>2</sup>. Определить угловую скорость вала через 10,5 с после начала воздействия сил.

20. Барабан, находившийся в покое, приводится во вращение постоянным моментом  $M_1$ . При этом возникает момент сил сопротивления, пропорциональный угловой скорости:  $M_2 = 12\omega$ . Барабан считать однородным цилиндром массой 100 кг и радиусом 50 см. Определить, каким должен быть момент  $M_1$ , чтобы через 2 с угловая скорость барабана равнялась 8 рад/с.

21. Маховик массой 100 кг и радиусом 80 см, вращавшийся с угловой скоростью  $\omega_0 = 15$  рад/с, начинает испытывать силы сопротивления, момент которых пропорционален угловой скорости  $M = 16\omega$ . Маховик считать однородным диском. Определить число оборотов маховика с момента начала торможения и до его остановки.

22. После отключения подачи газа турбина, вращавшаяся с угловой скоростью  $\omega_0 = 6$  рад/с, тормозится силами аэродинамического сопротивления, момент которых  $M_1 = 15\omega^2$ , и силами трения в подшипниках, момент которых  $M_2 = 130$  Н·м. Момент инерции турбины относительно оси вращения равен  $J = 120$  кг·м<sup>2</sup>. Определить число оборотов турбины с момента начала торможения и до ее остановки.

23. К шкиву в момент пуска прикладывается вращающий момент, который зависит от его угловой скорости:  $M = 18(1 - 0,5\omega)$ . Шкив считать однородным кольцом массой 100 кг и радиусом 60 см. Определить угловую скорость шкива через 10 с после пуска.

24. К однородному цилиндру массой 20 кг и радиусом 10 см, вращавшемуся с угловой скоростью  $\omega_0 = 10$  рад/с, прикладывается вращающий момент, который зависит от угловой скорости цилиндра и времени:  $M = \frac{1,1t}{\omega}$ . Опреде-



лить угловую скорость цилиндра через 2 с после приложения момента.

25. На тело, вращавшееся с угловой скоростью  $\omega_0 = 5$  рад/с, начинают действовать силы сопротивления, момент которых зависит от угла поворота тела:  $M = 3\varphi^2$ . Момент инерции тела относительно оси вращения равен  $J = 10$  кг·м<sup>2</sup>. Определить, на какой угол повернется тело до его остановки.

26. Для торможения ротора электродвигателя к нему прикладывается момент сил сопротивления, зависящий от угловой скорости:  $M = 0,002\omega^3$ . Момент инерции ротора относительно оси вращения равен  $J = 0,1$  кг·м<sup>2</sup>. Определить число оборотов ротора с момента начала торможения и до того момента времени, когда его угловая скорость уменьшится в два раза, если  $\omega_0 = 0,5$  рад/с.

27. Для ускорения вращения турбины к ней прикладывается вращающий момент, который зависит от угловой скорости турбины и времени:  $M = \frac{1,2t}{\omega^2}$ . Начальная угловая скорость турбины  $\omega_0 = 4$  рад/с. Момент инерции турбины относительно оси вращения равен  $J = 0,2$  кг·м<sup>2</sup>. Определить угловую скорость турбины через 2 с после приложения момента.

28. При работе дизеля его вращающий момент может зависеть от угловой скорости:  $M = 100(2\omega - 7)$ . Момент инерции вала дизеля относительно оси вращения равен  $J = 180$  кг·м<sup>2</sup>. Начальная угловая скорость вала  $\omega_0 = 5$  рад/с. Определить угловую скорость вала через 1,5 с после приложения момента.

29. Вращающий момент, приложенный к платформе, обратно пропорционален квадрату угловой скорости:  $M = \frac{1,5}{\omega^2}$ . Момент инерции платформы относительно оси вращения равен  $J = 50$  кг·м<sup>2</sup>. Определить угловую скорость платформы через 25 с после приложения момента, если начальная угловая скорость равна  $\omega_0 = 0,5$  рад/с.

30. Шкив (однородное кольцо) массой 200 кг и радиусом 40 см приводится во вращение из состояния покоя моментом  $M_1 = 80$  Н·м, испытывая силы сопротивления, момент которых  $M_2 = 1,2\omega^2$ . Определить, на какой угол повернется шкив, пока его угловая скорость станет равной 4 рад/с.

# ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

## ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### ЗАДАЧА 1

Шкив массой  $m = 90$  кг и радиусом  $r = 30$  см вращается с угловой скоростью  $\omega_0 = 20$  с<sup>-1</sup>. Для его остановки на шкив оказывается действие через невесомый ремень, натяжения ветвей которого равны  $T_1 = 40$  Н и  $T_2 = 20$  Н (рис. 55). Радиус инерции шкива  $\rho_z = 20$  см. Определить время торможения шкива  $t_1$  и угол  $\phi_1$ , на который он повернется за это время.

**Решение.** Рассмотрим все силы, действующие на шкив и прилежащую к нему часть ремня: силы натяжения ветвей ремня  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$ , силу тяжести шкива  $\bar{G}$ , составляющие реакции в подшипниках  $\bar{X}_O$  и  $\bar{Y}_O$  (рис. 56). Применим к шкиву дифференциальное уравнение вращательного движения относительно его оси  $z$

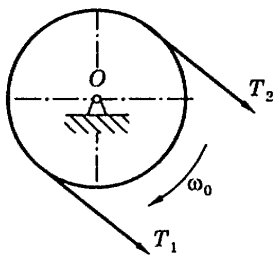


Рис. 55

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e).$$

Здесь  $J_z = m\rho_z^2 = 90 \cdot 0,2^2 = 3,6$  кг·м<sup>2</sup> — осевой момент инерции шкива. Стоящий в правой части уравнения главный момент внешних сил относительно оси вращения обозначим для краткости  $M_z^e$ . Он будет в данном случае равен  $M_z^e = -T_1 \cdot r + T_2 \cdot r = -6$  Н·м, поскольку силы  $\bar{G}$ ,  $\bar{X}_O$  и  $\bar{Y}_O$  имеют нулевые моменты относительно оси  $z$  (моменты сил, действующих по движению, должны браться со знаком «плюс», а против движения — со знаком «минус»).

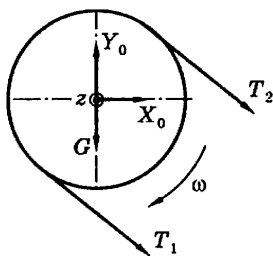


Рис. 56

Таким образом, дифференциальное уравнение вращательного движения имеет вид

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e.$$

Для интегрирования этого уравнения делим переменные, учитывая что  $M_z^e = \text{const}$  и  $J_z = \text{const}$

$$J_z d\omega = M_z^e dt, \quad (*)$$

после чего в левой и правой частях ставим интегралы — определенные или неопределенные.

Рассмотрим оба способа решения.

1. Если использовать неопределенные интегралы, получим

$$J_z \int d\omega = M_z^e \int dt, \text{ откуда } J_z \omega = M_z^e t + C_1,$$

где постоянная интегрирования  $C_1$  может быть найдена из начального условия  $\omega = \omega_0$  при  $t = 0$ . Подставив в уравнение эти значения, получим  $J_z \omega_0 = C_1$ , и тогда  $J_z \omega = M_z^e t + J_z \omega_0$ , откуда

$$\omega = \omega_0 + \frac{M_z^e}{J_z} t.$$

2. Если в уравнении (\*) использовать определенные интегралы, можно записать

$$J_z \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = M_z^e \int_0^t dt.$$

Здесь нижние пределы интегралов соответствуют начальному моменту времени  $\omega = \omega_0$  при  $t = 0$ , а верхние — произвольному моменту времени  $t$  и некоторой угловой скорости  $\omega$  в этот момент времени.

Из последнего уравнения, интегрируя, находим  $J_z \omega \Big|_{\omega_0}^{\omega} = M_z^e t \Big|_0^t$ , после чего делаем подстановки  $J_z \omega - J_z \omega_0 = M_z^e t$ , откуда имеем

$$\omega = \omega_0 + \frac{M_z^e}{J_z} t.$$

Получили то же решение, что и при первом способе.

Используя последнее соотношение, можно найти время торможения шкива, т. е. время  $t_1$ , за которое угловая скорость обратится в ноль

$$0 = \omega_0 + \frac{M_z^e}{J_z} t_1,$$

и тогда

$$t_1 = -\frac{J_z \omega_0}{M_z^e} = 12 \text{ с.}$$

Для определения угла поворота  $\varphi$ , заменив в уравнении для угловой скорости  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \frac{M_z^e}{J_z} t.$$

Деля здесь переменные  $d\varphi = \omega_0 dt + \frac{M_z^e}{J_z} t dt$  и интегрируя с использованием определенных интегралов (учитывая, что  $\varphi = 0$  при  $t = 0$ ), находим

$$\int_0^{\varphi_1} d\varphi = \omega_0 \int_0^{t_1} dt + \frac{M_z^e}{J_z} \int_0^{t_1} t dt, \text{ откуда } \varphi|_0^{\varphi_1} = \omega_0 t|_0^{t_1} + \frac{M_z^e}{J_z} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{t_1}.$$

Окончательно имеем  $\varphi_1 = \omega_0 t_1 + \frac{M_z^e}{J_z} \frac{t_1^2}{2} = 120$  рад, что соответствует числу  $N$  оборотов шкива:  $N = \frac{\varphi}{2\pi} = 19,1$  оборотов.

О т в е т:  $t_1 = 12$  с;  $\varphi_1 = 120$  рад.

## ЗАДАЧА 2

Однородный цилиндр массой  $m = 5$  кг и радиусом  $r = 6$  см, находящийся на оси вращения (рис. 57), взаимодействует с неподвижной поверхностью посредством спиральной пружины, создающей момент, пропорциональный углу поворота  $M = C_\varphi \varphi$ , где коэффициент жесткости пружины  $C_\varphi = 3,6$  Н·м/рад.

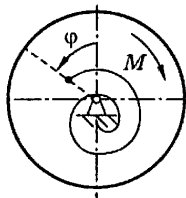


Рис. 57

В начальный момент времени цилиндр отклонен от положения равновесия на угол  $\varphi_0 = 0,5$  рад и ему придана угловая скорость  $\omega_0 = 10$  с<sup>-1</sup>. Определить частоту и амплитуду возникших колебаний. Сопротивление движению отсутствует.

Р е ш е н и е. Рассмотрим цилиндр, освобожденный от связей (рис. 58), и применим к нему дифференциальное уравнение вращательного движения

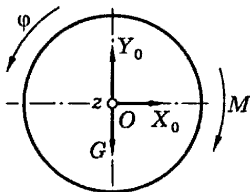


Рис. 58

$$J_z \varepsilon = \sum M_z(\bar{F}_k^e).$$

В данном случае имеем  $J_z \varepsilon = -M$ , где

$$J_z = \frac{mr^2}{2} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

— осевой момент инерции, или  $J_z \varepsilon = -C_\varphi \varphi$ , откуда

$$\varepsilon = -k^2 \varphi, \quad (*)$$

где  $k = \sqrt{\frac{C_\varphi}{J_z}} = 20 \text{ с}^{-1}$ .

Интегрирование дифференциального уравнения (\*) можно провести двумя способами.

*Способ 1.* Запишем уравнение в виде  $\frac{d\omega}{dt} = -k^2 \varphi$ . Разделение переменных здесь невозможно, поскольку в уравнении присутствуют сразу три переменные:  $t$ ,  $\omega$  и  $\varphi$ .

Чтобы избавиться от переменной  $t$ , сделаем замену

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \omega,$$

получим

$$\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = -k^2 \varphi.$$

Умножая это уравнение на  $d\varphi$ , разделяем переменные и интегрируем, используя определенные интегралы

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = -k^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varphi d\varphi,$$

откуда

$$\frac{\omega^2}{2} \Big|_{\omega_0}^{\omega} = -k^2 \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi},$$

или  $\omega^2 - \omega_0^2 = -k^2(\varphi^2 - \varphi_0^2)$ , и, следовательно,  $\omega = k\sqrt{A^2 - \varphi^2}$ , где обозначено

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{k}\right)^2} = 0,5\sqrt{2} \text{ рад.}$$

Учитывая, что  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , последнее уравнение записываем в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\sqrt{A^2 - \varphi^2},$$

и после разделения переменных интегрируем

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{A^2 - \varphi^2}} = k \int_0^t dt,$$

откуда  $\arcsin \frac{\varphi}{A} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} = kt \Big|_0^t$ , или  $\arcsin \frac{\varphi}{A} - \arcsin \frac{\varphi_0}{A} = kt$ .

Тогда  $\varphi = A \sin(kt + \alpha)$ , где

$$\alpha = \arcsin \frac{\varphi_0}{A} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \text{ рад}$$

— начальная фаза колебаний.

Итак, амплитуда колебаний  $A = 0,5\sqrt{2}$  рад, а частота  $k = 20 \text{ с}^{-1}$ .

*Способ 2.* Запишем уравнение (\*) в виде  $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$ .

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, для которого характеристическое уравнение  $\lambda^2 + k^2 = 0$  имеет два чисто мнимых корня:  $\lambda_{1,2} = \pm ki$ .

Тогда общее решение уравнения записывается в виде  $\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ , или  $\varphi = A \sin(kt + \alpha)$ , где постоянные интегрирования  $A$  и  $\alpha$  определяются из начальных условий:  $\varphi|_{t=0} = \varphi_0 = 0,5$  рад и  $\dot{\varphi}|_{t=0} = \omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$ .

Подставляя начальные условия в выражения для  $\varphi$  и  $\dot{\varphi} = Ak \cos(kt + \alpha)$ , получаем  $\varphi_0 = A \sin \alpha$ ,  $\omega_0 = Ak \cos \alpha$ , откуда

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{k}\right)^2} = 0,5\sqrt{2} \text{ рад}$$

и

$$\alpha = \arctg \frac{\varphi_0 k}{\omega_0} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \text{ рад.}$$

Окончательно имеем

$$\varphi = 0,5\sqrt{2} \sin\left(20t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ:  $k = 20 \text{ с}^{-1}$ ;  $A = 0,5\sqrt{2}$  рад.

## ЗАДАНИЕ Д3

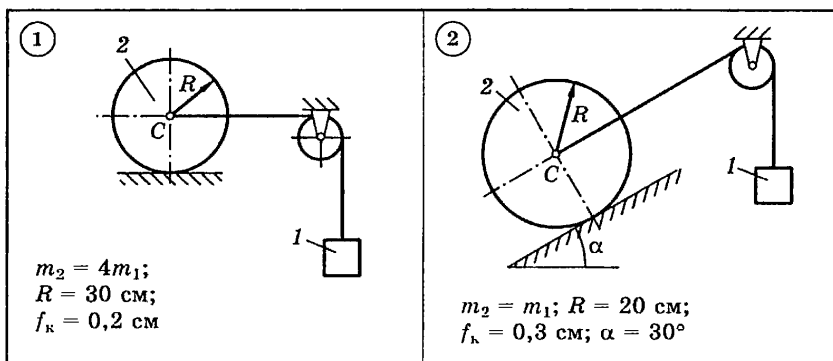
# ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

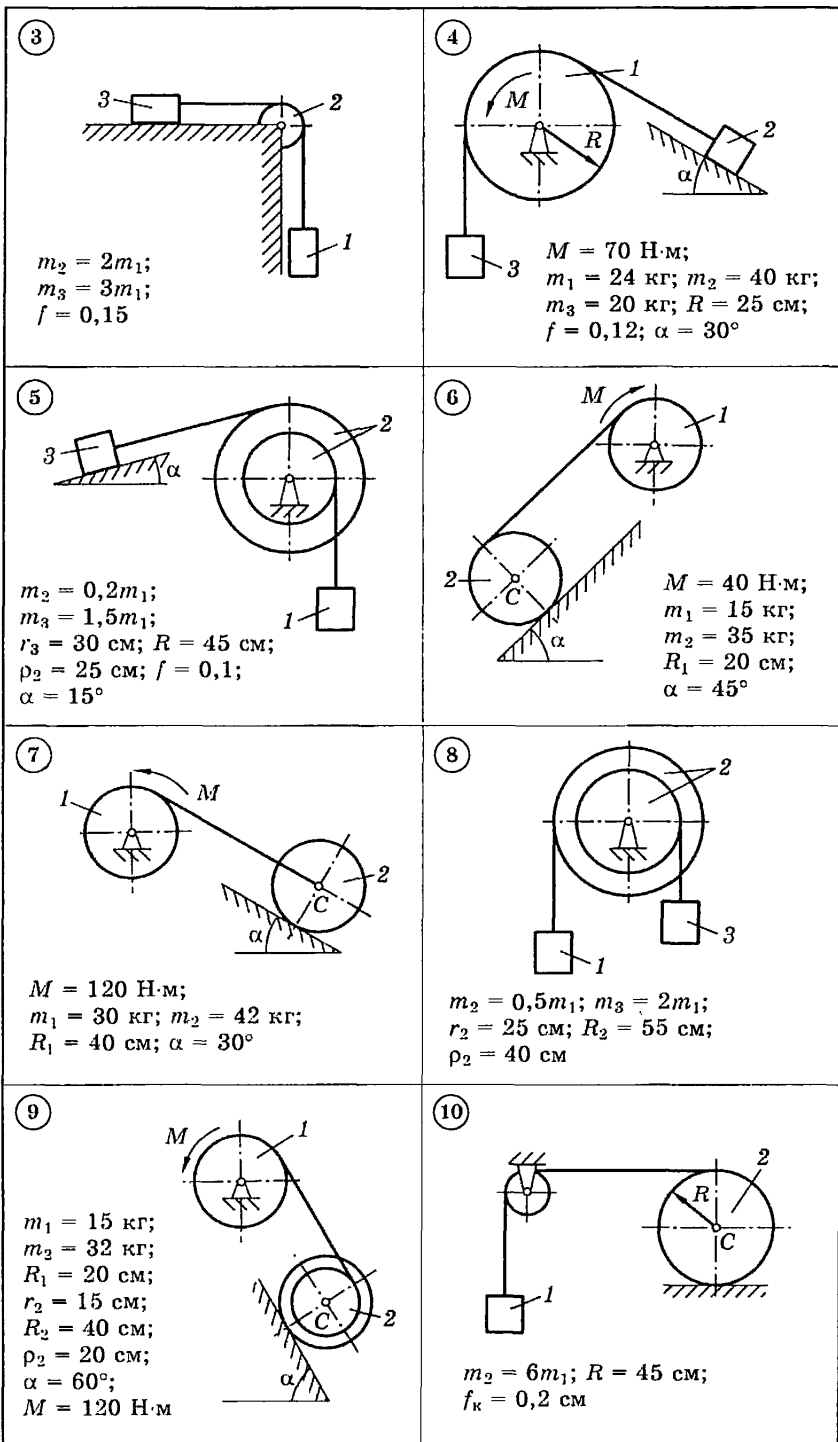
### ЗАДАНИЕ 1

Для приведенных на схемах 1–30 механических систем, используя теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, определить угловое ускорение (варианты 4, 6, 7, 9, 11, 18, 25, 26, 28) или линейное ускорение (остальные варианты) тела 1. Нити невесомы и нерастяжимы. Принятые обозначения:  $m$  — массы тел,  $R$  и  $r$  — радиусы,  $\rho$  — радиус инерции (если он не указан, тело считать однородным цилиндром); при наличии трения указываются  $f$  — коэффициент трения скольжения,  $f_k$  — коэффициент трения качения.

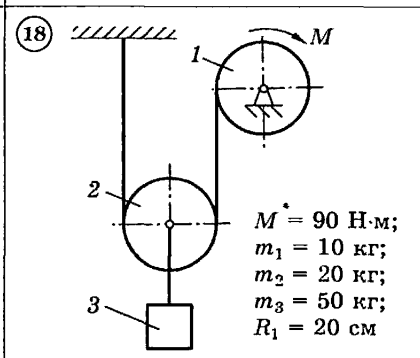
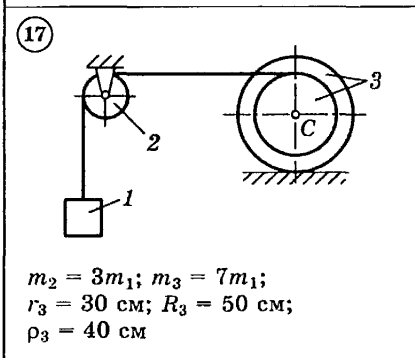
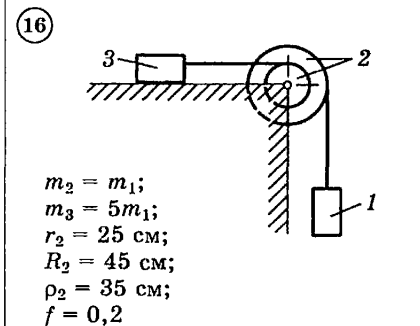
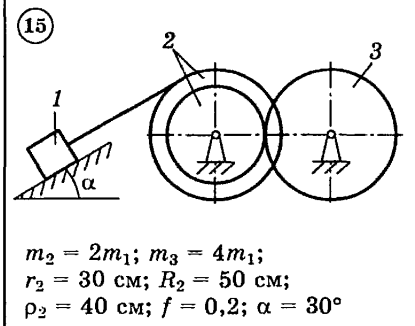
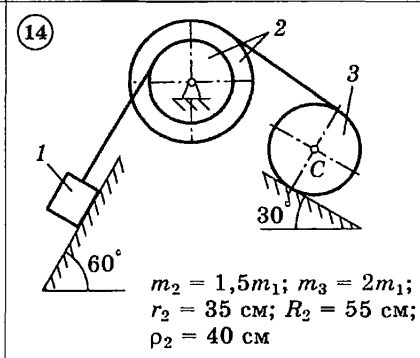
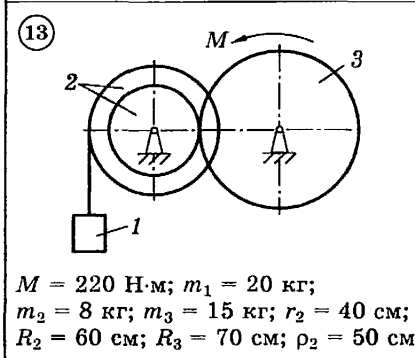
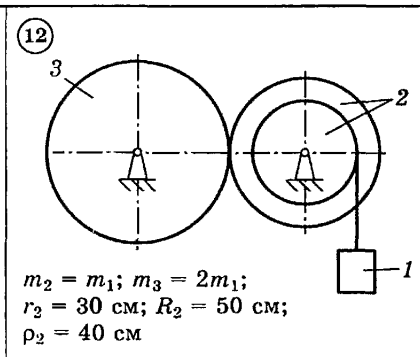
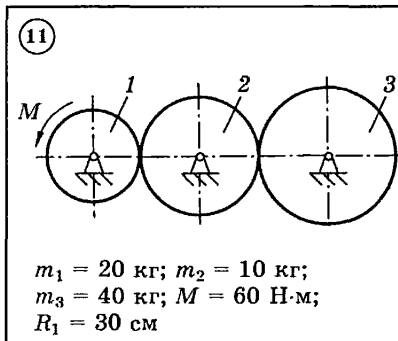
### ЗАДАНИЕ 2

Для приведенных на схемах 1–30 механических систем, используя теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме, определить угловую скорость (варианты 4, 6, 7, 9, 11, 18, 25, 26, 28) или линейную скорость (остальные варианты) тела 1 после его заданного перемещения  $\varphi_1 = 2\pi$  рад или  $s_1 = 2$  м. Движение начинается из состояния покоя.

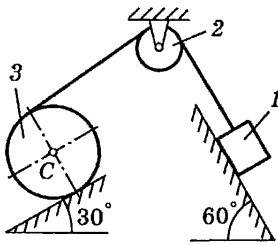






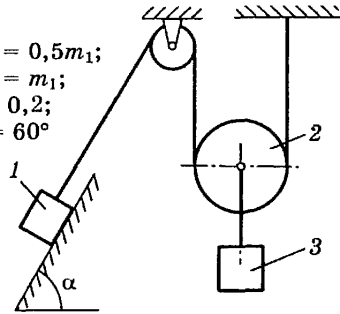


19



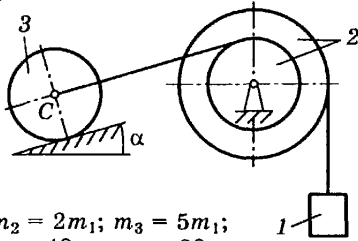
$m_2 = 0,6m_1; m_3 = 3m_1$

20



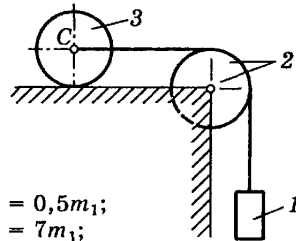
$m_2 = 0,5m_1;$   
 $m_3 = m_1;$   
 $f = 0,2;$   
 $\alpha = 60^\circ$

21



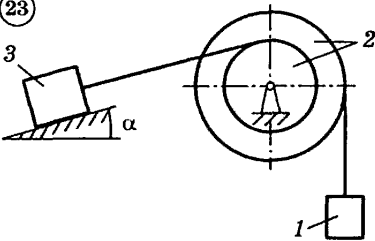
$m_2 = 2m_1; m_3 = 5m_1;$   
 $\rho_2 = 40 \text{ cm}; r_2 = 30 \text{ cm};$   
 $R_2 = 50 \text{ cm}; \alpha = 15^\circ$

22



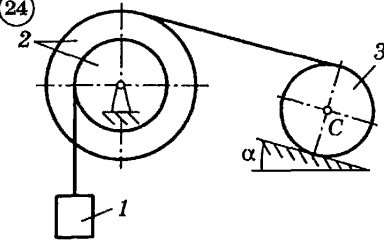
$m_2 = 0,5m_1;$   
 $m_3 = 7m_1;$   
 $R_3 = 40 \text{ cm};$   
 $f_k = 0,25 \text{ cm}$

23



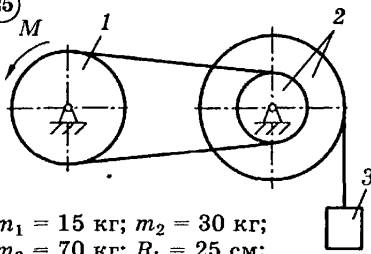
$m_2 = 1,5m_1; m_3 = 6m_1;$   
 $r_2 = 20 \text{ cm}; R_2 = 45 \text{ cm};$   
 $\rho_2 = 30 \text{ cm}; f = 0,1; \alpha = 15^\circ$

24



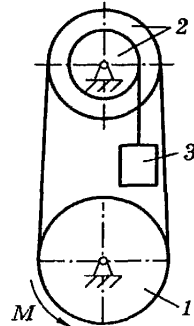
$m_2 = m_1; m_3 = 2,5m_1;$   
 $r_2 = 35 \text{ cm}; R_2 = 45 \text{ cm};$   
 $\rho_2 = 40 \text{ cm}; \alpha = 15^\circ$

25



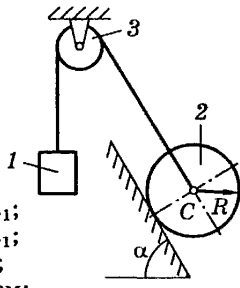
$m_1 = 15 \text{ кг}; m_2 = 30 \text{ кг};$   
 $m_3 = 70 \text{ кг}; R_1 = 25 \text{ см};$   
 $R_2 = 40 \text{ см}; r_2 = 20 \text{ см};$   
 $\rho_2 = 30 \text{ см}; M = 480 \text{ Н·м}$

26



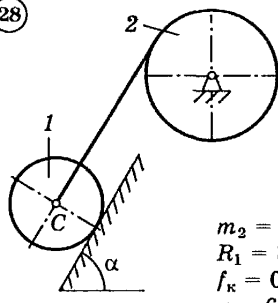
$m_1 = 20 \text{ кг};$   
 $m_2 = 30 \text{ кг};$   
 $m_3 = 50 \text{ кг};$   
 $R_1 = 50 \text{ см};$   
 $r_2 = 25 \text{ см};$   
 $R_2 = 45 \text{ см};$   
 $\rho_2 = 35 \text{ см};$   
 $M = 180 \text{ Н·м}$

27



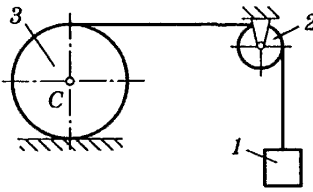
$m_2 = 0,5m_1;$   
 $m_3 = 0,5m_1;$   
 $R = 25 \text{ cm};$   
 $f_k = 0,28 \text{ cm};$   
 $\alpha = 60^\circ$

28



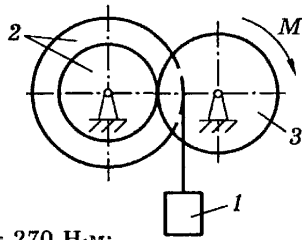
$m_2 = 4m_1;$   
 $R_1 = 30 \text{ cm};$   
 $f_k = 0,3 \text{ cm};$   
 $\alpha = 60^\circ$

29



$m_2 = 2m_1; m_3 = 6m_1;$   
 $R_3 = 50 \text{ cm}; f_k = 0,25 \text{ cm}$

30



$M = 270 \text{ H}\cdot\text{M};$   
 $m_1 = 45 \text{ кг}; m_2 = 20 \text{ кг};$   
 $m_3 = 15 \text{ кг}; r_2 = 30 \text{ cm};$   
 $R_2 = 50 \text{ cm}; r_3 = 35 \text{ cm}; \rho_2 = 40 \text{ cm}$

## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

### ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

#### ЗАДАЧА 1

Грузоподъемная установка (рис. 59) состоит из барабана с осевым моментом инерции  $J = 4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  и радиусом  $r = 20 \text{ см}$ , невесомого и нерастяжимого троса и груза массой  $m = 10^3 \text{ кг}$ , перемещающегося по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, с коэффициентом трения  $f = 0,2$ . Определить величину вращающего момента  $M$ , который необходимо приложить к барабану, чтобы его угловое ускорение было равно  $\varepsilon = 5 \text{ с}^{-2}$ .

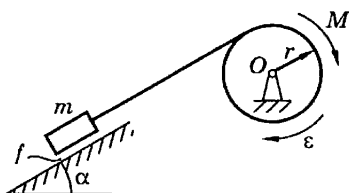


Рис. 59

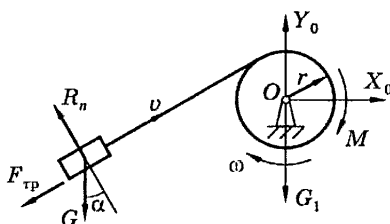


Рис. 60

**Решение.** Поскольку рассматривается мгновенное состояние системы, то следует применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k.$$

При условии, что трос нерастяжим и отсутствует проскальзывание троса относительно барабана, система является неизменяемой (внутренние силы не работают), и тогда производная от кинетической энергии будет определяться только мощностями внешних сил:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e.$$

Кинетическая энергия системы (поступательно движущийся груз и вращающийся барабан, рис. 60)

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Кинематическая связь, наложенная на скорость груза и угловую скорость барабана, определяется условиями нерастяжимости троса и отсутствием проскальзывания троса относительно барабана:  $v = \omega r$ . Тогда

$$T = \frac{1}{2}(mr^2 + J)\omega^2.$$

Выражение в скобках называется приведенным (к барабану) моментом инерции:  $J_{\text{пр}} = mr^2 + J = 44 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

Итак, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}J_{\text{пр}}\omega^2,$$

а производная от нее по времени

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}J_{\text{пр}}2\omega \frac{d\omega}{dt} = J_{\text{пр}}\omega\varepsilon$$

дает левую часть записи теоремы.

Рассмотрим действующие в системе внешние силы и их мощности. Сила тяжести барабана  $\bar{G}_1$  и составляющие реакции на его оси  $\bar{X}_O$  и  $\bar{Y}_O$  будут иметь нулевую мощность (так как равна нулю скорость точки их приложения — точки  $O$ ). Также равна нулю мощность нормальной реакции груза  $\bar{R}_n$ , поскольку она перпендикулярна скорости груза.

Ненулевую мощность будут иметь только сила тяжести груза  $\bar{G}$ , сила трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$  и вращающий момент  $M$ :

$$N_G = \bar{G}\bar{v} = Gv \cos(\alpha + 90^\circ) = -Gv \sin \alpha;$$

$$N_{F_{\text{тр}}} = \bar{F}_{\text{тр}}\bar{v} = F_{\text{тр}}v \cos 180^\circ = -F_{\text{тр}}v; \quad N_M = M\omega.$$

Тогда (с учетом кинематической связи) сумма мощностей запишется в виде

$$\sum N_k^e = [M - (G \sin \alpha + F_{\text{тр}})r]\omega.$$

Выражение в квадратных скобках называется приведенным (к барабану) вращающим моментом:  $M_{\text{пр}} = M - (G \sin \alpha + F_{\text{тр}})r$ , и тогда правая часть записи теоремы имеет вид  $\sum N_k^e = M_{\text{пр}}\omega$ .

Приравнявая правую и левую части теоремы, получаем  $J_{\text{пр}}\omega\varepsilon = M_{\text{пр}}\omega$ , отсюда после сокращения находим требуемый приведенный вращающий момент

$$M_{\text{пр}} = J_{\text{пр}}\varepsilon = 44 \cdot 5 = 220 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Теперь можно найти необходимый вращающий момент:  $M = M_{\text{пр}} + (G \sin \alpha + F_{\text{тр}})r$ . Учитывая, что  $F_{\text{тр}} = fR_n = fG \cos \alpha$ , находим  $M = M_{\text{пр}} + G(f \cos \alpha + \sin \alpha)r = 1539 \text{ Н}\cdot\text{м} \approx 15,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Ответ:  $M = 15,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

## ЗАДАЧА 2

Рассматривается грузоподъемная установка из предыдущей задачи. К барабану приложен постоянный вращающий момент  $M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Определить угловую скорость барабана после того, как он повернется на угол  $\varphi = 10 \text{ рад}$ , если движение началось из состояния покоя.

Решение. В постановке данной задачи идет речь о конечном перемещении системы, поэтому следует применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i.$$

Кинетическая энергия системы получена в предыдущей задаче

$$T = \frac{1}{2} J_{\text{пр}} \omega^2,$$

где приведенный момент инерции  $J_{\text{пр}} = 44 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Начальная кинетическая энергия системы  $T_0 = 0$ , так как движение началось из состояния покоя.

Перейдем к вычислению величин работ.

Внутренние силы в данной системе не работают:

$$\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$$

(неизменяемая система), поэтому изменение кинетической энергии будет определяться только работами внешних сил.

Внешние силы и соответствующие перемещения показаны на рис. 61 (перемещение груза  $\bar{s}$  и перемещение барабана  $\varphi$ ).

Сила тяжести барабана  $\bar{G}_1$  и составляющие реакции на его оси  $\bar{X}_O$  и  $\bar{Y}_O$  работы не совершают (так как нет перемещения у точки их прило-

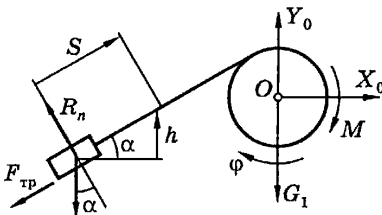


Рис. 61

жения — точки  $O$ ). Также равна нулю работа нормальной реакции груза  $\bar{R}_n$ , поскольку она перпендикулярна перемещению груза.

Ненулевая работа будет только у силы тяжести груза  $\bar{G}$ , силы трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$  и вращающего момента  $M$ . Величину этих работ вычисляем по формулам, соответствующим постоянным силам и моментам:

$$A_G = \bar{G}\bar{s} = Gs \cos(\alpha + 90^\circ) = -Gs \sin \alpha = -Gh;$$

$$A_{F_{\text{тр}}} = \bar{F}_{\text{тр}}\bar{s} = F_{\text{тр}}s \cos 180^\circ = -F_{\text{тр}}s;$$

$$A_M = M\varphi.$$

Интегрируя уравнение кинематической связи  $v = \omega r$ , получаем соотношение для перемещений  $s = \varphi r$ . Тогда суммарная работа запишется в виде

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = [M - (G \sin \alpha + F_{\text{тр}})r]\varphi.$$

Выражение в квадратных скобках — приведенный вращающий момент

$$M_{\text{пр}} = M - (G \sin \alpha + F_{\text{тр}})r = 1680 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

и тогда правая часть записи теоремы имеет вид

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = M_{\text{пр}}\varphi.$$

Приравнявая правую и левую части теоремы, получаем

$$\frac{1}{2} J_{\text{пр}} \omega^2 = M_{\text{пр}} \varphi,$$

откуда искомая угловая скорость

$$\omega = \sqrt{2 \frac{M_{\text{пр}}}{J_{\text{пр}}} \varphi} = 27,6 \text{ с}^{-1}.$$

О т в е т:  $\omega = 27,6 \text{ с}^{-1}$ .

### ЗАДАЧА 3

Каток для раскатывания асфальта (см. рис. 62) состоит из кузова массой  $m_1 = 3 \cdot 10^3$  кг и двух одинаковых барабанов. Масса барабана  $m_2 = 10^3$  кг, радиус его  $r = 0,5$  м, а радиус инерции —  $\rho = 0,4$  м. Коэффициент трения качения барабанов  $f_k = 9$  см. Определить величину вращающего

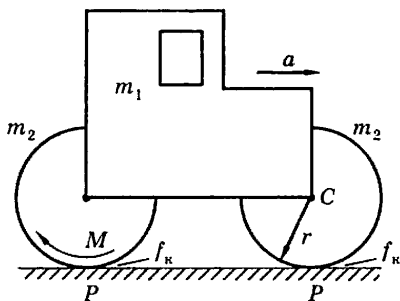


Рис. 62

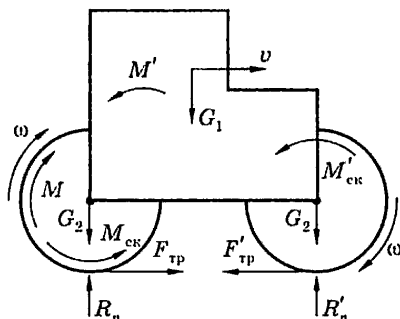


Рис. 63

момента  $M$ , передаваемого от двигателя на ведущий барабан катка, необходимую для придания кузову ускорения  $a = 0,2 \text{ м/с}^2$ .

**Решение.** Поскольку рассматривается мгновенное состояние системы, то следует применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e + \sum N_k^i.$$

Кинетическая энергия системы (поступательно движущийся кузов и совершающие плоское движение барабаны) имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m_1 v^2 + 2 \left( \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2 \right),$$

где  $v$  — скорость кузова,  $v_C$  — скорость центра масс барабана,  $\omega$  — его угловая скорость,  $J_{zC} = m_2 \rho^2 = 160 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  — момент инерции барабана относительно его оси (проходящей через центр масс).

Кинематические связи определяются тем, что каждый барабан поворачивается вокруг своего мгновенного центра скоростей (точки  $P$ ), а именно:  $v_C = \omega r$ ; кроме того,  $v = v_C$ , т. е.  $\omega = v/r$ . Тогда кинетическая энергия приводится к виду

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{пр}} v^2,$$

где  $m_{\text{пр}} = m_1 + 2m_2 + 2 \frac{J_{zC}}{r^2} = 6280 \text{ кг}$  — приведенная к кузову масса системы. Производная от кинетической энергии по времени равна

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} m_{\text{пр}} 2v \frac{dv}{dt} = m_{\text{пр}} v a.$$

Рассмотрим действующие в системе силы (рис. 63).



**Внешние силы.** Силы тяжести барабанов  $\bar{G}_2$  и кузова  $\bar{G}_1$  будут иметь нулевую мощность, поскольку они перпендикулярны скоростям точек их приложения. Также нулевую мощность будут иметь нормальные реакции  $\bar{R}_n$  и  $\bar{R}'_n$  и силы трения  $\bar{F}_{тр}$  и  $\bar{F}'_{тр}$ , так как равны нулю скорости их точек приложения — мгновенных центров скоростей.

Сопротивление качению учтем, используя вторую модель, т. е. не смещая нормальные реакции, а вводя моменты сопротивления качению:  $M_{ск} = f_k R_n$  и  $M'_{ск} = f_k R'_n$ .

Суммарная мощность внешних сил — мощность этих моментов

$$\sum N_k^e = -M_{ск} \omega - M'_{ск} \omega = -f_k (R_n + R'_n) \frac{v}{r}.$$

Из условия отсутствия движения центра масс системы вдоль вертикали следует равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось, откуда легко получаем  $R_n + R'_n = G_1 + 2G_2$ . Тогда

$$\sum N_k^e = -f_k (G_1 + 2G_2) \frac{v}{r}.$$

**Внутренние силы.** Учтем, что за счет работы двигателя на ведущий барабан и на кузов будут действовать одинаковые по модулю, но противоположно направленные вращающие моменты  $M$  и  $M'$  (закон равенства действия и противодействия). Заметим, что хотя эти моменты относятся к числу внутренних сил, в данном случае они должны учитываться, поскольку система не является неизменяемой (имеется взаимное проскальзывание тел системы: кузова и барабанов).

Запишем, учитывая, что кузов не вращается, суммарную мощность внутренних сил (моментов)

$$\sum N_k^i = M \omega + M' \cdot 0 = M \frac{v}{r}.$$

Тогда сумма мощностей всех сил запишется в виде

$$\sum N_k = \sum N_k^e + \sum N_k^i = [M - f_k (G_1 + 2G_2)] \frac{1}{r} v.$$

Множитель, стоящий в этой формуле перед скоростью, — это приведенная сила системы

$$F_{пр} = [M - f_k (G_1 + 2G_2)] \frac{1}{r}.$$

Итак,

$$\sum N_k = F_{пр} v.$$

Собирая правую и левую части теоремы, получаем  $m_{\text{пр}}va = F_{\text{пр}}v$ , откуда найдем необходимую приведенную силу  $F_{\text{пр}} = m_{\text{пр}}a = 1256 \text{ Н}$ .

Из выражения для приведенной силы найдем необходимую величину вращающего момента  $M$ :  $M = F_{\text{пр}}r + f_{\text{к}}(G_1 + 2G_2) = 5,04 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Анализируя численные величины слагаемых в последней формуле, можно отметить, что на преодоление сопротивления качению в данном случае требуется значительно больший вращающий момент, чем на разгон катка, т. е. придание ему ускоренного движения.

Ответ:  $M = 5,04 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

#### ЗАДАЧА 4

Для рассмотренного в предыдущей задаче катка определить скорость его кузова после того, как он прошел расстояние  $s = 2 \text{ м}$ , если к ведущему барабану приложен постоянный вращающий момент  $M = 4,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , а начальная скорость катка была равна  $v_0 = 0,2 \text{ м/с}$ .

**Решение.** В постановке данной задачи идет речь о конечном перемещении системы, поэтому следует применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i.$$

Кинетическая энергия системы получена в предыдущей задаче

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{пр}} v^2,$$

где  $m_{\text{пр}} = 6280 \text{ кг}$  — приведенная к кузову масса системы.

Начальная кинетическая энергия системы

$$T_0 = \frac{1}{2} m_{\text{пр}} v_0^2 = 125,6 \text{ Дж}.$$

Вычислим теперь величину работы действующих сил (см. рис. 63).

**Внешние силы.** Силы тяжести барабанов  $\bar{G}_2$  и кузова  $\bar{G}_1$  работы не совершают, поскольку они перпендикулярны скоростям (и, соответственно, перемещениям) точек их приложения. Также не работают нормальные реакции  $\bar{R}_n$  и  $\bar{R}'_n$  и силы трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$  и  $\bar{F}'_{\text{тр}}$ , так как всегда равны нулю скорости их точек приложения — мгновенных цент-

ров скоростей, и, соответственно, постоянно равны нулю их мощности.

Работу будут совершать моменты сопротивления качению:  $M_{\text{ск}} = f_{\kappa}R_n$  и  $M'_{\text{ск}} = f_{\kappa}R'_n$ , а именно:  $\sum A_k^e = -M_{\text{ск}}\varphi - M'_{\text{ск}}\varphi = -f_{\kappa}(R_n + R'_n)\varphi$ , где  $R_n + R'_n = G_1 + 2G_2$ .

Здесь  $\varphi$  — угол поворота барабанов, для которого, интегрируя уравнение кинематической связи  $\omega = v/r$  с учетом нулевых начальных условий для перемещений  $s$  и  $\varphi$ , легко получаем  $\varphi = s/r$ . Тогда

$$\sum A_k^e = -f_{\kappa}(G_1 + 2G_2)\frac{s}{r}.$$

**Внутренние силы.** Запишем, учитывая, что кузов не вращается, суммарную работу внутренних сил (моментов)  $M$  и  $M'$ :

$$\sum A_k^i = M\varphi + M' \cdot 0 = M\frac{s}{r}.$$

Тогда сумма работ всех сил запишется в виде

$$\sum A_k = \sum A_k^e + \sum A_k^i = [M - f_{\kappa}(G_1 + 2G_2)]\frac{1}{r}s.$$

Множитель, стоящий в этой формуле перед перемещением  $s$ , — это приведенная сила системы

$$F_{\text{пр}} = [M - f_{\kappa}(G_1 + 2G_2)]\frac{1}{r} = 380 \text{ Н}.$$

Итак,

$$\sum A_k = F_{\text{пр}}s = 760 \text{ Дж}.$$

Собирая правую и левую части теоремы, получаем

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k,$$

или  $T - 125,6 = 760$ , откуда

$$T = \frac{1}{2}m_{\text{пр}}v^2 = 885,6 \text{ Дж и } v = \sqrt{\frac{2 \cdot 885,6}{6280}} = 0,53 \text{ м/с}.$$

Ответ:  $v = 0,53 \text{ м/с}$ .

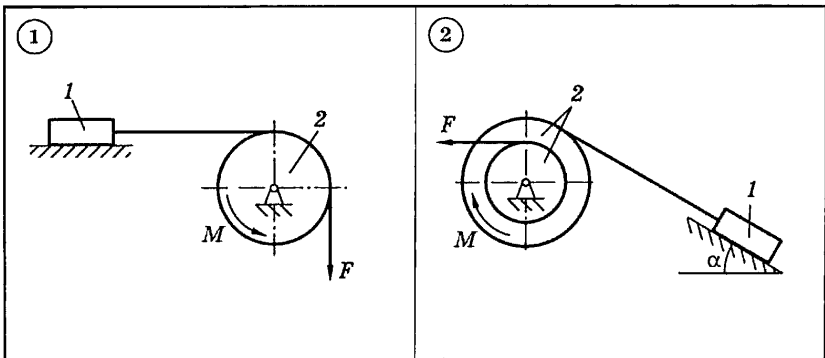
ЗАДАНИЕ Д4  
ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА

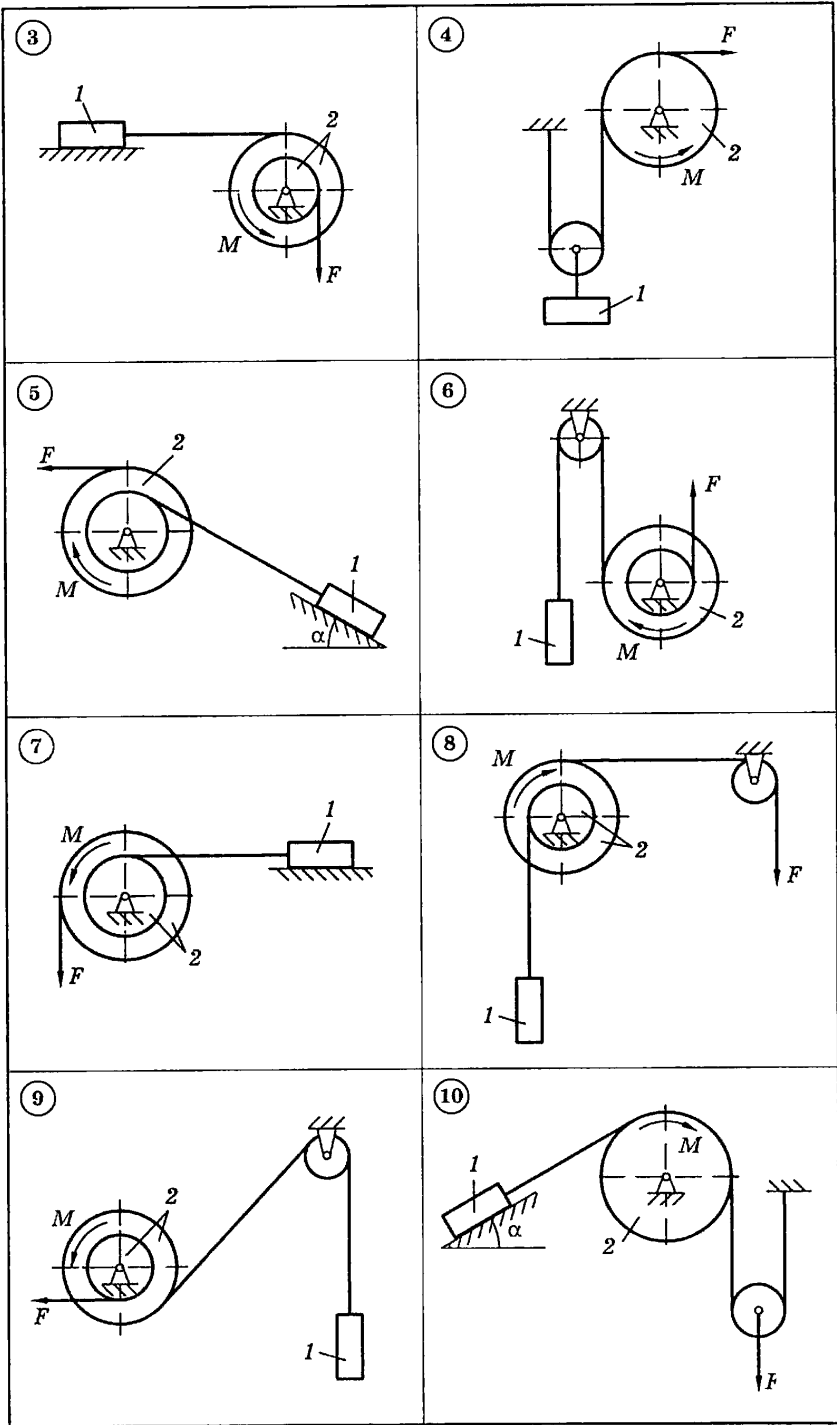
ЗАДАНИЕ 1

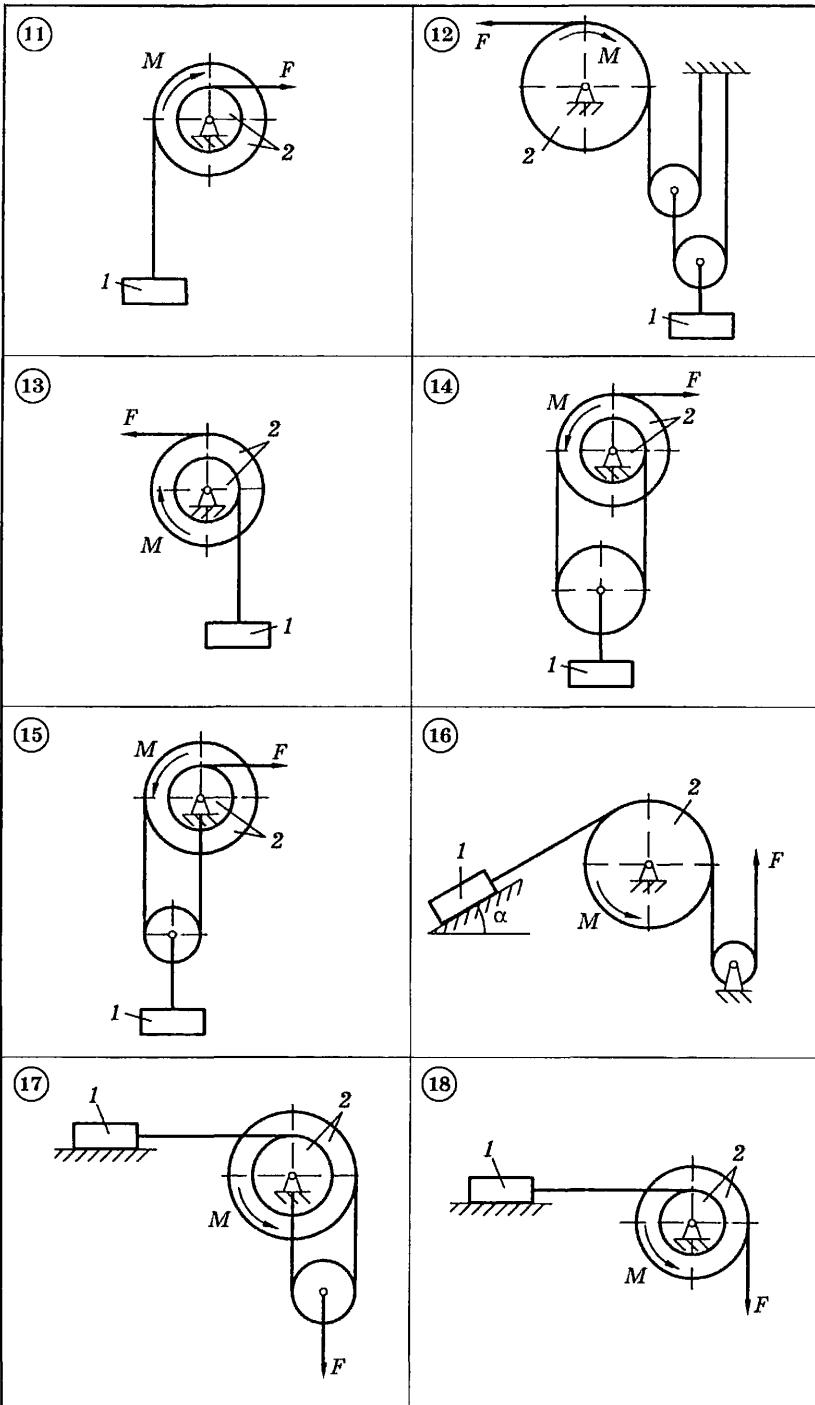
Выполнить задание СЗ, используя принцип возможных скоростей или принцип возможных перемещений Лагранжа.

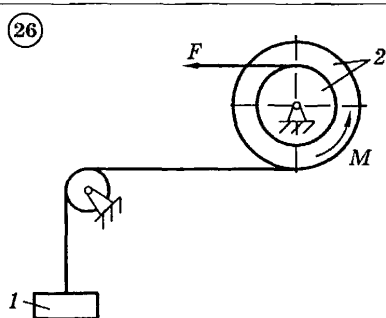
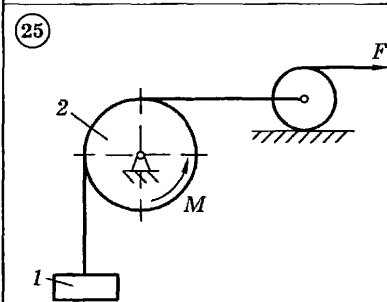
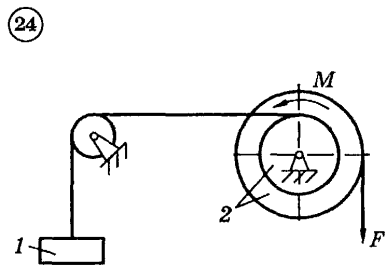
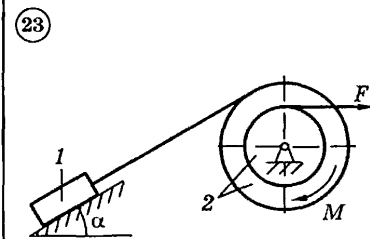
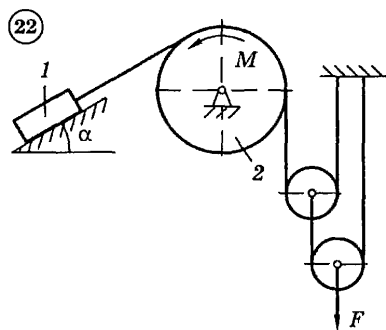
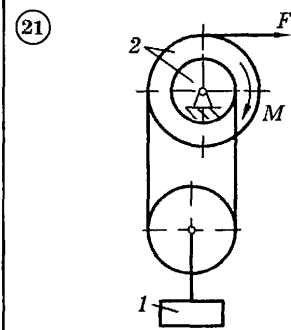
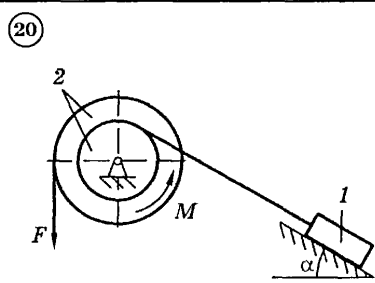
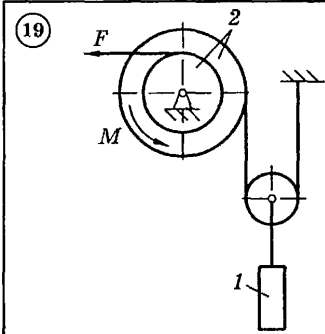
ЗАДАНИЕ 2

Для представленных на рисунках схем 1–30, используя принцип Лагранжа, определить величину силы  $F$  (при наличии трения — максимальное значение этой величины), при которой механическая система будет находиться в равновесии. Исходные данные: вес груза  $G_1 = 20$  кН, вращающий момент  $M = 1$  кН·м, радиус барабана  $R_2 = 0,4$  м (у двойного барабана имеется также  $r_2 = 0,2$  м), угол  $\alpha = 30^\circ$  и коэффициент трения скольжения  $f = 0,5$ . Ненумерованные блоки и катки считать невесомыми. Трением на осях барабана и блоков пренебречь.

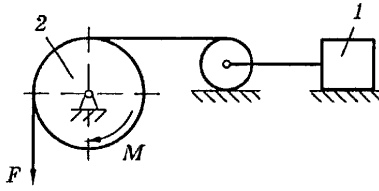




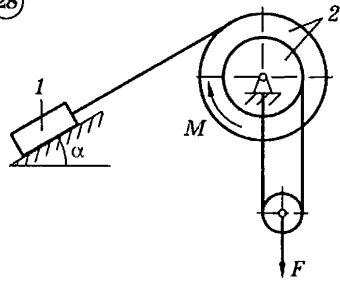




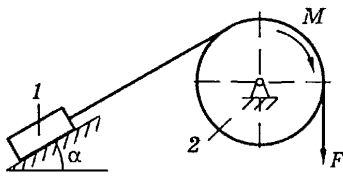
27



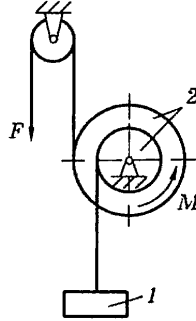
28



29



30





# ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

## ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ СКОРОСТЕЙ

### ЗАДАЧА 1

В механизме ручного домкрата вращение рукоятки  $A$  вызывает вращение валов, снабженных зубчатыми колесами, и поступательное вертикальное движение зубчатой рейки  $B$  (рис. 64).

Радиусы зубчатых колес:  $r_1 = 3$  см;  $r_2 = 12$  см;  $r_3 = 4$  см;  $r_4 = 16$  см;  $r_5 = 3$  см; длина рукоятки  $R = 18$  см.

Трением и весом элементов домкрата пренебречь. Определить величину силы  $F$ , приложенной к рукоятке, необходимой для удержания в равновесии груза весом  $G = 480$  кгс.

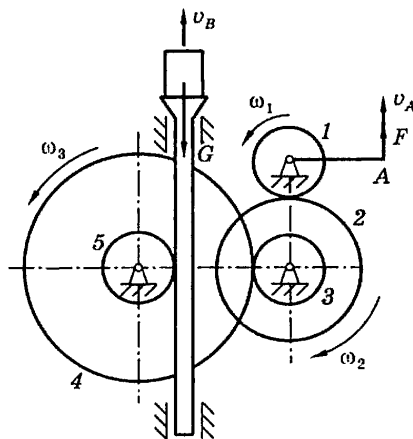


Рис. 64

**Решение.** Рассматривая равновесие механической системы, воспользуемся принципом возможных скоростей

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \bar{v}_k = 0.$$

Для этого придадим элементам системы возможные скорости, в частности отмеченные на рисунке  $v_A$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $v_B$ .

На систему действуют две активные силы  $\bar{F}$  и  $\bar{G}$  и сумма их мощностей:  $N = Fv_A - Gv_B = 0$ , следовательно,

$$F = G \frac{v_B}{v_A}.$$

Установим кинематические связи:

$$v_A = \omega_1 R; \quad \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2; \quad \omega_2 r_3 = \omega_3 r_4; \quad v_A = \omega_3 r_5,$$

откуда

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = \frac{1}{96},$$

и тогда

$$F = \frac{1}{96} G = 5 \text{ кгс.}$$

Рассмотренный домкрат позволяет получить выигрыш в силе в 96 раз.

О т в е т:  $F = 5$  кгс.

## ЗАДАЧА 2

Определить реакции опор невесомой составной рамы, если сила  $F = 5$  кН, а момент пары  $M = 2$  кН·м (рис. 65). Размеры в метрах указаны на чертеже.

Р е ш е н и е. Освободимся сразу полностью от всех связей и для полученной находящейся в равновесии системы (рис. 66) применим принцип возможных скоростей, придавая ее элементам такие возможные скорости, чтобы каждый раз работала только одна реакция.

1. Для определения реакции  $R_B$  придадим телу  $BC$  вращение вокруг точки  $C$  с некоторой угловой скоростью  $\omega$ , оставив тело  $AC$  неподвижным (рис. 67).

При выписывании мощностей учтем, что для вычисления мощности силы можно умножать момент этой силы на угловую скорость.

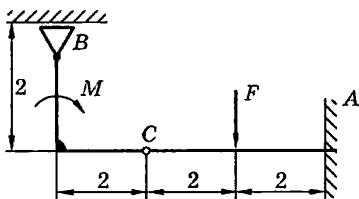


Рис. 65

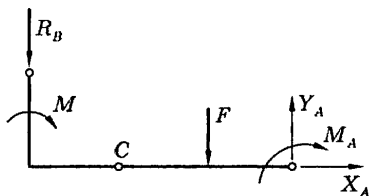


Рис. 66

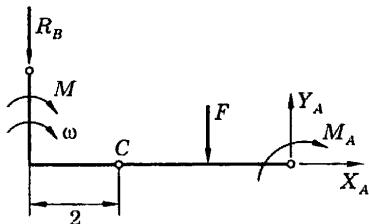


Рис. 67

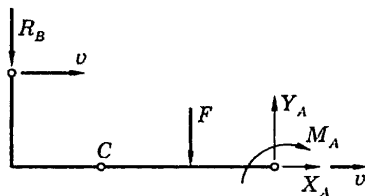


Рис. 68

Мощность будут иметь только  $R_B$  и  $M$ :  $N = M\omega - R_B 2\omega = 0$ , откуда  $R_B = \frac{M}{2} = 1 \text{ кН}$ .

2. Для вычисления реакции  $X_A$  придадим всей системе тел поступательное движение по оси  $x$  с некоторой скоростью  $v$  (рис. 68).

Возможная мощность будет лишь у силы  $X_A$ :  $N = X_A v = 0$ , откуда  $X_A = 0$ .

3. Чтобы определить реакцию  $Y_A$ , придадим телу  $AC$  поступательное движение по оси  $y$  с некоторой скоростью  $v$  (рис. 69).

При этом, чтобы реакция  $R_B$  не имела мощности, точка  $B$  либо должна быть неподвижна (что кинематически невозможно, так как скорость  $\vec{v}$  точки  $C$  не перпендикулярна отрезку  $BC$ ), либо должна иметь скорость, перпендикулярную реакции  $R_B$ . Последнее возможно, если тело  $BC$  будет поворачиваться вокруг мгновенного центра скоростей (МЦС), положение которого определяем, проводя перпендикуляры к скоростям точек  $B$  и  $C$ . МЦС оказывается в точке  $D$ , вокруг которой тело  $BC$  поворачивается с некоторой угловой скоростью  $\omega$ . При этом должно выполняться уравнение кинематической связи  $v = v_C = \omega |DC| = \omega \cdot 2$ .

Возможная мощность действующих сил  $N = -M\omega - Fv + Y_A v = 0$ .

Подставляя сюда  $v = 2\omega$  и сокращая уравнение на  $\omega$ , получаем  $-M - 2F + 2Y_A = 0$ , откуда

$$Y_A = \frac{M + 2F}{2} = 6 \text{ кН}.$$

4. Для определения момента заделки придадим телу  $AC$  вращение вокруг точки  $A$  с некоторой угловой скоростью  $\omega_1$  (рис. 70).

При этом для того, чтобы реакция  $R_B$  не имела мощности (не работала), телу  $BC$ , как и в предыдущем случае,

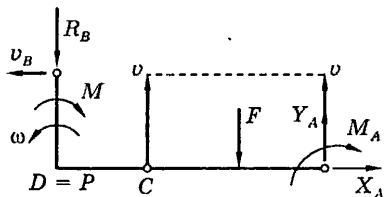


Рис. 69

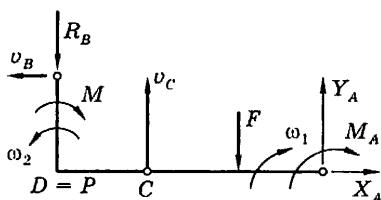


Рис. 70

следует придать вращение вокруг точки  $D$  (МЦС) с некоторой угловой скоростью  $\omega_2$ . Связь между угловыми скоростями определена величиной скорости точки  $C$ :  $v_C = \omega_2 |DC| = \omega_1 |AC|$ , откуда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{|AC|}{|DC|} = 2\omega_1.$$

Возможная мощность действующих сил  $N = M\omega_2 - F \cdot 2\omega_1 + M_A\omega_1 = 0$ .

Подставляя сюда выражение  $\omega_2 = 2\omega_1$  и сокращая на  $\omega_1$ , получаем  $-M \cdot 2 - F \cdot 2 + M_A = 0$ , откуда  $M_A = 2(M + F) = = 14$  кН·м.

Ответ:  $R_B = 1$  кН;  $X_A = 0$ ;  $Y_A = 6$  кН;  $M_A = 14$  кН·м.

### ЗАДАЧА 3

Определить усилия в отмеченных стержнях фермы (рис. 71), используя принцип возможных скоростей (ПВС). Приложенная сила  $F = 12$  кН, размеры указаны в метрах.

**Решение.** Ферма не имеет степеней свободы и применить к ней ПВС непосредственно нельзя. Будем последовательно удалять один из стержней фермы и заменим его силами, действующими со стороны удаленного стержня на ферму и равными усилию в стержне. Полученная геометрически изменяемая конструкция имеет одну степень свободы, и к ней можно применить ПВС (или ПВП).

#### 1. Определение усилия $S_1$ .

Удалим стержень 1. При этом учтем силы  $S_1$ , действующие со стороны стержня на ферму, включим эти силы в число активных сил (рис. 72).

Придадим системе возможные скорости. Левая часть фермы  $ACE$  может поворачиваться с некоторой (произвольной) возможной скоростью  $\omega_1$  вокруг неподвижной точки  $A$ . Правая часть фермы — в плоском движении.

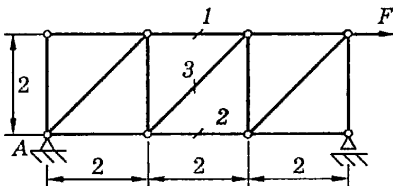


Рис. 71

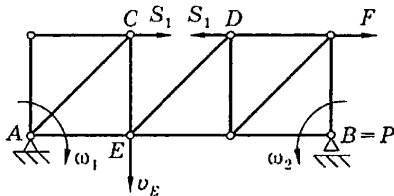


Рис. 72

Ее МЦС (точка  $P$ ) лежит на пересечении перпендикуляров к возможным скоростям  $\bar{v}_E$  и  $\bar{v}_B$ , и совпадает с точкой  $B$ . В данном случае из-за наличия левой части фермы точка  $B$  остается неподвижной, и правая часть фермы  $EDB$  поворачивается вокруг этой точки с возможной угловой скоростью  $\omega_2$ .

Суммарная возможная мощность заданной силы  $\bar{F}$  и усилий  $\bar{S}_1$  имеет вид

$$S_1 2\omega_1 + S_1 2\omega_2 - F 2\omega_2 = 0.$$

Установим связь между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$v_E = \omega_1 |AE| = \omega_2 |EB|,$$

то есть

$$\omega_1 = \frac{|AE|}{|EB|} \omega_2 = 2\omega_2.$$

После подстановки  $\omega_1$  и сокращения на  $2\omega_2$  имеем  $2S_1 + S_1 = F$ , откуда

$$S_1 = \frac{F}{3} = 4 \text{ кН}.$$

## 2. Определение усилия $S_2$ (рис. 73).

Удалим стержень 2, учтем усилия  $S_2$ , включив их в число активных сил. Придадим системе возможные скорости. Левая часть фермы  $ADE$  может вращаться вокруг

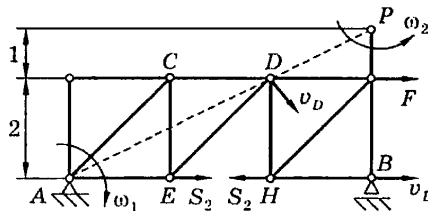


Рис. 73

неподвижной точки  $A$  с угловой скоростью  $\omega_1$ . Правая часть фермы — в плоском движении. Ее МЦС (точка  $P$ ) лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям  $\bar{v}_D$  и  $\bar{v}_B$ , и правая часть фермы поворачивается с возможной угловой скоростью  $\omega_2$  вокруг точки  $P$ .

Возможная мощность сил (силы  $\bar{F}$  и усилий  $\bar{S}_2$ ) имеет вид

$$-S_2 3\omega_2 + F \cdot 1\omega_2 = 0,$$

откуда  $S_2 = \frac{F}{3} = 4 \text{ кН}.$

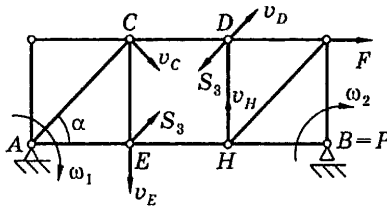


Рис. 74

Сила  $S_2$ , приложенная к телу  $ADE$ , не работает.

### 3. Определение усилия $S_3$ (рис. 74).

Удалим стержень 3 и учтем силы  $\bar{S}_3$ , включив эти силы в число активных сил. Полученная система имеет одну степень свободы и состоит из четырех твердых тел, соединенных шарнирами:  $ACE$ ,  $DHB$  и стержней  $CD$  и  $EH$ .

Придадим системе возможные скорости. Тело  $ACE$  может поворачиваться вокруг неподвижной точки  $A$  с возможной угловой скоростью  $\omega_1$ . Тогда возможная скорость точки  $E$  направлена вертикально. Скорость точки  $H$  также направлена вертикально, так как проекции  $\bar{v}_E$  и  $\bar{v}_H$  на ось, проходящую через точки  $E$  и  $H$ , должны быть равны. Тело  $BHD$  — в плоском движении, и МЦС тела  $BHD$  лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям точек  $H$  и  $B$  и совпадает с точкой  $B$ . Пусть это тело поворачивается с возможной угловой скоростью  $\omega_2$ . Направление  $\omega_2$  определяется направлением скорости  $\bar{v}_D$ , а последняя — направлением скорости  $\bar{v}_C$ .

Возможная мощность сил (силы  $\bar{F}$  и сил  $\bar{S}_3$ ) имеет вид

$$-S_3 \sin \alpha \cdot 2\omega_1 - S_3 \sin \alpha \cdot 2\omega_2 - S_3 \cos \alpha \cdot 2\omega_2 + F \cdot 2\omega_2 = 0.$$

Поскольку  $\alpha = 45^\circ$ , то  $v_C = v_D$ , так как проекции этих скоростей на ось, проходящую через точки  $C$  и  $D$ , должны быть равны. Тогда равны и угловые скорости  $\omega_1 = \omega_2$ . Выражение для возможной мощности принимает вид

$$-3S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} 2\omega_2 + F \cdot 2\omega_2 = 0,$$

откуда

$$S_3 = \frac{F\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2} \text{ кН.}$$

Ответ:  $S_1 = S_2 = 4$  кН;  $S_3 = 4\sqrt{2}$  кН. Стержни растянуты.

#### ЗАДАЧА 4

Однородный стержень  $AB$  (рис. 75) длиной  $2l$  подвешен на нити в точке  $A$ , и опирается на гладкий выступ в точке  $D$ . Расстояния  $|OA| = |AD| = l$ . Точки  $O$  и  $D$  находятся на одной горизонтали. Найти угол  $\varphi$  между стержнем и горизонтом в положении равновесия стержня.

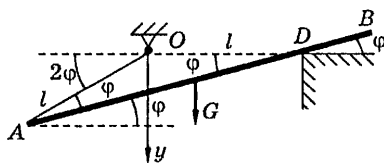


Рис. 75

**Решение.** На стержень действует единственная активная сила — сила тяжести  $\vec{G}$ , поэтому ПВС дает  $N = \vec{G} \cdot \vec{v}_C = 0$ , где  $\vec{v}_C$  — возможная скорость центра тяжести стержня. Поскольку сила  $\vec{G}$  имеет проекцию только на ось  $y$  (ось  $y$  направлена вертикально вниз), расписывая скалярное произведение, получаем  $G \cdot v_{Cy} = 0$ , откуда  $v_{Cy} = 0$ , где  $v_{Cy} = \dot{y}_C$  — проекция скорости центра тяжести на ось  $y$ .

Таким образом,  $\dot{y}_C = 0$ , т. е. в положении равновесия координата  $y_C$  имеет стационарное значение — в данном случае максимальное. Последнее означает простое условие: для тела в поле силы тяжести положением устойчивого равновесия будет то, при котором центр тяжести его занимает самое низкое положение (принцип Торричелли).

Так как (из геометрии)  $y_C = l \sin 2\varphi - l \sin \varphi$ , то

$$\dot{y}_C = \frac{dy_C}{d\varphi} \dot{\varphi},$$

где  $\dot{\varphi} = \omega$  — возможная угловая скорость поворота стержня.

Отсюда следует:

$$l(2 \cos 2\varphi - \cos \varphi) \dot{\varphi} = 0.$$

Поскольку  $\dot{\varphi} \neq 0$  (угол  $\varphi$  не имеет стационарного значения), получаем

$$2 \cos 2\varphi - \cos \varphi = 0, \quad (*)$$

или  $4 \cos^2 \varphi - \cos \varphi - 2 = 0$ , откуда

$$\cos \varphi = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \text{ и } \varphi = 32,5^\circ.$$

Если же с самого начала рассмотрения выбрать в качестве обобщенной координаты угол  $\varphi$ , то возможная мощность получилась бы в виде  $N = Q_\varphi \dot{\varphi}$ , где  $Q_\varphi$  — обобщенная сила. В положении равновесия  $N = 0$ , а это при  $\dot{\varphi} \neq 0$  означает, что равна нулю обобщенная сила:  $Q_\varphi = 0$  — выражение принципа Лагранжа в обобщенных силах.

Поскольку

$$N = G \dot{y}_C = G \frac{dy_C}{d\varphi} \dot{\varphi},$$

то  $Q_\varphi = G \frac{dy_C}{d\varphi} = 0$ , откуда  $\frac{dy_C}{d\varphi} = 0$ , и мы вновь приходим к уравнению (\*).

Приведенное решение задачи можно сравнить с ее решением в разделе С2, чтобы убедиться в достоинствах методов аналитической статики.

О т в е т:  $\varphi = 32,5^\circ$ .



# ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

## ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### ЗАДАЧА 1

Дана рама (рис. 76), размеры которой указаны в метрах, с нагрузкой  $F = 10$  кН;  $M = 20$  кН·м;  $q = 2$  кН/м. Определить реакции опор рамы, используя принцип возможных перемещений.

**Решение.** Рама не имеет степеней свободы и применить к ней непосредственно ПВП нельзя. Будем последовательно убирать одну из связей, заменяя ее реакцией, включив последнюю в число активных сил. После преобразования система получает одну степень свободы. Используем ПВП:

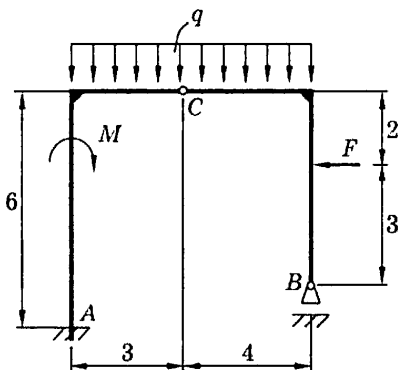


Рис. 76

$$\sum \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

#### 1. Определение момента в заделке $M_A$ .

Заделку в точке  $A$  заменим неподвижным шарниром (см. рис. 77). Теперь система имеет одну степень свободы. Точка  $A$  остается неподвижной, но тело  $AC$  может поворачиваться вокруг точки  $A$ . Добавим реакцию отброшенной связи  $M_A$  и включим ее в число активных сил.

Придадим системе возможные перемещения. Пусть тело  $AC$  поворачивается вокруг точки  $A$  на некоторый бесконечно малый угол  $\delta\varphi_1$ .

При этом тело  $CB$  будет находиться в плоском движении, причем точка  $B$  имеет возможность двигаться вдоль опорной поверхности. Мгновенный центр скоростей (МЦС) тела  $CB$  — точка  $P$  — лежит на пересечении перпендикуляров к возможным скоростям  $\bar{v}_C$  и  $\bar{v}_B$  (или, что то же самое, к

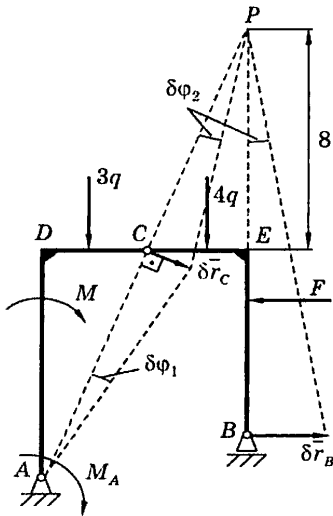


Рис. 77

возможным перемещениям  $\delta \bar{r}_C$  и  $\delta \bar{r}_B$ ). Тело  $CB$  повернется на некоторый угол  $\delta \varphi_2$  против часовой стрелки вокруг точки  $P$ .

Возможная работа активных сил (и момента  $M_A$ ) имеет вид

$$M_A \delta \varphi_1 + M \delta \varphi_1 + 3q1,5\delta \varphi_1 + 4q2\delta \varphi_2 - F10\delta \varphi_2 = 0.$$

Выразим  $\delta \varphi_2$  через  $\delta \varphi_1$ , учитывая, что  $v_C = |AC|\omega_1 = |CP|\omega_2$ , откуда

$$\omega_2 = \frac{|AC|}{|CP|} \omega_1 = \frac{|CD|}{|CE|} \omega_1 = \frac{3}{4} \omega_1,$$

и, следовательно,

$$\delta \varphi_2 = \frac{3}{4} \delta \varphi_1.$$

После подстановки  $\delta \varphi_2$  и сокращения на  $\delta \varphi_1$  уравнение возможных работ принимает вид  $M + M_A + 10,5q - 7,5F = 0$ , откуда  $M_A = 34$  кН·м.

## 2. Определение реакции $Y_A$ .

Заменим заделку в точке  $A$  связью, которая не позволяет телу  $AC$  поворачиваться и разрешает перемещение в вертикальном направлении (рис. 78).

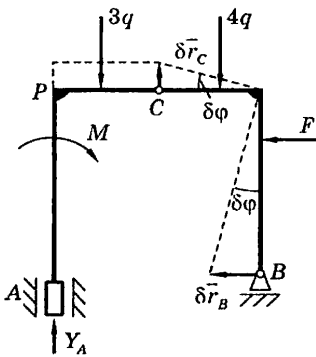


Рис. 78

Добавим к активным силам реакцию  $Y_A$ . Придадим системе возможные перемещения. Тело  $AC$  переместим поступательно в вертикальном направлении на  $\delta \bar{r}_C$ . Тело  $CB$  повернем на угол  $\delta \varphi$  вокруг МЦС (точка  $P$ ).

Возможная работа всех активных сил и моментов имеет вид

$$Y_A \delta r_C - 3q\delta r_C - 4q2\delta \varphi + F2\delta \varphi = 0.$$

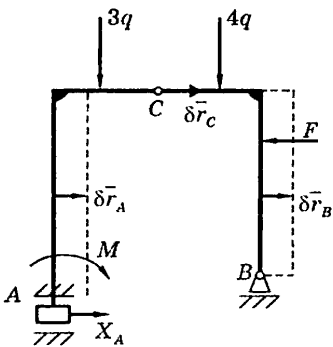


Рис. 79

Учитывая, что  $\delta r_C = \delta\varphi|CP| = \delta\varphi \cdot 4$ , получим  $Y_A \cdot 4 - 20q + F \cdot 2 = 0$ , откуда  $Y_A = 5$  кН.

### 3. Определение реакции $X_A$ .

Заменим заделку в точке  $A$  связью, которая не позволяет телу  $AC$  поворачиваться и разрешает перемещаться в горизонтальном направлении (рис. 79). Добавим к активным силам реакцию  $X_A$ . Придадим системе возможные перемещения. Тело  $AC$  может двигаться поступательно с перемещением  $\delta\vec{r}_A$ . Тело  $CB$  двигается также поступательно, так как  $\delta\vec{r}_A \parallel \delta\vec{r}_B$  и отрезок  $CB$  не перпендикулярен  $\delta\vec{r}_A$ , причем  $\delta\vec{r}_B = \delta\vec{r}_C = \delta\vec{r}_A$ .

Возможная работа всех активных сил и реакции  $X_A$  принимает вид  $X_A \delta r_A - F \delta r_A = 0$ , т. е.  $X_A = F = 10$  кН.

### 4. Определение реакции $\vec{R}_B$ .

Устраним опору  $B$ , заменив ее действие реакцией  $\vec{R}_B$ . Придадим системе возможные перемещения (рис. 80). Тело  $AC$  — неподвижно, тело  $CB$  поворачиваем вокруг точки  $C$  на угол  $\delta\varphi$ .

Возможная работа всех активных сил и реакции  $R_B$  имеет вид

$$4q2\delta\varphi + F2\delta\varphi - R_B4\delta\varphi = 0,$$

откуда  $R_B = 9$  кН.

Ответ:  $X_A = 10$  кН;  $Y_A = 5$  кН;  $M_A = 34$  кН·м;  $R_B = 9$  кН.

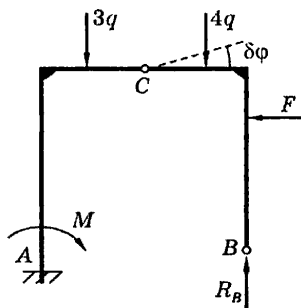


Рис. 80

## ЗАДАЧА 2

Определить реакции опор невесомой составной рамы, если сила  $F = 5$  кН, а момент пары  $M = 2$  кН·м (см. рис. 81). Размеры в метрах указаны на чертеже.

Решение. Механическая система состоит из двух тел и при наложенных связях находится в равновесии, не имея степеней свободы. Освобождая систему от связей, вводя реакции  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $M_A$  и  $R_B$  и придавая ей мысленно движение, можно применять принцип Лагранжа. При этом придаваемое движение должно быть таким, чтобы из всех неизвестных реакций только одна совершала работу. И тогда из выражения принципа возможных перемещений

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0 \text{ эта реакция может быть вычислена.}$$

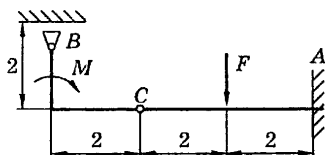


Рис. 81

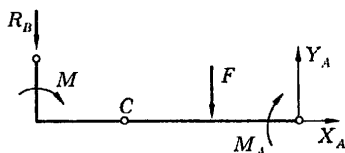


Рис. 82

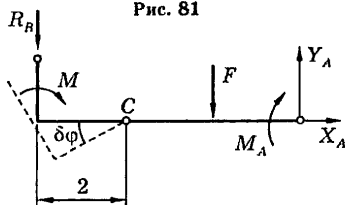


Рис. 83

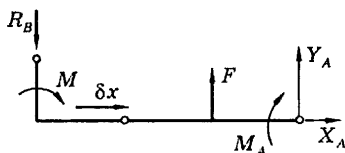


Рис. 84

Освободимся сразу полностью от всех связей и для полученной находящейся в равновесии системы (рис. 82) применим ПВП.

1. Определим реакцию в точке B.

Для определения реакции  $R_B$  придадим части BC возможное перемещение в виде поворота вокруг точки C на бесконечно малый угол  $\delta\varphi$  (рис. 83).

При записи выражения работы учтем, что работу силы, действующей на вращающееся тело, проще записать в виде произведения момента силы относительно оси вращения (точки поворота) на угол поворота. В данном случае получаем

$$\delta A = R_B \cdot 2\delta\varphi - M\delta\varphi = 0$$

или

$$(R_B \cdot 2 - M)\delta\varphi = 0. \quad (*)$$

Но  $\delta\varphi \neq 0$ , и тогда  $R_B \cdot 2 - M = 0$ , то есть  $R_B = \frac{M}{2} = 1 \text{ кН}$ .

Обратим внимание на то, что выражение в скобках в уравнении (\*) — это обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $\varphi$ , и она, как это и следует из принципа Лагранжа в обобщенных силах, в положении равновесия системы равна нулю:  $Q_j = 0$ ;  $j = 1, 2, \dots, s$ .

2. Для определения реакции  $X_A$  следует придать телу AC такое перемещение, при котором оно не поворачивается и не перемещается вдоль оси  $y$ . Тогда реакции  $Y_A$  и  $M_A$  работать не будут.

Придадим системе тел поступательное возможное перемещение (рис. 84) вдоль оси  $x$ , и тогда  $\delta A = X_A \delta x = 0$ , откуда следует, что  $X_A = 0$ .

3. Для определения реакции  $Y_A$  придадим телу  $AC$  поступательное движение по оси  $y$  (возможное перемещение  $\delta y$ ). Что касается тела  $BC$ , то для того, чтобы никак не нарушалась связь в точке  $B$ , она либо должна быть неподвижной (что в данном случае кинематически невозможно, так как перемещение  $\delta y$  точки  $C$  не перпендикулярно отрезку  $BC$ ), либо ее перемещение должно быть перпендикулярно реакции  $R_B$ . Последний случай возможен, для этого тело  $BC$  должно поворачиваться вокруг точки  $D$  (МЦС), в которой пересекаются перпендикуляры к перемещениям точек  $B$  и  $C$ . Введем соответствующий поворот (возможное перемещение) на угол  $\delta\varphi$  (рис. 85).

Связь между  $\delta\varphi$  и  $\delta y$  следует из треугольника  $DCE$  с бесконечно малым углом  $\delta\varphi$ , а именно:  $\delta y = 2\delta\varphi$ .

Выписывая возможную работу, получаем  $\delta A = -M\delta\varphi - F\delta y + Y_A\delta y = 0$ .

После подстановки  $\delta y$  и сокращения на  $\delta\varphi$  имеем  $-M - F \cdot 2 + Y_A \cdot 2 = 0$ , откуда  $Y_A = \frac{M + 2F}{2} = 6 \text{ кН}$ .

4. Для определения момента заделки  $M_A$  придадим телу  $AC$  возможное перемещение в виде поворота на угол  $\delta\varphi_1$  вокруг точки  $A$  (тогда реакции  $X_A$  и  $Y_A$  работать не будут). Для того чтобы не работала реакция в точке  $B$ , телу  $BC$  вновь придадим возможное перемещение в виде поворота вокруг точки  $D$  на угол  $\delta\varphi_2$  (рис. 86).

Из треугольников  $DCE$  и  $ACE$  устанавливаем связь между этими углами:  $\delta y = 2\delta\varphi_2 = 4\delta\varphi_1$ , то есть  $\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_1$ .

Выписываем возможную работу  $\delta A = -M\delta\varphi_2 - F2\delta\varphi_1 + M_A\delta\varphi_1 = 0$ .

После подстановки  $\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_1$  и сокращения находим  $-M \cdot 2 - F \cdot 2 + M_A = 0$ , откуда  $M_A = 2(M + F) = 14 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Ответ:  $R_B = 1 \text{ кН}$ ;  $X_A = 0$ ;  $Y_A = 6 \text{ кН}$ ;  $M_A = 14 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

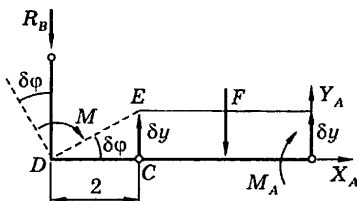


Рис. 85

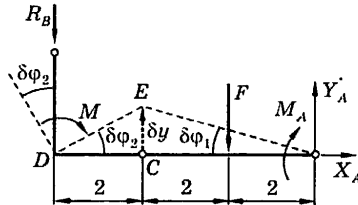


Рис. 86

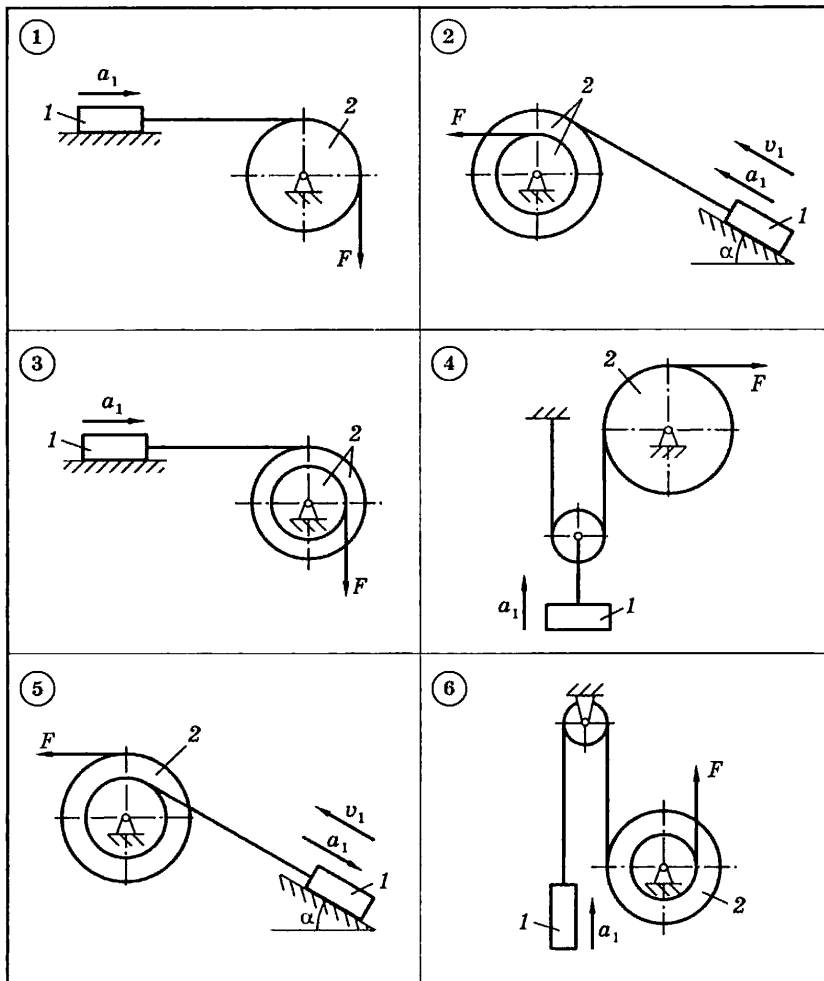
## ЗАДАНИЕ Д5

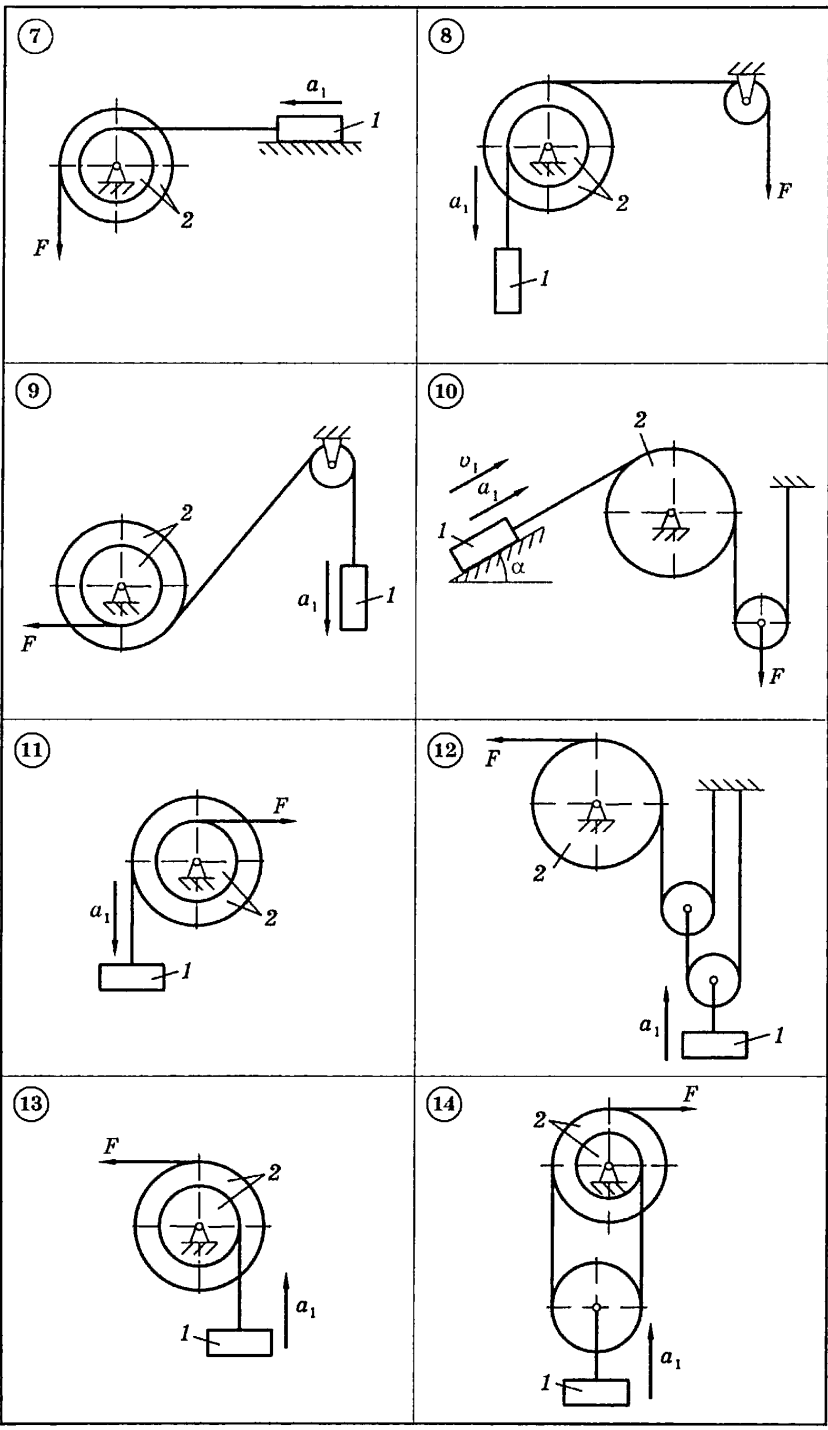
### ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Для приведенных на схемах 1–30 механических систем, используя принцип Даламбера, определить величину силы  $F$ , необходимую для перемещения груза с заданным ускорением  $a_1$ , а также усилие в грузовом тросе. Исходные данные: массы груза  $m_1$  и барабана  $m_2$ , радиус барабана  $R_2$  (у двойного барабана имеется также  $r_2$ ), его радиус инерции  $\rho_2$  (если он не указан, тело считать однородным цилиндром), угол  $\alpha$  и коэффициент трения скольжения  $f$  приведены в таблице. Непронумерованные блоки и катки считать невесомыми. Трением на осях барабана и блоков пренебречь.

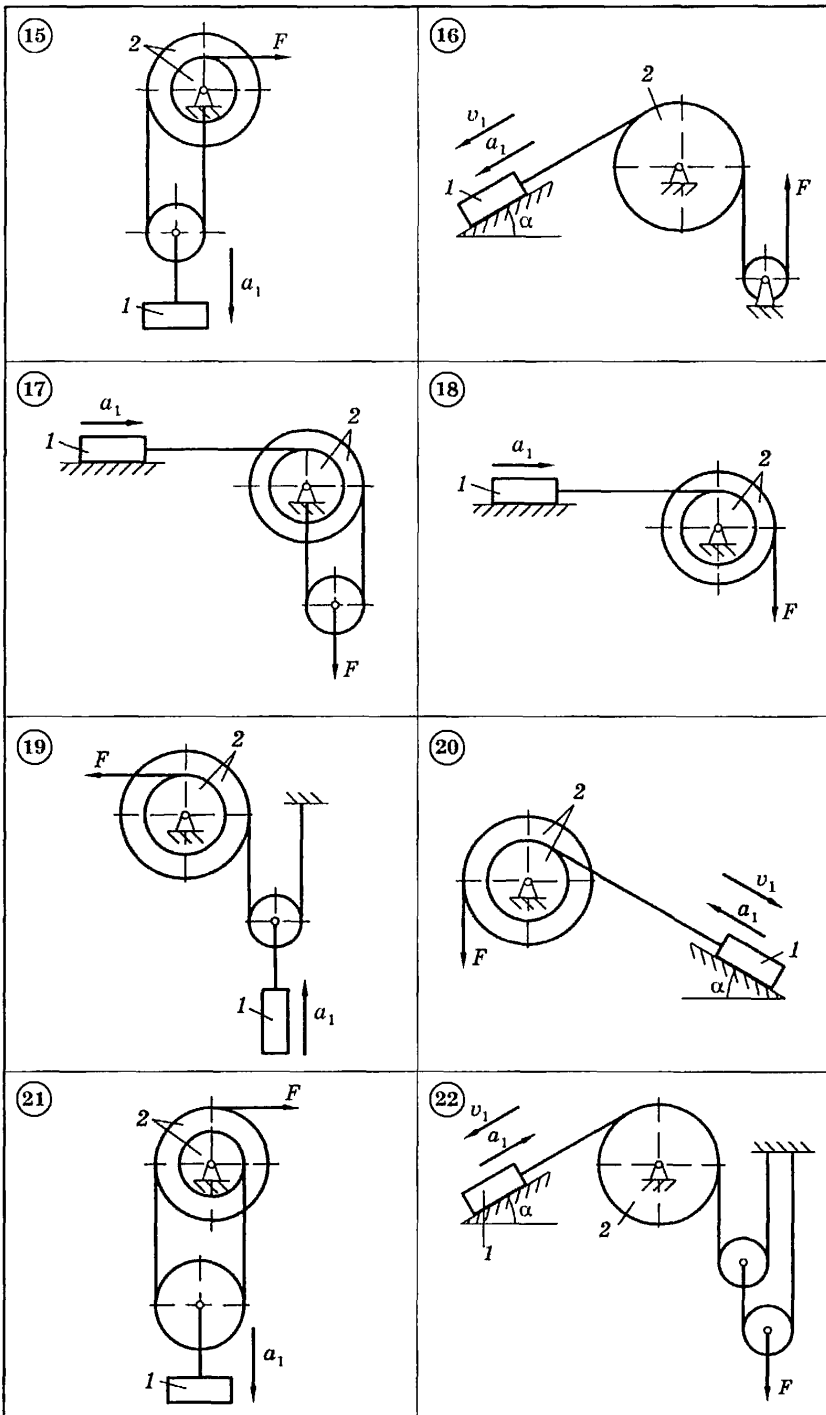
№ вар.	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$\rho_2$ , см	$R_2$ , см	$r_2$ , см	$\alpha$ , град.	$f$	$a_1$ , м/с <sup>2</sup>
1	1000	200					0,15	2,0
2	500	100	20	40	20	30	0,2	1,5
3	600	80	30	30	20		0,15	3,5
4	500	100						2,0
5	200	50	25	30	15	45	0,1	3,0
6	1000	150	40	20	10			2,7
7	400	100	30	35	15		0,25	1,5
8	1000	200	40	20	15			1,0
9	1500	150	20	30	20			1,7
10	700	100				30	0,2	2,0
11	750	100	30	40	25			3,0
12	700	80						2,5
13	800	200	40	30	10			2,0
14	500	85	35	20	15			1,5
15	500	100	25	30	25			1,0
16	520	100				45	0,1	2,0
17	620	150	15	30	20		0,25	0,9
18	700	70	40	40	30		0,25	1,0
19	800	50	20	25	10			1,5
20	500	80	35	30	10	30	0,2	1,8

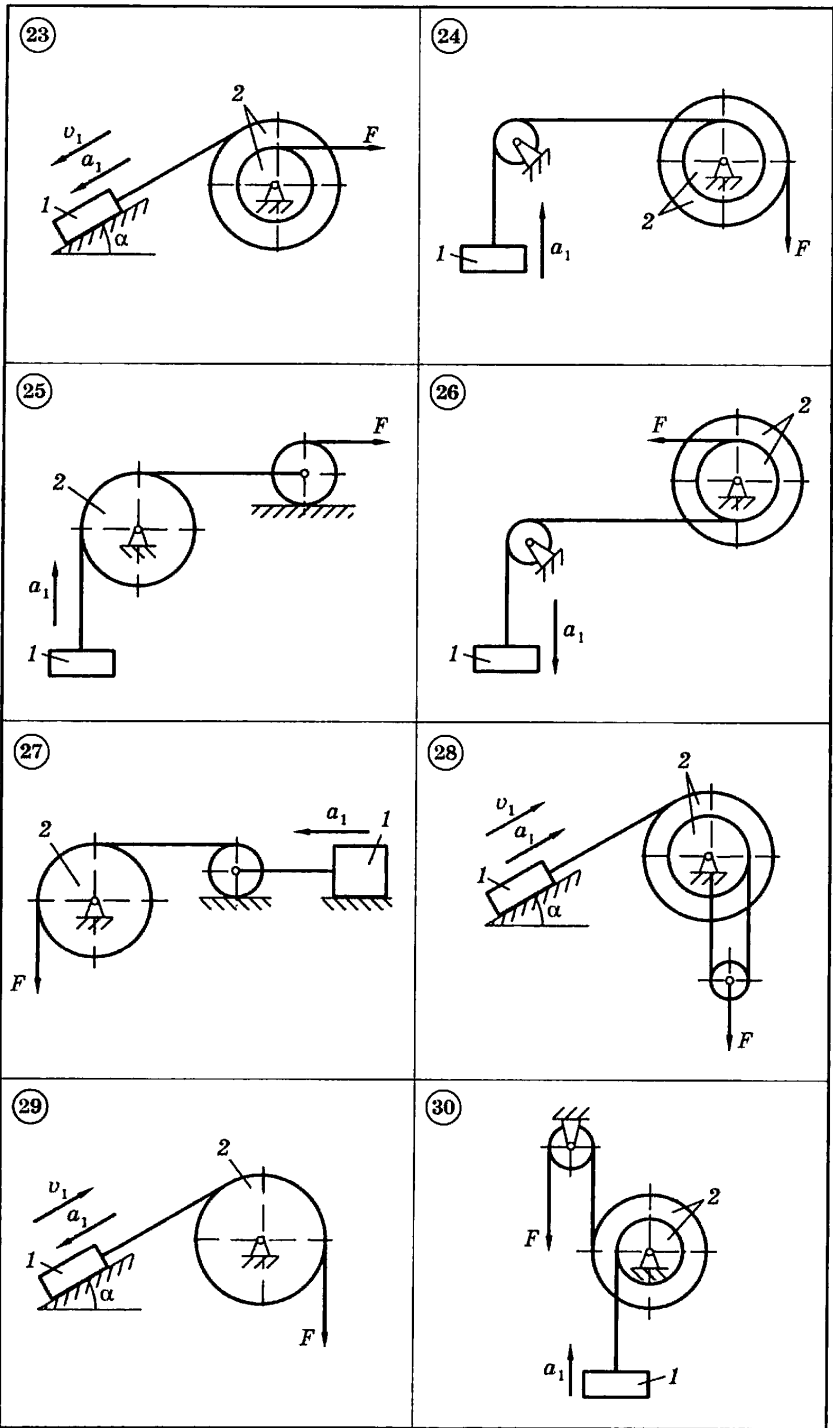
№ вар.	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$\rho_2$ , см	$R_2$ , см	$r_2$ , см	$\alpha$ , град.	$f$	$a_{11}$ , м/с <sup>2</sup>
21	600	60	20	30	25			2,0
22	1000	150				45	0,15	3,0
23	1500	200	35	35	25	45	0,2	3,5
24	1000	160	45	30	15			2,5
25	700	80						1,5
26	500	100	15	40	20			1,0
27	350	75					0,2	2,0
28	450	75	20	45	25	30	0,1	3,0
29	550	85				60	0,2	2,5
30	600	100	30	25	10			1,5











## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

# ПРИНЦИПЫ ДАЛАМБЕРА И ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА

### ЗАДАЧА 1

Груз  $1$  массой  $m_1 = 500$  кг, перемещающийся по горизонтальной шероховатой плоскости (коэффициент трения скольжения  $f = 0,2$ ), связан невесомыми нерастяжимыми тросами с барабаном  $2$  радиусом  $r_2 = 0,2$  м, массой  $m_2 = 150$  кг и с невесомым барабаном радиусом  $r = 0,3$  м, к которому приложен вращающий момент  $M$ , приводящий в движение систему (рис. 87).

Какой величины должен быть момент  $M$ , чтобы ускорение груза  $1$  равнялось бы  $a_1 = 1,5$  м/с<sup>2</sup> в тот момент, когда трос невесомого барабана составит с вертикалью угол  $\alpha = 60^\circ$ . Определить также при этих условиях усилия в тросах груза и реакции опор барабанов. Барабан  $2$  считать однородным цилиндром.

**Решение.** Применим принцип Даламбера к барабану  $2$  (рис. 88), добавив к действующим силам главный момент сил инерции барабана относительно оси вращения  $M_2^\Phi = -J_2\varepsilon$ . Момент  $M_2^\Phi$  направлен против углового ускорения  $\varepsilon_2$ , и его модуль равен  $|M_2^\Phi| = J_2\varepsilon$ . Учитывая, что осевой момент инерции барабана как однородного цилиндра равен

$$J_z = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 = 3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

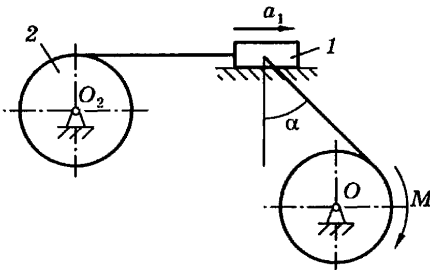


Рис. 87

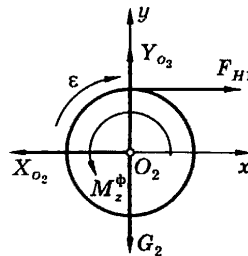


Рис. 88

и что

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2} = 7,5 \text{ с}^{-2},$$

имеем  $|M_2^\Phi| = J_2 \varepsilon = 22,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Уравнения принципа Даламбера для системы сил  $\bar{G}_2, \bar{F}_{H1}, \bar{X}_{0_2}, \bar{Y}_{0_2}$  и пары с моментом  $|M_2^\Phi|$  имеют вид:

$$x: F_{H1} - X_{0_2} = 0; \quad y: Y_{0_2} - G_2 = 0; \quad M_{0_2}: |M_2^\Phi| - F_{H1}r_2 = 0.$$

Решив систему уравнений, получим, что сила натяжения троса равна

$$F_{H1} = \frac{|M_2^\Phi|}{r_2} = \frac{1}{2} m_2 a_1 = 0,113 \text{ кН},$$

а реакции опор барабана:

$$X_{0_2} = F_{H1} = 0,113 \text{ кН};$$

$$Y_{0_2} = G_2 = m_2 g = 1,47 \text{ кН}.$$

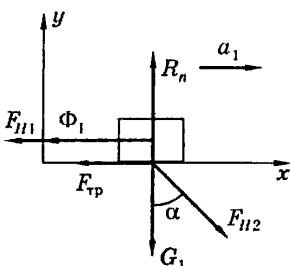


Рис. 89

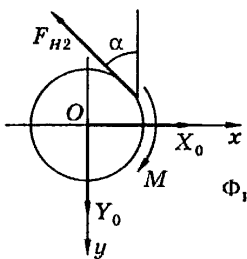


Рис. 90

Применим теперь принцип Даламбера к грузу 1 (рис. 89), добавив к действующим на него силам силу инерции, модуль которой  $\Phi_1 = m_1 a_1 = 0,75 \text{ кН}$ . Сила  $\bar{\Phi}_1 = -m_1 \bar{a}_1$  направлена против ускорения  $\bar{a}_1$ .

Уравнения для системы сил  $\bar{G}_1, \bar{F}_{H1}, \bar{F}_{H2}, \bar{R}_n, \bar{F}_{тр}, \bar{\Phi}_1$  в проекциях на оси координат имеют вид

$$x: F_{H2} \sin \alpha - F_{H1} - F_{тр} - \Phi_1 = 0;$$

$$y: R_n - G_1 - F_{H2} \cos \alpha = 0.$$

Из второго уравнения системы получим  $R_n = G_1 + F_{H2} \cos \alpha$ , откуда  $F_{тр} = f R_n = f(G_1 + F_{H2} \cos \alpha)$ .

Тогда из первого уравнения определим натяжение в правой ветви троса

$$F_{H2} = \frac{m_1(fg + a_1) + F_{H1}}{\sin \alpha - f \cos \alpha} = 2,41 \text{ кН}.$$

Применим принцип Даламбера и к невесомому барабану при действии сил  $\bar{F}_{H2}, \bar{X}_0, \bar{Y}_0$  и вращающего момента  $M$  (рис. 90):

$$x: X_0 - F_{H2} \sin \alpha = 0;$$

$$y: Y_0 - F_{H2} \cos \alpha = 0;$$

$$M_0: F_{H2}r - M = 0.$$

Решив систему уравнений, получим вращающий момент и реакции опор:

$$M = F_{H2}r = 0,723 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$X_0 = F_{H2} \sin \alpha = 2,09 \text{ кН};$$

$$Y_0 = F_{H2} \cos \alpha = 1,21 \text{ кН}.$$

Ответ:  $M = 0,723 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $F_{H1} = 0,113 \text{ кН}$ ;  $F_{H2} = 2,41 \text{ кН}$ ;  $X_{02} = 0,113 \text{ кН}$ ;  $Y_{02} = 1,47 \text{ кН}$ ;  $X_0 = 2,09 \text{ кН}$ ;  $Y_0 = 1,21 \text{ кН}$ .

**Примечание.** Установим предельное значение угла  $\alpha_{\text{пр}}$ , при котором сила натяжения троса  $F_{H2}$  становится бесконечной (эффект самоторможения или «заклинивания»).

Из формулы для этой силы следует, что это будет при  $\sin \alpha - \cos \alpha = 0$ , то есть при  $\text{tg } \alpha = f$ , откуда  $\alpha_{\text{пр}} = \text{arctg } f = 11,3^\circ$  — угол трения. Следовательно, «заклинивание» произойдет тогда, когда значение угла  $\alpha$  станет равным углу трения и линия троса совпадет с образующей конуса трения. В частном случае гладкой поверхности  $f = 0$  и  $\alpha_{\text{пр}} = 0$  — «заклинивание» произойдет при вертикальном положении троса.

## ЗАДАЧА 2

Центробежный регулятор (рис. 91), закрепленный в точке  $O$  на валу  $OO_1$ , состоит из четырех шарнирно соединенных невесомых стержней:  $AC$  и  $BC$  с длинами  $2l$ , а также  $OD$  и  $OE$  с длинами  $l$ , и трех точечных грузов. Грузы  $A$  и  $B$  имеют массы  $m_1$ , а груз  $C$  (муфта) массу  $m_2$ . При повороте стержней груз  $C$  может свободно перемещаться вдоль оси вращения. Требуется установить связь между некоторой постоянной угловой скоростью вращения  $\omega$  и углом отклонения стержней  $\alpha$ . Трением пренебrecь.

**Решение.** Для решения задачи применим принцип Даламбера (метод кинетостатики), суть которого состоит в том, что если к силам, действующим в движущей механической системе, добавить силы инерции, то полученная система сил оказывает-ся уравновешенной, и для нее можно составлять обычные уравнения статики.

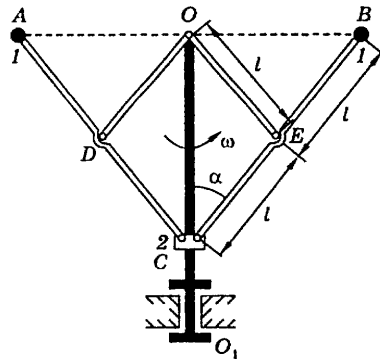


Рис. 91

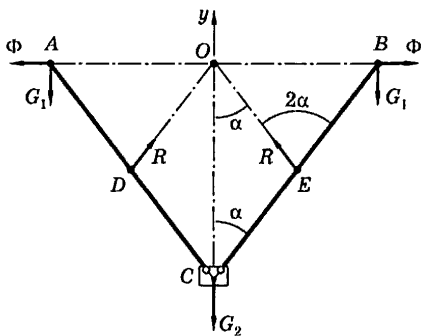


Рис. 92

Сила инерции материальной точки — это вектор  $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$ , где  $m$  — масса точки,  $\bar{a}$  — ее ускорение. При этом ясно, что  $\Phi = ma$ , и сила инерции направлена противоположно ускорению.

В рассматриваемой конструкции силы инерции будут только у точечных грузов  $A$  и  $B$  (заметим, что

они всегда находятся на одной горизонтали с точкой  $O$ ). Модули этих сил инерции одинаковы, так как одинаковы массы грузов и модули их ускорений (а именно, центростремительных ускорений  $a = \omega^2 r$ , где  $r = 2l \cos \alpha$  — расстояние до оси вращения):  $\Phi = m_1 a = 2m_1 \omega^2 l \sin \alpha$ .

Рассмотрим в качестве объекта равновесия систему из стержней  $AC$  и  $BC$  и груза  $C$ . Исключив стержни  $OD$  и  $OE$ , учтем их действие введением реакций этих стержней  $R$ , направленных по стержням (рис. 92).

По причине симметрии системы (что, конечно, легко увидеть и из уравнения проекций сил на ось  $x$ ) на груз  $C$  со стороны оси вращения горизонтальная сила не действует. Здесь  $G_1 = m_1 g$ ,  $G_2 = m_2 g$  — силы тяжести.

Составляем уравнение равновесия:  $\sum F_{ky} = 0$ ,  $-2G_1 - G_2 + 2R \cos \alpha = 0$ , откуда

$$R = \frac{2G_1 + G_2}{2 \cos \alpha}.$$

Если рассмотреть теперь в качестве объекта равновесия отдельно один из стержней (например,  $AC$ ), то можно составить для него уравнение равновесия

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = 0;$$

$$\Phi \cdot 2l \cos \alpha + G_1 2l \sin \alpha - Rl \cdot \sin 2\alpha = 0,$$

откуда

$$R = \frac{2\Phi \cos \alpha + 2G_1 \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\Phi \operatorname{ctg} \alpha + G_1}{\cos \alpha}.$$

Приравнявая два последних выражения для силы  $R$ , получаем

$$\frac{2G_1 + G_2}{2 \cos \alpha} = \frac{\Phi \operatorname{ctg} \alpha + G_1}{\cos \alpha},$$

откуда, после сокращения следует  $G_2 = 2\Phi \operatorname{ctg} \alpha$ , или  $m_2 g = 4m_1 \omega^2 l \cos \alpha$ , и окончательно

$$\cos \alpha = \frac{m_2 g}{4m_1 l \omega^2}.$$

Конечно, если правая часть последнего равенства окажется больше или равна единице, то есть

$$\omega \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_2 g}{m_1 l}}$$

(угловая скорость слишком мала), то угол  $\alpha$  будет равен нулю и грузы отклоняться не будут.

О т в е т:  $\cos \alpha = \frac{m_2 g}{4m_1 l \omega^2}.$

### ЗАДАЧА 3

Решить задачу 1, используя принцип Даламбера–Лагранжа (общее уравнение динамики).

Р е ш е н и е. Согласно принципу Даламбера–Лагранжа для движущихся механических систем, суммарная возможная работа всех активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях всегда равна нулю

$$\sum (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \delta \bar{r}_k = 0,$$

или (что равносильно) возможная мощность всех активных сил и сил инерции на любых возможных скоростях всегда равна нулю

$$\sum (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \bar{v}_k = 0.$$

Воспользуемся второй формулировкой, рассматривая весь регулятор целиком и придавая точкам его стержней и грузам возможные скорости, а именно следующие: стержни  $OD$  и  $OE$  поворачиваются с некоторой угловой скоростью  $\omega_1$ , грузы  $A$  и  $B$  имеют в плоскости рисунка (рис. 93) скорости, равные  $v_1$ , а груз  $C$  — скорость  $v_2$ .

Установим кинематические связи, учитывая, что стержни  $AC$  и  $BC$  поворачиваются вокруг точек  $P$  — мгновенных центров скоростей с некоторой угловой скоростью  $\omega_2$ .

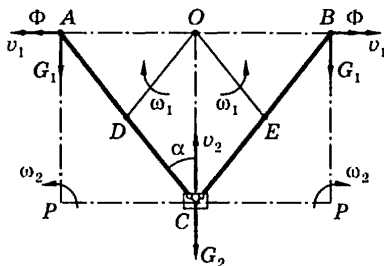


Рис. 93

Тогда  $v_1 = \omega_2 |PA|$ ;  $v_2 = \omega_2 |PC|$ , где  $|PA| = 2l \cos \alpha$ ;  $|PC| = 2l \sin \alpha$ .  
Отсюда

$$\omega_2 = \frac{v_1}{2l \cos \alpha} = \frac{v_2}{2l \sin \alpha},$$

то есть  $v_1 = v_2 \operatorname{ctg} \alpha$ .

Из действующих активных сил и сил инерции мощность будут иметь сила тяжести  $G_2 = m_2 g$  и две силы инерции  $\Phi = 2m_1 \omega^2 l \sin \alpha$  (см. задачу 1). Суммарная мощность их должна быть равна нулю:  $2\Phi v_1 - G_2 v_2 = 0$ , или  $2\Phi v_2 \operatorname{ctg} \alpha = G_2 v_2$ , то есть  $G_2 = 2\Phi \operatorname{ctg} \alpha$ .

Подставляя сюда выражения для сил, получаем тот же ответ, что и в задаче 1. Отметим, что при использовании принципа Даламбера–Лагранжа можно получить решение быстрее, чем при использовании принципа Даламбера.

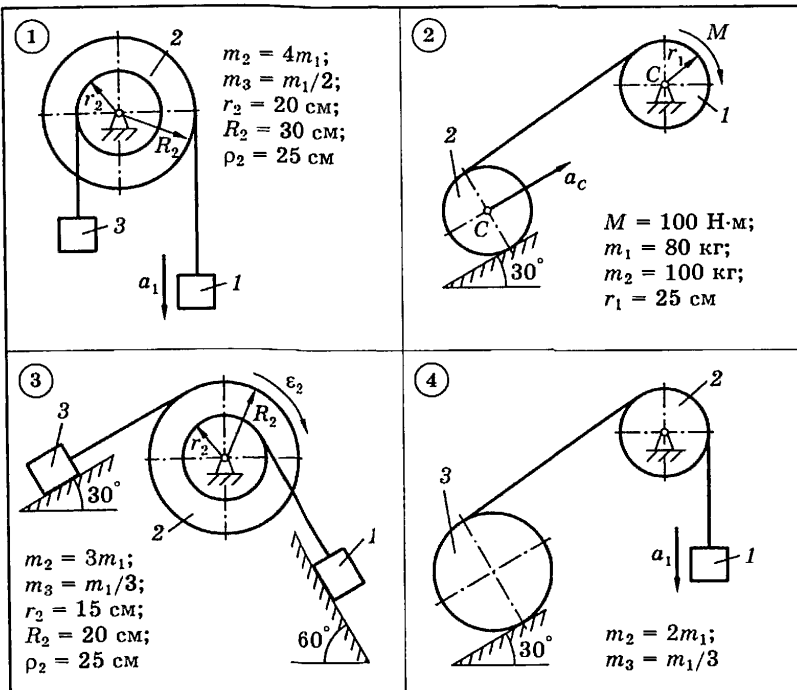
$$\text{Ответ: } \cos \alpha = \frac{m_2 g}{4m_1 l \omega^2}.$$

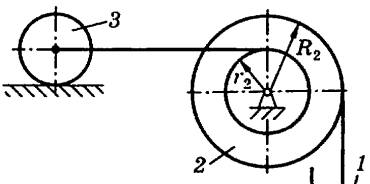
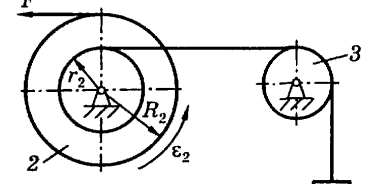
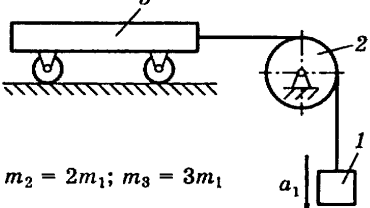
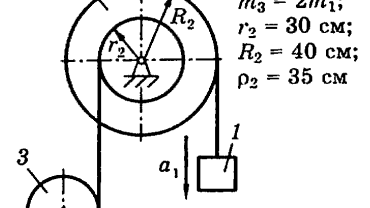
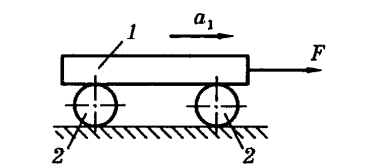
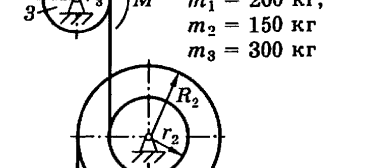
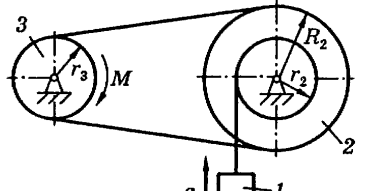
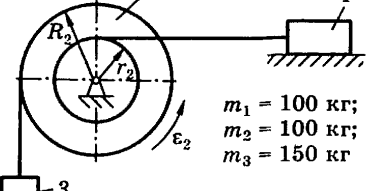


## ЗАДАНИЕ Д6

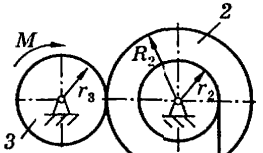
# УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Для приведенных на схемах 1–30 механических систем, используя уравнения Лагранжа второго рода, определить указанное на схеме угловое ускорение или линейное ускорение. Нити невесомы и нерастяжимы. Принятые обозначения:  $m$  — массы тел,  $R$  и  $r$  — радиусы,  $\rho$  — радиус инерции (если он не указан, тело считать однородным цилиндром); при наличии трения указываются:  $f$  — коэффициент трения скольжения,  $f_k$  — коэффициент трения качения.



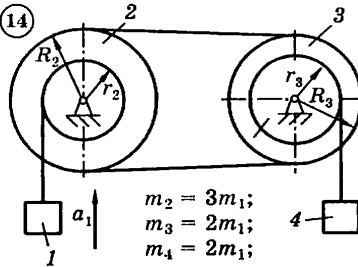
<p>5</p>  <p> <math>m_2 = 2m_1; m_3 = 3m_1;</math>  <math>r_2 = 20 \text{ см}; R_2 = 40 \text{ см};</math>  <math>\rho_2 = 30 \text{ см}</math> </p>	<p>6</p> <p>Блок невесом</p>  <p> <math>F = 600 \text{ Н}; m_1 = 50 \text{ кг};</math>  <math>m_2 = 100 \text{ кг}; r_2 = 25 \text{ см};</math>  <math>R_2 = 35 \text{ см}; \rho_2 = 30 \text{ см}</math> </p>
<p>7</p>  <p> <math>m_2 = 2m_1; m_3 = 3m_1</math> </p> <p>Колеса тележки невесомы</p>	<p>8</p>  <p> <math>m_2 = m_1/2;</math>  <math>m_3 = 2m_1;</math>  <math>r_2 = 30 \text{ см};</math>  <math>R_2 = 40 \text{ см};</math>  <math>\rho_2 = 35 \text{ см}</math> </p>
<p>9</p>  <p> <math>F = 340 \text{ Н}; m_1 = 70 \text{ кг};</math>  <math>m_2 = 40 \text{ кг}</math> </p>	<p>10</p>  <p> <math>M = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м};</math>  <math>m_1 = 200 \text{ кг};</math>  <math>m_2 = 150 \text{ кг}</math>  <math>m_3 = 300 \text{ кг}</math> </p> <p> <math>r_2 = 40 \text{ см};</math>  <math>R_2 = 50 \text{ см};</math>  <math>r_3 = 30 \text{ см};</math>  <math>\rho_2 = 45 \text{ см}</math> </p>
<p>11</p> <p><math>M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}; m_1 = 80 \text{ кг}</math></p>  <p> <math>m_2 = 120 \text{ кг};</math>  <math>m_3 = 150 \text{ кг}; r_2 = 20 \text{ см};</math>  <math>R_2 = 30 \text{ см}; r_3 = 35 \text{ см}; \rho_2 = 25 \text{ см}</math> </p>	<p>12</p>  <p> <math>m_1 = 100 \text{ кг};</math>  <math>m_2 = 100 \text{ кг};</math>  <math>m_3 = 150 \text{ кг}</math> </p> <p> <math>r_2 = 25 \text{ см}; R_2 = 50 \text{ см};</math>  <math>\rho_2 = 35 \text{ см}; f = 0,3</math> </p>

13



$M = 250 \text{ Н}\cdot\text{м};$   
 $m_1 = 40 \text{ кг};$   
 $m_2 = 60 \text{ кг}; m_3 = 75 \text{ кг};$   
 $r_2 = 20 \text{ см}; R_2 = 30 \text{ см};$   
 $r_3 = 35 \text{ см}; \rho_2 = 25 \text{ см}$

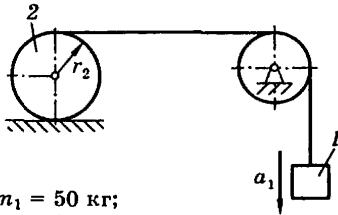
14



$m_2 = 3m_1;$   
 $m_3 = 2m_1;$   
 $m_4 = 2m_1;$   
 $r_2 = 15 \text{ см}; R_2 = 30 \text{ см}; \rho_2 = 25 \text{ см};$   
 $r_3 = 20 \text{ см}; R_3 = 40 \text{ см}; \rho_3 = 35 \text{ см}$

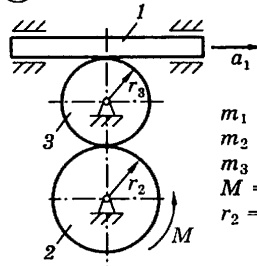
15

Блок невесом



$m_1 = 50 \text{ кг};$   
 $m_2 = 300 \text{ кг};$   
 $r_2 = 30 \text{ см}; f_k = 0,2 \text{ см}$

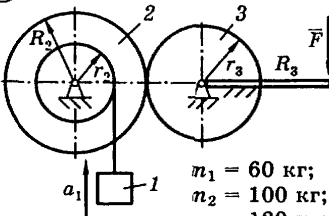
16



$m_1 = 50 \text{ кг};$   
 $m_2 = 100 \text{ кг};$   
 $m_3 = 100 \text{ кг};$   
 $M = 100 \text{ Н}\cdot\text{м};$   
 $r_2 = 20 \text{ см}$

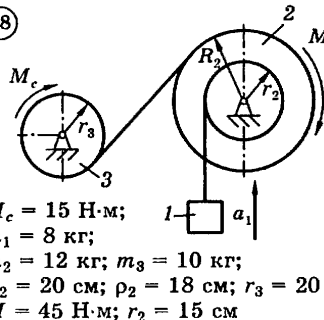
17

Рукоятка невесома



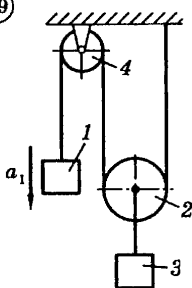
$m_1 = 60 \text{ кг};$   
 $m_2 = 100 \text{ кг};$   
 $m_3 = 120 \text{ кг};$   
 $r_2 = 15 \text{ см}; R_2 = 30 \text{ см}; \rho_2 = 25 \text{ см};$   
 $r_3 = 40 \text{ см}; R_3 = 50 \text{ см}; F = 500 \text{ Н}$

18



$M_c = 15 \text{ Н}\cdot\text{м};$   
 $m_1 = 8 \text{ кг};$   
 $m_2 = 12 \text{ кг}; m_3 = 10 \text{ кг};$   
 $R_2 = 20 \text{ см}; \rho_2 = 18 \text{ см}; r_3 = 20 \text{ см};$   
 $M = 45 \text{ Н}\cdot\text{м}; r_2 = 15 \text{ см}$

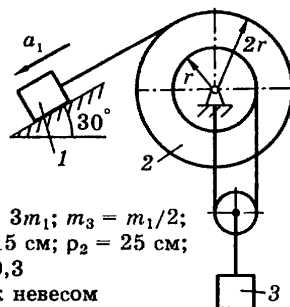
19



$m_2 = m_1;$   
 $m_3 = m_1/2$

Блок 4 невесом

20



$m_2 = 3m_1; m_3 = m_1/2;$   
 $r = 15 \text{ см}; \rho_2 = 25 \text{ см};$   
 $f = 0,3$

Блок невесом

21  $M_1 = 80 \text{ Н}\cdot\text{м}; M_2 = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$

$M_3 = 15 \text{ Н}\cdot\text{м}; m_1 = 40 \text{ кг};$   
 $m_2 = 30 \text{ кг}; m_3 = 20 \text{ кг};$   
 $r_1 = 50 \text{ см}; r_2 = 40 \text{ см}; r_3 = 30 \text{ см}$

22

$m_1 = 15 \text{ кг};$   
 $m_2 = 20 \text{ кг};$   
 $m_3 = 10 \text{ кг};$   
 $r_1 = 50 \text{ см}; r_2 = 25 \text{ см};$   
 $M = 250 \text{ Н}\cdot\text{м}; M_c = 30 \text{ Н}\cdot\text{м}$

23

$F = 160 \text{ Н};$   
 $m_1 = 20 \text{ кг};$   
 $m_2 = 35 \text{ кг};$   
 $r_2 = 40 \text{ см};$   
 $R_2 = 50 \text{ см};$   
 $\rho_2 = 45 \text{ см}$   
 Блок невесом

24

$m_3 = m_2 = m_1;$   
 $r_3 = r_2 = r_1;$   
 $\alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ$

25

$M_c = 60 \text{ Н}\cdot\text{м};$   
 $F = 500 \text{ Н};$   
 $m_1 = 30 \text{ кг};$   
 $m_2 = 40 \text{ кг};$   
 $m_3 = 20 \text{ кг};$   
 $r_1 = 40 \text{ см};$   
 $R_1 = 50 \text{ см};$   
 $r_2 = 50 \text{ см};$   
 $R_2 = 60 \text{ см};$   
 $\rho_1 = 45 \text{ см};$   
 $\rho_2 = 55 \text{ см}$

26

$F = 190 \text{ Н}; m_1 = 50 \text{ кг};$   
 $m_2 = 40 \text{ кг}$

27  $F = 170 \text{ Н};$   
 $m_1 = 18 \text{ кг};$   
 $m_2 = 24 \text{ кг}$

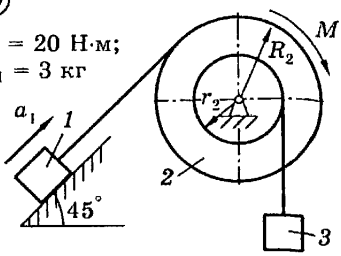
$m_3 = 12 \text{ кг}; r_1 = 20 \text{ см};$   
 $R_1 = 30 \text{ см}; r_2 = 25 \text{ см};$   
 $\rho_1 = 25 \text{ см}; \rho_2 = 30 \text{ см}; R_2 = 35 \text{ см}$

28 Блок невесом

$m_2 = m_1;$   
 $R_2 = 50 \text{ см}; r_2 = 35 \text{ см};$   
 $\rho_2 = 45 \text{ см}$

29

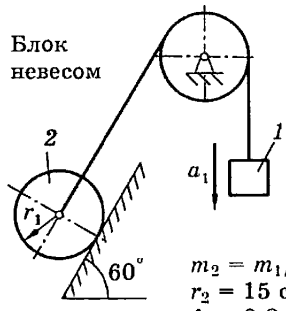
$M = 20 \text{ Н}\cdot\text{м};$   
 $m_1 = 3 \text{ кг}$



$m_2 = 5 \text{ кг}; m_3 = 10 \text{ кг}; r_2 = 20 \text{ см};$   
 $R_2 = 40 \text{ см}; \rho_2 = 20\sqrt{2} \text{ см}; f = 0,2$

30

Блок  
невесом



$m_2 = m_1/2;$   
 $r_2 = 15 \text{ см};$   
 $f_{\kappa} = 0,2 \text{ см}$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ  
УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА  
ВТОРОГО РОДА

ЗАДАЧА 1

Грузоподъемная установка (рис. 94) состоит из барабана 1 массой  $m_1 = 200$  кг и радиусом  $r = 0,2$  м, невесомого нерастяжимого троса, который перемещает груз 2 по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Масса груза  $m_2 = 1000$  кг, коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью  $f = 0,2$ . К барабану приложен вращающий момент  $M = 1,6$  кН·м. Определить величину ускорения груза  $a$ . Барабан считать однородным цилиндром.

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы ( $s = 1$ ) и может быть описана одним уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

В качестве обобщенной координаты выберем координату  $x$  груза на наклонной плоскости  $q = x$ , тогда обобщенная скорость  $\dot{q} = \dot{x} = v$  будет являться скоростью груза.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2,$$

где  $\omega$  — угловая скорость барабана;  $J$  — его момент инерции относительно оси вращения. Для однородного цилиндра  $J = \frac{m_1 r^2}{2}$  и, следовательно,  $J = 4$  кг·м<sup>2</sup>.

При учете кинематической связи  $v = \omega r$ , т. е.

$$\omega = \frac{v}{r},$$

кинетическая энергия запишется в виде

$$T = \frac{1}{2} \left( m + J \frac{1}{r^2} \right) v^2 = \frac{1}{2} m_{\text{пр}} v^2,$$

где приведенная (к грузу) масса системы равна

$$m_{\text{пр}} = m + J \frac{1}{r^2} = 1100 \text{ кг.}$$

Вычислим производные, входящие в левую часть уравнения Лагранжа. Частная производная по обобщенной координате

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

так как кинетическая энергия явно от координаты  $x$  не зависит. Частная производная по обобщенной скорости

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial v} = m_{\text{пр}} v.$$

Полная производная по времени

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m_{\text{пр}} a$$

дает левую часть уравнения Лагранжа.

Входящую в правую часть уравнения обобщенную силу  $Q$  вычисляют двумя способами: через возможную мощность и через возможную работу.

Разберем оба эти способа.

**1. Вычисление обобщенной силы через возможную мощность.** Рассмотрим действующие в системе силы, исключая реакции связей, и придадим телам системы возможные скорости: произвольную скорость груза  $v$ , и угловую скорость барабана  $\omega$ . Они связаны друг с другом уравнением кинематической связи  $v = \omega r$  (рис. 95).

Запишем теперь мощности действующих сил. При этом следует иметь в виду, что обобщенная сила вычисляется только на основе активных сил. Таким образом, можно не освобождать систему от связей и не вводить реакции связей (силу трения относим к числу активных сил). Учтем также, что сила  $G_1$  приложена в неподвижной точке и ее мощность и работа равны нулю.

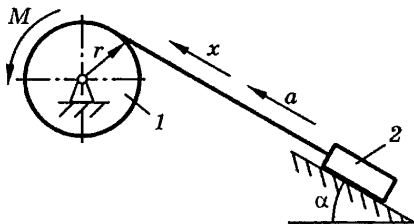


Рис. 94

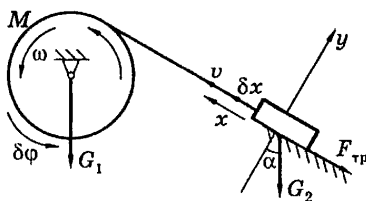


Рис. 95

Ненулевую мощность будут иметь сила трения  $N_{F_{тр}} = -F_{тр}v$ , сила тяжести груза  $N_{G_2} = -G_2v \sin \alpha$  и вращающий момент

$$N_M = M\omega = M \frac{v}{r}.$$

Таким образом, возможная мощность для механической системы будет равна

$$N = \sum_k N_k = \left( M \frac{1}{r} - G_2 \sin \alpha - F_{тр} \right) v = F_{пр} v,$$

где  $F_{пр}$  — приведенная (к грузу) сила,

$$F_{пр} = M \frac{1}{r} - G_2 \sin \alpha - F_{тр}.$$

Поскольку для системы с одной степенью свободы возможная мощность записывается в виде  $N = Q\dot{q}$ , а в нашей задаче  $\dot{q} = v$ , сравнивая два соотношения для мощности, найдем  $Q = F_{пр}$ . Следовательно, обобщенная сила системы в данной постановке задачи является приведенной силой.

**2. Вычисление обобщенной силы через возможную работу.** Рассмотрим, как и в предыдущем пункте, действующие в системе силы (см. рис. 95) и придадим телам системы возможное перемещение: бесконечно малое перемещение груза  $\delta x$  и поворот барабана на бесконечно малый угол  $\delta\varphi$ . Соотношение между этими величинами можно получить как непосредственно из геометрии, так и из уравнения кинематической связи  $v = \omega r$ . Интегрируя обе части этого уравнения по времени, находим

$$\int v dt = r \int \omega dt,$$

или  $x = \varphi r + C$ , где  $C$  — постоянная интегрирования. Варьируя последнее соотношение, получаем равенство  $\delta x = r \delta\varphi$ , которое в данном случае имеет простой геометрический смысл — равенство длины дуги окружности произведению радиуса на величину угла в радианах.

На возможном перемещении ненулевую работу будут совершать сила трения  $\delta A_{F_{тр}} = -F_{тр} \delta x$ , сила тяжести груза  $\delta A_{G_2} = -G_2 \delta x \sin \alpha$  и вращающий момент

$$\delta A_M = M \delta\varphi = M \frac{\delta x}{r}.$$

Таким образом, возможная работа для механической системы будет равна



$$\delta A = \sum_k \delta A_k = \left( M \frac{1}{r} - G_2 \sin \alpha - F_{\text{тр}} \right) \delta x = F_{\text{пр}} \delta x,$$

где  $F_{\text{пр}}$  — приведенная сила системы.

Поскольку для системы с одной степенью свободы возможная работа записывается в виде  $\delta A = Q \delta q$ , и в нашей задаче  $\delta q = \delta x$ , сравнивая последние два соотношения, находим  $Q = F_{\text{пр}}$ , т. е. обобщенная сила является в данной постановке задачи приведенной силой

$$Q = F_{\text{пр}} = M \frac{1}{r} - G_2 \sin \alpha - F_{\text{тр}}$$

и совпадает с полученной первым способом.

Вычислим ее, учитывая, что  $F_{\text{тр}} = fR_n = fG_2 \cos \alpha$ . Тогда

$$Q = F_{\text{пр}} = M \frac{1}{r} - m_2 g (\sin \alpha + f \cos \alpha) \approx 1400 \text{ Н.}$$

Составляем теперь уравнение Лагранжа, приравнявая правую и левую части:  $m_{\text{пр}} a = F_{\text{пр}}$ , откуда находим ускорение груза

$$a = \frac{F_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}} \approx 1,27 \text{ м/с}^2.$$

О т в е т:  $a = 1,27 \text{ м/с}^2$ .

## ЗАДАЧА 2

Цилиндр массой  $m$ , имеющий форму тонкостенной трубы радиусом  $r$ , обмотан нитью, конец которой закреплен неподвижно (рис. 96). Определить ускорение центра падающего цилиндра  $a_c$ .

Р е ш е н и е. Система имеет одну степень свободы и может быть описана одним уравнением Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

Поскольку необходимо определить ускорение центра цилиндра, движущегося по вертикальной оси  $y$ , в качестве обобщенной координаты удобнее всего выбрать соответствующую координату точки  $C$ :  $q = y_c$ . Тогда обобщенная скорость  $\dot{q} = \dot{y}_c = v_c$  будет скоростью центра.

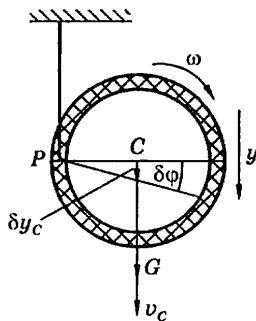


Рис. 96

Цилиндр совершает плоское движение, и его кинетическая энергия согласно теореме Кенига равна

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_{z_c}\omega^2,$$

где  $\omega$  — угловая скорость, а  $J_{z_c}$  момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс, равен для тонкостенной трубы  $J_{z_c} = mr^2$ .

Кинематическая связь между  $v_C$  и  $\omega$  определена известным положением МЦС — точки  $P$  формулой  $v_C = \omega|CP|$ ,

т. е.  $v_C = \omega r$ , откуда  $\omega = \frac{v_C}{r}$ .

С учетом этого кинетическая энергия принимает вид

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}(2m)v_C^2,$$

где в скобках стоит приведенная масса системы  $m_{\text{пр}} = 2m$ .

Тогда

$$T = \frac{1}{2}m_{\text{пр}}v_C^2.$$

Вычисляем производные, входящие в левую часть уравнения Лагранжа. Частные производные

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial y_C} = 0,$$

так как кинетическая энергия не зависит явно от  $y_C$ ;

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial v_C} = m_{\text{пр}}v_C.$$

Полная производная по времени равна

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m_{\text{пр}}\dot{v}_C = m_{\text{пр}}a_C,$$

и дает левую часть уравнения Лагранжа.

Входящую в правую часть обобщенную силу  $Q$  получим тремя способами.

**1. Вычисление обобщенной силы через возможную мощность.** На цилиндр в процессе его движения действует только одна активная сила — сила тяжести. Мощность силы тяжести  $N = Gv_C$ . Сравнивая это с записью в общем виде для системы с одной степенью свободы  $N = Q\dot{q}$ , видим, что обобщенная сила равна силе тяжести  $Q = G$  (приведенная сила).

**2. Вычисление обобщенной силы через возможную работу.** Возможное перемещение для цилиндра — это поворот вокруг мгновенного центра скоростей на угол  $d\varphi$ . При этом центр цилиндра получает вертикальное переме-

чение  $\delta y_C$ , которое равно  $\delta y_C = r\delta\varphi$ , что можно получить непосредственно из геометрии, учитывая, что перемещения бесконечно малые, или интегрируя и затем варьируя уравнение связи  $v_C = \omega r$ .

Возможная работа — это работа силы тяжести на возможном перемещении  $\delta A = G\delta y_C$ . Сравнивая это с общим соотношением для систем с одной степенью свободы  $\delta A = Q\delta q$ , находим, что  $Q = G$ .

**3. Вычисление обобщенной силы через потенциальную энергию.** Единственная в системе работающая сила — сила тяжести — является потенциальной, и тогда обобщенная сила может быть вычислена по известной формуле

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q},$$

где  $\Pi$  — потенциальная энергия системы.

Для цилиндра в поле силы тяжести  $\Pi = -Gy_C$  и поэтому

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_C} = G.$$

Собираем теперь левую и правую части уравнения Лагранжа:  $m_{\text{пр}}a_C = G$ , откуда находим ускорение центра

$$a_C = \frac{G}{m_{\text{пр}}} = \frac{mg}{2m} = \frac{g}{2} \approx 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, ускорение центра цилиндра не зависит ни от его массы, ни от радиуса.

О т в е т:  $a_C = \frac{g}{2} \approx 4,9 \text{ м/с}^2$ .

### ЗАДАЧА 3

Диск вращается вокруг неподвижной вертикальной оси, его момент инерции относительно этой оси равен  $J$ . Одновременно по радиусу диска движется материальная точка массой  $m$  (см. рис. 97). Определить величины приложенного к диску вращающего момента  $M$  и действующей на точку силы  $F$ , необходимые для того, чтобы диск вращался с заданным угловым ускорением  $\varepsilon$ , а точка двигалась по диску с заданным относительным ускорением  $a_r$ . Трением пренебречь.

Р е ш е н и е. Система имеет две степени свободы, и для ее описания следует составить два уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2.$$

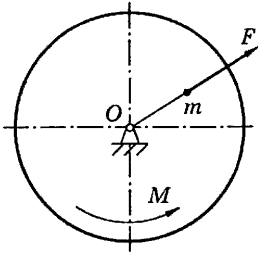


Рис. 97

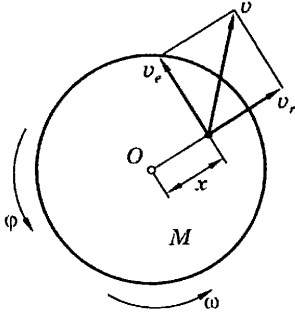


Рис. 98

В качестве обобщенных координат можно выбрать угол поворота диска  $\varphi$  и координату материальной точки  $x$  (рис. 98):  $q_1 = \varphi$ ;  $q_2 = x$ .

Тогда обобщенные скорости будут  $\dot{q}_1 = \dot{\varphi} = \omega$ ,  $\dot{q}_2 = \dot{x} = v_r$ , где  $\omega$  — угловая скорость диска,  $v_r$  — относительная скорость точки.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2,$$

где  $\bar{v}$  — абсолютная скорость точки, равная сумме относительной  $\bar{v}_r$  и переносной  $\bar{v}_e$  скоростей:  $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e$ . Из рисунка видно, что  $v^2 = v_r^2 + v_e^2$ , и поскольку  $v_e = \omega x$ , то  $v^2 = v_r^2 + \omega^2 x^2$ .

Тогда кинетическая энергия запишется в виде

$$T = \frac{1}{2} (J + m x^2) \omega^2 + \frac{1}{2} m v_r^2 = \frac{1}{2} J_{\text{пр}}(x) \omega^2 + \frac{1}{2} m v_r^2,$$

где  $J_{\text{пр}}(x) = J + m x^2$  — приведенный (к диску) момент инерции.

Определяем члены уравнений

1.  $j = 1$ . Выписываем производные:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \omega} = J_{\text{пр}}(x) \omega;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = J_{\text{пр}}(x) \dot{\omega} + \frac{d J_{\text{пр}}}{d x} \frac{d x}{d t} \omega = J_{\text{пр}}(x) \varepsilon + 2 m x v_r \omega.$$

Обобщенную силу  $Q_1$  ищем через возможную мощность, фиксируя координату  $q_2$ , т. е. рассматривая материальную точку как неподвижную. В этом случае мощность имеет только вращающий момент  $N_1 = M \omega = M \dot{q}_1$ , следовательно  $Q_1 = M$ .

2.  $j = 2$ . Выписываем производные:

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial J_{\text{пр}}(x)}{\partial x} \omega^2 = m x \omega^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial v_r} = m v_r; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m \dot{v}_r = m a_r.$$

Обобщенную силу  $Q_2$  находим через возможную мощность, фиксируя координату  $q_1$ , т. е. рассматривая диск как неподвижный. В этом случае мощность будет только у силы  $F$ :  $N_2 = Fv_r = F\dot{q}_2$  и, следовательно,  $Q_2 = F$ .

Теперь составляем уравнения Лагранжа:

$$J_{\text{пр}}(x)\varepsilon + 2txv_r\omega = M; \quad ma_r - tx\omega^2 = F.$$

Отсюда находим  $M = (J + tx^2)\varepsilon + 2txv_r\omega$ ;  $F = ma_r - tx\omega^2$ .

Первые слагаемые в этих уравнениях показывают величины момента и силы, необходимые для разгона системы (преодоления инерции).

Другие слагаемые имеют следующий физический смысл. Второе слагаемое первого уравнения представляет собой момент кориолисовой силы инерции относительно оси вращения (кориолисово ускорение здесь  $2\omega v_r$ ).

Второе слагаемое второго уравнения — это центробежная сила инерции (здесь  $\omega^2 x$  — центростремительное ускорение).

О т в е т:  $M = (J + tx^2)\varepsilon + 2txv_r\omega$ ;  $F = ma_r - tx\omega^2$ .

## ЗАДАНИЕ Д7

# МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### ЗАДАНИЕ 1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

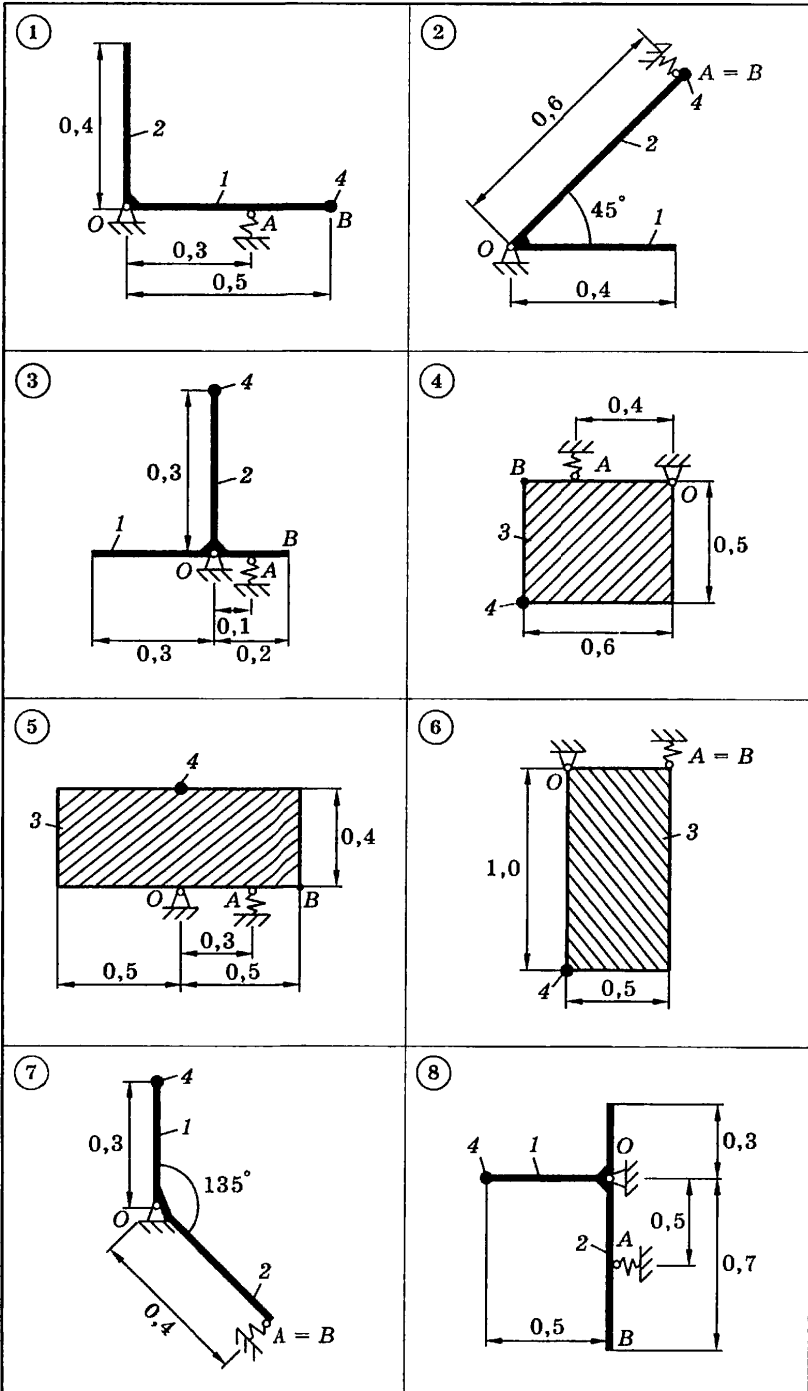
Для приведенных на схемах 1–30 механических систем определить собственную частоту колебаний. Механические системы, показанные на схемах в положении равновесия, могут совершать свободные колебания, вращаясь вокруг горизонтальной оси  $z$ , проходящей через неподвижную точку  $O$ . Системы состоят из жестко скрепленных друг с другом тел: тонких однородных стержней 1 и 2 или однородной пластины 3 и точечных грузов 4. Масса 1 м длины стержней равна 25 кг, масса 1 м<sup>2</sup> площади пластины — 50 кг, масса точечного груза — 20 кг. Упругие элементы имеют коэффициент жесткости  $c = 10$  кН/м. Размеры частей системы указаны в метрах.

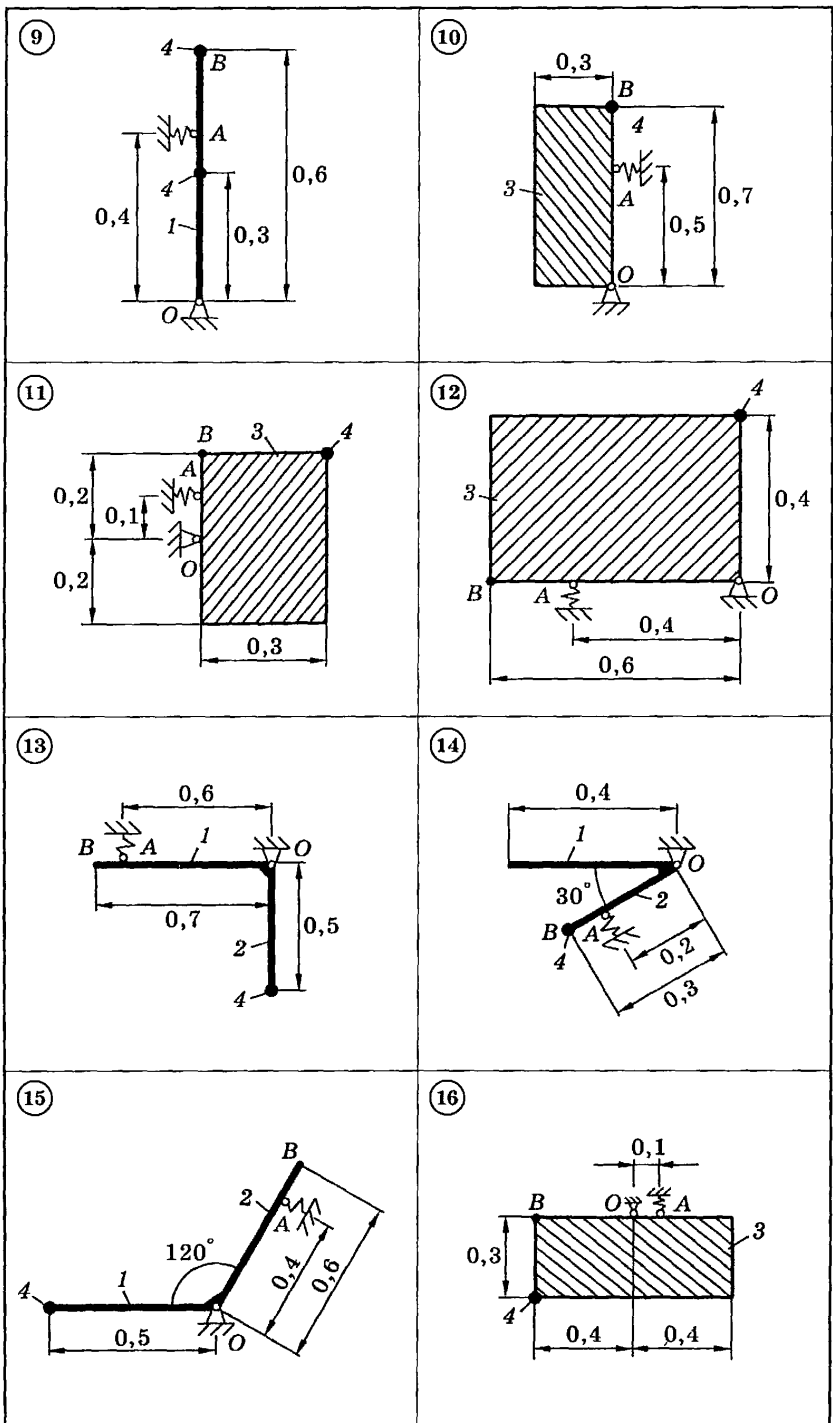
### ЗАДАНИЕ 2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Механические системы на схемах 1–30 снабжаются невесомым вязким демпфером, который устанавливается в точке  $B$  параллельно оси упругого элемента, и создает силу сопротивления, пропорциональную скорости точки  $B$ :  $\bar{R} = -b\bar{v}_B$ , где  $b = 20$  Н·с/м — коэффициент сопротивления.

Кроме того, на систему начинает действовать вынуждающая сила  $F = F_0 \sin pt$ , где  $F_0 = 60$  Н,  $p = 25$  с<sup>-1</sup> — амплитуда и частота вынуждающей силы. Вынуждающая сила приложена в точке  $B$  и действует параллельно оси упругого элемента. (Если точка  $B$  совпадает с точкой  $A$ , на схемах указывается  $B = A$ .)

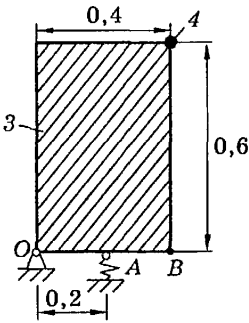
Требуется определить амплитуду чисто вынужденных колебаний системы.



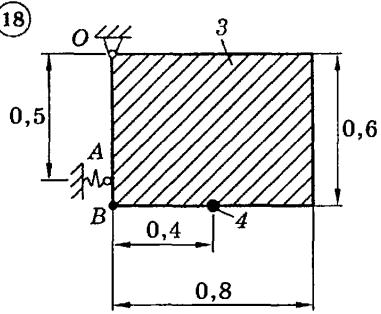




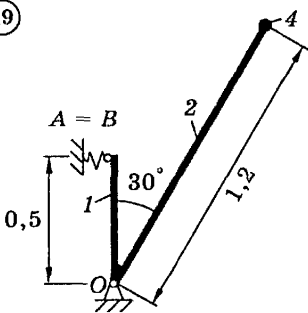
17



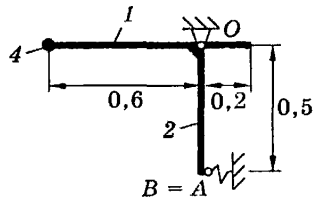
18



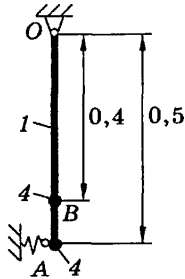
19



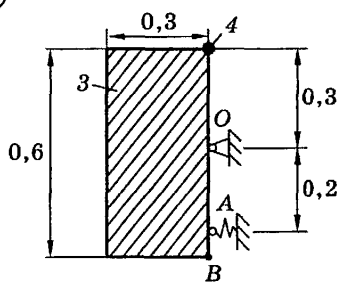
20



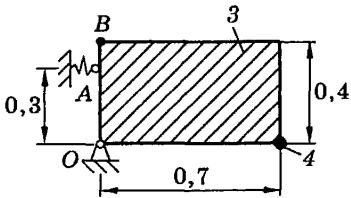
21



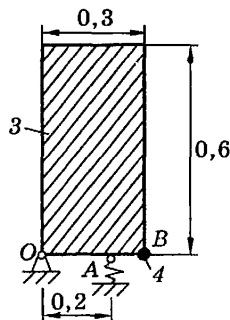
22



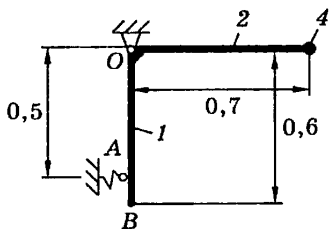
23



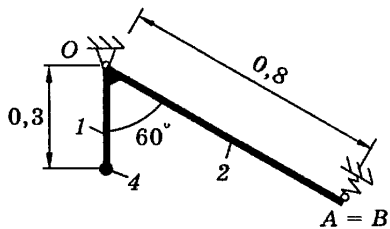
24



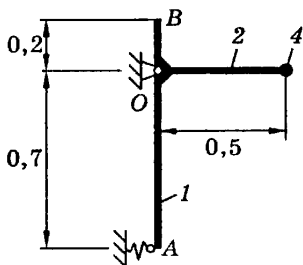
25



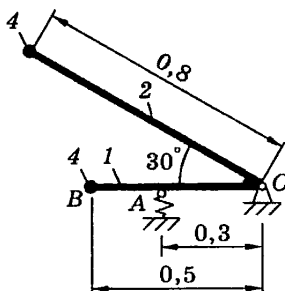
26



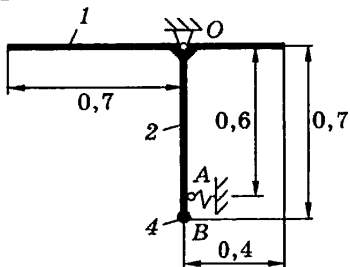
27



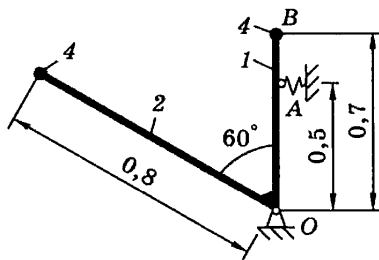
28



29



30



ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

## МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### ЗАДАЧА 1

Рама  $AOB$  может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси  $z$ , проходящей через неподвижный шарнир  $O$ . Размеры и массы ригеля и стойки рамы соответственно равны  $l_1 = 1$  м,  $l_2 = 2$  м,  $m_1 = 30$  кг,  $m_2 = 40$  кг. Рама удерживается в положении равновесия (рис. 99) упругой невесомой пружиной с коэффициентом жесткости  $c = 2,5$  кН/м.

Начальные условия (при  $t = 0$ ):  $\varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = 0,24$  рад/с, где  $\varphi$  — угол отклонения рамы от положения равновесия.

В точке  $B$  к раме прикреплен невесомый вязкий демпфер, сила сопротивления которого зависит от скорости точки  $B$ :  $\bar{R} = -b\bar{v}_B$ , где  $b = 190$  Н·с/м — коэффициент сопротивления.

В точке  $A$  приложена вынуждающая сила  $F = F_0 \sin pt$ , где  $F_0$  и  $p$  — амплитуда и частота вынуждающей силы:  $F_0 = 50$  Н,  $p = 8$  с<sup>-1</sup>.

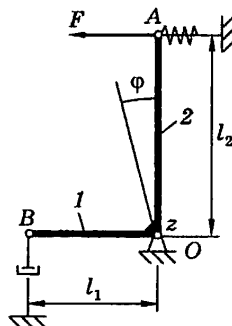


Рис. 99

Требуется найти:

- 1) уравнение свободных колебаний ( $b = 0$ ,  $F = 0$ );
- 2) уравнение затухающих колебаний ( $F = 0$ ), а также декремент колебаний (изменение амплитуды за один период колебаний);
- 3) уравнение чисто вынужденных колебаний с учетом и без учета сопротивления.

Решение.

1. Исследование малых свободных колебаний ( $b = 0$ ,  $F = 0$ ).

За обобщенную координату принимаем угол поворота рамы  $q = \varphi$ , тогда обобщенная скорость  $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$  — угловая скорость рамы.

Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний для механической системы с одной степенью свободы, как известно, имеет вид  $\ddot{q} + k^2 q = 0$ , где  $k^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$ ,  $k$  — собственная частота колебаний,  $a_{11}$  и  $c_{11}$  — обобщенные коэффициенты инерции и жесткости.

Для определения коэффициентов  $a_{11}$  и  $c_{11}$  следует представить кинетическую  $T$  и потенциальную  $\Pi$  энергии системы приближенно в виде квадратичных форм обобщенных скорости и координаты:

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2 \text{ и } \Pi = \frac{1}{2} c_{11} q^2.$$

### 1. Определение $a_{11}$ .

Для вращающейся рамы кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

следовательно,  $a_{11} = J_z$ . Момент инерции рамы может быть получен с использованием формулы для момента инерции однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей через его конец, в виде

$$J_z = \frac{m_1 l_1^2}{3} + \frac{m_2 l_2^2}{3} \approx 63,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Итак,  $a_{11} = 63,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

### 2. Определение $c_{11}$ .

Потенциальная энергия всей системы в отклоненном на угол  $\varphi$  положении определяется потенциальными энергиями рамы в поле силы тяжести и потенциальной энергией в пружине (в поле силы упругости):  $\Pi = \Pi_g + \Pi_c$ .

Потенциальная энергия  $\Pi_g$  определяется опусканием центра тяжести рамы по вертикальной оси по отношению к положению равновесия (рис. 100):

$$\Pi_g = -mg\Delta_c.$$

Найдем координаты центра тяжести (точка  $C$ ) рамы, учитывая координаты центров масс ее тел:  $x_1 = l_1/2 = 0,5 \text{ м}$ ;  $x_2 = 0$ ;  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = l_2/2 = 1 \text{ м}$ ; а также массу всей рамы  $m = m_1 + m_2 = 70 \text{ кг}$ .

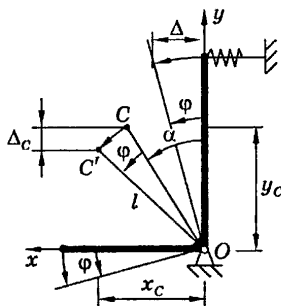


Рис. 100

Тогда

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m} = \frac{3}{14} \text{ м}; \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m} = \frac{4}{7} \text{ м}.$$

Обозначим через  $l$  — длину отрезка  $OC$ ,  $\alpha$  — угол между линией  $OC$  и вертикалью в положении равновесия.

Рассматривая поворот рамы на угол  $\varphi$  и переход точки  $C$  в положение  $C'$ , из соответствующих треугольников находим  $\Delta_C = l \cos \alpha - l \cos (\alpha + \varphi) = l \cos \alpha - l \cos \alpha \cos \varphi + l \sin \alpha \sin \varphi = y_C(1 - \cos \varphi) + x_C \sin \varphi$ .

Осуществляя переход к малым колебаниям, делаем замены:

$$1 - \cos \varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}$$

и  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

$$\text{Тогда} \quad \Delta_C = y_C \frac{\varphi^2}{2} + x_C \varphi,$$

и потенциальную энергию находим в виде

$$\Pi_g = -mgy_C \frac{\varphi^2}{2} - mgx_C \varphi.$$

Потенциальная энергия в пружине определяется ее деформацией  $x$  из нейтрального состояния

$$\Pi_c = \frac{1}{2} cx^2,$$

при этом сама эта деформация будет равна сумме статической деформации  $f_{ст}$  (в положении равновесия) и изменения длины пружины  $\Delta$  при повороте рамы на угол  $\varphi$ :  $x = \Delta + f_{ст}$ , т. е.

$$\Pi_c = \frac{1}{2} c\Delta^2 + cf_{ст}\Delta + \frac{1}{2} cf_{ст}^2.$$

Последнее слагаемое можно отбросить, так как потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого. Учтем теперь, что  $\Delta = l_2 \sin \varphi \approx l_2 \varphi$ , и получим

$$\Pi_c = \frac{1}{2} cl_2^2 \varphi^2 + cf_{ст} l_2 \varphi.$$

Вся потенциальная энергия системы запишется тогда в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} (cl_2^2 - mgy_C) \varphi^2 + (cf_{ст} l_2 - mgx_C) \varphi.$$

Согласно принципу Лагранжа, в положении равновесия производная от потенциальной энергии равна нулю:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0,$$

откуда получаем

$$cf_{\text{ст}}l_2 - mgx_C = 0. \quad (*)$$

Это уравнение позволяет определить статическую деформацию:

$$f_{\text{ст}} = \frac{mgx_C}{cl_2} = 0,029 \text{ м.}$$

С учетом равенства (\*) потенциальная энергия упрощается:

$$\Pi = \frac{1}{2}(cl_2^2 - mgy_C)\varphi^2, \text{ то есть } c_{11} = cl_2^2 - mgy_C \approx 9608 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

При этом условие устойчивости положения равновесия, а именно  $c_{11} > 0$  оказалось выполненным.

### 3. Получение уравнения колебаний.

Определяем собственную частоту колебаний системы

$$k = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} \approx 12,3 \text{ с}^{-1}$$

и период колебаний  $T = \frac{2\pi}{k} \approx 0,51 \text{ с.}$

Общее решение уравнения колебаний имеет вид  $\varphi = A \sin(kt + \alpha)$ .

Постоянные интегрирования, а именно:  $A$  — амплитуда колебаний и  $\alpha$  — начальная фаза колебаний, определяются из начальных условий (при  $t = 0$ :  $\varphi = 0$ ;  $\dot{\varphi} = 0,24 \text{ рад/с}$ ). С учетом выражения для угловой скорости  $\dot{\varphi} = Ak \cos(kt + \alpha)$  получим  $0 = A \sin \alpha$ ;  $0,24 = Ak \cos \alpha$ , откуда  $\alpha = 0$ , и  $A = 0,0195 \text{ рад}$ .

Уравнение малых свободных колебаний рамы принимает вид

$$\varphi = 0,0195 \sin 12,3t.$$

## 2. Исследование малых затухающих колебаний ( $b \neq 0$ , $\bar{F} = 0$ ).

Учтем теперь влияние силы сопротивления  $\bar{R} = -b\bar{v}_B$  со стороны вязкого демпфера на свободные колебания рамы. Дифференциальное уравнение малых затухающих колебаний имеет вид  $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0$ , где  $2n = \frac{b_{11}}{a_{11}}$ ,  $b_{11}$  — обобщенный коэффициент сопротивления. Для определения коэффициента  $b_{11}$  диссипативную функцию (функции рассеяния) для данной системы следует представить в виде квадратичной формы обобщенной скорости  $D = \frac{1}{2}b_{11}\dot{q}^2$ .

Учитывая, что скорость точки прикрепления демпфера  $v_B = l_1 \omega = l_1 \dot{\varphi}$ , найдем

$$D = \frac{1}{2} b v_B^2 = \frac{1}{2} b l_1^2 \dot{\varphi}^2.$$

Таким образом,  $b_{11} = b l_1^2 = 190 \text{ Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}$ , и

$$n = \frac{b_{11}}{2a_{11}} = 1,5 \text{ с}^{-1}.$$

Так как  $n < k$  (случай малого сопротивления), то будут иметь место затухающие колебания.

Общее решение уравнения затухающих колебаний имеет вид

$$\varphi = A e^{-n t} \sin(k^* t + \alpha),$$

где  $k^* = \sqrt{k^2 - n^2} = 12,2 \text{ с}^{-1}$  — частота затухающих колебаний.

Период затухающих колебаний равен

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} \approx 0,515 \text{ с}.$$

Определяя постоянные интегрирования из начальных условий, находим, что  $\alpha = 0$ , и  $A = 0,0197$  рад.

Уравнение затухающих колебаний имеет вид  $\varphi = 0,0197 e^{-1,5t} \sin 12,2t$ .

Декремент колебаний (уменьшение амплитуды за один период колебаний) равен  $e^{-nT^*} = 0,462$ .

### 3. Исследование чисто вынужденных колебаний.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний с учетом сопротивления имеет вид  $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \sin pt$ ,

где  $h = \frac{Q_0}{a_{11}}$ ;  $Q_0$  — амплитуда обобщенной вынуждающей силы.

Обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $q = \varphi$ , равна коэффициенту при возможной скорости в выражении возможной мощности  $N = Q\dot{q} = F_0 \sin pt \cdot l_2 \dot{\varphi}$  или коэффициенту при вариации обобщенной координаты  $\delta\varphi$  в выражении возможной работы  $\delta A = Q\delta q = F_0 \sin pt \cdot l_2 \delta\varphi$ .

Имеем

$$Q = F_0 l_2 \sin pt; \quad Q_0 = F_0 l_2 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad h = \frac{Q_0}{a_{11}} = 1,58 \text{ с}^{-1}.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения представляется суммой двух слагаемых:  $\varphi = \varphi_{00} + \bar{\varphi}$ .

Первое слагаемое  $\varphi_{00}$ , определяющее общее решение соответствующего однородного уравнения, описывает колебания с собственной частотой  $k$ , которые при наличии сопротивления затухают.

Второе слагаемое  $\tilde{\varphi}$  (чисто вынужденные колебания) является частным решением уравнения колебаний и имеет вид  $\tilde{\varphi} = B \sin(pt - \varepsilon)$ .

Эти колебания происходят с частотой вынуждающей силы и не затухают даже при наличии сопротивления. Амплитуду  $B$  и сдвиг фазы  $\varepsilon$  найдем по известным формулам:

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = 0,0177 \text{ рад};$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2} = 0,268 \text{ рад}.$$

Уравнение установившихся вынужденных колебаний при наличии сопротивления принимает вид

$$\tilde{\varphi} = 0,0177 \sin(8t - 0,268).$$

При отсутствии сопротивления ( $b = 0$ ,  $n = 0$ ) получаем

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2} = 0,0181 \text{ рад}; \quad \tilde{\varphi} = 0,0181 \sin 8t.$$

О т в е т: 1)  $\varphi = 0,0195 \sin 12,3t$ ;

2)  $\varphi = 0,0197 e^{-1,5t} \sin 12,2t$ ;  $e^{-nT^*} = 0,462$ ;

3)  $\tilde{\varphi} = 0,0177 \sin(8t - 0,268)$ ;  $\tilde{\varphi} = 0,0181 \sin 8t$ .

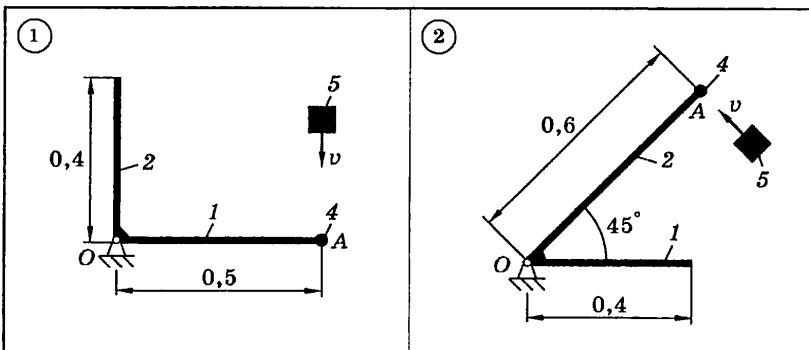


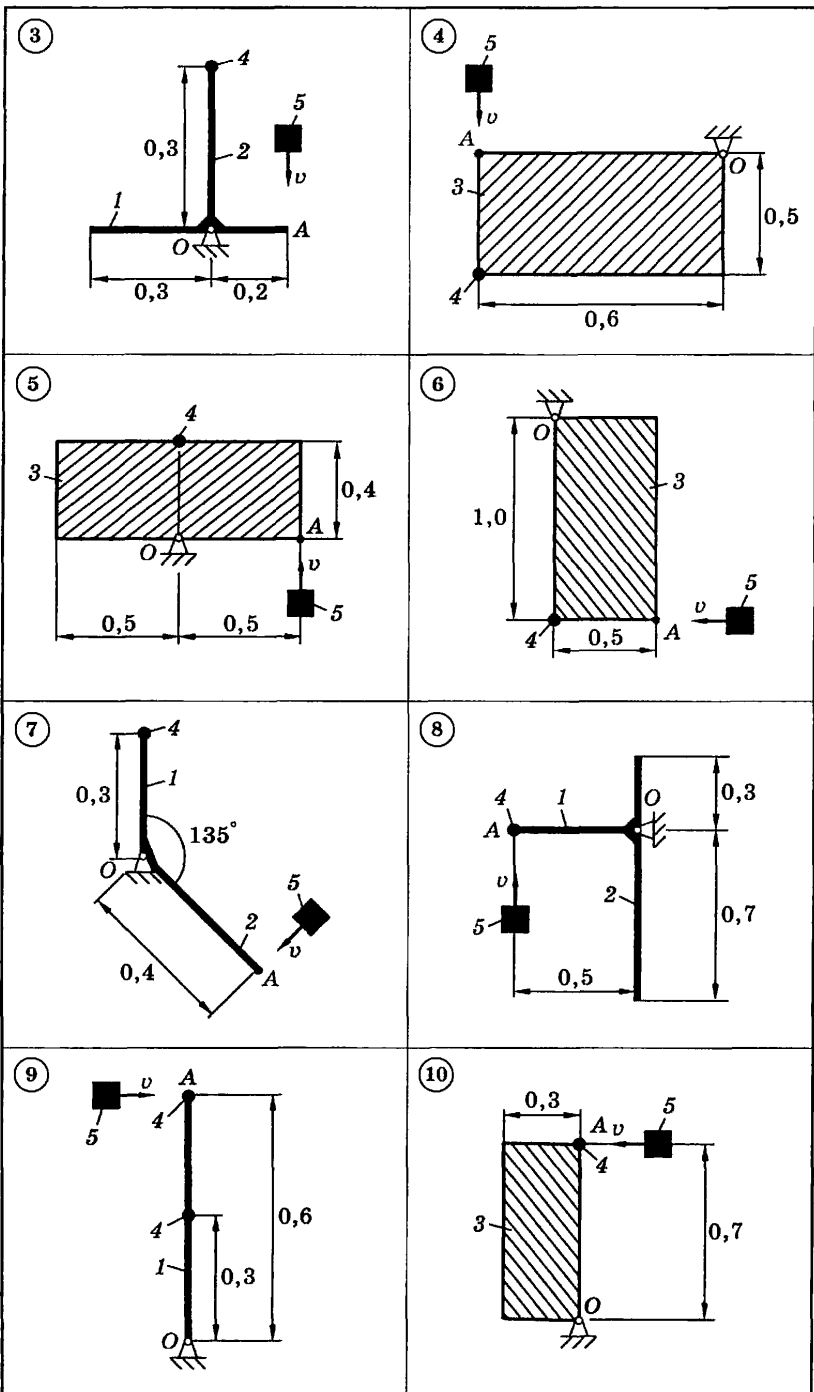
## ЗАДАНИЕ Д8 ТЕОРИЯ УДАРА

На схемах 1–30 показаны механические системы, состоящие из конструкции и ударяющего по ней тела. Конструкция может вращаться вокруг оси, проходящей через неподвижную точку  $O$ . Она состоит из тонких однородных стержней 1 и 2, или однородной пластины 3 и точечных грузов 4. Масса 1 м длины стержней равна 25 кг, масса 1 м<sup>2</sup> площади пластины — 50 кг, масса точечного груза — 20 кг. Размеры частей конструкции указаны в метрах.

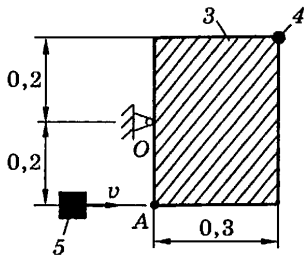
Тело 5 (материальная точка) массой  $m_5 = 30$  кг, двигаясь со скоростью  $v = 4$  м/с, ударяется о неподвижную конструкцию в точке  $A$ , причем удар является абсолютно неупругим.

Определить угловую скорость конструкции после удара и воспринимаемый ею ударный импульс. Найти также потерянную при ударе кинетическую энергию системы.

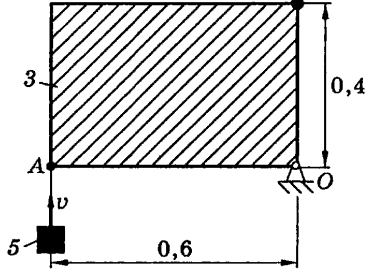




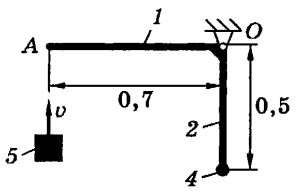
11



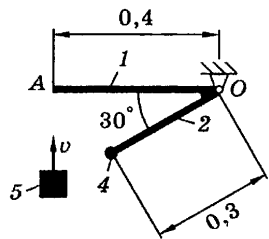
12



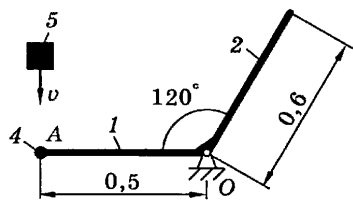
13



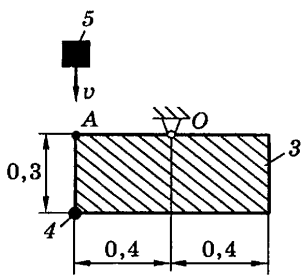
14



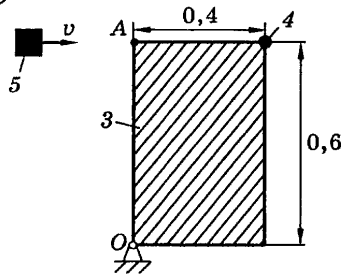
15



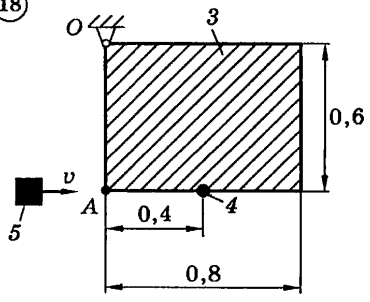
16

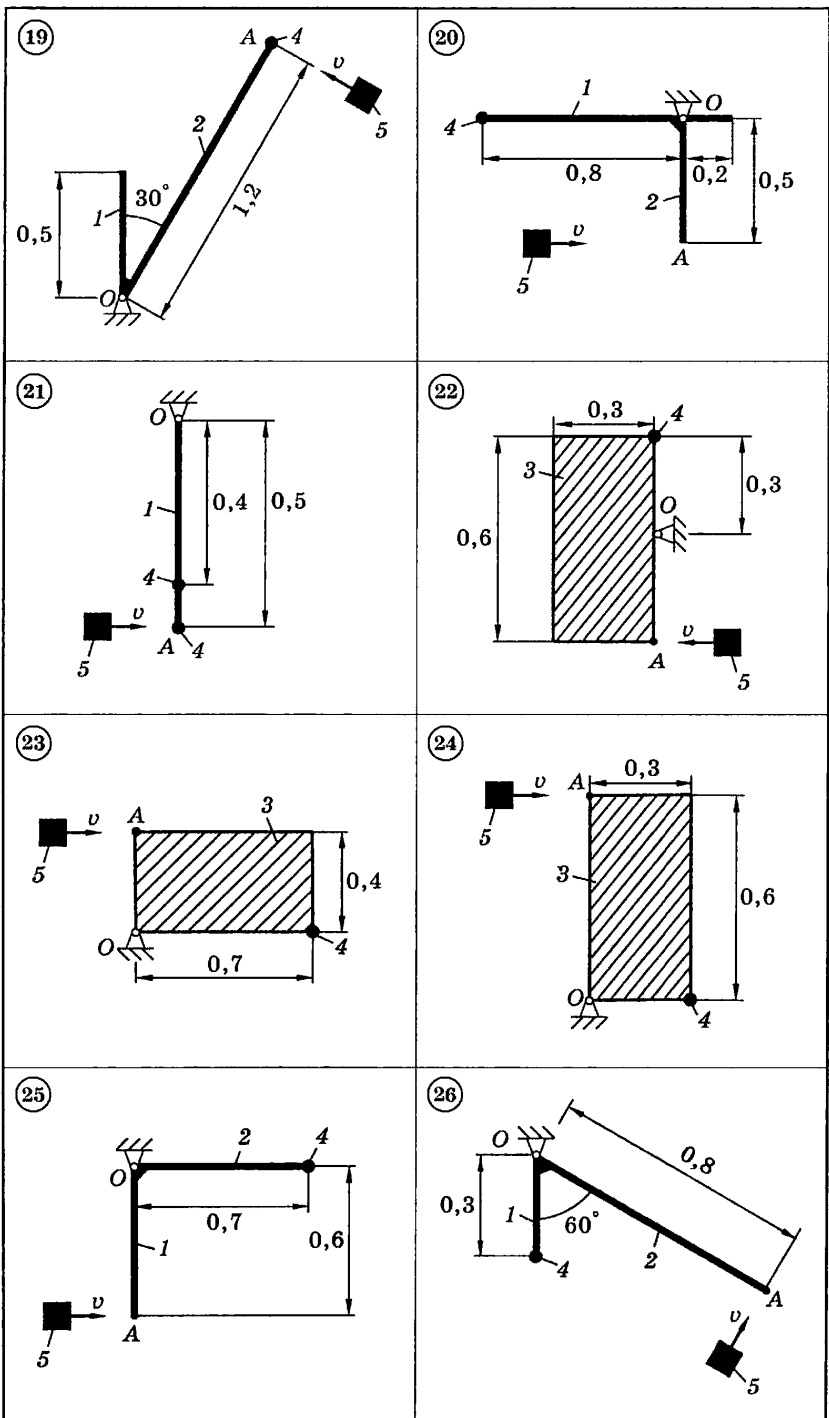


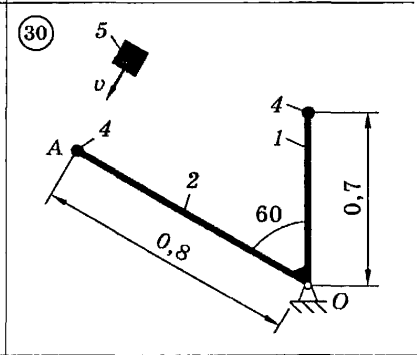
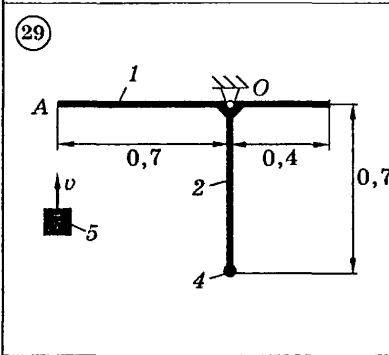
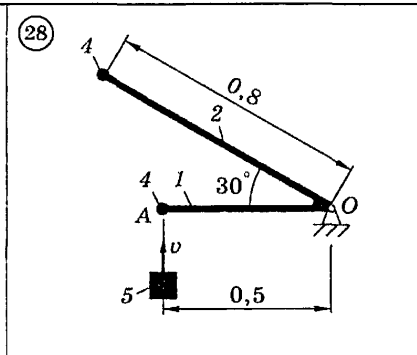
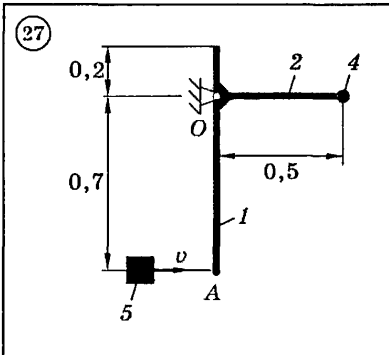
17



18







## ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИЯ УДАРА

### ЗАДАЧА 1

Груз массой  $m_1 = 10$  кг, двигаясь поступательно со скоростью  $v = 5$  м/с по горизонтальной поверхности, сталкивается с нижним концом висящего вертикально однородного стержня массой  $m_2 = 30$  кг и длиной  $l = 0,5$  м (рис. 101). Считая удар абсолютно неупругим, определить угловую скорость стержня  $\omega$  и скорость груза после удара  $u$ , а также величины действующих ударных импульсов. Найти также потерянную при ударе кинетическую энергию системы.

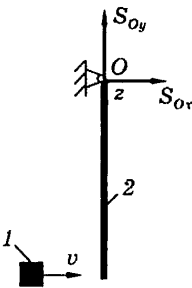


Рис. 101

Решение. Если в качестве механической системы рассматривать груз и стержень вместе, то возникающая между ними ударная сила окажется силой внутренней (ударный импульс  $\bar{S}$ ), а внешним ударным будет лишь импульс на оси вращения стержня, который разложим на составляющие  $\bar{S}_{Ox}$  и  $\bar{S}_{Oy}$ .

Чтобы они не вошли в уравнение, описывающее процесс удара, применим к системе теорему об изменении кинетического момента при ударе относительно оси вращения стержня  $z$ :

$$K_z - (K_z)_0 = \sum M_z(\bar{S}_k^e).$$

В данном случае

$$\sum M_z(\bar{S}_k^e) = 0$$

и кинетический момент системы в процессе удара сохраняется:  $K_z = (K_z)_0$ .

До удара стержень был неподвижен и кинетический момент был лишь у груза (момент его количества движения  $m_1 \bar{v}$ ):  $(K_z)_0 = m_1 v l$ .

После удара скорость груза изменится и станет равной некоторой величине  $u$ , а стержень приобретет некоторую угловую скорость  $\omega$  и кинетический момент  $J_z\omega$ , где

$$J_z = \frac{m_2 l^2}{3} = 2,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

— осевой момент инерции стержня. Таким образом, после удара  $K_z = m_1 ul + J_z \omega$ .

Поскольку удар является абсолютно неупругим (т. е. отсутствует отскок), то  $u = \omega l$ , тогда

$$K_z = (m_1 l^2 + J_z) \omega = \left( m_1 + \frac{m_2}{3} \right) l^2 \omega.$$

Приравнявая кинетические моменты до удара и после него, получаем

$$\left( m_1 + \frac{m_2}{3} \right) l^2 \omega = m_1 v l, \text{ откуда } \omega = \frac{m_1}{m_1 + \frac{m_2}{3}} \cdot \frac{v}{l} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Скорость груза после удара  $u = \omega l = 2,5 \text{ м/с}$ .

Для вычисления ударного импульса  $S$  между грузом и стержнем применим к грузу (рис. 102) теорему об изменении количества движения при ударе

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^c.$$

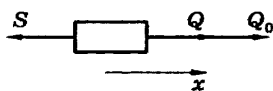


Рис. 102

В проекции на горизонтальную ось имеем  $m_1 u - m_1 v = -S$ , откуда  $S = m_1(v - u) = 25 \text{ Н} \cdot \text{с}$ .

Чтобы вычислить ударные импульсы на оси стержня, применим к нему ту же теорему об изменении количества движения при ударе, учитывая, что количество движения тела равно произведению его массы на скорость центра масс (рис. 103).

До удара стержень был неподвижен и  $Q_0 = 0$ , после удара  $Q = m_2 v_C$ , где

$$v_C = \omega \frac{l}{2} = 1,25 \text{ м/с}.$$

В проекции на ось  $x$  теорема дает  $m_2 v_C - 0 = S + S_{Ox}$ , откуда  $S_{Ox} = m_2 v_C - S = 12,5 \text{ Н} \cdot \text{с}$ .

Проекция на ось  $y$  количества движения стержня до и после удара нулевые, и тогда из теоремы легко видеть, что  $S_{Oy} = 0$ .

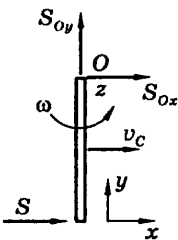


Рис. 103

Таким образом, ударный импульс на оси стержня  $S_O = S_{Ox} = 12,5 \text{ Н}\cdot\text{с}$ .

Определим потерянную в процессе удара кинетическую энергию. До удара двигался только груз и его кинетическая энергия была

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 v^2 = 125 \text{ Дж.}$$

После удара двигались и груз, и стержень; общую кинетическую энергию системы можно выразить

$$T = \frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2 = 62,5 \text{ Дж.}$$

Таким образом, потерянная кинетическая энергия  $T_0 - T = 62,5 \text{ Дж}$ .

Последний результат можно было получить иначе, используя теорему Карно: потеря кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе равна кинетической энергии потерянных скоростей  $T_0 - T = \tilde{T}$ . Для груза потерянная скорость равна  $v - u$ , для стержня потерянная угловая скорость равна  $0 - \omega = -\omega$ , и тогда

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} m_1 (v - u)^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2 = 62,5 \text{ Дж.}$$

Потерянная кинетическая энергия переходит в тепло и необратимые деформации.

Ответ:  $\omega = 5 \text{ с}^{-1}$ ;  $u = 2,5 \text{ м/с}$ ;  $S = 25 \text{ Н}\cdot\text{с}$ ;  $S_O = 12,5 \text{ Н}\cdot\text{с}$ ;  $T_0 - T \stackrel{z}{=} 62,5 \text{ Дж}$ .

## ЗАДАЧА 2

Конструкция, состоящая из однородной плиты 1 массой  $m_1 = 100 \text{ кг}$  и жестко скрепленного с ней стержня 2 массой  $m_2 = 40 \text{ кг}$ , может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости плиты и проходящей через точку  $O$  (рис. 104).

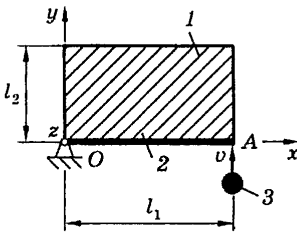


Рис. 104

Тело 3 (материальная точка) массой  $m_3 = 50 \text{ кг}$ , двигаясь со скоростью  $v = 6,4 \text{ м/с}$ , ударяется о конструкцию в точке  $A$ , причем удар является абсолютно неупругим.

Начальная угловая скорость конструкции  $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$ , геометрические размеры  $l_1 = 2 \text{ м}$ ,  $l_2 = 1 \text{ м}$ .



Определить угловую скорость конструкции после удара и воспринимаемый ею ударный импульс. Установить также, как следует наносить удар по конструкции, чтобы отсутствовал ударный импульс на оси вращения (найти центр удара).

**Решение.** Рассмотрим в качестве механической системы всю конструкцию вместе с телом  $Z$ . Тогда возникающая между ними ударная сила будет силой внутренней (соответствующий ударный импульс обозначим  $\bar{S}$ ). Внешний ударный импульс будет лишь на оси вращения  $\bar{S}_O = \bar{S}_x + \bar{S}_y$ .

В уравнение теоремы об изменении кинетического момента при ударе относительно оси  $z$  этот импульс не войдет, то есть

$$K_z - (K_z)_0 = \sum M_z(\bar{S}_k^e) = 0;$$

следовательно,  $K_z = (K_z)_0$  — кинетический момент в процессе удара сохраняется. Кинетический момент до удара  $(K_z)_0 = J_z \omega_0 + m_3 v l_1$ , где  $J_z$  — осевой момент инерции конструкции. Кинетический момент после удара  $K_z = J_z \omega + m_3 u l_1$ , где (поскольку удар абсолютно неупругий)  $u = \omega l_1$  — скорость тела  $Z$  после удара,  $\omega$  — угловая скорость конструкции после удара.

Таким образом  $K_z = (J_z + m_3 l_1^2) \omega$ , и  $(J_z + m_3 l_1^2) \omega = J_z \omega_0 + m_3 v l_1$ , откуда

$$\omega = \frac{J_z \omega_0 + m_3 v l_1}{J_z + m_3 l_1^2} = \omega_0 + \frac{\frac{v}{l_1} - \omega_0}{\frac{J_z}{m_3 l_1^2} + 1}.$$

Момент инерции конструкции равен

$$J_z = J_{z_1} + J_{z_2} = \frac{m_1(l_1^2 + l_2^2)}{3} + \frac{m_2 l_1^2}{3},$$

т. е.  $J_z = 220 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . При этом

$$\frac{J_z}{m_3 l_1^2} = 1,1 \text{ и } \frac{v}{l_1} = 3,2 \text{ с}^{-1}.$$

Итак, угловая скорость после удара  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ , а скорость тела  $Z$  после удара  $u = \omega l_1 = 4 \text{ м/с}$ .

Для вычисления ударного импульса  $\bar{S}$  применим к телу  $Z$  теорему об изменении количества движения при ударе

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e,$$

где  $\bar{Q} = m_3 \bar{u}$  — количество движения тела после удара,  $\bar{Q}_0 = m_3 \bar{v}$  — до удара;  $\sum \bar{S}_k^e$  — сумма внешних ударных импульсов, в данном случае равная ударному импульсу  $\bar{S}$ , направленному вертикально вниз.

В проекции на ось, направленную вертикально вверх, получаем  $m_3 u - m_3 v = -S$ , откуда  $S = 120$  Н·с.

Установим теперь, как следует наносить удар по конструкции, чтобы отсутствовал ударный импульс на оси вращения.

Из теории известно, что для этого линия действия ударного импульса должна быть перпендикулярна плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс конструкции, и проходить на расстоянии от этой оси, определяемом равенством

$$h = \frac{J_z}{ml_C},$$

где  $m$  — масса конструкции,  $l_C$  — расстояние от оси вращения до центра масс конструкции.

Найдем координаты центра масс конструкции, учитывая координаты центров масс ее тел:  $x_1 = x_2 = 1$  м;  $y_1 = 0,5$  м;  $y_2 = 0$ ; а также  $m = m_1 + m_2 = 140$  :

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m} = 1 \text{ м}; \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m} = 0,357 \text{ м}.$$

Тогда  $l_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = 1,06$  м и расстояние  $h = 1,48$  м.

На рис. 105 показано, как следует наносить удар.

Центром удара может быть любая точка конструкции на отрезке  $DE$ .

Ответ:  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ ;  $S = 120 \text{ Н·с}$ ;  $h = 1,48 \text{ м}$ .

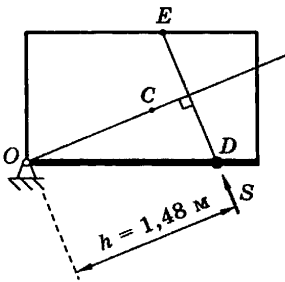


Рис. 105

# ОТВЕТЫ

### ЗАДАНИЕ С1

№	$ R_1 $ , кН	$ R_2 $ , кН	№	$ R_1 $ , кН	$ R_2 $ , кН
1.	7,32	8,97	16.	5,77	11,5
2.	8,97	7,32	17.	15,7	2,07
3.	8,97	7,32	18.	5,77	11,5
4.	10,0	17,3	19.	5,18	19,3
5.	2,68	8,97	20.	2,99	8,16
6.	10,0	17,3	21.	19,3	19,3
7.	5,18	7,32	22.	0	10,0
8.	17,3	10,0	23.	7,32	8,97
9.	17,3	10,0	24.	0	14,1
10.	7,32	8,97	25.	17,3	10,0
11.	17,3	10,0	26.	17,3	10,0
12.	17,3	10,0	27.	11,5	5,77
13.	10,0	17,3	28.	17,3	20,0
14.	10,0	17,3	29.	17,3	10,0
15.	17,3	10,0	30.	5,77	5,77

### ЗАДАНИЕ С2

№	$ X_A $ , кН	$ Y_A $ , кН	$ R_A $ , кН	$ R_B $ , кН	$ R_C $ , кН	$ M_A $ , кНм
1.	5,00	0,330	–	8,33	–	–
2.	26,9	11,6	–	53,8	–	–
3.	12,1	12,9	–	17,1	–	–
4.	–	–	0	16,0	4,00	
5.	5,36	6,91	–	6,19	–	–
6.	5,00	9,94	–	18,7	–	–
7.	28,0	18,5	–	56,0	–	–

№	$ X_1 $ , кН	$ Y_1 $ , кН	$ R_A $ , кН	$ R_B $ , кН	$ R_C $ , кН	$ M_A $ , кНм
8.	5,00	5,67	–	4,33	–	–
9.	16,2	5,00	–	–	–	33,5
10.	1,16	1,41	–	3,59	–	–
11.	8,66	15,0	–	–	–	82,3
12.	8,66	20,8	–	5,77	–	–
13.	2,07	2,61	–	9,68	–	–
14.	13,9	12,0	–	16,1	–	–
15.	8,84	9,69	–	17,7	–	–
16.	6,00	1,00	–	8,49	–	–
17.	8,66	5,39	–	19,6	–	–
18.	6,50	8,50	–	12,0	–	–
19.	16,7	8,96	–	33,4	–	–
20.	18,7	10,4	–	5,43	–	–
21.	5,00	1,34	–	–	–	47,3
22.	1,16	10,7	–	5,70	–	–
23.	5,00	31,7	–	13,0	–	–
24.	5,00	0,401	–	6,74	–	–
25.	16,2	15,0	–	24,9	–	–
26.	8,66	1,93	–	21,9	–	–
27.	7,07	17,1	–	–	–	37,1
28.	6,40	5,00	–	–	–	20,2
29.	–	–	13,2	9,73	19,5	–
30.	8,66	0,670	–	24,3	–	–

### ЗАДАНИЕ С3

№	Значения модулей величин реакций опор, кН ( $X$ , $Y$ , $R$ ), кНм ( $M$ )							
1.	$X_A$	0	$Y_A$	6,67	$R_B$	66,7	$R_C$	20,0
2.	$X_A$	63,3	$Y_A$	20,0	$X_B$	63,3	$Y_B$	40,0
3.	$R_A$	46,3	$R_B$	166	$X_C$	0	$Y_C$	30,0
4.	$X_A$	0	$Y_A$	63,0	$M_A$	96,0	$R_B$	77,0
5.	$X_A$	8,33	$Y_A$	16,3	$X_B$	51,7	$Y_B$	16,3
6.	$X_1$	92,5	$Y_A$	26,0	$X_B$	27,5	$Y_B$	26,0
7.	$X_1$	18,5	$Y_A$	40,5	$X_B$	54,5	$Y_B$	33,0

№	Значения модулей величин реакций опор, кН ( $X$ , $Y$ , $R$ ), кНм ( $M$ )							
8.	$X_A$	6,81	$Y_A$	0	$M_A$	15,8	$Y_B$	9,19
9.	$X_A$	41,3	$Y_A$	65,0	$X_B$	11,3	$Y_B$	55,0
10.	$X_A$	10,6	$Y_A$	0,833	$X_B$	9,38	$Y_B$	29,2
11.	$X_A$	40,0	$Y_A$	110	$X_B$	80,0	$Y_B$	110
12.	$X_A$	50,0	$Y_A$	55,0	$M_A$	70,0	$R_B$	65,0
13.	$R_A$	50,0	$X_B$	0	$Y_B$	110	$M_B$	180
14.	$R_A$	20,0	$X_B$	70,0	$Y_B$	20,0	$M_B$	220
15.	$X_A$	30,0	$Y_A$	0	$R_B$	80,0	$R_D$	30,0
16.	$X_A$	90,0	$Y_A$	10,0	$M_A$	160	$R_B$	14,1
17.	$X_A$	60,0	$Y_A$	8,00	$M_A$	104	$R_B$	8,00
18.	$X_A$	50,0	$Y_A$	60,0	$M_A$	30,0	$R_B$	60,0
19.	$X_A$	84,2	$Y_A$	46,3	$X_B$	84,2	$Y_B$	114
20.	$X_A$	60,0	$Y_A$	100	$M_A$	120	$R_B$	20,0
21.	$X_A$	53,3	$Y_A$	15,0	$X_B$	13,3	$Y_B$	30,0
22.	$X_A$	225	$Y_A$	150	$X_B$	125	$Y_B$	50,0
23.	$X_A$	28,0	$Y_A$	12,0	$X_B$	28,0	$Y_B$	48,0
24.	$X_A$	20,0	$Y_A$	160	$M_A$	320	$R_B$	20,0
25.	$X_A$	20,0	$Y_A$	2,00	$X_B$	20,0	$Y_B$	2,00
26.	$X_A$	90,0	$Y_A$	75,0	$M_A$	100	$R_B$	25,0
27.	$X_A$	25,0	$Y_A$	38,3	$X_B$	25,0	$Y_B$	1,67
28.	$X_A$	8,00	$Y_A$	7,00	$X_B$	8,00	$Y_B$	73,0
29.	$X_A$	30,0	$Y_A$	15,0	$M_A$	115	$R_B$	15,0
30.	$X_A$	2,22	$Y_A$	163	$X_B$	2,22	$Y_B$	36,7

### ЗАДАНИЕ С4

№	$F_{\min}$ , кН	$F_{\max}$ , кН	№	$F_{\min}$ , кН	$F_{\max}$ , кН
1.	-7,15	4,15	7.	8,85	14,2
2.	-3,33	7,67	8.	-6,43	5,57
3.	-9,00	3,00	9.	0,381	9,62
4.	-6,47	16,7	10.	4,67	12,7
5.	-6,43	5,57	11.	-9,00	3,00
6.	7,12	13,1	12.	10,8	14,2

№	$F_{\min}$ , кН	$F_{\max}$ , кН	№	$F_{\min}$ , кН	$F_{\max}$ , кН
13.	-6,43	5,57	22.	8,06	18,5
14.	-2,70	7,70	23.	8,85	14,2
15.	3,84	13,7	24.	-6,47	16,7
16.	15,1	23,1	25.	-7,15	4,15
17.	0,381	9,62	26.	11,7	18,6
18.	4,67	12,7	27.	3,84	13,7
19.	15,1	23,1	28.	20,0	26,0
20.	10,8	14,2	29.	-2,29	7,51
21.	-6,43	5,57	30.	-6,35	4,03

### ЗАДАНИЕ С5

№	$ X_A $	$ Y_A $	$ Z_A $	$ X_B $	$ Y_B $	$ Z_B $	$ R_C $
1.	20,0	4,00	10,0	-	4,00	4,00	19,8
2.	1,11	17,3	14,0	7,11	-	4,00	20,0
3.	2,67	6,00	10,0	21,6	-	4,00	28,0
4.	23,3	8,44	6,00	-	8,44	4,00	20,0
5.	6,44	11,3	14,0	6,44	-	4,00	20,0
6.	0	8,00	14,0	-	7,78	4,00	11,5
7.	2,67	6,00	10,0	16,7	-	4,00	19,8
8.	0	0	11,7	-	3,00	10,1	3,46
9.	6,00	5,20	1,93	3,00	-	2,07	6,00
10.	0	6,00	11,7	-	3,00	13,5	6,00
11.	2,67	6,00	10,0	26,9	-	4,00	28,0
12.	0,226	2,59	6,00	-	2,59	4,00	11,5
13.	11,8	1,26	14,0	-	1,26	4,00	11,5
14.	0	6,00	11,7	-	3,00	10,1	3,46
15.	3,00	3,85	16,5	3,00	3,85	-	6,93
16.	3,00	0	12,7	-	3,00	7,33	4,24
17.	0	4,67	6,00	-	4,80	4,00	4,00
18.	1,67	3,00	20,0	1,79	3,00	-	6,93
19.	3,40	6,00	25,2	3,40	3,00	-	6,00
20.	1,67	3,00	20,0	8,72	3,00	-	12,0

№	$ X_A $	$ Y_A $	$ Z_A $	$ X_B $	$ Y_B $	$ Z_B $	$ R_C $
21.	6,44	11,3	14,0	6,44	–	4,00	20,0
22.	0	0	11,7	3,00	–	11,3	4,24
23.	0	6,00	8,33	–	3,00	6,47	6,00
24.	6,00	5,20	6,60	3,00	–	13,4	6,00
25.	5,47	3,15	14,00	–	4,67	4,00	11,5
26.	11,3	3,11	6,00	–	3,11	4,00	20,0
27.	4,85	2,28	6,00	–	2,28	4,00	2,31
28.	3,00	0	10,7	–	3,00	9,33	4,24
29.	0	6,00	23,0	3,00	6,00	–	4,24
30.	3,00	6,15	23,5	3,00	6,15	–	6,93

### ЗАДАНИЕ К1

№	$v, \text{ м/с}$	$a, \text{ м/с}^2$	$\rho, \text{ м}$	№	$v, \text{ м/с}$	$a, \text{ м/с}^2$	$\rho, \text{ м}$
1.	19,0	6,32	$\infty$	16.	19,0	38,0	$\infty$
2.	7,28	4,00	48,2	17.	10,8	10,0	31,2
3.	6,28	19,7	2,00	18.	12,6	39,5	4,00
4.	4,24	6,00	4,24	19.	2,24	4,00	2,80
5.	3,18	4,87	2,81	20.	5,54	21,7	3,70
6.	14,4	28,8	$\infty$	21.	13,4	26,8	$\infty$
7.	2,24	2,00	5,59	22.	2,50	2,00	5,21
8.	3,14	4,55	3,00	23.	14,1	26,3	9,00
9.	4,47	8,00	5,59	24.	7,07	10,0	7,07
10.	5,95	8,82	5,09	25.	8,95	3,52	92,6
11.	15,7	13,4	$\infty$	26.	11,3	79,2	$\infty$
12.	8,54	4,00	52,0	27.	2,24	2,00	5,59
13.	2,09	4,86	1,00	28.	4,00	4,00	4,00
14.	7,35	6,27	9,04	29.	2,86	2,31	4,04
15.	2,29	0,450	24,8	30.	2,77	1,82	6,17



### ЗАДАНИЕ К2

№	$v, \text{ м/с}$	$a, \text{ м/с}^2$	№	$v, \text{ м/с}$	$a, \text{ м/с}^2$	№	$v, \text{ м/с}$	$a, \text{ м/с}^2$
1.	0,375	0,654	11.	0,500	2,77	21.	5,30	72,4
2.	0,750	2,37	12.	0,500	2,80	22.	2,80	90,3
3.	0,833	7,14	13.	0,400	0,632	23.	0,150	0,335
4.	0,333	0,821	14.	0,100	0,141	24.	4,19	49,4
5.	0,267	0,444	15.	0,575	0,718	25.	0,600	4,33
6.	4,80	45,0	16.	2,50	22,1	26.	0,195	0,274
7.	0,833	1,91	17.	0,262	0,417	27.	0,800	4,75
8.	0,389	0,707	18.	1,00	6,77	28.	0,800	7,04
9.	8,00	219	19.	0,514	0,573	29.	0,667	1,90
10.	0,750	1,77	20.	0,559	3,19	30.	1,89	52,6

### ЗАДАНИЕ К3

№	$v_B, \text{ м/с}$	$a_B, \text{ м/с}^2$	$\omega_{AB}, \text{ 1/с}$	$\epsilon_{AB}, \text{ 1/с}^2$
1.	1,00	1,42	0,500	0,856
2.	1,00	5,00	0,866	3,03
3.	1,73	0,536	1,00	0,268
4.	0	0,810	0,450	1,35
5.	1,00	3,41	0,707	1,91
6.	0,577	0,385	0,577	0,962
7.	0	0,0520	0,150	0,513
8.	2,00	9,66	1,41	4,83
9.	2,00	4,31	1,00	1,58
10.	2,00	10,0	1,73	3,46
11.	3,46	12,5	2,00	4,93
12.	0	3,24	0,900	0,403
13.	3,00	10,7	2,12	3,09
14.	1,73	7,46	1,00	3,73
15.	0	1,30	0,750	1,33

№	$v_B, \text{м/с}$	$a_B, \text{м/с}^2$	$\omega_{AB}, 1/\text{с}$	$\varepsilon_{AB}, 1/\text{с}^2$
16.	1,15	4,23	1,15	1,92
17.	2,00	4,31	1,00	1,58
18.	4,00	52,0	3,46	24,2
19.	0,577	3,08	0,577	2,50
20.	0	0,360	0,300	1,84
21.	0,800	3,09	0,566	2,51
22.	1,15	1,92	1,15	0,386
23.	0	0,468	0,450	0,883
24.	0	1,44	0,600	1,62
25.	1,00	1,42	0,500	0,855
26.	0,800	0,0800	0,693	0,901
27.	0	0,208	0,300	1,05
28.	6,93	65,7	4,00	28,7
29.	1,00	2,14	0,259	0,536
30.	2,00	1,45	0,518	0,446

#### ЗАДАНИЕ К4

№	$v_a, \text{м/с}$	$a_a, \text{м/с}^2$	№	$v_a, \text{м/с}$	$a_a, \text{м/с}^2$
1.	39,0	78,1	16.	98,9	1059
2.	151	1272	17.	113	451
3.	33,5	128	18.	28,0	125
4.	84,5	487	19.	10,8	72,4
5.	87,0	511	20.	57,2	190
6.	314	3612	21.	42,5	284
7.	5,43	15,6	22.	18,0	111
8.	2,00	21,9	23.	9,77	30,6
9.	5,39	19,7	24.	66,5	378
10.	2,95	15,4	25.	77,3	378
11.	4,47	12,7	26.	36,0	146
12.	32,6	68,8	27.	139	1107
13.	107	692	28.	43,3	231
14.	4,47	22,0	29.	15,0	33,5
15.	42,3	171	30.	10,2	16,5

### ЗАДАНИЕ Д1

№	Ответы	№	Ответы	№	Ответы
1.	3,14 с	11.	0,993 м/с	21.	10,3 м/с; 3,40 с
2.	2,45 м/с	12.	21,8 м/с	22.	2,85 м
3.	6,78 м/с; 7,00 м/с	13.	8,52 м/с	23.	3,71 с
4.	5,00 с	14.	4,00 м; 8,00 м	24.	10,2 с; 102 м
5.	1,00 с; 3,30 м	15.	12,0 м	25.	10,0 с
6.	5,00 м	16.	6,01 км	26.	30,6 м
7.	4,24 м/с	17.	450 кН	27.	0,255; 5,00 м
8.	57,5 м	18.	6,28 м	28.	4,00 м/с; 0
9.	7,01 м	19.	27,0 с	29.	1,86 с
10.	1,50 м/с; 2,00 м	20.	1,81 м/с	30.	3,66 м/с; 3,72 м

### ЗАДАНИЕ Д2

№	Ответ	№	Ответ	№	Ответ
1.	0,533 с	11.	7,57 1/с	21.	4,77 об.
2.	5,41 с	12.	1,72 1/с	22.	1,04 об.
3.	0,572 с	13.	36,1 с	23.	1,84 1/с
4.	35,9 1/с	14.	24,0 об.	24.	12,0 1/с
5.	4,74 с	15.	2,82 1/с	25.	5,00 рад
6.	1,59 с	16.	22,2 рад	26.	15,9 об.
7.	8,66 рад	17.	44,5 рад	27.	4,64 1/с
8.	6,20 1/с	18.	6,73 1/с	28.	11,4 1/с
9.	4,80 об.	19.	4,09 1/с	29.	1,33 1/с
10.	31,3 1/с	20.	112 Нм	30.	3,66 рад

## ЗАДАНИЕ Д3

### Задание 1

№	Ответ	№	Ответ	№	Ответ
1.	1,36 м/с <sup>2</sup>	11.	19,0 л/с <sup>2</sup>	21.	0,440 м/с <sup>2</sup>
2.	1,91 м/с <sup>2</sup>	12.	1,76 м/с <sup>2</sup>	22.	0,798 м/с <sup>2</sup>
3.	1,08 м/с <sup>2</sup>	13.	0,468 м/с <sup>2</sup>	23.	0,180 м/с <sup>2</sup>
4.	13,3 л/с <sup>2</sup>	14.	0,164 м/с <sup>2</sup>	24.	1,48 м/с <sup>2</sup>
5.	0,435 м/с <sup>2</sup>	15.	1,07 м/с <sup>2</sup>	25.	6,17 л/с <sup>2</sup>
6.	19,1 л/с <sup>2</sup>	16.	1,38 м/с <sup>2</sup>	26.	4,03 л/с <sup>2</sup>
7.	3,02 л/с <sup>2</sup>	17.	1,40 м/с <sup>2</sup>	27.	2,76 м/с <sup>2</sup>
8.	0,531 м/с <sup>2</sup>	18.	21,4 л/с <sup>2</sup>	28.	8,04 л/с <sup>2</sup>
9.	70,2 л/с <sup>2</sup>	19.	0,469 м/с <sup>2</sup>	29.	2,27 м/с <sup>2</sup>
10.	2,98 м/с <sup>2</sup>	20.	0,109 м/с <sup>2</sup>	30.	0,361 м/с <sup>2</sup>

### Задание 2

№	Ответ	№	Ответ	№	Ответ
1.	2,33 м/с	11.	15,5 л/с	21.	1,33 м/с
2.	2,76 м/с	12.	2,66 м/с	22.	1,79 м/с
3.	2,08 м/с	13.	1,37 м/с	23.	0,847 м/с
4.	12,9 л/с	14.	0,809 м/с	24.	2,44 м/с
5.	1,32 м/с	15.	2,07 м/с	25.	8,81 л/с
6.	15,5 л/с	16.	2,35 м/с	26.	7,11 л/с
7.	6,16 л/с	17.	2,37 м/с	27.	3,33 м/с
8.	1,46 м/с	18.	16,4 л/с	28.	10,0 л/с
9.	29,7 л/с	19.	1,37 м/с	29.	3,01 м/с
10.	3,45 м/с	20.	0,661 м/с	30.	1,20 м/с

## ЗАДАНИЕ Д4

### Задание 1

Смотри ответы к заданию С3.

### Задание 2

№	F, кН	№	F, кН	№	F, кН
1.	12,5	11.	35,0	21.	2,50
2.	42,3	12.	7,50	22.	84,6
3.	25,0	13.	12,5	23.	32,3
4.	12,5	14.	7,50	24.	12,5
5.	11,8	15.	25,0	25.	11,3
6.	45,0	16.	21,2	26.	35,0
7.	2,50	17.	15,0	27.	7,50
8.	7,50	18.	7,50	28.	64,6
9.	45,0	19.	15,0	29.	16,2
10.	32,3	20.	6,83	30.	12,5

### ЗАДАНИЕ Д5

№	F, кН	R, кН	№	F, кН	R, кН
1.	3,67	3,47	16.	2,10	2,20
2.	8,17	4,05	17.	2,87	2,08
3.	4,89	2,98	18.	1,90	2,42
4.	3,15	5,90	19.	11,5	9,04
5.	0,254	0,925	20.	1,42	2,50
6.	28,2	12,5	21.	-0,250	4,68
7.	0,934	1,58	22.	36,5	8,89
8.	5,53	8,80	23.	3,31	3,07
9.	18,1	12,2	24.	7,95	12,3
10.	12,2	6,02	25.	3,99	7,91
11.	7,89	5,10	26.	8,77	4,40
12.	2,55	8,61	27.	0,843	1,39
13.	5,28	9,44	28.	14,3	3,94
14.	3,83	5,65	29.	3,73	3,83
15.	2,47	4,40	30.	3,25	6,78

### ЗАДАНИЕ Д6

№	Ответ	№	Ответ	№	Ответ
1.	1,63 м/с <sup>2</sup>	11.	3,11 м/с <sup>2</sup>	21.	2,67 1/с <sup>2</sup>
2.	1,00 м/с <sup>2</sup>	12.	11,8 1/с <sup>2</sup>	22.	20,5 1/с <sup>2</sup>
3.	4,29 1/с <sup>2</sup>	13.	3,11 м/с <sup>2</sup>	23.	1,03 м/с <sup>2</sup>
4.	4,23 м/с <sup>2</sup>	14.	0,561 м/с <sup>2</sup>	24.	1,02 м/с <sup>2</sup>
5.	3,02 м/с <sup>2</sup>	15.	2,96 м/с <sup>2</sup>	25.	0,883 1/с <sup>2</sup>
6.	7,22 1/с <sup>2</sup>	16.	3,33 м/с <sup>2</sup>	26.	2,00 м/с <sup>2</sup>
7.	1,96 м/с <sup>2</sup>	17.	1,15 м/с <sup>2</sup>	27.	2,70 1/с <sup>2</sup>
8.	5,04 м/с <sup>2</sup>	18.	3,56 м/с <sup>2</sup>	28.	0,635 м/с <sup>2</sup>
9.	3,40 м/с <sup>2</sup>	19.	1,63 м/с <sup>2</sup>	29.	9,26 м/с <sup>2</sup>
10.	1,69 м/с <sup>2</sup>	20.	0,352 м/с <sup>2</sup>	30.	3,16 м/с <sup>2</sup>

### ЗАДАНИЕ Д7

№	$k$ , 1/с	$B$ , рад	№	$k$ , 1/с	$B$ , рад
1.	11,6	0,00928	16.	5,42	0,00671
2.	19,1	0,0145	17.	4,45	0,00318
3.	3,61	0,00846	18.	12,1	0,00409
4.	10,7	0,00462	19.	6,91	0,00118
5.	11,5	0,0102	20.	15,8	0,00792
6.	9,63	0,00185	21.	17,1	0,00782
7.	24,6	0,247	22.	12,1	0,0160
8.	16,7	0,0133	23.	8,25	0,00336
9.	11,3	0,00670	24.	10,9	0,0113
10.	14,0	0,00828	25.	13,3	0,00554
11.	4,61	0,00695	26.	32,2	0,00185
12.	16,8	0,0199	27.	23,5	0,0185
13.	20,5	0,0227	28.	5,82	0,00217
14.	13,0	0,0155	29.	15,4	0,00673
15.	14,1	0,0108	30.	8,57	0,00256

### ЗАДАНИЕ Д8

№	$\omega, 1/c$	S, Нс	$T_0 - T, Дж$	№	$\omega, 1/c$	S, Нс	$T_0 - T, Дж$
1.	4,35	54,7	109	16.	4,44	66,7	133
2.	3,54	56,3	113	17.	3,09	64,3	129
3.	6,82	79,1	158	18.	2,47	75,6	151
4.	2,76	70,2	140	19.	1,65	60,7	121
5.	4,47	53,0	106	20.	3,41	68,9	138
6.	1,99	60,4	121	21	3,58	66,2	132
7.	6,52	41,7	83,4	22.	5,48	21,4	42,7
8.	3,61	65,9	132	23.	2,72	87,3	175
9.	3,33	60,0	120	24.	5,16	27,1	54,2
10.	3,17	53,5	107	25.	2,85	68,7	137
11.	5,91	84,5	169	26.	3,77	29,6	59,2
12.	4,48	39,4	78,8	27.	3,55	45,5	90,9
13.	3,56	45,3	90,5	28.	1,96	90,6	181
14.	6,52	41,7	83,4	29.	2,73	62,6	125
15.	3,91	61,3	123	30.	1,96	72,9	146

## ЛИТЕРАТУРА

- Диевский В. А.* Теоретическая механика. СПб., 2005.
- Бутенин Н. В., Луц Я. Л., Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики. Т. 1, 2. СПб., 2002.
- Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. СПб., 1998.
- Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики. М., 1998.
- Цыvilьский В. Л.* Теоретическая механика. М., 2001.
- Яблонский А. А., Никифорова В. Л.* Курс теоретической механики. М., 2001.
- Мещерский И. В.* Задачи по теоретической механике. СПб., 2003.
- Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. СПб., 1998.
- Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А. А. Яблонского. М., 2002.
- Сборник задач по теоретической механике, решаемых с применением ЭВМ. СПб., 1995.
- Диевский В. А., Малышева И. А.* Задачи по теоретической механике. Типовые задачи с решениями. СПб.: ВИТУ, 2005.
- Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Л., 1990.
- Карпова Н. В.* Классическая теория удара и ее применение к решению прикладных задач. СПб., 2003.



## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

### СТАТИКА

Задание С1. Система сходящихся сил . . . . .	6
Типовые задачи. Система сходящихся сил . . . . .	10
Задача 1 . . . . .	10
Задача 2 . . . . .	11
Задача 3 . . . . .	13
Задание С2. Плоская система сил . . . . .	15
Типовые задачи. Плоская система сил . . . . .	19
Задача 1 . . . . .	19
Задача 2 . . . . .	20
Задача 3 . . . . .	21
Задание С3. Плоская система сил (система тел) . . . . .	23
Типовые задачи. Плоская система сил (система двух тел) . . . . .	27
Задача 1 . . . . .	27
Задача 2 . . . . .	28
Задание С4. Система сил при наличии трения . . . . .	31
Типовые задачи. Система сил при наличии трения . . . . .	35
Задача 1 . . . . .	35
Задача 2 . . . . .	36
Задача 3 . . . . .	37
Задание С5. Пространственная система сил . . . . .	39
Типовые задачи. Пространственная система сил . . . . .	43
Задача 1 . . . . .	43

### КИНЕМАТИКА

Задание К1. Кинематика точки . . . . .	46
Типовые задачи. Кинематика точки . . . . .	47
Задача 1 . . . . .	47
Задача 2 . . . . .	48
Задание К2. Простейшие виды движения твердого тела . . . . .	50
Типовые задачи. Простейшие виды движения твердого тела . . . . .	55
Задача 1 . . . . .	55
Задача 2 . . . . .	56

Задание К3.	Плоскопараллельное движение твёрдого тела . . . . .	58
Типовые задачи.	Плоскопараллельное движение твёрдого тела . . . . .	62
	Задача 1 . . . . .	62
	Задача 2 . . . . .	64
Задание К4.	Сложное движение точки . . . . .	67
Типовые задачи.	Сложное движение точки . . . . .	72
	Задача 1 . . . . .	72
	Задача 2 . . . . .	74

## ДИНАМИКА

Задание Д1.	Динамика материальной точки . . . . .	78
Типовые задачи.	Динамика материальной точки . . . . .	82
	Задача 1 . . . . .	82
	Задача 2 . . . . .	83
	Задача 3 . . . . .	86
Задание Д2.	Динамика вращательного движения . . . . .	89
Типовые задачи.	Динамика вращательного движения . . . . .	94
	Задача 1 . . . . .	94
	Задача 2 . . . . .	96
Задание Д3.	Теорема об изменении кинетической энергии . . . . .	99
	Задание 1 . . . . .	99
	Задание 2 . . . . .	99
Типовые задачи.	Теорема об изменении кинетической энергии . . . . .	104
	Задача 1 . . . . .	104
	Задача 2 . . . . .	106
	Задача 3 . . . . .	107
	Задача 4 . . . . .	110
Задание Д4.	Принцип Лагранжа . . . . .	112
	Задание 1 . . . . .	112
	Задание 2 . . . . .	112
Типовые задачи.	Принцип возможных скоростей . . . . .	117
	Задача 1 . . . . .	117
	Задача 2 . . . . .	118
	Задача 3 . . . . .	120
	Задача 4 . . . . .	123
Типовые задачи.	Принцип возможных перемещений . . . . .	125
	Задача 1 . . . . .	125
	Задача 2 . . . . .	127
Задание Д5.	Принцип Даламбера . . . . .	130
Типовые задачи.	Принципы Даламбера и Даламбера–Лагранжа . . . . .	135
	Задача 1 . . . . .	135
	Задача 2 . . . . .	137
	Задача 3 . . . . .	139
Задание Д6.	Уравнения Лагранжа второго рода . . . . .	141
Типовые задачи.	Уравнения Лагранжа второго рода . . . . .	146
	Задача 1 . . . . .	146
	Задача 2 . . . . .	149
	Задача 3 . . . . .	151

Задание Д7. Малые колебания механических систем . . .	154
Задание 1. Свободные колебания . . . . .	154
Задание 2. Вынужденные колебания . . . . .	154
Типовые задачи. Малые колебания механических систем . . .	159
Задача 1 . . . . .	159
Задание Д8. Теория удара . . . . .	165
Типовые задачи. Теория удара . . . . .	170
Задача 1 . . . . .	170
Задача 2 . . . . .	172

### ОТВЕТЫ

Задание С1 . . . . .	176
Задание С2 . . . . .	176
Задание С3 . . . . .	177
Задание С4 . . . . .	178
Задание С5 . . . . .	179
Задание К1 . . . . .	180
Задание К2 . . . . .	181
Задание К3 . . . . .	181
Задание К4 . . . . .	182
Задание Д1 . . . . .	183
Задание Д2 . . . . .	183
Задание Д3 . . . . .	184
Задание Д4 . . . . .	184
Задание Д5 . . . . .	185
Задание Д6 . . . . .	186
Задание Д7 . . . . .	186
Задание Д8 . . . . .	187
 Литература . . . . .	 188