РГЗ по теме "Разложение функции в ряд Фурье".

План выполнения

На отрезке $[0; b]$ задана функция $y = f(x)$.

I. Разложить заданную функцию в общий ряд Фурье на [0; *b*].

1. Считая функцию периодической, определить полупериод функции: $\ell = \frac{b}{2}$. Построить график функции $y = f(x)$ на интервале $[0; b]$.
2. Определить коэффициенты ряда Фурье по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\cos\frac{2\pi nx}{b}dx; \quad b_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\sin\frac{2\pi nx}{b}dx.$$

3. Составить ряд Фурье: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{b} + b_n\sin\frac{2\pi nx}{b}\right)$.
4. Выписать первые три гармоники ряда Фурье: $y_n = a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{b}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{b}\right)$, $n = 1, 2, 3$.

   Найти первое, третье и десятое приближения функции рядом Фурье:

$$s_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} y_n, \quad k = 1, 3, 10, \text{ где } y_n \text{ — } n\text{-я гармоника.}$$

5. Построить 3 графика, где найденные приближения накладываются на график заданной функции на интервале $[0; b]$.
6. На интервале $[-b; 2b]$ построить график функции $y = f_1(x)$ — периодического продолжения функции $y = f(x)$. Для периодического продолжения функции учтите, что $f_1(x) = f(x - kb)$ на отрезке $[kb; (k+1)b]$. На этот график наложить график десятого приближения рядом Фурье.

II. Разложить заданную функцию в ряд Фурье по синусам на [–*b*; *b*].

1. Считая функцию периодической и нечетной, определить полупериод функции: $\ell = b$. На интервале $[-b; b]$ построить график функции $y = f_2(x)$ — продолжения функции $y = f(x)$ нечетным образом.
2. Определить коэффициенты ряда Фурье по формулам:

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\sin\frac{\pi nx}{b}dx.$$

3. Составить ряд Фурье: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{b}$.
4. Выписать первые три гармоники ряда Фурье: $y_n = b_n\sin\left(\frac{\pi nx}{b}\right)$, $n = 1, 2, 3$.

   Найти десятое приближение функции рядом Фурье: $s_k = \sum_{n=1}^{10} y_n$.

5. Построить графики функции $y = f_2(x)$ и десятого приближения на интервале $[-b; b]$.
6. На интервале $[-3b; 3b]$ построить график функции $y = f_2(x)$ — периодического продолжения функции $y = f(x)$ нечетным образом. На этот график наложить график десятого приближения рядом Фурье.

III. Разложить заданную функцию в ряд Фурье по косинусам на [–*b*; *b*].

1. Считая функцию периодической и четной, определить полупериод функции: $\ell = b$. На интервале $[-b; b]$ построить график функции $y = f_3(x)$ — продолжения функции $y = f(x)$ четным образом.
2. Определить коэффициенты ряда Фурье по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\,dx\,; \quad a_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\cos\frac{\pi n x}{b}\,dx\,; \quad b_n = 0\,.$$

3. Составить ряд Фурье: $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{\pi n x}{b}$.
4. Выписать первые три гармоники ряда Фурье: $y_n = a_n \cos\left(\dfrac{\pi n x}{b}\right)$, $n = 1, 2, 3$.

   Найти десятое приближение функции рядом Фурье: $s_{10} = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{10} y_n$.
5. Построить графики функции $y = f_3(x)$ и десятого приближения на интервале $[-b; b]$.
6. На интервале $[-3b;\ 3b]$ построить график функции $y = f_3(x)$ — периодического продолжения функции $y = f(x)$ четным образом. На этот график наложить график десятого приближения рядом Фурье.

<u>Пример выполнения задания</u>

Дано: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 1); \\ 0, & x \in [1; 2). \end{cases}$ $\quad b = 2.$

I. Разложение заданной функции в общий ряд Фурье на [0; 2].

1. Полупериод функции $\ell = 1$, график заданной функции на интервале $[0; 2]$ имеет вид:

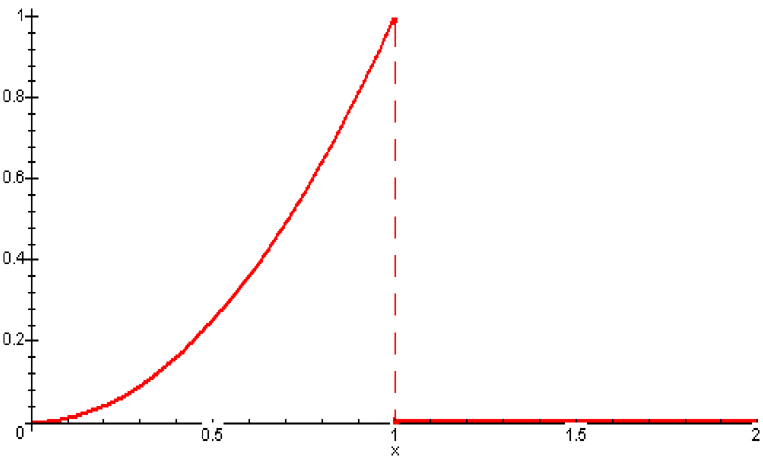

Рис 1. График функции $y = f(x)$

2. Определим коэффициенты ряда Фурье по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\,;$$

Найдем a_n, интегрируя 2 раза по частям:

$$a_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\cos\frac{2\pi nx}{b}dx = \int_0^1 x^2\cos(\pi nx)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x^2;\ du = 2xdx \\ dv = \cos(\pi nx)dx; \\ v = \frac{1}{\pi n}\sin(\pi x) \end{array}\right\} =$$

$$= \left.\frac{x^2\sin(\pi nx)}{\pi n}\right|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\sin(\pi nx)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x;\ du = dx \\ dv = \sin(\pi nx)dx; \\ v = -\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx) \end{array}\right\} =$$

$$= \left.\frac{x^2\sin(\pi nx)}{\pi n}\right|_0^1 + \left.\frac{2x\cos(\pi nx)}{\pi^2 n^2}\right|_0^1 - \frac{2}{\pi^2 n^2}\int_0^1 \cos(\pi nx)\,dx =$$

$$= \left.\frac{x^2\sin(\pi nx)}{\pi n}\right|_0^1 + \left.\frac{2x\cos(\pi nx)}{\pi^2 n^2}\right|_0^1 - \left.\frac{\sin(\pi nx)}{\pi^3 n^3}\right|_0^1 = \frac{2\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2};$$

Аналогично найдем b_n:

$$b_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\sin\frac{2\pi nx}{b}dx = \int_0^1 x^2\sin(\pi nx) = \quad \ldots \quad = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3}.$$

3. Составим ряд Фурье: $f(x) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(\pi nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3}\right)\sin(\pi nx)\right).$

4. Найдем первые три гармоники:

$$y_1 = -\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}\sin(\pi x);$$

$$y_2 = \frac{1}{2\pi^2}\cos(2\pi x) - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x);$$

$$y_3 = -\frac{2}{9\pi^2}\cos(3\pi x) + \frac{9\pi^2 - 4}{27\pi^3}\sin(3\pi x).$$

Найдем первое, третье и десятое приближения функции рядом Фурье:

$$s_1 = \frac{1}{6} + y_1 = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}\sin(\pi x);$$

$$s_3 = \frac{1}{6} + y_1 + y_2 + y_3 =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}\sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi^2}\cos(2\pi x) - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x) - \frac{2}{9\pi^2}\cos(3\pi x) + \frac{9\pi^2 - 4}{27\pi^3}\sin(3\pi x);$$

$$s_{10} = \frac{1}{6} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(\pi nx) + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3}\right)\sin(\pi nx)\right).$$

5. Построим 3 графика, где найденные приближения накладываются на график заданной функции на интервале [0; 2].

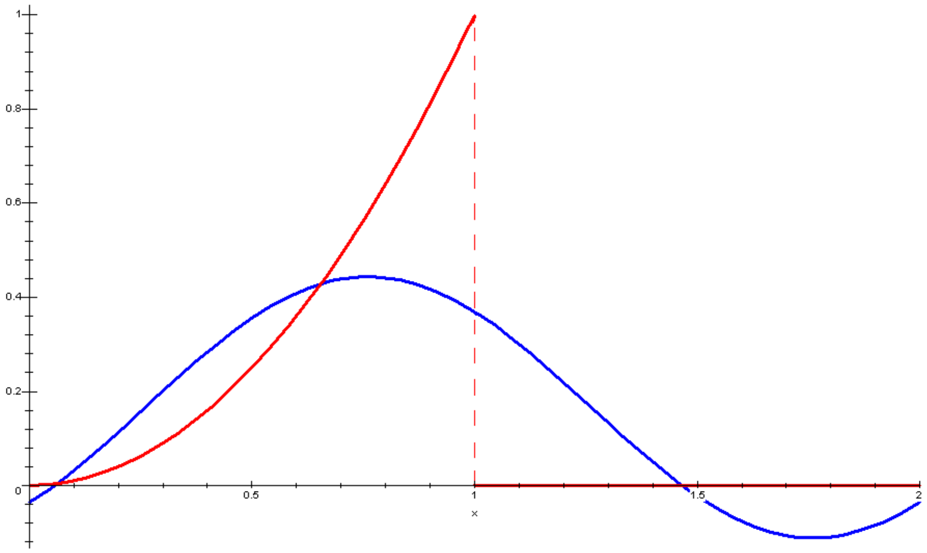

Рис 2. Графики функции $y = f(x)$ — и первого приближения рядом Фурье —

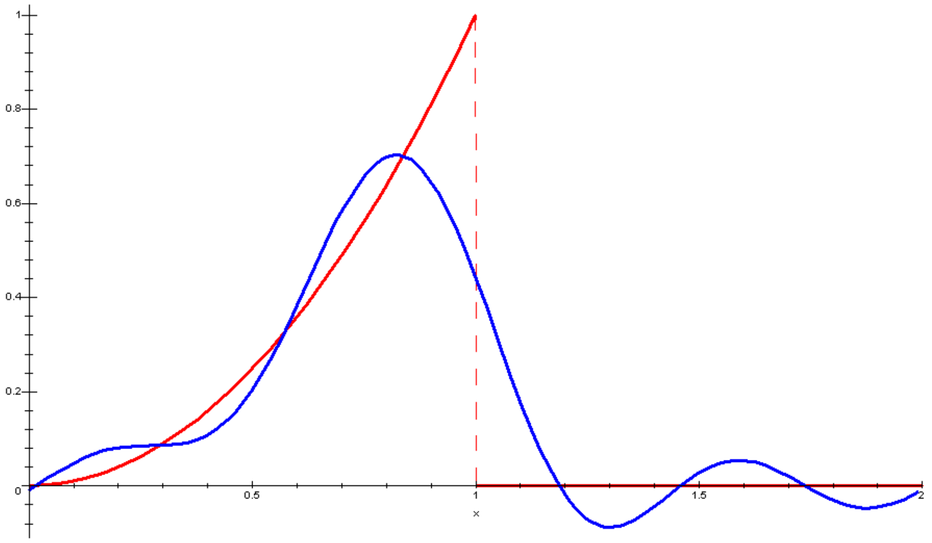

Рис 3. Графики функции $y = f(x)$ — и третьего приближения рядом Фурье —

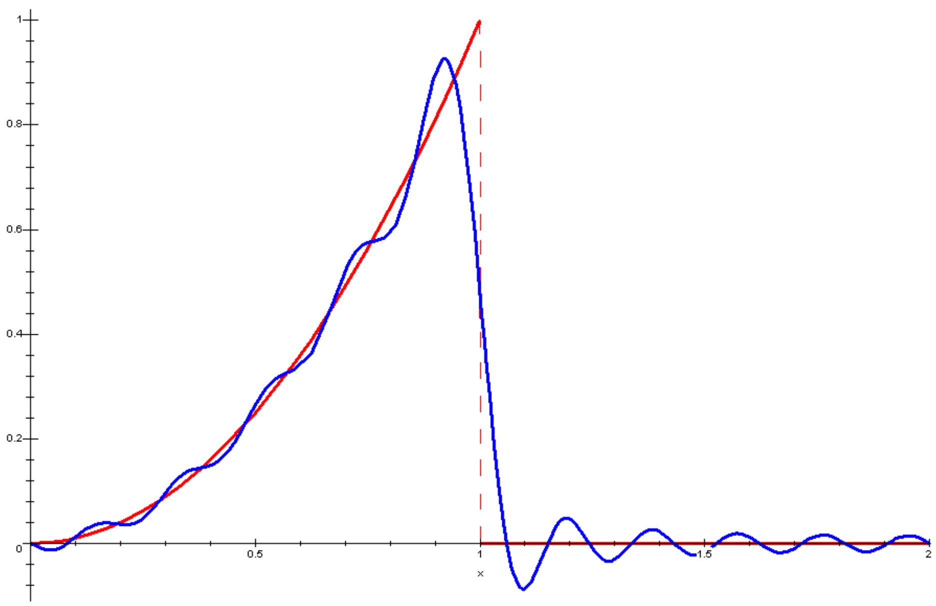

Рис 4. Графики функции $y = f(x)$ и десятого приближения рядом Фурье

6.

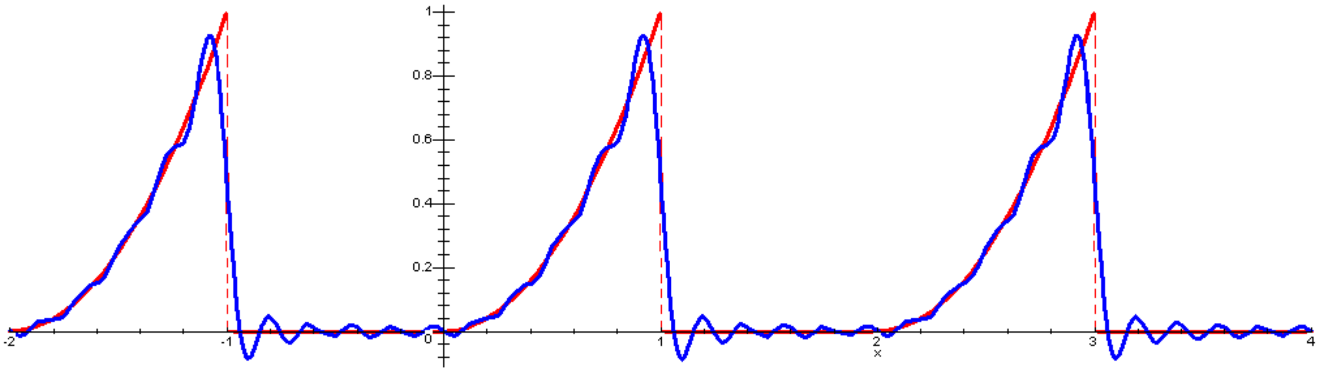

Рис 5. Графики функции $y = f_1(x)$ — периодического продолжения функции $y = f(x)$ — и десятого приближения рядом Фурье —

II. Разложение заданной функции в ряд Фурье по синусам на $[-b; b]$.

1. Полупериод функции $\ell = 2$, определим $y = f_2(x)$ — нечетное продолжение функции $y = f(x)$ на $[-2; 2]$:

$$f_2(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \in [-2;0]; \\ f(x), & x \in [0;2]; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \in [-2;-1); \\ -x^2, & x \in [-1;0); \\ x^2, & x \in [0;1); \\ 0, & x \in [1;2). \end{cases}$$

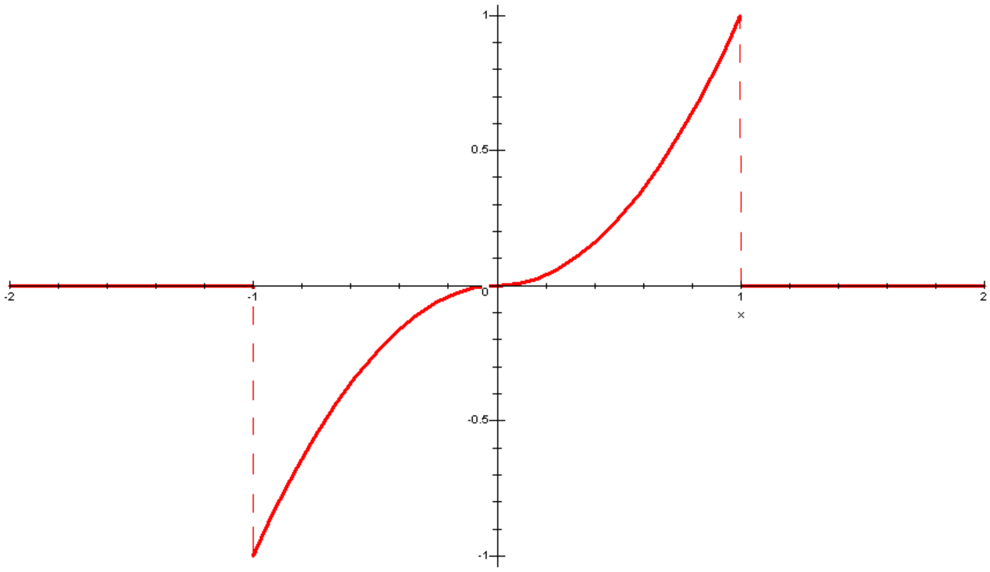

Рис 6. График функции $y = f_2(x)$ — нечетного продолжения функции $y = f(x)$ на $[-2; 2]$.

2. Определим коэффициенты ряда Фурье по формулам:

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\sin\frac{\pi n x}{b}dx = \int_0^1 x^2 \sin\frac{\pi n x}{2}dx = \quad \ldots \quad = \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{16\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3}.$$

3. Составим ряд Фурье: $f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{16\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3}\right)\sin\frac{\pi n x}{2}$.

4. Найдем первые три гармоники:

$$y_1 = \frac{8(\pi^2-4)}{\pi^3}\sin\frac{\pi x}{2}; \quad y_2 = -\frac{4}{\pi}\sin(\pi x); \quad y_3 = \frac{8(9\pi^2-4)}{27\pi^3}\sin\frac{3\pi x}{2}.$$

Найдем десятое приближения функции рядом Фурье:

$$s_{10} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} =$$

$$= \frac{8(\pi^2-4)}{\pi^3}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{4}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{8(9\pi^2-4)}{27\pi^3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \frac{2}{\pi}\sin(2\pi x) + \frac{8(25\pi^2-4)}{125\pi^3}\sin\frac{5\pi x}{2} -$$

$$-\frac{4}{3\pi}\sin(3\pi x) + \frac{8(49\pi^2-4)}{243\pi^3}\sin\frac{7\pi x}{2} - \frac{1}{\pi}\sin(4\pi x) + \frac{8(81\pi^2-4)}{729\pi^3}\sin\frac{9\pi x}{2} - \frac{4}{5\pi}\sin(5\pi x).$$

5.

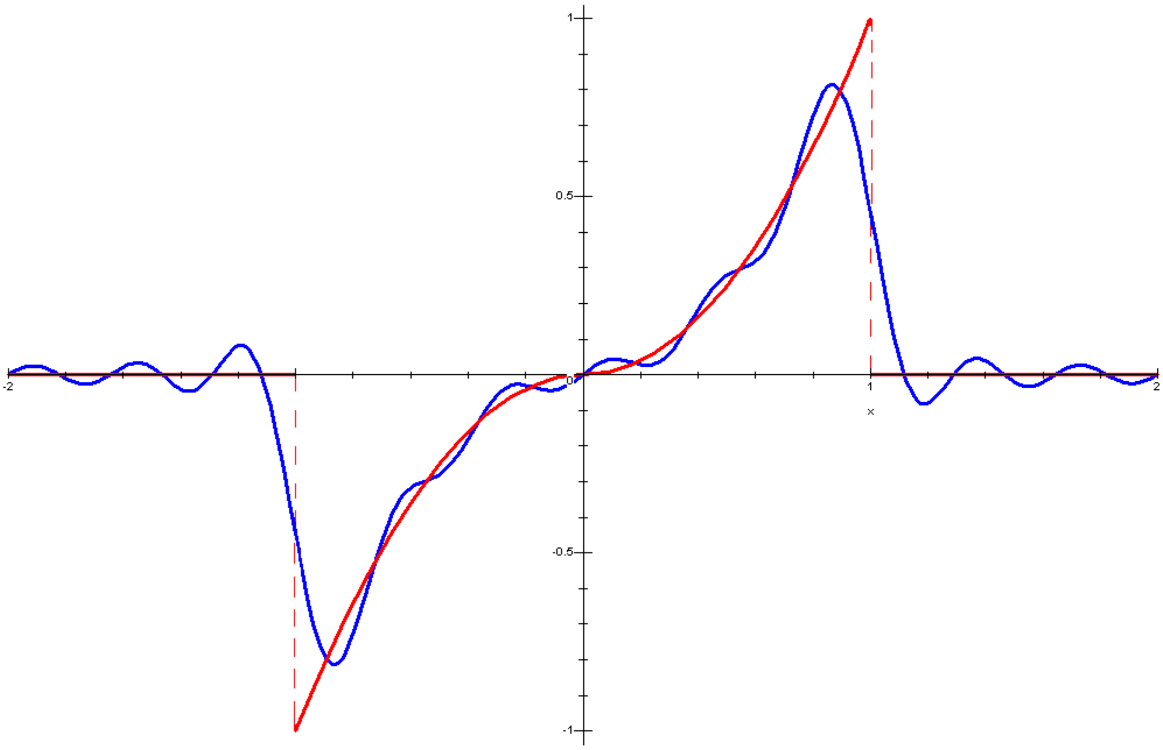

Рис 7. Графики функции $y = f_2(x)$ — и десятого приближения рядом Фурье —

6.

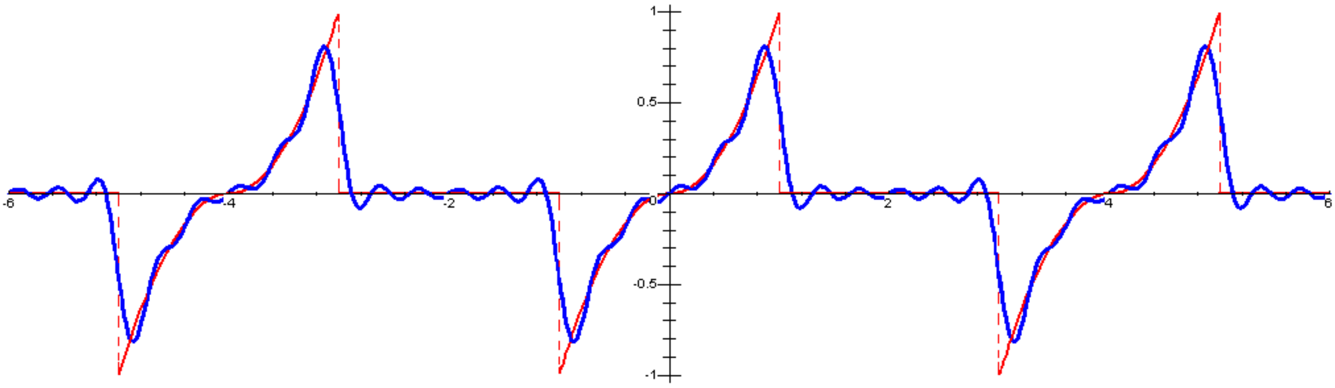

Рис 8. Графики функции $y = f_2(x)$ — периодического нечетного продолжения функции $y = f(x)$ — и десятого приближения рядом Фурье —

III. Разложение заданной функции в ряд Фурье по косинусам на [–*b*; *b*].

1. Полупериод функции $\ell = 2$, определим $y = f_3(x)$ — четное продолжение функции $y = f(x)$ на $[-2;\ 2]$:

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-2;0]; \\ f(x), & x \in [0;\ 2]; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \in [-2;\ -1); \\ x^2, & x \in [-1;\ 0); \\ x^2, & x \in [0;\ 1); \\ 0, & x \in [1;\ 2); \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \in [-2;\ -1); \\ x^2, & x \in [-1;\ 1); \\ 0, & x \in [1;\ 2). \end{cases}$$

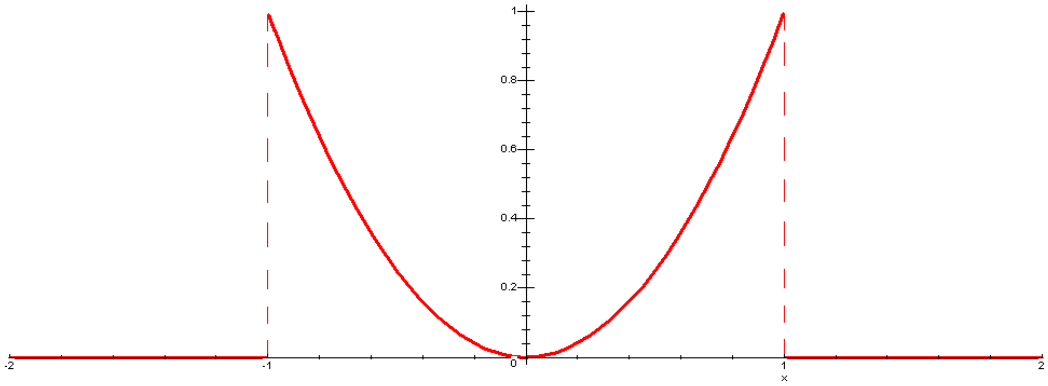

Рис 9. График функции $y = f_3(x)$ — четного продолжения функции $y = f(x)$ на $[-2;\ 2]$.

2. Определим коэффициенты ряда Фурье по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3};\quad b_n = 0;$$

$$a_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\cos\frac{\pi n x}{b}dx = \int_0^1 x^2\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \quad \ldots \quad = \frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} + \frac{8\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{16\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^3 n^3}.$$

3. Составим ряд Фурье: $f_2(x) = \dfrac{1}{6} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} + \frac{8\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{16\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^3 n^3}\right)\cos\frac{\pi n x}{2}$.

4. Найдем первые три гармоники:

$$y_1 = \frac{2(\pi^2-8)}{\pi^3}\cos\frac{\pi x}{2};\quad y_2 = -\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x);\quad y_3 = \frac{2(9\pi^2-8)}{27\pi^3}\cos\frac{3\pi x}{2}.$$

Найдем десятое приближения функции рядом Фурье:

$$s_{10} = \frac{a_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2(\pi^2-8)}{\pi^3}\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{2(9\pi^2-8)}{27\pi^3}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{2\pi^2}\cos(2\pi x) + \frac{2(25\pi^2-8)}{125\pi^3}\cos\frac{5\pi x}{2} -$$

$$-\frac{2}{9\pi^2}\cos(3\pi x) + \frac{2(49\pi^2-8)}{243\pi^3}\cos\frac{7\pi x}{2} + \frac{1}{8\pi^2}\cos(4\pi x) + \frac{2(81\pi^2-8)}{729\pi^3}\cos\frac{9\pi x}{2} - \frac{4}{25\pi^2}\cos(5\pi x).$$

5.

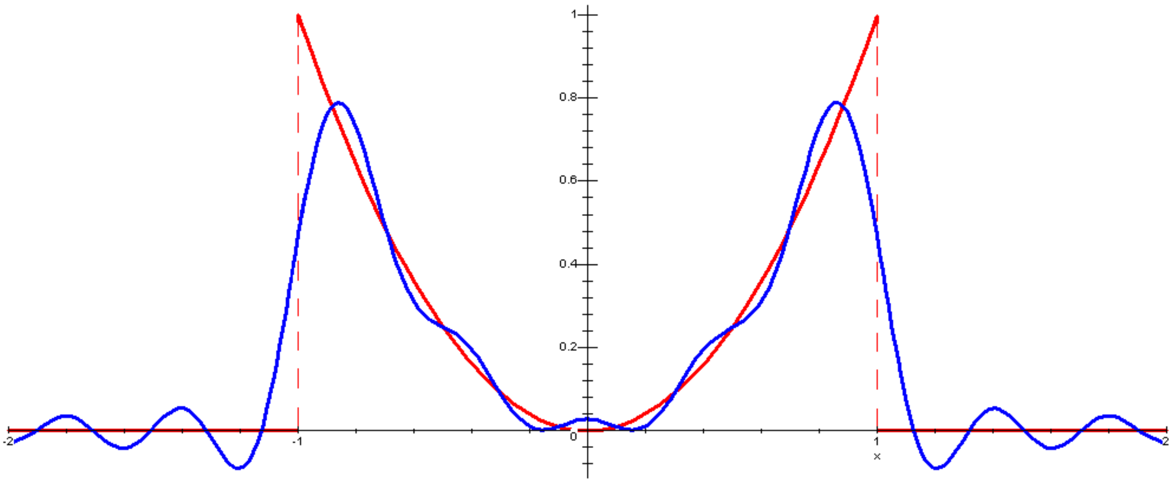

Рис 10. Графики функции $y = f_3(x)$ — и десятого приближения рядом Фурье —

6.

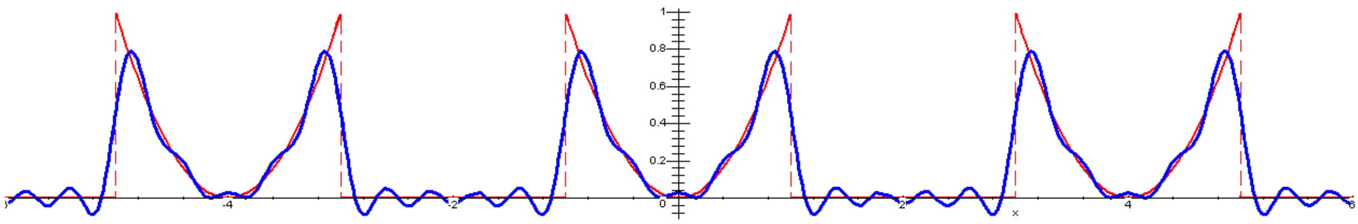

Рис 11. Графики функции $y = f_3(x)$ — периодического четного продолжения функции $y = f(x)$ —
и десятого приближения рядом Фурье —