

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА
ПРОЦЕССОВ БУРЕНИЯ**

*Методические указания к практическим занятиям
для студентов направления 21.03.01*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский горный университет»

Кафедра бурения скважин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ БУРЕНИЯ

*Методические указания к практическим занятиям
для студентов направления 21.03.01*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2022

УДК 622.143

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ БУРЕНИЯ
(ЧАСТЬ 1):** Методические указания к практическим занятиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *М.Ю. Мерзляков*. СПб, 2022. – 45 с.

Описаны используемые в буровых работах методы статистической обработки информации.

Предназначены для студентов направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело».

Табл. 13. Ил. 2. Библиогр.: 7 назв.

Научный редактор проф. *М.В. Двойников*

© Санкт-Петербургский
горный университет, 2022 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Научно-техническая революция в области информатики и вычислительной техники обусловила широкое внедрение в различные сферы промышленности, в том числе и в буровую отрасль, компьютеров и современных методов обработки получаемой информации. Успешное использование математических методов и компьютеров невозможно без повышения уровня математического образования.

Предмет курса «Математические методы анализа процессов бурения» предназначен для получения студентами навыков работы с экспериментальными данными на основе современных методов статистической обработки информации. Правильный подход при обработке экспериментальных данных необходим для последующего осмысления и использования полученных выводов в дальнейшей работе. В основе этого курса лежат такие разделы математики, как математическая статистика, теория вероятностей, планирование эксперимента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ВЫБОРКИ

Математическая статистика – это раздел прикладной математики, в котором рассматриваются методы отыскания законов и характеристик случайных величин по результатам наблюдений и экспериментов.

Основные задачи математической статистики:

1. Создание методов сбора и группировки обрабатываемого статистического материала, полученного в результате наблюдений за случайными процессами.

2. Разработка методов анализа полученных статистических данных.

3. Получение выводов по данным наблюдений.

Анализ статистических данных включает оценку вероятностей события, функции распределения вероятностей или плотности вероятностей, оценку параметров известного распределения, оценку связей между случайными величинами.

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей и в свою очередь служит основой для разработки методов обработки и анализа статистических результатов в конкретных областях человеческой деятельности.

Одним из важнейших основных понятий теории вероятностей является понятие о случайной величине.

Случайной величиной (СВ) называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Различаются два типа СВ: дискретные, принимающие конечное или счетное число значений, и непрерывные, принимающие все значения на некотором непрерывном промежутке числовой оси.

Генеральная совокупность – это полный набор всех возможных значений, которые может принимать СВ.

Выборкой называется выделенная из генеральной совокупности часть, состоящая из n значений СВ, с целью её изучения и дальнейшего заключения обо всей генеральной совокупности.

Выборка должна быть репрезентативной, т.е. правильно отражать пропорции генеральной совокупности. Это достигается случайностью отбора, когда все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность быть отобранными.

1. Вычисление характеристик положения СВ

Среднее значение – это среднеарифметическое из всех измеренных значений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1)$$

где n – количество наблюдений, x_i – значения СВ.

Медиана – средний член упорядоченного ряда значений. Для нахождения медианы нужно расположить все значения в порядке возрастания или убывания и найти средний по порядку член ряда. В случае n – четного числа в середине ряда окажутся два значения, тогда медиана будет равна их полусумме.

Мода – наиболее часто встречающееся значение СВ.

Для выборки моды оценивают по формуле:

$$m_0 = h_{m_0}^H + h \frac{m_{m_0} - m_{m_0-1}}{2m_{m_0} - m_{m_0-1} - m_{m_0+1}}, \quad (2)$$

где $h_{m_0}^H$ – нижняя граница модального интервала, т.е. интервала, имеющего наибольшую частоту; h – длина интервала разбиения (шаг); m_{m_0} – частота модального интервала; m_{m_0-1} – частота интервала, предшествующего модальному интервалу; m_{m_0+1} – частота интервала, следующего за модальным интервалом.

2. Определение характеристик разброса СВ

Дисперсия – это число, равное среднему квадрату отклонений значений СВ от ее среднего значения:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3)$$

Среднеквадратичное отклонение – это число, равное квадратному корню из дисперсии:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (4)$$

Для характеристики разброса значений СВ относительно среднего значения наряду с дисперсией применяют **коэффициент вариации** V , который показывает насколько велико рассеяние по сравнению со средним значением СВ, и который представляет собой отношение среднего квадратичного отклонения к математическому ожиданию:

$$V = \frac{S}{\bar{x}}. \quad (5)$$

3. Нахождение характеристик формы распределения СВ

Асимметрия – степень асимметричности распределения значений СВ относительно среднего значения:

$$A = \frac{1}{nS^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3. \quad (6)$$

Экцесс – степень остро- или плосковершинности распределения значений СВ относительно нормального закона распределения:

$$E = \frac{1}{nS^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3. \quad (7)$$

4. Отбраковка грубых ошибок

При проведении опытов в одинаковых условиях часто наблюдаются значения, резко отличающиеся от остальных. Отбраковка таких значений производится с помощью специальных статистических критериев. Выбор критерия зависит от количества наблюдений.

По наиболее широко используемому методу Граббса исключение резко выделяющихся замеров производится с помощью безразмерных статистических критериев G_1 и G_2 :

$$G_1 = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{S}; \quad (8)$$

$$G_2 = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{S}. \quad (9)$$

Далее расчетные значения G_1 и G_2 сравниваются с теоретическим значением G_T при выбранном уровне значимости (см. табл. 4 в приложении).

Если расчетные значения статистического критерия $G_1 > G_T$ или $G_2 > G_T$, то G_1 или G_2 отбрасываются, как содержащие грубую ошибку. После этого вновь производится статистический анализ оставшейся выборки и т.д.

5. *Установление доверительного интервала, в котором лежит математическое ожидание СВ*

Интервал $(\bar{x} - \Delta; \bar{x} + \Delta)$, который с заданной доверительной вероятностью или надежностью $P = 1 - \alpha$ покрывает оцениваемый параметр, называется доверительным интервалом.

Предельную ошибку выборки определяют по формуле:

$$\Delta = t_{\alpha/2, m} \sqrt{\frac{S^2}{n}}, \quad (10)$$

где $t_{\alpha/2, m}$ – коэффициент Стьюдента зависящий от принятого уровня значимости α и числа степеней свободы m : $m = n - 1$ (см. табл. 5 в приложении).

Зная предельную ошибку выборки Δ , можно определить доверительный интервал, в котором в котором лежит истинное среднее значение СВ (генеральная средняя):

$$\bar{x} - t_{\alpha/2, m} \sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq x_{\text{ист}} \leq \bar{x} + t_{\alpha/2, m} \sqrt{\frac{S^2}{n}}. \quad (11)$$

Очевидно, чем меньше длина доверительного интервала, тем точнее оценка.

б. Определение необходимого количества измерений

Случайную погрешность можно уменьшить, увеличивая число измерений. Пусть систематическая погрешность измерений, определяемая классом точности прибора или другими подобными обстоятельствами, будет δ . Уменьшать случайную погрешность целесообразно только до тех пор, пока общая погрешность измерений не будет полностью определяться ее систематической составляющей. Для этого необходимо, чтобы доверительный интервал, определенный с выбранной степенью надежности, был существенно меньше величины систематической погрешности, т.е.

$$\Delta < \delta. \quad (12)$$

Разумеется, нужно условиться, какая требуется степень надежности, и какую величину для случайных погрешностей следует считать допустимой, т.е. какое соотношение величин Δ и δ можно считать удовлетворяющей условию (12). Строгую оценку этого сделать трудно, но можно исходить из того, что, как правило, нет необходимости определять общую погрешность с относительной погрешностью меньше 0,1 (т.е. $\Delta \leq 0,1$). Практически можно удовлетвориться и менее жестким требованием: $\Delta \leq 1/3\delta$ или даже $\Delta \leq 0,5\delta$. Надежность P , с которой мы хотим установить доверительный интервал, в большинстве случаев не должен превышать 0,95, хотя иногда требуются и более высокие значения P , а иногда допустимы значения $P \leq 0,9$. Для оценки оптимального числа измерений можно воспользоваться таблицей 1.

Таблица 1

Необходимое число измерений для получения случайной погрешности ε с надежностью P

$\varepsilon = \frac{\Delta}{\delta}$	P					
	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99	0,999
1,0	2	3	5	7	11	17
0,5	3	6	13	18	31	50
0,4	4	8	19	27	46	74
0,3	6	13	32	46	78	130
0,2	13	29	70	100	170	280
0,1	47	110	270	390	700	1100
0,05	180	430	1100	1500	2700	4300
0,01	4500	11000	27000	38000	66000	110000

Объём выборки можно также определить с помощью выборочного коэффициента вариации, получаемого с помощью априорной информации или статистических данных для аналогичных условий:

$$n = \frac{t_{\alpha/2, m}^2 V^2}{\Delta^2}. \quad (13)$$

Если аналог отсутствует, то коэффициент V необходимо задать и в процессе эксперимента произвести его корректировку.

7. Группирование данных

При большом числе исходных данных расчёт статистических характеристик с помощью таблиц становится громоздким, поэтому применяется компактный метод расчёта с предварительной группировкой данных. Для этого весь диапазон исходных значений разбивается на равные интервалы (классы), границы которых удобно брать скруглёнными. Число классов зависит от числа исходных данных и определяется по формуле Стерджеса:

$$k = 1 + 3,32 \lg n, \quad (14)$$

где k – количество классов. Результаты расчетов округляют до ближайшего целого числа (в большую сторону).

Размер каждого класса можно найти по формуле:

$$h = R/k = (x_{\max} - x_{\min})/k. \quad (15)$$

где R – размах выборки.

Верхняя граница первого интервала совпадает с нижней границей второго интервала и т.д. Необходимо учитывать, что интервалы не должны перекрываться, а также не должно быть сомнений относительно того, в какой интервал следует отнести то или иное значение в выборке. С другой стороны количество интервалов разбиения может быть определено путём простого подбора и изменения вида гистограммы с помощью STATISTICA, IBM SPSS Statistics или других специальных программ.

Число значений в классе называют **частотой**. Если выразить частоту в относительных долях к общему числу значений, то получим **частотность**. Её можно выразить в процентах.

Далее составляется таблица, в которой представлены классы, значений количества данных по классам и частота их встречи в данной выборке, что показано на примере таблицы 2.

Таблица 2

Распределение случайной величины по классам				
Класс		Частота	Частость	
			Дол.ед.	%
41,42	43,83	2	0,042	4,2
43,83	46,24	4	0,083	8,3
46,24	48,65	10	0,208	20,8
48,65	51,06	13	0,271	27,1
51,06	53,47	8	0,167	16,7
53,47	55,88	6	0,125	12,5
55,88	58,27	5	0,104	10,4
Проверка		48	1,000	100,0

8. Построение гистограммы и полигона частот

На основании данных, приведённых в таблице 2, можно построить гистограмму значений СВ и полигон рассеяния (рис. 1).

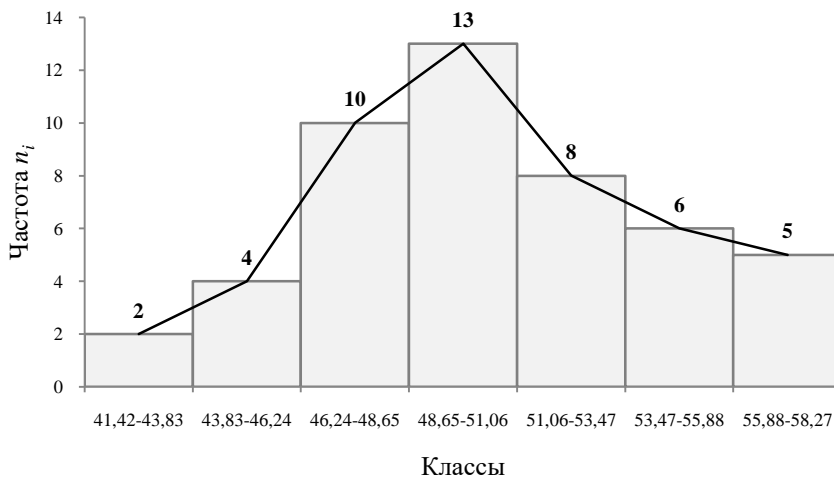


Рис. 1. Гистограмма распределения и полигон рассеяния случайной величины

Для построения гистограммы по оси абсцисс откладываются классы, по оси ординат – частоты в виде ступенек. Для построения полигона в серединах классов откладываются ординаты,

пропорциональные абсолютным частотам. Вершины ординат соединяют линиями.

9. Проверка закона распределения СВ

Для эффективного анализа технологических процессов бурения скважин необходимо установить, к какому из теоретических законов подчиняется распределение опытных данных: нормальному или какому-либо другому.

Гистограмму и полигон удобно использовать для визуального подбора модели распределения СВ. Предварительный выбор закона распределения с помощью гистограммы является простым и наглядным, но вместе с тем весьма субъективным и приближенным, т.к. гистограмма может одновременно напоминать несколько распределений.

Если $A = 0$ и $E = 0$, то распределение данных подчиняется нормальному закону распределения. В реальных условиях из-за различных случайных причин $A_{\bar{X}} \neq 0$ и $E_{\bar{X}} \neq 0$. Поэтому считается, что нормальный закон распределения выполняется в том случае, если соблюдается два условия:

$$|A_{\bar{X}}| \leq 3S_{A_{\bar{X}}} \text{ и } |E_{\bar{X}}| \leq 5S_{E_{\bar{X}}}, \quad (16)$$

где $S_{A_{\bar{X}}}$ и $S_{E_{\bar{X}}}$ – соответственно среднеквадратическое отклонение показателей асимметрии и эксцесса нормального закона распределения, которые можно определить по формулам:

$$S_{A_{\bar{X}}} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}; \quad (17)$$

$$S_{E_{\bar{X}}} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}. \quad (18)$$

Если оба условия выполняются, то выборка подчиняется нормальному закону распределения. Если хотя бы одно условие не выполняется, необходимо прологарифмировать значения случайных величин, выполнить расчёты с логарифмами и проверить подчиняются ли полученные логарифмы нормальному закону.

Задание

1. В соответствии с исходными данными (табл. 3) определить среднее арифметическое значение, медиану, моду, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии и эксцесса случайной величины.
2. Произвести отбраковку грубых ошибок.
3. С принятой доверительной вероятностью определить интервал, в котором лежит математическое ожидание случайной величины.
4. Определить необходимое количество измерений.
5. Группировка исходных данных и построение гистограммы распределения значений случайной величины.
6. На основании вычислений и визуального анализа построенной гистограммы произвести проверку принадлежности данных нормальному закону распределения.

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Следующей задачей статистического анализа, решаемой после определения основных (выборочных) характеристик и анализа одной выборки, является совместный анализ нескольких выборок. Важнейшим вопросом, возникающем при анализе двух выборок, является установление наличия различий между выборками. Обычно для этого проводят проверку статистических гипотез о принадлежности обеих выборок одной генеральной совокупности или о равенстве средних (дисперсий).

Статистической гипотезой называется утверждение относительно истинных значений параметров исследуемой генеральной совокупности.

Нулевая гипотеза (H_0) – предположение о том, что между параметрами генеральных совокупностей разница равна нулю и различия между ними носят не систематический, а случайный характер.

Альтернативная гипотеза (H_1) – гипотеза, противоположная нулевой.

Уровень значимости (α) – вероятность отклонения нулевой гипотезы, когда она верна.

Если вид распределения или функция распределения выборки нам заданы, то в этом случае задача оценки различий двух групп независимых наблюдений может решаться с использованием **параметрических критериев** статистики. В группу параметрических критериев методов математической статистики входят методы для вычисления описательных статистик, построения графиков на нормальность распределения, проверка гипотез о принадлежности двух выборок одной совокупности. Эти методы основываются на предположении о том, что распределение выборок подчиняется нормальному закону распределения. Среди параметрических критериев статистики нами будут рассмотрены критерий Стьюдента (t) и Фишера (F).

Использование параметрических критериев статистики без предварительной проверки вида распределения может привести к определенным ошибкам в ходе проверки рабочей гипотезы. Поэтому необходимо удостовериться, что рассматриваемые выборки относятся к одной генеральной совокупности.

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Проверка гипотезы о принадлежности выборок нормальному закону по критерию Шапиро-Уилка (W) производится так же, как и проверка гипотезы о параметрах распределения.

Помимо критериев согласия непараметрические критерии проверки статистических гипотез включают критерии для проверки гипотез о принадлежности двух выборок одной генеральной совокупности. Данную проверку можно осуществить по критериям знаков, серий, Вилкоксона-Манна-Уитни (U) и др.

1. Оценка значимости различия средних значений двух выборок с использованием критерия Стьюдента

При использовании критерия можно выделить два случая. В первом случае его применяют для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних двух независимых, несвязанных выборок (**двухвыборочный t -критерий**). В этом случае есть контрольная группа и экспериментальная (опытная) группа, количество данных в группах может быть различно.

Во втором случае, когда одна и та же группа объектов порождает числовой материал для проверки гипотез о средних, используется так называемый *парный t-критерий*. Выборки при этом называют зависимыми, связанными.

В данном случае необходимо проверить гипотезу относительно математического ожидания a_1 и a_2 двух СВ X_1 и X_2 , взятых из двух независимых выборок n_1 и n_2 нормально распределённых генеральных совокупностей. Критерием для проверки гипотезы $H_0 (a_1 = a_2)$ при $H_1: a_1 \neq a_2$, если значения дисперсий неизвестны и не предполагается, что они равны ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), служит выборочная статистика:

$$T = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / (\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}). \quad (22)$$

Распределение статистики T близко к t -распределению Стьюдента с числом степеней свободы

$$k = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_1)^2}{n_2 - 1}}. \quad (23)$$

Статистику T сравнивают с критическим значением $t_{\alpha,k}$, найденным для выбранного уровня значимости α и числа степеней свободы k (см. приложение). Гипотеза $H_0: a = a_1 = a_2$ принимается, если выполняется неравенство $|T| \leq t_{\alpha,k}$.

2. Оценка значимости различия дисперсий двух выборок с использованием критерия Фишера

Критерий значимости, применяемый для проверки гипотезы о равенстве степени рассеивания двух СВ X_1 и X_2 двух нормальных совокупностей, т.е. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, основывается на вычислении выборочной статистики

$$F = S_1^2/S_2^2, \quad (24)$$

где $S_1^2 > S_2^2$.

Величина F при условии справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Фишера со степенями свободы $k_1=n_1-1$ и

$k_2=n_2-1$, где n_1, n_2 – соответственно объемы выборок, по которым вычислены большая и меньшая дисперсии.

Вычисленное значение критерия F сравнивается с критическим значением $F_{\alpha; k_1; k_2}$ (см. приложение). Если $F \geq F_{\alpha; k_1; k_2}$, то гипотеза H_0 отклоняется в пользу альтернативной. В противном случае ($F < F_{\alpha; k_1; k_2}$) нулевая гипотеза принимается.

3. Проверка принадлежности рассматриваемых выборок нормальному закону распределения с использованием критерия Шапиро-Уилка

Для начала необходимо составить вариационный ряд и вычислить промежуточную сумму S :

$$S = \sum a_k [x_{(n+1-k)} - x_k], \quad (19)$$

где k – индекс, имеющий значения от одного до $n/2$ или от 1 до $(n-1)/2$ при четном и нечетном объеме выборки соответственно; a_k – коэффициент, имеющий специальные значения для конкретного объема выборки (см. приложение).

Расчетное значение критерия Шапиро-Уилка определяется по формуле:

$$W = S^2 / (n\mu_2), \quad (20)$$

где $n\mu_2$ – произведение объема выборки и выборочного центрального момента второго порядка:

$$n\mu_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (21)$$

Расчетное значение критерия W сравнивается с табличным значением W_T (см. приложение) при выбранном уровне значимости. Если $W > W_T$, принимается гипотеза о нормальном распределении СВ.

4. Проверка принадлежности двух выборок одной генеральной совокупности по критерию Вилкоксона-Манна-Уитни

Критерий Вилкоксона-Манна-Уитни используют для проверки гипотезы H_0 о принадлежности двух независимых выборок

объема n и m одной и той же генеральной совокупности. Данный критерий является ранговым. Значения выборок объединяются с образованием общего вариационного ряда. Рангом элемента такой выборки называется его порядковый номер в полученной ранжированной последовательности.

К примеру, может получиться ранжированная последовательность, составленная из двух выборок объемов n и m :

$$x_1, x_2, y_1, x_3, y_2, x_4, y_3, y_4, \dots, x_n, y_m. \quad (25)$$

Для составленного вариационного ряда каждому элементу ставится в соответствие его номер в ряду – **ранг**. Далее подсчитываются суммы рангов для первой R_1 и второй R_2 выборок, из которых был составлен вариационный ряд. Если встречаются одинаковые элементы, то каждому из них приписывается ранг, равный среднему арифметическому их номеров. Последний ранг должен равняться $n + m$.

Критерий рассчитывается по формуле:

$$U_1 = nm + \frac{n(n+1)}{2} - R_1 \quad (26)$$

или

$$U_2 = nm + \frac{m(m+1)}{2} - R_2, \quad (27)$$

где R_1 и R_2 – соответственно суммы рангов для группы с объемом выборки n и m .

В том случае, если $U \notin [U_{\alpha/2}, U_{1-\alpha/2}]$, то H_0 отвергается (см. приложение). Здесь $U = \min \{U_1, U_2\}$.

Гипотезу H_0 для больших выборок также можно проверить с помощью статистики

$$\tilde{U} = \frac{|U - nm/2|}{\sqrt{1/12nm(n+m+1)}}, \quad (28)$$

которая асимптотически имеет стандартное нормальное распределение при $n, m \geq 4, n + m \geq 20$.

Если $\tilde{U} < u_{1-\alpha/2}$, то гипотеза H_0 принимается. Здесь $u_{1-\alpha/2}$ – квантиль уровня $P = 1 - \alpha/2$ нормально распределённой СВ (см. приложение).

Задание

По данным, приводимым в таблице 4, произвести проверку статистических гипотез:

1. Оценить существенность различия средних значений двух выборок с использованием критерия Стьюдента (1-я и 2-я выборки).

2. Сравнить значения выборочных дисперсий двух выборок с использованием критерия Фишера (1-я и 2-я выборки).

3. Проверить принадлежность двух выборок нормальному закону распределения по критерию Шапиро-Уилка (3-я выборка).

4. Проверить принадлежность двух выборок одной генеральной совокупности по критерию Вилкоксона-Манна-Уитни (3-я и 4-я выборки).

ПАРНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Связь между факторами в статистике изучается методами корреляционно-регрессионного анализа.

Корреляционный анализ – это количественный метод определения тесноты и направления взаимосвязи между выборочными переменными величинами.

Регрессионный анализ – это количественный метод определения вида математической функции в причинно-следственной зависимости между переменными величинами.

Если величины случайные, то стохастическая связь между ними изучается методами корреляционного анализа. Результаты наблюдений обычно сводятся в корреляционные таблицы и выражаются графически. Для того чтобы рассчитать или прогнозировать значение искомой функции, необходимо определить ее уравнение связи с главными факторами.

Зависимости между свойствами могут быть не только линейными, но и более сложными – нелинейными и многофакторными. Для обработки любых зависимостей существует эффективный **метод наименьших квадратов**. Суть метода состоит в том, что изучаемая зависимость аппроксимируется таким

алгебраическим выражением (трендом), который дает наименьшее расхождение с наблюдаемыми значениями. Главный принцип метода заключается в требовании, чтобы сумма квадратов всех отклонений от линии зависимости была минимальной:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \rightarrow \min. \quad (29)$$

Аппроксимация – замена одних математических объектов (например, чисел или функций) другими, более простыми и в том или ином смысле близкими к исходным (например, кривых линий близкими к ним ломаными).

Когда изменение одной величины приводит к закономерному изменению других, то говорят, что они находятся в корреляционной зависимости.

Если все наблюдаемые величины лежат на прямой или кривой линиях регрессии, то говорят о точной корреляционной зависимости. Однако чаще всего наблюдаемые значения не совпадают с теоретической линией регрессии, то есть имеет место рассеяние, характеризующее тесноту связи изучаемой корреляционной зависимости. **Коэффициент корреляции** характеризует меру тесноты линейной связи.

Для оценки силы связи в теории корреляции применяется шкала английского статистика Чеддока: слабая – от 0,1 до 0,3; умеренная – от 0,3 до 0,5; заметная – от 0,5 до 0,7; высокая – от 0,7 до 0,9; весьма высокая (сильная) – от 0,9 до 1,0. Принято считать, что линейной корреляции нет, если $r < 0,4$. Таким образом, для прямолинейной связи коэффициент корреляции определяет меру связи между величинами.

Обращение коэффициента корреляции +1 или -1 является признаком линейной функциональной зависимости между x и y . Если $r = -1$ или $r = +1$, то связь прямолинейна. Знак "+" показывает, что с увеличением одной величины возрастает и другая. Знак "-" показывает, что с возрастанием одной величины другая убывает. При $r = 0$ прямолинейная корреляция отсутствует, но может иметь место криволинейная связь.

1. Уравнение парной регрессии

Уравнение регрессии должно быть адекватно изучаемому процессу. Коэффициенты в уравнении регрессии вычисляются методами матричной алгебры.

Уравнение регрессии будет иметь следующий вид:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x, \quad (30)$$

где b_0, b_1 – коэффициенты уравнения регрессии, для нахождения которых необходимо решить уравнения:

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \cdot \bar{x}; \quad (31)$$

$$b_1 = r_{yx} \frac{S_y}{S_x}, \quad (32)$$

где r_{yx} – линейный коэффициент корреляции:

$$r_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y}. \quad (33)$$

Для оценки надёжности коэффициента r_{yx} при малом числе измерений ($n < 50$) применяют преобразование Фишера:

$$u = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |r_{yx}|}{1 - |r_{yx}|}, \quad (34)$$

которое подчиняется нормальному закону распределения.

В том случае, если выполняется условие

$$|u| > u_{1-\alpha/2} \sigma_u, \quad (35)$$

то линейная связь между X и Y считается установленной. Здесь СКО σ_u вычисляется по формуле:

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (36)$$

2. Графическое отображение уравнения регрессии

Первоначально задачу решают проведением прямой линии (линии тренда) через набор опытных точек и в определении уравнения описывающего эту прямую.

После нахождения линейной математической модели, следует оценить возможность улучшения описания связи между X и Y , путём перехода к нелинейной модели. Для решения этой задачи в программах Table Curve, MS Excel, STATISTICA, IBM SPSS Statistics или других специальных программ по исходным данным строится график функции.

На рисунке 2 даны примеры зависимостей, полученных с помощью MS Excel. Анализ уравнений регрессии и значений коэффициента R^2 позволяет сделать вывод о том, что линейная модель (рис. 2, б) достаточно точно описывает зависимость двух величин. При необходимости можно использовать уравнение второго порядка (рис. 2, в). Переход к более сложным моделям (более высоких порядков) хоть и сможет повысить точность описания данных, но приведёт к увеличению трудоёмкости вычислений в случае их дальнейшего использования и к росту когнитивной нагрузки, обусловленной визуальным восприятием громоздких аналитических моделей.

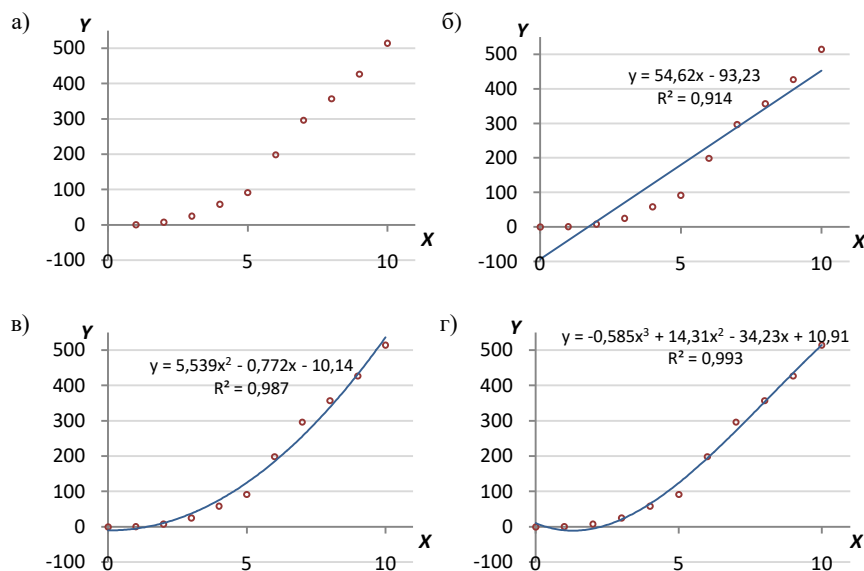


Рис. 2. Примеры зависимостей в двумерной ферме
а – исходные данные; б – линейная; в – квадратичная; г – кубическая

Задание

1. По исходным данным (табл. 5) составить линейное уравнение регрессии, описывающее взаимосвязь двух случайных величин, определить линейный коэффициент корреляции и оценить его надёжность.

2. Графически отобразить данную зависимость в форме двумерной кривой с использованием программ Table Curve, MS Excel, STATISTICA, IBM SPSS Statistics или других специальных программ.

3. При необходимости перейти к более сложным моделям, для которых значение коэффициента R^2 будет иметь значение близкое к 1.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 3

Определение основных статистических оценок выборки

1	2	3	4	5	6						
54,94	56,73	18,26	17,91	128,86	125,68	101,18	106,72	199,29	195,37	243,30	247,98
55,97	55,39	11,70	16,15	128,22	129,76	107,40	106,29	193,53	192,74	245,25	242,82
54,49	55,72	12,72	17,75	123,79	119,62	105,10	103,32	194,95	193,25	244,35	244,77
57,43	53,72	13,12	13,49	131,36	128,66	103,05	105,80	195,61	192,48	245,40	244,11
54,29	56,10	10,32	12,10	126,10	128,15	106,68	107,06	192,19	193,64	244,88	247,78
55,13	52,30	9,38	13,58	126,27	119,35	101,65	104,52	192,51	195,41	241,58	244,84
51,80	57,62	14,85	13,31	127,94	119,79	110,74	103,45	196,08	198,04	247,51	239,70
53,66	56,76	11,49	12,22	124,14	124,26	103,64	105,54	193,84	198,10	243,87	247,57
53,99	57,17	13,31	17,97	119,47	124,89	107,95	109,16	194,48	193,67	240,10	242,37
53,85	55,34	13,69	12,81	124,08	121,53	106,06	106,55	195,13	193,89	244,24	245,65
53,94	56,00	15,87	16,82	125,83	125,80	102,01	109,14	194,30	194,67	244,99	246,55
54,44	55,94	20,27	15,72	126,17	129,27	107,18	109,56	195,73	191,83	242,79	240,04
59,42	57,07	14,53	14,49	123,83	124,16	100,14	109,61	197,19	194,12	246,47	242,17
56,17	54,28	14,38	14,53	122,75	122,06	107,89	102,57	194,68	195,51	246,03	246,52
53,36	57,59	12,82	11,57	118,73	117,26	107,54	105,86	193,89	193,32	246,42	248,09
59,95	54,18	13,10	15,54	123,18	121,61	105,47	109,92	193,02	194,24	246,10	247,68
58,05	53,61	17,12	13,72	125,27	127,38	107,20	100,40	195,50	193,90	243,10	247,06
59,88	53,82	14,78	19,08	121,90	123,53	103,88	104,15	199,08	194,20	247,69	247,32
55,47	57,99	12,40	14,09	126,70	124,01	107,12	99,83	192,71	190,35	245,11	244,29
57,46	52,08	17,57	14,46	121,59	126,28	109,26	106,60	194,36	196,31	242,51	238,98
54,91	56,74	15,03	17,47	125,46	124,23	96,74	107,79	196,51	198,25	247,88	242,61
55,18	57,07	17,09	19,79	120,87	126,80	102,77	106,55	192,57	195,38	243,43	245,48
54,19	57,68	14,88	13,94	125,64	126,11	100,53	105,88	194,19	197,60	245,45	240,32
54,97	54,69	17,16	12,08	128,94	121,66	103,22	104,23	194,42	193,68	244,70	234,71
53,47	57,13	10,29	11,66	117,70	124,79	108,05	108,01	192,41	190,91	242,01	239,79
54,09	57,91	14,63				106,63		199,03	189,42	244,61	

Продолжение таблицы 3

7		8		9		10		11		12	
27,06	26,60	3,99	2,42	81,11	79,76	97,75	103,88	198,57	202,95	170,43	171,90
24,21	25,55	2,70	6,55	78,39	73,29	97,87	98,45	199,31	201,79	168,71	182,75
27,51	24,97	4,93	5,29	75,41	75,61	100,27	93,76	201,89	192,93	171,46	179,07
25,77	20,23	7,77	4,57	73,74	77,27	107,04	91,33	198,79	193,45	183,34	177,17
28,48	23,98	3,68	5,86	75,60	75,23	92,36	97,09	197,04	200,17	182,74	171,72
25,34	26,51	6,26	6,90	72,95	78,83	105,12	100,78	196,47	209,74	192,79	172,29
24,20	27,50	5,78	6,72	77,33	81,31	100,02	104,19	207,11	200,95	175,58	176,41
23,99	26,26	6,55	1,12	78,60	82,01	90,24	92,75	204,25	206,90	168,82	186,68
27,61	22,42	4,51	5,63	78,67	75,15	98,32	101,70	202,05	198,07	180,00	177,51
25,10	26,23	4,30	6,81	72,86	84,12	100,02	107,91	195,73	202,41	171,77	194,50
24,91	23,44	4,86	4,01	86,58	84,76	101,89	105,53	199,17	199,26	186,32	176,23
24,16	28,84	3,70	4,10	70,67	67,73	98,89	95,55	199,06	199,07	181,44	174,37
25,61	24,29	8,47	2,19	76,81	83,79	101,10	92,70	203,16	196,89	175,37	187,36
22,65	21,46	1,69	2,16	87,69	79,94	100,38	93,75	207,10	194,70	178,97	179,56
23,69	29,46	2,86	5,17	87,53	85,83	94,62	106,79	208,94	196,19	176,32	186,69
26,12	26,15	7,28	5,00	89,03	79,44	103,17	101,34	204,93	199,55	175,02	188,08
24,86	26,67	4,59	2,19	78,34	80,61	104,83	88,73	197,86	198,39	186,28	186,41
23,95	21,85	6,39	1,34	75,67	79,57	91,57	89,70	204,10	196,98	171,09	191,04
25,57	25,00	7,56	6,06	71,88	78,59	100,70	102,01	195,56	202,05	171,21	173,61
24,79	25,24	4,43	3,43	73,90	92,38	111,34	96,03	199,25	206,50	175,85	180,59
26,41	23,79	4,17	0,46	76,90	77,17	103,94	104,96	202,84	209,00	178,58	186,26
23,69	24,56	8,29	6,43	79,39	75,98	97,56	106,58	204,90	199,99	178,34	184,46
22,52	29,86	4,47	4,29	77,21	82,09	96,93	101,15	202,80	200,07	179,70	181,57
23,07	27,45	6,96	1,91	76,54	84,74	101,65	101,27	196,68	200,35	180,94	187,13
25,61	25,32	5,77	4,42	80,76	88,39	101,84	98,24	203,62	193,87	174,68	174,58
		6,26	2,95	84,78				203,97		180,68	171,07

Продолжение таблицы 3

13	14	15	16	17	18						
7,30	12,44	16,81	15,55	73,66	73,76	147,98	148,83	216,21	210,53	132,00	123,43
1,84	8,14	21,94	20,54	73,28	72,14	149,20	151,29	209,75	214,92	137,74	129,34
10,47	12,70	24,28	19,45	78,32	72,45	148,21	150,65	210,73	205,88	132,38	126,95
15,08	8,20	8,62	11,89	75,69	72,83	150,59	148,02	213,14	205,32	130,57	126,80
7,94	9,64	9,28	7,95	77,64	74,05	148,39	152,90	210,08	209,05	135,81	135,56
10,38	11,27	13,51	15,09	75,70	76,77	143,09	148,01	213,91	213,93	127,49	127,40
7,27	7,72	16,24	17,49	75,10	78,48	150,72	154,88	209,35	215,68	132,41	136,96
11,80	11,83	19,66	10,94	72,30	75,07	149,17	155,02	207,98	207,17	129,69	122,72
7,23	9,41	18,10	15,25	75,87	73,08	147,07	152,89	208,97	212,09	128,03	124,47
11,15	9,00	16,99	21,46	75,42	79,14	153,73	147,33	212,09	209,40	134,27	129,82
14,38	12,92	18,14	12,15	73,35	75,03	150,68	143,99	215,03	214,53	118,95	122,15
8,39	12,59	23,19	15,32	75,68	75,18	152,60	150,49	205,39	203,20	132,80	132,41
7,99	12,23	11,37	15,00	73,16	75,27	147,15	152,96	204,49	209,10	124,55	128,65
5,01	12,55	8,16	21,28	79,24	76,38	150,13	150,44	211,57	208,19	132,35	122,55
14,66	6,65	24,64	17,77	75,49	74,00	150,84	150,49	206,81	215,09	128,17	133,00
8,69	6,53	18,54	17,25	73,64	75,49	153,20	145,76	208,39	211,03	137,24	127,52
10,48	12,30	21,30	11,74	74,80	75,08	155,36	149,55	206,29	206,52	138,46	138,79
8,55	9,98	22,30	13,39	70,48	77,68	153,27	146,92	206,61	210,08	131,96	129,75
8,73	6,73	9,26	21,95	75,76	73,29	152,63	155,31	210,40	211,68	132,68	132,27
5,05	9,53	6,95	19,84	73,56	71,59	149,18	152,46	209,18	207,22	130,84	119,66
10,08	11,01	22,36	17,61	72,69	74,49	148,33	149,30	208,97	217,45	133,36	136,42
14,18	12,94	17,74	26,66	78,81	75,95	150,01	147,62	214,99	201,60	124,70	124,69
9,61	7,80	26,96	17,38	73,19	75,09	145,13	151,08	217,85	215,19	137,96	126,28
8,66	7,54	29,13	11,04	70,66	76,09	144,90	150,02	207,56	209,47	133,07	137,48
10,90	8,95	11,36	21,90	76,90	71,70	148,80	148,44	209,37	210,14	122,35	127,67
8,06				77,98		149,93	149,58	214,43			

Окончание таблицы 3

19		20		21		22		23		24	
61,65	60,29	6,62	8,12	35,46	29,92	76,76	80,32	164,65	160,75	198,25	206,40
59,07	60,01	9,21	8,17	36,53	28,30	74,34	78,67	156,76	159,22	202,04	205,60
63,80	60,11	3,34	4,74	24,61	23,40	74,33	74,34	161,32	159,22	209,45	207,17
58,04	58,11	7,22	10,44	26,07	21,14	77,39	75,58	159,71	158,79	205,49	204,85
56,68	59,38	5,16	8,88	32,54	26,95	76,92	75,18	159,57	163,59	202,89	208,57
62,84	60,37	7,12	4,89	29,82	29,03	73,88	77,03	155,44	161,71	207,75	205,13
61,78	61,34	9,06	7,68	22,79	28,65	77,16	78,40	160,40	157,72	199,78	197,61
63,03	61,36	4,86	6,66	28,23	27,36	75,53	71,51	155,92	160,15	196,94	203,42
60,41	60,12	8,19	8,90	25,39	23,32	77,87	75,93	154,39	161,97	206,04	201,07
58,74	58,21	6,85	5,93	20,59	26,56	76,46	75,10	151,03	155,00	205,36	198,35
58,30	61,12	8,44	7,60	28,31	28,16	77,63	76,89	159,94	160,79	207,39	204,07
60,34	58,80	9,21	6,23	25,91	22,94	78,46	81,32	161,36	163,84	199,94	203,87
63,08	61,84	9,25	11,22	26,77	26,71	79,41	74,60	159,16	154,83	203,74	206,74
62,55	57,36	5,96	7,32	24,71	26,69	71,38	75,96	161,31	157,17	203,69	207,81
60,02	54,37	7,38	7,19	29,48	31,01	74,18	82,93	157,43	167,13	201,37	197,91
58,02	56,47	10,60	6,61	28,85	28,11	79,89	79,04	160,78	161,03	194,71	200,11
56,58	57,56	6,43	6,73	27,32	25,87	83,62	80,12	161,16	161,28	203,67	201,37
57,48	54,43	8,82	9,59	19,34	27,39	77,96	73,33	158,77	156,01	204,65	201,83
56,46	56,51	7,50	10,30	23,62	30,36	73,29	77,07	159,54	151,71	203,58	204,59
59,83	62,81	7,38	5,56	28,51	26,98	79,24	79,12	162,31	158,42	206,97	199,73
59,73	59,32	7,77	8,99	29,14	22,98	73,14	80,20	153,85	164,02	193,53	202,46
58,29	58,76	10,76	6,64	30,05	30,50	80,38	74,33	160,25	158,16	209,16	196,78
58,97	58,65	8,08	10,47	33,01	25,45	73,17	82,33	152,14	161,61	213,13	192,97
57,05	58,95	8,05	9,12	31,59	27,05	72,76	75,21	159,15	160,76	197,51	197,82
59,97	63,74	8,02	8,92	29,29	22,26	78,11	78,67	155,70	166,53	212,88	206,83
59,37		8,00	7,00	30,47				160,56		203,34	203,11

Таблица 4

Проверка статистических гипотез

1				2				3			
Выборка 1		Выборка 2		Выборка 1		Выборка 2		Выборка 1		Выборка 2	
21,42	21,24	14,52	16,21	49,13	47,41	54,40	53,18	90,06	99,74	81,96	79,64
24,39	24,98	15,56	17,48	57,92	51,77	51,74	60,11	93,55	91,64	86,27	79,05
19,27	25,75	17,84	13,38	51,28	48,63	62,13	66,70	100,53	101,05	94,77	82,41
18,14	19,60	14,81	14,54	49,78	53,89	44,61	57,67	91,80	84,30	92,83	86,53
20,66	20,36	16,69	15,24	48,38	46,29	66,19	60,14	97,64	95,51	83,50	90,18
20,98	19,93	14,83	19,04	53,04	54,42	60,17	57,49	102,52	99,24	86,17	77,04
23,09	18,41	18,96	16,48	50,57	50,83	56,65	59,75	94,65	98,15	83,15	83,58
21,87	22,64	17,80	15,05	50,49	51,74	48,99	67,83	88,58	103,67	87,46	88,96
25,25	24,48	14,35	11,93	53,13	58,27	50,76	60,47	89,98	97,88	79,08	88,78
21,01	18,68	15,28	17,46	44,31	52,63	51,03	64,09	89,65	106,37	81,15	84,33
19,90	23,33	14,57	15,86	48,28	48,77	53,10	68,54	85,00	95,94	77,66	90,85
21,72	20,09	10,20	14,33	56,06	42,89	57,83	58,24	95,39	107,49	82,46	75,40
23,84	27,35	20,56	14,38	47,99	49,07	57,98	58,64	95,98	96,47	81,43	85,93
22,11	24,41	17,84	12,75	49,38	48,57	46,16	63,16	91,05	97,34	84,73	91,21
26,65	14,75	15,02	16,03	49,70	46,41	60,94	53,97	97,97	110,42	79,75	84,25
22,76	24,43	18,38	18,34	49,61	47,58	53,15	59,92	88,70	111,54	80,25	86,62
20,31	18,38	16,14	13,48	54,73	50,36	51,17	55,80	90,84	103,24	82,55	93,64
22,02	25,35	17,00	15,62	42,48	57,36	56,31	62,23	84,04	83,02	92,49	85,81
23,51	18,65	17,53	19,71	53,53	51,97	66,31	50,36	100,37	101,71	86,40	75,17
19,95	22,17	12,50	17,87	53,13	45,20	55,63	59,95	92,99	94,62	76,75	87,96
20,09	24,62	17,77	17,77	46,55	41,42	45,04	54,11	93,26	98,80	92,05	77,07
22,91	24,65	15,21	17,22	57,55	54,40	60,19	51,30	107,25	92,28	83,86	82,41
				50,20	47,03	61,07	44,63	92,67	96,83	81,09	77,12
				53,49	50,68	44,93	61,55				
Выборка 3		Выборка 4		Выборка 3		Выборка 4		Выборка 3		Выборка 4	
90,06	95,39	91,64	96,47	13,60	12,28	12,08	10,94	138,82	126,28	133,63	129,12
93,55	95,98	101,05	97,34	12,22	11,58	13,41	10,92	126,47	134,64	133,23	126,47
100,53	91,05	84,30	110,42	13,16	11,59	11,75	10,17	133,40	132,86	134,52	133,40
91,80	97,97	95,51	111,54	11,01	11,04	11,32	12,42	139,57	136,35	139,42	139,57
97,64	88,70	99,24	103,24	10,46	11,36	12,44	11,98	130,47	148,10	131,41	130,47
102,52	90,84	98,15	83,02	12,18	11,69	12,40	10,91	137,89	136,88	122,26	137,89
94,65	84,04	103,67	101,71	14,99	11,52	11,52	12,35	138,83	138,56	138,94	138,83
88,58	100,37	97,88	94,62	13,72	10,74	11,93	12,05	136,34	139,07	135,82	136,34
89,98	92,99	106,37	98,80	12,41	12,89	10,18	12,80	125,72	122,77	143,13	125,72
89,65	93,26	95,94	92,28	12,38	12,66	13,88	11,86	142,81	145,37	127,45	142,81
85,00	107,25	107,49	96,83	12,50		13,03	11,87	141,01		128,76	141,01
	99,74		92,67								126,28

Продолжение таблицы 4

4				5				6			
Выборка 1		Выборка 2		Выборка 1		Выборка 2		Выборка 1		Выборка 2	
113,80	122,52	125,20	128,07	13,60	11,32	8,51	7,07	138,82	131,41	145,62	148,31
122,31	113,83	125,66	133,55	12,22	12,44	8,85	10,16	126,47	122,26	144,15	148,37
108,44	127,45	129,04	122,35	13,16	12,40	9,58	9,10	133,40	138,94	154,43	138,19
111,95	121,57	134,47	120,62	11,01	11,52	8,05	9,59	139,57	135,82	143,34	154,23
118,81	107,19	124,73	124,34	10,46	11,93	8,68	9,78	130,47	143,13	144,62	155,45
116,82	118,72	127,68	124,03	12,18	10,18	8,28	7,91	137,89	127,45	141,23	150,13
112,52	103,22	115,67	123,60	14,99	13,88	9,45	9,28	138,83	128,76	144,07	145,42
121,19	123,14	141,60	131,74	13,72	13,03	9,09	8,55	136,34	129,12	152,24	156,57
112,24	104,99	130,78	118,71	12,41	10,94	8,46	8,75	125,72	126,47	149,05	150,20
116,78	116,24	135,84	128,84	12,38	10,92	7,67	8,32	142,81	133,40	144,85	140,82
118,23	123,02	136,38	129,27	12,50	10,17	9,74	7,91	141,01	139,57	138,69	145,75
105,25	116,25	130,10	128,76	12,28	12,42	8,86	8,97	126,28	130,47	142,62	145,80
115,62	120,37	127,61	125,66	11,58	11,98	9,33	7,57	134,64	137,89	147,93	146,64
106,67	103,09	132,35	129,04	11,59	10,91	9,18	10,07	132,86	138,83	145,88	147,32
114,31	120,21	126,03	134,47	11,04	12,35	8,72	9,41	136,35	136,34	146,38	141,66
107,29	111,66	125,14	124,73	11,36	12,05	9,05	9,87	148,10	125,72	149,90	136,13
111,66	101,98	126,40	127,68	11,69	12,80	8,94	8,32	136,88	142,81	144,02	145,31
118,91	123,92	133,77	115,67	11,52	11,86	9,37	8,22	138,56	141,01	152,01	147,12
122,11	109,75	124,48	141,60	10,74	11,87	8,41	7,97	139,07	126,28	145,82	151,68
115,74	111,05	125,79	130,78	12,89	11,73	8,71	8,88	122,77	134,64	138,24	138,11
114,61		135,13		12,66	13,17	9,09	9,10	145,37	132,86	142,81	142,18
				12,08	11,88	8,89	8,18	133,63	136,35	150,99	138,61
				13,41	12,89	9,58	8,49	133,23	148,10	132,45	134,60
				11,75	11,60	8,70	8,88	134,52	136,88	152,52	147,62
				11,68	11,77	8,52	8,64	139,42		144,76	
				11,42	11,20	8,72	9,61				
Выборка 3		Выборка 4		Выборка 3		Выборка 4		Выборка 3		Выборка 4	
49,13	44,31	46,55	53,89	21,42	19,90	19,95	19,93	122,52	123,02	111,05	112,52
57,92	48,28	57,55	46,29	24,39	21,72	20,09	18,41	113,83	116,25	114,61	121,19
51,28	56,06	50,20	54,42	19,27	23,84	22,91	22,64	127,45	120,37	118,91	112,24
49,78	47,99	53,49	50,83	18,14	22,11	24,62	24,48	121,57	103,09	122,11	116,78
48,38	49,38	41,42	51,74	20,66	26,65	24,65	18,68	107,19	120,21	115,74	118,23
53,04	49,70	54,40	58,27	20,98	22,76	21,24	23,33	118,72	111,66	113,80	105,25
50,57	49,61	47,03	52,63	23,09	20,31	24,98	20,09	103,22	101,98	122,31	115,62
50,49	54,73	50,68	48,77	21,87	22,02	25,75	27,35	123,14	123,92	108,44	106,67
53,13	53,53	47,41	42,89	25,25	23,51	19,60	24,41	104,99	109,75	111,95	114,31
42,48	53,13	51,77		21,01		20,36	14,75	116,24		118,81	107,29
										116,82	111,66

Продолжение таблицы 4

7				8				9			
Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2
107,60	105,87	117,32	112,03	33,84	31,92	28,00	25,29	136,45	143,66	130,81	136,55
109,08	103,36	118,70	108,54	37,60	35,95	31,24	31,44	138,40	150,13	130,84	125,90
110,08	106,23	123,75	101,92	34,87	30,53	28,87	28,88	142,31	144,99	133,59	133,82
102,75	105,91	121,01	117,11	35,32	37,50	28,56	27,83	147,70	140,13	136,25	124,98
114,99	112,72	108,63	125,16	39,31	31,15	29,75	29,05	139,13	143,49	133,60	136,62
111,67	102,17	111,82	121,17	36,87	35,08	26,98	30,65	145,08	146,91	132,79	132,83
101,22	111,43	116,88	101,25	34,98	37,46	26,24	27,94	137,68	132,63	122,11	139,68
109,31	113,54	115,78	127,73	34,46	35,09	28,87	31,81	134,26	146,96	140,44	131,82
107,85	114,58	107,36	131,07	33,39	36,53	27,27	31,46	136,10	134,43	134,40	134,37
98,53	109,32	119,33	124,47	34,41	30,48	30,28	27,78	144,74	140,72	134,68	138,89
114,99	102,75	112,72	117,41	34,33	36,47	27,29	26,34	143,92	143,51	136,37	142,79
108,51	96,90	122,09	107,50	37,83	33,48	28,76	28,78	145,74	155,14	127,97	135,13
107,96	108,30	121,17	122,63	32,48	30,09	30,72	30,82	131,18	152,29	122,79	138,09
108,80	97,87	116,20	114,31	34,43	37,77	26,95	26,71	146,76	149,12	136,81	131,88
107,02	106,47	119,41	124,33	36,15	32,81	25,92	29,64	131,21	149,49	128,79	129,27
102,66	101,36	112,87	116,56	36,82	33,27	28,88	29,27	152,88	145,25	132,70	131,21
114,34	107,37	115,77	116,44	32,67	34,51	32,24	31,54	154,09	135,02	132,45	131,95
106,22	105,87	106,90	121,31	33,20	36,02	28,92	25,19	148,19	138,87	129,48	127,96
104,28	94,87	119,71	105,50	33,40	37,14	27,71	32,28	133,76	143,54	138,84	126,99
98,25	111,53	117,76	116,86	35,92	34,91	29,29	30,72	142,09	142,73	130,30	135,08
98,52	109,87	113,61	114,89	36,11	34,23	27,54	25,75	144,43	140,53	133,76	135,74
105,28	98,46	109,27	117,29	36,24	37,21	28,63	29,28	144,73	147,80	138,82	133,05
116,99	101,13	110,50	119,07	33,94	32,35	32,35	31,06	144,21	144,76	132,65	137,28
109,41	107,34	110,77	110,73	32,42	39,01	29,49	25,76	142,03	142,03	136,39	130,90
100,13		111,41		31,93	36,95	27,18	28,93	142,62	131,46		
				34,24		28,89		136,72			
Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4
107,60	108,51	106,23	108,30	33,84	37,83	36,24	37,50	136,45	131,18	142,62	140,72
109,08	107,96	105,91	97,87	37,60	32,48	33,94	31,15	138,40	146,76	136,72	143,51
110,08	108,80	112,72	106,47	34,87	34,43	32,42	35,08	142,31	131,21	131,46	155,14
102,75	107,02	102,17	101,36	35,32	36,15	31,93	37,46	147,70	152,88	143,66	152,29
114,99	102,66	111,43	107,37	39,31	36,82	34,24	35,09	139,13	154,09	150,13	149,12
111,67	114,34	113,54	105,87	36,87	32,67	39,01	36,53	145,08	148,19	144,99	149,49
101,22	106,22	114,58	94,87	34,98	33,20	36,95	30,48	137,68	133,76	140,13	145,25
109,31	104,28	109,32	111,53	34,46	33,40	31,92	36,47	134,26	142,09	143,49	135,02
107,85	105,87	102,75	109,87	33,39	35,92	35,95	33,48	136,10	144,43	146,91	138,87
98,53		96,90	98,25	34,41				144,74	144,73	132,63	

Продолжение таблицы 4

10				11				12			
Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2
171,52	179,12	157,52	156,49	80,09	78,11	66,53	71,70	56,27	49,71	44,02	47,90
152,34	171,74	158,28	161,46	71,84	69,82	67,80	73,94	52,62	48,16	45,42	44,66
165,97	153,70	153,13	141,85	72,66	83,19	71,34	71,07	55,47	54,06	48,21	48,42
150,71	164,12	156,38	165,42	71,72	77,28	69,59	72,26	49,61	51,35	44,72	41,72
176,54	167,03	157,42	158,93	82,22	82,63	73,59	72,82	50,10	49,45	47,06	46,20
172,58	167,41	153,60	152,49	76,87	72,96	65,69	68,75	52,39	48,58	49,01	47,70
160,60	166,77	141,70	157,29	79,95	76,91	68,58	75,55	48,91	53,09	45,86	47,26
157,67	164,03	159,28	148,74	77,03	82,91	63,52	73,71	47,71	49,30	43,43	49,47
169,29	164,78	155,05	155,06	85,29	76,35	73,56	67,90	51,84	51,75	43,99	47,15
159,50	157,40	161,96	165,18	78,34	81,15	70,47	72,39	52,23	56,78	43,86	50,55
164,38	150,82	161,58	156,64	79,72	68,31	63,91	71,58	52,64	52,42	42,00	46,37
171,13	166,08	147,50	154,72	76,36	82,83	71,54	66,40	53,20	58,49	46,15	51,00
160,41	174,16	151,42	152,92	76,61	77,94	69,46	75,55	55,65	54,19	46,39	46,59
167,85	167,74	145,07	158,91	84,73	75,96	74,36	71,95	52,67	50,29	44,42	46,93
158,60	161,66	155,15	155,73	81,15	79,08	65,48	71,64	51,56	54,48	47,19	52,17
154,32	165,86	160,41	155,62	77,08	73,59	69,04	72,11	53,54	49,65	43,48	52,62
156,62	170,14	146,53	159,02	77,66	75,32	71,24	71,12	45,56	50,54	44,34	49,29
167,43	152,29	147,17	147,68	79,91	69,91	69,85	68,70	55,15	52,56	41,61	41,21
166,40	170,20	161,72	152,79	74,68	79,26	72,14	75,19	45,53	53,20	48,15	48,68
168,67	154,54	146,90	162,80	74,59	77,29	70,24	70,68	53,73	47,09	45,20	45,85
150,47	162,40	147,63	152,41	75,25	76,08	75,05	69,60	53,18	56,09	45,30	47,52
169,95	165,89	154,78	154,20	80,65	73,26	68,20	70,48	53,26	51,33	50,90	44,91
150,51	180,43	146,77	152,23	76,47	72,65	69,79	69,09	55,69	45,43	46,73	44,82
177,60	176,87	154,65	144,04	80,68	75,92	70,17	70,68	48,76	48,42	45,07	49,29
173,37	172,90	160,16		76,37	75,01	74,29	70,51	52,45	49,55	43,73	44,61
168,06				80,21	72,07	68,43		53,60	51,78		
				75,18				53,32			
Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4
171,52	164,38	166,40	164,12	80,09	78,34	79,91	80,21	56,27	52,23	45,53	48,58
152,34	171,13	168,67	167,03	71,84	79,72	74,68	75,18	52,62	52,64	53,73	53,09
165,97	160,41	150,47	167,41	72,66	76,36	74,59	78,11	55,47	53,20	53,18	49,30
150,71	167,85	169,95	166,77	71,72	76,61	75,25	69,82	49,61	55,65	53,26	51,75
176,54	158,60	150,51	164,03	82,22	84,73	80,65	83,19	50,10	52,67	49,71	56,78
172,58	154,32	177,60	164,78	76,87	81,15	76,47	77,28	52,39	51,56	48,16	52,42
160,60	156,62	179,12	157,40	79,95	77,08	80,68	82,63	48,91	53,54	54,06	58,49
157,67	167,43	171,74	150,82	77,03	77,66	76,37	72,96	47,71	45,56	51,35	54,19
169,29	168,06	153,70		85,29				51,84	55,15	49,45	50,29
159,50											

Продолжение таблицы 4

13				14				15			
Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2
201,24	189,82	188,81	189,71	120,94	119,20	139,76	144,41	20,14	19,87	22,78	20,51
199,70	207,38	193,20	189,71	125,34	130,40	138,95	130,53	18,30	17,67	24,64	20,63
203,32	194,13	178,71	200,95	132,23	141,79	137,48	131,17	19,55	17,10	19,27	22,86
203,49	206,83	190,33	189,30	113,08	136,67	138,78	145,72	16,68	18,59	19,75	22,38
206,99	178,13	182,23	191,54	143,42	123,63	131,35	130,90	15,95	18,53	20,31	24,14
182,08	211,01	200,38	187,85	141,03	127,44	134,91	131,63	18,23	17,36	22,54	21,50
200,09	198,81	193,02	197,40	130,17	118,80	136,17	138,78	21,98	17,91	24,77	23,20
207,14	191,52	168,88	193,46	144,41	128,21	135,82	130,77	20,30	15,57	20,98	22,20
192,04	198,54	193,08	175,24	139,33	133,28	142,28	138,65	18,54	20,50	26,27	21,09
197,21	197,69	177,96	190,20	129,20	128,93	137,13	144,16	18,51	19,37	22,08	27,15
201,39	208,78	195,37	189,61	131,54	122,44	140,38	136,23	18,66	16,59	27,47	23,20
203,56	195,98	178,61	184,87	133,95	132,70	141,42	128,04	18,38	16,57	23,93	20,68
201,61	208,82	187,43	185,45	126,42	133,38	137,60	140,49	17,44	15,56	22,39	23,62
191,89	208,41	186,73	202,31	138,87	127,21	125,70	145,46	17,45	18,56	18,07	20,54
193,14	186,90	181,87	191,12	134,02	124,24	143,28	125,85	16,72	17,98	26,32	24,22
196,10	207,77	186,73	188,33	127,52	121,88	139,05	149,42	17,15	16,55	20,80	21,22
206,37	205,70	196,32	192,86	117,56	130,60	145,96	142,93	17,59	18,47	19,39	22,52
200,59	202,11	182,94	185,78	130,97	126,08	145,58	136,49	17,36	18,06	20,75	26,37
214,49	193,93	180,04	187,98	140,39	115,92	131,50	141,29	16,32	19,06	22,29	20,11
205,24	192,18	175,92	183,58	133,44	137,56	135,42	132,74	19,19	17,82	23,51	24,35
189,76	199,51	190,93	192,20	132,09	125,66	129,07	139,06	18,88	17,82	21,06	17,82
196,30	206,02	185,54	185,34	126,13	136,11	139,15	149,18	18,10	17,64	23,47	24,73
213,57	205,19	187,72	181,54	129,73	125,16	136,92	140,64	17,47	19,56	21,32	27,00
204,38	189,98	194,80	182,95	131,63	131,54	142,91	138,72	17,70	17,84	19,07	22,97
196,07	203,72	176,54		136,04	120,69	139,73	139,62	16,94	19,18	17,15	
198,69				134,26	127,43			17,57	17,23		
				122,56							
Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4
201,24	197,21	214,49	198,81	120,94	131,54	133,44	128,21	20,14	18,66	18,88	20,50
199,70	201,39	205,24	191,52	125,34	133,95	132,09	133,28	18,30	18,38	18,10	19,37
203,32	203,56	189,76	198,54	132,23	126,42	126,13	128,93	19,55	17,44	19,87	16,59
203,49	201,61	189,82	197,69	113,08	138,87	129,73	122,44	16,68	17,45	17,67	16,57
206,99	191,89	207,38	208,78	143,42	134,02	119,20	132,70	15,95	16,72	17,10	15,56
182,08	193,14	194,13	195,98	141,03	127,52	130,40	133,38	18,23	17,15	18,59	18,56
200,09	196,10	206,83	208,82	130,17	117,56	141,79	127,21	21,98	17,59	18,53	17,98
207,14	206,37	178,13	208,41	144,41	130,97	136,67	124,24	20,30	17,36	17,36	16,55
192,04	200,59	211,01	186,90	139,33	140,39	123,63	121,88	18,54	16,32	17,91	18,47
203,72				129,20		127,44	130,60	18,51	19,19	15,57	18,06
						118,80					19,06

Продолжение таблицы 4

16				17				18			
Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2
217,65	190,34	220,33	188,51	165,79	153,84	147,35	149,82	77,90	84,62	85,15	89,09
215,82	229,19	203,50	177,53	144,84	165,44	148,06	142,41	80,80	89,19	85,21	96,52
220,11	214,77	209,33	217,63	137,78	143,10	143,25	134,77	86,59	84,39	90,04	85,31
220,31	206,16	198,52	212,12	165,96	177,57	146,29	146,39	79,35	91,44	94,71	95,24
224,44	214,46	201,77	189,02	156,67	166,90	147,26	151,03	84,19	82,78	90,05	76,53
195,00	213,46	186,61	190,29	156,89	154,89	143,69	132,72	88,24	92,37	88,63	90,44
216,29	226,56	207,95	203,06	154,64	160,26	132,59	154,73	81,71	83,22	69,86	74,91
224,62	211,43	190,53	205,28	152,92	163,63	148,99	148,67	76,67	83,94	102,07	95,37
206,78	226,60	189,45	185,89	160,09	161,41	145,05	142,66	77,83	94,80	91,45	88,71
212,89	226,13	189,09	214,66	172,72	163,32	151,50	147,14	77,56	95,73	91,95	100,74
217,82	200,69	189,56	192,01	157,67	162,80	151,15	139,16	73,70	88,84	94,92	86,92
220,39	225,36	196,04	210,47	150,04	166,25	138,00	145,05	82,32	72,05	80,15	91,40
218,09	222,92	199,36	209,47	141,02	140,88	141,66	154,50	82,81	87,57	71,05	99,36
206,59	218,68	182,86	180,25	171,70	160,88	135,73	146,53	78,72	81,69	95,70	106,20
208,08	209,00	188,37	230,39	166,01	158,47	145,14	144,73	84,46	85,15	81,61	92,74
211,57	206,95	173,34	208,64	180,40	165,16	150,05	143,06	76,77	79,75	88,48	97,95
223,71	215,61	206,80	201,87	173,05	160,42	137,09	148,65	78,55	83,52	88,03	87,03
216,88	223,29	204,77	192,25	151,68	151,04	137,69	145,68	72,90	80,06	82,81	82,44
233,30	211,81	196,16	206,40	162,97	151,32	151,27	145,58	86,46	77,29	99,26	85,85
222,38	232,22	208,75	189,48	159,49	158,12	137,44	148,75	80,33	79,56	84,25	87,15
204,08	221,35	195,65	195,65	146,26	148,32	138,12	138,17	80,56	88,82	90,33	80,14
204,15	211,54	193,28	195,17	134,89	151,53	144,80	142,94	92,16	79,11	99,22	78,43
224,91	214,64	190,00	223,38	169,38	161,01	137,32	152,28	85,94	78,48	88,39	92,65
209,25	222,31	214,13	210,15	174,92	146,89	144,68	142,59	79,21	87,15	94,96	93,81
224,26	204,34	199,30	199,88	166,05	157,71	144,64	144,25	87,02	71,36	91,50	89,27
220,58	229,33	201,76		151,53	154,27			73,12	83,64	82,73	98,81
213,72	215,19							82,42	88,79	77,97	
214,48								85,52	76,37		
Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4
217,65	206,59	209,25	200,69	165,79	166,01	177,57	165,16	77,90	78,72	73,12	95,73
215,82	208,08	224,26	225,36	144,84	180,40	166,90	160,42	80,80	84,46	82,42	88,84
220,11	211,57	190,34	222,92	137,78	173,05	154,89	151,04	86,59	76,77	85,52	72,05
220,31	223,71	229,19	218,68	165,96	151,68	160,26	151,32	79,35	78,55	84,62	87,57
224,44	216,88	214,77	209,00	156,67	162,97	163,63	158,12	84,19	72,90	89,19	81,69
195,00	233,30	206,16	206,95	156,89	159,49	161,41	174,92	88,24	86,46	84,39	85,15
216,29	222,38	214,46	215,61	154,64	146,26	163,32	166,05	81,71	80,33	91,44	79,75
224,62	204,08	213,46	223,29	152,92	134,89	162,80	151,53	76,67	80,56	82,78	83,52
206,78	204,15	226,56	211,81	160,09	169,38			77,83	92,16	92,37	80,06
212,89				172,72				77,56			

Продолжение таблицы 4

19				20				21			
Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2	Выборка 1	Выборка 2
235,78	250,11	232,36	219,40	26,40	26,32	23,96	25,24	139,74	148,23	159,91	156,61
246,21	244,40	229,14	218,11	27,09	27,42	19,33	26,88	159,75	154,48	156,77	162,56
238,64	230,46	224,69	226,39	26,47	31,25	19,15	20,26	149,26	148,88	158,50	154,01
239,90	241,64	204,63	223,34	28,45	30,11	22,00	30,44	157,94	145,48	160,21	159,85
250,94	226,60	236,60	227,49	22,93	25,17	22,06	24,82	146,70	148,30	159,39	150,88
244,18	245,93	216,08	223,78	23,70	22,23	23,62	22,49	169,03	138,21	166,99	149,36
238,94	228,32	209,77	222,44	24,74	27,66	27,16	27,04	157,80	155,69	164,69	159,75
237,51	239,23	226,74	219,37	22,52	27,44	16,93	17,47	139,19	139,35	159,88	159,17
234,53	245,81	226,44	222,16	23,44	26,02	18,96	19,82	136,42	150,06	163,53	161,59
237,36	239,24	207,77	221,13	25,24	28,58	22,70	24,55	165,03	156,16	151,08	155,95
237,14	243,24	230,64	208,41	26,03	29,90	17,97	19,32	160,92	145,68	153,19	165,78
246,84	226,48	211,52	229,55	27,68	24,90	19,19	24,12	151,23	151,78	155,72	155,51
232,03	243,09	228,05	218,31	26,43	24,09	16,14	23,47	139,97	151,25	162,52	157,36
237,42	234,79	228,45	216,89	26,12	19,42	15,25	15,83	140,12	153,28	152,21	166,08
242,18	225,40	217,62	218,66	26,91	29,15	20,94	23,92	140,86	141,02	152,13	158,38
244,05	246,69	224,31	226,27	29,01	17,05	18,40	23,89	149,63	145,98	153,49	157,57
232,53	232,94	218,02	224,15	25,48	30,37	23,15	24,80	168,31	149,08	157,05	158,33
234,02	234,20	222,91	233,21	29,82	21,29	18,26	22,63	152,20	157,41	161,45	161,17
234,58	237,65	216,38	215,47	23,15	30,64	16,47	23,42	156,74	134,17	154,65	158,50
241,55	241,83	215,93	229,08	23,84	25,47	34,61	31,69	143,05	151,46	160,01	165,14
242,06	244,93	223,73	240,72	25,21	27,13	34,81	25,29	146,82	159,13	153,62	156,47
242,42	238,75	238,21	230,35	28,16	24,94	29,93	21,15	153,52	147,59	152,04	161,19
236,05	236,87	213,31	234,77	23,20	27,68	21,83	27,38	148,02	147,04	151,74	162,32
231,84	245,13	221,97	227,95	31,09	29,24	27,81	8,63	155,38	158,61	161,78	164,00
230,49	231,67	225,37	226,41	28,84	24,94	22,14	25,15	147,08	147,02	152,77	156,37
236,90	241,72	227,61	245,28	24,48		27,86	25,44	158,27		155,55	158,71
235,07	239,80	233,50								171,02	163,51
Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4	Выборка 3	Выборка 4
235,78	246,84	242,42	245,93	26,40	25,24	23,15	25,17	139,74	165,03	156,74	148,30
246,21	232,03	236,05	228,32	27,09	26,03	23,84	22,23	159,75	160,92	143,05	138,21
238,64	237,42	231,84	239,23	26,47	27,68	25,21	27,66	149,26	151,23	146,82	155,69
239,90	242,18	230,49	245,81	28,45	26,43	28,16	27,44	157,94	139,97	153,52	139,35
250,94	244,05	236,90	239,24	22,93	26,12	23,20	26,02	146,70	140,12	148,02	150,06
244,18	232,53	250,11	243,24	23,70	26,91	31,09	28,58	169,03	140,86	155,38	156,16
238,94	234,02	244,40	226,48	24,74	29,01	26,32	29,90	157,80	149,63	148,23	145,68
237,51	234,58	230,46	243,09	22,52	25,48	27,42	24,90	139,19	168,31	154,48	151,78
234,53	241,55	241,64	234,79	23,44	29,82	31,25	24,09	136,42	152,20	148,88	151,25
237,36	242,06	226,60	225,40			30,11	19,42			145,48	
237,14											

Окончание таблицы 4

22				23				24			
Выборка 1		Выборка 2		Выборка 1		Выборка 2		Выборка 1		Выборка 2	
313,46	305,98	280,20	289,00	225,62	241,87	232,00	236,22	41,90	36,71	33,19	35,08
320,53	305,00	303,20	281,75	245,10	252,84	219,71	226,33	37,47	36,64	33,51	34,18
323,04	310,65	290,79	289,71	240,29	241,49	212,91	228,61	40,35	36,97	34,27	33,07
322,20	317,56	291,16	296,85	248,09	245,18	224,51	224,02	39,34	37,80	33,83	34,43
313,30	323,70	300,15	282,57	235,90	225,65	220,86	227,20	37,96	38,21	34,18	32,57
317,14	301,61	322,40	273,23	239,69	215,55	227,61	224,76	41,26	38,54	35,15	34,25
331,42	312,61	310,65	310,54	232,10	244,73	223,57	230,70	42,44	39,70	33,89	32,68
328,17	321,66	291,43	298,25	246,96	235,52	222,79	215,65	37,95	43,43	31,24	34,47
312,48	321,35	295,07	298,53	239,25	241,71	216,96	223,06	34,52	40,01	31,27	32,44
316,97	313,87	287,18	295,55	251,43	227,17	220,50	230,33	42,98	40,80	32,66	35,54
311,88	324,84	291,43	293,28	219,98	214,34	220,93	214,03	43,29	41,15	31,62	34,60
319,14	298,87	303,98	302,77	235,14	250,60	219,75	224,93	41,43	38,46	30,86	33,86
305,05	316,57	285,29	319,48	228,59	216,03	225,93	231,57	41,78	39,87	32,13	34,39
308,53	325,45	299,62	299,56	231,03	245,11	220,60	235,46	38,28	41,43	33,63	31,27
302,66	313,74	301,99	289,46	254,05	232,84	217,27	237,30	41,89	39,97	31,65	33,24
310,74	317,73	314,01	277,52	237,79	244,66	213,30	229,71	37,28	39,03	29,59	30,91
309,00	329,53	296,43	318,14	236,02	236,36	225,77	219,59	37,06	41,46	35,11	32,16
314,55	316,36	316,95	310,60	256,62	239,09	222,02	205,97	39,71	38,58	32,71	31,17
306,17	298,47	279,25	329,66	241,83	257,09	227,39	236,34	39,36	42,81	32,90	30,76
307,02	319,97	306,93	319,92	236,13	239,92	222,54	226,45	40,90	38,99	35,19	34,75
310,89	301,67	287,66	269,40	232,62	231,51	234,61	220,02	39,33	38,86	34,51	35,62
327,60	310,64	295,34	315,07	232,94	259,04	225,42	218,07	42,13	37,04	34,35	33,91
317,35	301,76	310,79	294,49	239,56	264,03	234,10	227,29	37,18	37,88	30,83	33,29
301,13	319,84	291,64	309,85	233,11	247,07	221,37	222,75	41,75	39,32	32,56	29,53
326,86	313,16	306,58	280,28	231,81	236,03	213,40	213,69	38,08	42,21	34,21	
313,08	320,34	301,97	284,46	223,22	250,67	228,46	221,36	41,02	37,37		
308,43	318,29			224,58	223,62	216,79	233,99				
331,07				227,94	220,69						
Выборка 3		Выборка 4		Выборка 3		Выборка 4		Выборка 3		Выборка 4	
313,46	316,97	314,55	308,43	225,62	239,25	256,62	252,84	107,60	114,99	105,87	114,58
320,53	311,88	306,17	305,98	245,10	251,43	241,83	241,49	109,08	108,51	103,36	109,32
323,04	319,14	307,02	305,00	240,29	219,98	236,13	245,18	110,08	107,96	106,23	102,75
322,20	305,05	310,89	310,65	248,09	235,14	232,62	225,65	102,75	108,80	105,91	96,90
313,30	308,53	327,60	317,56	235,90	228,59	232,94	215,55	114,99	107,02	112,72	108,30
317,14	302,66	317,35	323,70	239,69	231,03	239,56	244,73	111,67	102,66	102,17	97,87
331,42	310,74	301,13	301,61	232,10	254,05	233,11	235,52	101,22	114,34	111,43	106,47
328,17	309,00	326,86	312,61	246,96	237,79	231,81	241,71	109,31	106,22	113,54	101,36
312,48		313,08	321,66		236,02	241,87	227,17	107,85		105,87	107,37

Таблица 5

Парный корреляционно-регрессионный анализ

№ варианта	Значения величины Y в зависимости от значений объясняющей переменной X										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,40	3,00	7,00	20,40	51,60	102,10	183,80	296,20	426,70	579,10	773,20
2	1,23	1,50	1,83	2,81	4,11	5,62	7,29	8,91	10,31	12,74	15,85
3	0,00	0,49	0,97	1,73	2,40	3,12	3,68	4,31	5,53	6,11	7,07
4	0,00	1,00	3,19	9,31	20,89	38,68	64,12	97,31	133,54	186,44	227,16
5	0,78	1,00	1,24	1,40	1,48	1,52	1,54	1,55	1,53	1,56	1,54
6	6,08	4,72	2,92	2,74	2,85	3,19	3,87	5,20	7,32	9,27	11,48
7	0,65	0,50	0,42	0,40	0,44	0,47	0,49	0,49	0,45	0,34	0,23
8	0,12	0,71	4,40	15,50	33,64	49,61	73,12	96,11	115,21	134,67	162,43
9	0,82	1,13	1,44	2,70	4,74	7,53	11,00	15,21	19,22	23,46	27,13
10	1,12	1,39	1,64	1,81	1,87	1,92	1,94	1,95	1,93	1,89	1,77
11	1,68	1,00	0,64	0,33	0,25	0,20	0,16	0,14	0,12	0,09	0,08
12	-1,14	-0,33	1,67	5,10	9,60	15,70	22,90	31,80	41,35	52,47	64,51
13	-42,30	69,32	177,40	251,80	280,10	276,30	240,50	185,70	106,73	23,67	-38,74
14	7,91	4,46	2,41	0,25	-1,00	-1,02	-0,25	0,51	2,24	5,68	9,81
15	15,80	2,86	-2,21	-4,25	-3,44	-0,30	2,89	4,00	4,21	4,34	4,31
16	62,36	25,00	0,00	-15,61	-25,68	-30,05	-16,93	12,41	38,71	72,11	114,30
17	0,00	1,54	3,81	4,73	5,11	5,81	7,23	8,85	12,47	18,05	27,17
18	2,28	-0,45	-1,68	-1,01	0,10	1,19	0,92	0,05	-1,02	-1,27	-0,33
19	1,92	2,40	2,73	3,23	3,97	5,08	6,45	8,13	10,49	12,04	14,73
20	37,81	4,55	-22,31	-37,87	-45,32	-36,46	-20,67	3,06	45,65	102,18	157,04
21	67,30	50,10	36,80	26,10	18,80	15,20	12,50	11,00	10,40	9,90	9,70
22	0,78	1,15	1,49	1,74	1,86	1,95	2,03	2,08	2,10	2,11	2,12
23	47,01	42,85	37,73	32,44	27,21	22,10	18,19	15,04	13,11	12,08	11,24
24	18,10	19,38	20,83	21,74	22,65	23,93	23,87	22,72	21,35	20,03	18,64

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 6

Критические значения G_T для критерия Граббса

<i>n</i>	Уровень значимости				
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001
20	2,385	2,557	2,709	2,884	3,230
21	2,408	2,580	2,733	2,912	3,266
22	2,429	2,603	2,758	2,939	3,300
23	2,448	2,624	2,781	2,963	3,332
24	2,467	2,644	2,802	2,987	3,362
25	2,486	2,663	2,822	3,009	3,389
26	2,502	2,681	2,841	3,029	3,415
27	2,519	2,698	2,859	3,049	3,440
28	2,534	2,714	2,876	3,068	3,464
29	2,549	2,730	2,893	3,085	3,486
30	2,563	2,745	2,908	3,103	3,507
31	2,577	2,759	2,924	3,119	3,528
32	2,591	2,773	2,938	3,135	3,546
33	2,604	2,786	2,952	3,150	3,565
34	2,616	2,799	2,965	3,164	3,582
35	2,628	2,811	2,979	3,178	3,599
36	2,639	2,823	2,991	3,191	3,616
37	2,65	2,835	3,003	3,204	3,631
38	2,661	2,846	3,014	3,216	3,646
39	2,671	2,857	3,025	3,228	3,660
40	2,682	2,866	3,036	3,240	3,673
41	2,692	2,877	3,046	3,251	3,687
42	2,700	2,887	3,057	3,261	3,700
43	2,710	2,896	3,067	3,271	3,712
44	2,719	2,905	3,075	3,282	3,724
45	2,727	2,914	3,085	3,292	3,736
46	2,736	2,923	3,094	3,302	3,747
47	2,744	2,931	3,103	3,310	3,757
48	2,753	2,940	3,111	3,319	3,768
49	2,760	2,948	3,120	3,329	3,779
50	2,768	2,956	3,128	3,336	3,789
51	2,775	2,964	3,136	3,345	3,798
52	2,783	2,971	3,143	3,353	3,808
53	2,790	2,978	3,151	3,361	3,816
54	2,798	2,986	3,158	3,368	3,825
55	2,804	2,992	3,166	3,376	3,834

Таблица 7

Критические значения t -критерия Стьюдента

Число степеней свободы	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)						
	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	636,6
2	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	31,598
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	12,941
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	6,859
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	5,405
8	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,707
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	3,291
Число степеней свободы	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)						
	0,05	0,025	0,0125	0,01	0,005	0,0025	0,0005

Таблица 8

Критические значения F -критерия Фишера

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	20	∞
3	<u>10,13</u> 34,12	<u>9,55</u> 30,81	<u>9,28</u> 29,46	<u>9,12</u> 28,71	<u>9,01</u> 28,24	<u>8,94</u> 27,91	<u>8,88</u> 27,67	<u>8,84</u> 27,49	<u>8,66</u> 26,69	<u>8,53</u> 26,12
6	<u>5,99</u> 13,74	<u>5,14</u> 10,92	<u>4,76</u> 9,78	<u>4,53</u> 9,15	<u>4,39</u> 8,75	<u>4,28</u> 8,47	<u>4,21</u> 8,26	<u>4,15</u> 8,10	<u>3,87</u> 7,39	<u>3,67</u> 6,88
9	<u>5,12</u> 10,56	<u>4,26</u> 8,02	<u>3,86</u> 6,99	<u>3,63</u> 6,42	<u>3,48</u> 6,06	<u>3,87</u> 5,80	<u>3,29</u> 5,62	<u>3,23</u> 5,47	<u>2,93</u> 4,80	<u>2,71</u> 4,31
12	<u>4,75</u> 9,33	<u>3,89</u> 6,93	<u>3,49</u> 5,95	<u>3,26</u> 5,41	<u>3,11</u> 5,06	<u>3,00</u> 4,82	<u>2,91</u> 4,64	<u>2,85</u> 4,50	<u>2,54</u> 3,86	<u>2,30</u> 3,36
15	<u>4,54</u> 8,68	<u>3,68</u> 6,36	<u>3,29</u> 5,42	<u>3,06</u> 4,89	<u>2,90</u> 4,56	<u>2,79</u> 4,32	<u>2,71</u> 4,14	<u>2,64</u> 4,00	<u>2,33</u> 3,37	<u>2,07</u> 2,87
20	<u>4,35</u> 8,10	<u>3,49</u> 5,85	<u>3,10</u> 4,94	<u>2,87</u> 4,43	<u>2,71</u> 4,10	<u>2,60</u> 3,87	<u>2,51</u> 3,70	<u>2,45</u> 3,56	<u>2,12</u> 2,94	<u>1,84</u> 2,42
30	<u>4,17</u> 7,56	<u>3,32</u> 5,39	<u>2,92</u> 4,51	<u>2,69</u> 4,02	<u>2,53</u> 3,70	<u>2,42</u> 3,47	<u>2,33</u> 3,30	<u>2,27</u> 3,17	<u>1,93</u> 2,55	<u>1,62</u> 2,01
60	<u>4,00</u> 7,08	<u>3,15</u> 4,98	<u>2,76</u> 4,13	<u>2,53</u> 3,65	<u>2,37</u> 3,34	<u>2,25</u> 3,12	<u>2,17</u> 2,95	<u>2,10</u> 2,82	<u>1,75</u> 2,20	<u>1,39</u> 1,60
∞	<u>3,84</u> 6,63	<u>3,00</u> 4,61	<u>2,60</u> 3,78	<u>2,37</u> 3,32	<u>2,21</u> 3,02	<u>2,10</u> 2,80	<u>2,01</u> 2,64	<u>1,94</u> 2,51	<u>1,57</u> 1,88	<u>1,00</u> 1,00

Примечание:

k_1, k_2 – соответственно степени свободы для большей и меньшей дисперсий;
в числителе приведены значения для $\alpha = 0,05$, в знаменателе – для $\alpha = 0,01$

Таблица 9

Значения коэффициента критерия Шапиро-Уилка для вычисления
статистики критерия W

k	n									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150	0,5056	0,4968	0,4886	0,4808	0,4734
2	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211
3	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565
4	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085
5	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686
6	-	0,0303	0,0539	0,0727	0,0980	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334
7	-	-	-	0,0240	0,0433	0,0593	0,0725	0,0737	0,0932	0,1013
8	-	-	-	-	-	0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711
9	-	-	-	-	-	-	-	0,0163	0,0303	0,0422
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0140
k	n									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,4643	0,4590	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	0,3185	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944
3	0,2578	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487
4	0,2119	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,2150	0,2148
5	0,1736	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1864	0,1870
6	0,1399	0,1443	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630
7	0,1092	0,1150	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415
8	0,0804	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219
9	0,0530	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036
10	0,0263	0,0368	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862
11	-	0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697
12	-	-	-	0,0107	0,0200	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537
13	-	-	-	-	-	0,0094	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381
14	-	-	-	-	-	-	-	0,0084	0,0159	0,0227
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0076

Продолжение таблицы 9

k	n									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0,4220	0,4188	0,4156	0,4127	0,4098	0,4068	0,4040	0,4015	0,3989	0,3964
2	0,2921	0,2898	0,2786	0,2854	0,2834	0,2813	0,2794	0,2774	0,2755	0,2737
3	0,2475	0,2463	0,2451	0,2439	0,2427	0,2415	0,2403	0,2391	0,2380	0,2368
4	0,2155	0,2141	0,2137	0,2132	0,2127	0,2121	0,2116	0,2110	0,2104	0,2098
5	0,1874	0,1878	0,1880	0,1882	0,1883	0,1883	0,1883	0,1881	0,1880	0,1878
6	0,1641	0,1651	0,1660	0,1667	0,1673	0,1678	0,1683	0,1686	0,1689	0,1691
7	0,1433	0,1449	0,1463	0,1475	0,1487	0,1496	0,1505	0,1513	0,1520	0,1526
8	0,1243	0,1265	0,1284	0,1301	0,1317	0,1331	0,1344	0,1356	0,1366	0,1376
9	0,1066	0,1093	0,1118	0,1140	0,1160	0,1179	0,1196	0,1211	0,1225	0,1237
10	0,0899	0,0931	0,0961	0,0988	0,1013	0,1036	0,1056	0,1075	0,1092	0,1108
11	0,0739	0,0777	0,0812	0,0844	0,0873	0,0900	0,0924	0,0947	0,0967	0,0986
12	0,0585	0,0629	0,0669	0,0706	0,0739	0,0770	0,0798	0,0824	0,0848	0,0870
13	0,0435	0,0485	0,0530	0,0572	0,0610	0,0645	0,0677	0,0706	0,0733	0,0759
14	0,0289	0,0344	0,0395	0,0441	0,0484	0,0523	0,0559	0,0592	0,0622	0,0651
15	0,0144	0,0206	0,0262	0,0314	0,0361	0,0404	0,0444	0,0481	0,0515	0,0546
16	-	0,0068	0,0131	0,0187	0,0239	0,0287	0,0331	0,0372	0,0409	0,0444
17	-	-	-	0,0062	0,0119	0,0172	0,0220	0,0264	0,0305	0,0343
18	-	-	-	-	-	0,0057	0,0110	0,0158	0,0203	0,0244
19	-	-	-	-	-	-	-	0,0053	0,0101	0,0146
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0049

Окончанием таблицы 9

<i>k</i>	<i>n</i>									
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0,3940	0,3917	0,3894	0,3872	0,3850	0,3830	0,3808	0,3789	0,3770	0,3651
2	0,2719	0,2701	0,2684	0,2667	0,2651	0,2635	0,2620	0,2604	0,2589	0,2574
3	0,2357	0,2345	0,2334	0,2323	0,2313	0,2302	0,2291	0,2281	0,2271	0,2260
4	0,2091	0,2085	0,2078	0,2072	0,2065	0,2058	0,2052	0,2045	0,2038	0,2032
5	0,1876	0,1874	0,1871	0,1868	0,1868	0,1862	0,1869	0,1855	0,1851	0,1847
6	0,1693	0,1694	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1695	0,1693	0,1692	0,1691
7	0,1531	0,1535	0,1539	0,1542	0,1545	0,1548	0,1550	0,1551	0,1553	0,1554
8	0,1384	0,1392	0,1398	0,1405	0,1410	0,1415	0,1420	0,1423	0,1427	0,1430
9	0,1249	0,1259	0,1269	0,1278	0,1286	0,1293	0,1300	0,1306	0,1312	0,1317
10	0,1123	0,1136	0,1149	0,1160	0,1170	0,1180	0,1189	0,1197	0,1205	0,1212
11	0,1004	0,1020	0,1035	0,1049	0,1062	0,1073	0,1085	0,1095	0,1105	0,1113
12	0,0891	0,0909	0,0927	0,0943	0,0959	0,0972	0,0986	0,0998	0,1010	0,1020
13	0,0782	0,0804	0,0824	0,0842	0,0860	0,0876	0,0892	0,0906	0,0919	0,0932
14	0,0677	0,0701	0,0724	0,0745	0,0765	0,0783	0,0801	0,0817	0,0832	0,0846
15	0,0575	0,0602	0,0628	0,0651	0,0673	0,0694	0,0713	0,0731	0,0748	0,0764
16	0,0476	0,0506	0,0534	0,0560	0,0584	0,0607	0,0628	0,0648	0,0667	0,0685
17	0,0379	0,0411	0,0442	0,0471	0,0497	0,0522	0,0546	0,0568	0,0588	0,0608
18	0,0283	0,0318	0,0352	0,0383	0,0412	0,0439	0,0465	0,0489	0,0511	0,0532
19	0,0188	0,0227	0,0263	0,0296	0,0328	0,0357	0,0385	0,0411	0,0436	0,0459
20	0,0094	0,0136	0,0175	0,0211	0,0245	0,0277	0,0307	0,0335	0,0361	0,0386
21	-	0,0045	0,0087	0,0126	0,0163	0,0197	0,0229	0,0229	0,0288	0,0314
22	-	-	-	0,0042	0,0081	0,0118	0,0153	0,0185	0,0215	0,0244
23	-	-	-	-	-	0,0039	0,0076	0,0111	0,0143	0,0174
24	-	-	-	-	-	-	-	0,0037	0,0071	0,0104
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0035

Таблица 10

Критические значения W -критерия Шапиро-Уилка

n	α		n	α	
	0,01	0,05		0,01	0,05
8	0,749	0,818	30	0,900	0,927
9	0,764	0,829	31	0,902	0,929
10	0,781	0,842	32	0,904	0,930
11	0,792	0,850	33	0,906	0,931
12	0,805	0,859	34	0,908	0,933
13	0,814	0,866	35	0,910	0,934
14	0,825	0,874	36	0,912	0,935
15	0,835	0,881	37	0,914	0,936
16	0,844	0,887	38	0,916	0,938
17	0,851	0,892	39	0,917	0,939
18	0,858	0,897	40	0,919	0,940
19	0,863	0,901	41	0,920	0,941
20	0,868	0,905	42	0,922	0,942
21	0,873	0,908	43	0,923	0,943
22	0,878	0,911	44	0,924	0,944
23	0,881	0,914	45	0,926	0,945
24	0,884	0,916	46	0,927	0,945
25	0,888	0,918	47	0,928	0,946
26	0,891	0,920	48	0,929	0,947
27	0,894	0,923	49	0,929	0,947
28	0,896	0,924	50	0,930	0,947
29	0,898	0,926			

Таблица 11

Критические значения U -критерия Вилкоксона-Манна-Уитни
(для уровня значимости $\alpha = 0,05$)

U_1	U_2											
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
4	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12
5	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18
6	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24
7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36
9	12	15	17	20	23	26	28	30	34	37	39	42
10	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48
11	16	19	23	26	30	33	37	40	44	48	51	55
12	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61
13	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67
14	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74
15	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80
16	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86
17	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93
18	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99
19	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106
20	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112

Таблица 12

Критические значения U -критерия Вилкоксона-Манна-Уитни
(для уровня значимости $\alpha = 0,01$)

U_1	U_2											
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3			0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6
5	1	2	3	4	4	6	7	7	8	9	10	11
6	3	4	5	6	6	9	10	11	12	13	15	16
7	4	6	7	9	9	12	13	15	16	18	19	21
8	6	7	9	11	11	15	17	18	20	22	24	26
9	7	9	11	13	13	18	20	22	24	27	29	31
10	9	11	13	16	16	21	24	26	29	31	34	37
11	10	13	16	18	18	24	27	30	33	36	39	42
12	12	15	18	21	21	27	31	34	37	41	44	47
13	13	17	20	24	24	31	34	38	42	45	49	53
14	15	18	22	26	26	34	38	42	46	50	54	58
15	16	20	24	29	29	37	42	46	51	55	60	64
16	18	22	27	31	31	41	45	50	55	60	65	70
17	19	24	29	34	34	44	49	54	60	65	70	75
18	21	26	31	37	37	47	53	58	64	70	75	81
19	22	28	33	39	39	51	56	63	69	74	81	87
20	24	30	36	42	42	54	60	67	73	79	86	92

Таблица 13

Таблица квантилей стандартного нормального закона распределения $u_{1-\alpha/2}$.

Квантили обозначены: $\Phi(u_{1-\alpha/2}) = P = 1 - \alpha/2$

P	$u_{1-\alpha/2}$	P	$u_{1-\alpha/2}$
0,50	0	0,91	1,341
0,55	0,126	0,92	1,405
0,60	0,253	0,93	1,476
0,65	0,385	0,94	1,555
0,70	0,524	0,95	1,645
0,75	0,674	0,96	1,751
0,80	0,842	0,97	1,881
0,85	1,036	0,98	2,054
0,90	1,282	0,99	2,326

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Берикашвили В.Ш.* Статистическая обработка данных, планирование эксперимента и случайные процессы: учебное пособие / В.Ш. Берикашвили, С.П. Оськин. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 164 с.
2. *Ганджумян Р.А.* Математическая статистика в разведочном бурении. Справочное пособие / Р.А. Ганджумян. – М.: Недра, 1990. – 218 с.
3. *Джонсон Н.* Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных / Н. Джонсон, Ф. Лион ; пер. с англ. под ред. Э.К.Лецкого. – М.: Мир, 1980. – т.1. – 610 с.
4. *Ивченко Г.И.* Введение в математическую статистику: Учебник / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. – М.: издательство ЛКИ, 2010. – 600 с.
5. *Квеско Н.Г.* Методы и средства исследований: учебное пособие / Н.Г. Квеско, П.С. Чубик. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 112 с.
6. *Коган Е.А.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.А. Коган, А. А. Юрченко. – М.: ИНФРА-М, 2020. – 250 с.
7. *Хуснутдинов Р.Ш.* Математическая статистика: Учебное пособие / Хуснутдинов Р.Ш. – М.:НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 205 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Определение основных статистических оценок выборки ..	4
Проверка статистических гипотез.....	12
Парный корреляционно-регрессионный анализ	17
Варианты заданий	22
Приложение	35
Библиографический список	44