Лабораторная работа № 6

Тема Символьные преобразования в MathCAD

Указания к выполнению заданий

1. Для предложенного в варианте выражения выполните двумя способами: с помощью команд меню (с включением комментария к выполняемой операции) и с помощью оператора символьного вывода с соответствующими ключевыми словами – следующие задания:
   1) найдите все значения x, при которых числитель обращается в 0;
   2) выясните, при каких $x \in \mathrm{R}$ выражение не определено;
   3) разложите знаменатель на множители;
   4) выполните разложение на элементарные дроби;
   5) выясните, при каких x выражение принимает положительные значения;
   6) разложите выражение в ряд Тейлора с точностью до шестого порядка;
   7) найдите производную и упростите полученное выражение;
   8) найдите интеграл;
   9) вычислите определенный интеграл $\int_a^b$ от выражения, где a - предел выражения при $x \to 0$, b - предел выражения при $x \to \infty$.
2. В *задании 3* систему уравнений решите с помощью блока решений Given-Find и с помощью директивы **solve** панели **Symbolic**.
3. При выполнении *задания 4* воспользуйтесь тем, что система линейных уравнений имеет единственное решение, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

Пример решения варианта

Задание 1. Для выражения $\dfrac{x^4-2x^3+6x^2-18x-27}{x^5+x^4-x^3+7x^2-20x+12}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

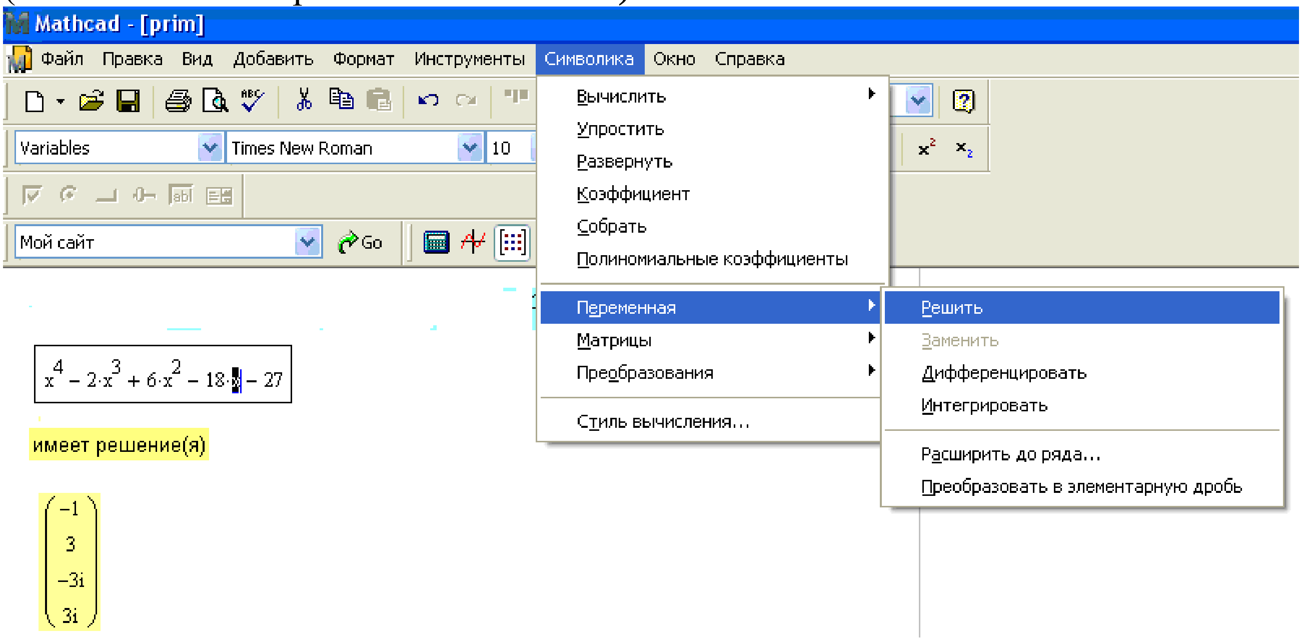
<u>Решение.</u>

Задаем в MathCAD выражение:

$f1(x) := x^4 - 2\cdot x^3 + 6\cdot x^2 - 18\cdot x - 27$ $\quad f2(x) := x^5 + x^4 - x^3 + 7\cdot x^2 - 20\cdot x + 12$ $\quad f(x) := \dfrac{f1(x)}{f2(x)}$

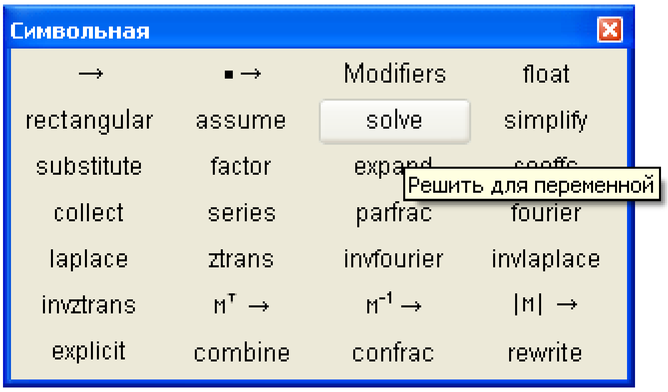
$$f(x) \to -\frac{2\cdot x^3 - x^4 - 6\cdot x^2 + 18\cdot x + 27}{x^5 + x^4 - x^3 + 7\cdot x^2 - 20\cdot x + 12}$$

1) Находим, все значения x, при которых числитель обращается в 0.
<u>Первый способ</u> (с помощью команд меню Symbolics ► Variable ► Solve (Символика ► Переменная ► Решить)



<u>Второй способ</u> (с помощью ключевого слова **solve** на панели **Символьная**)

$$f1(x)\ \text{solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3i \\ 3i \end{pmatrix}$$



Установили, что числитель обращается в 0 в двух действительных точках: $x = -1$ и $x = 3$.

2) Выясняем, при каких значениях $x \in R$ выражение не определено. Это будут точки, в которых знаменатель обращается в 0.
<u>Первый способ</u> (с помощью команд меню Symbolics ► Variable ► Solve (Символика ► Переменная ► Решить)

$$x^5 + x^4 - x^3 + 7\cdot x^2 - 20\cdot x + 12$$

имеет решение(я)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -2i \\ 2i \end{pmatrix}$$

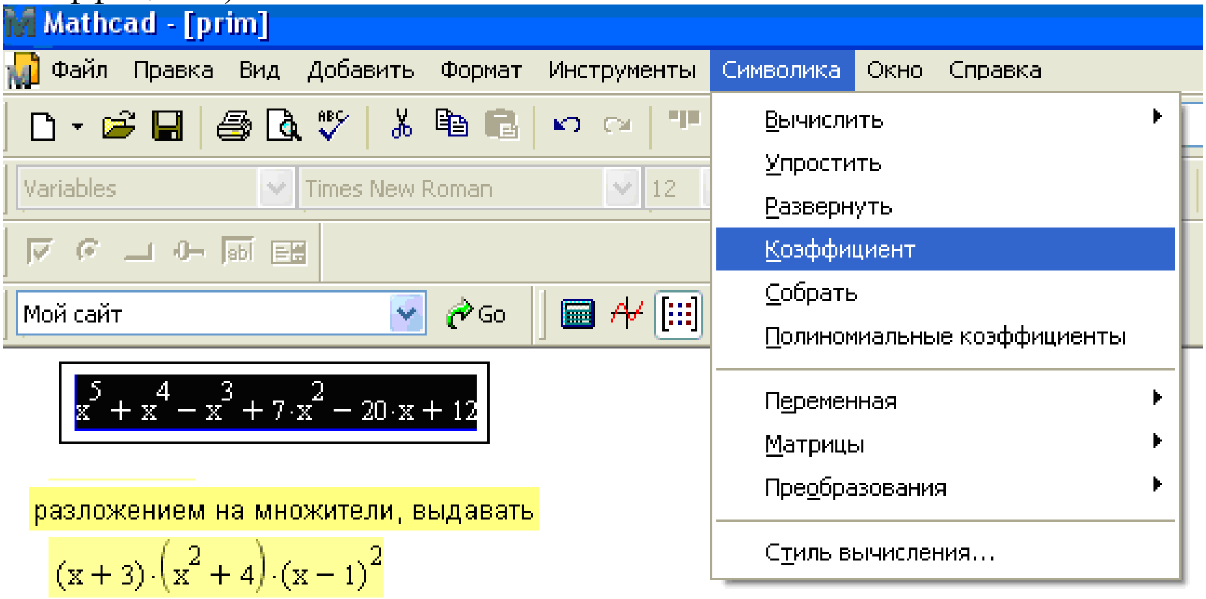
Второй способ (с помощью ключевого слова **solve** на панели **Символьная**)

$$f2(x)\ \text{solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -2i \\ 2i \end{pmatrix}$$

Установили, что знаменатель обращается в 0 в двух действительных точках: $x = 1$ и $x = -3$.

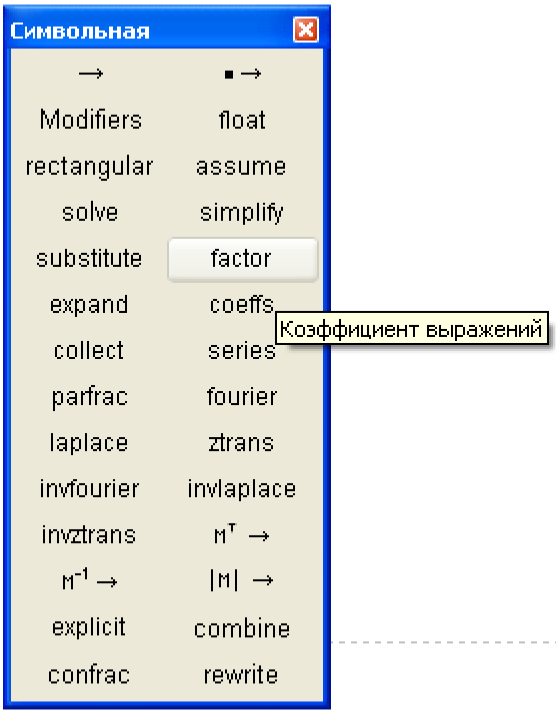
3) Разлагаем знаменатель на множители.

Первый способ (с помощью команд меню Symbolics ► Factor (Символика ► Коэффициент)



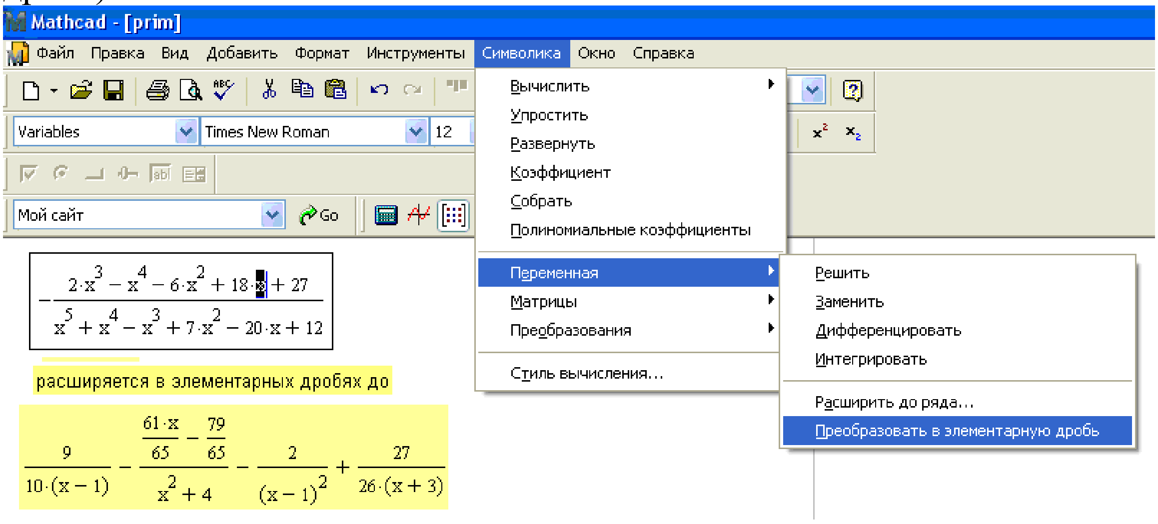
Второй способ (с помощью ключевого слова **factor** на панели **Символьная**)

$$f2(x)\ \text{factor} \rightarrow (x+3)\cdot\left(x^2+4\right)\cdot(x-1)^2$$

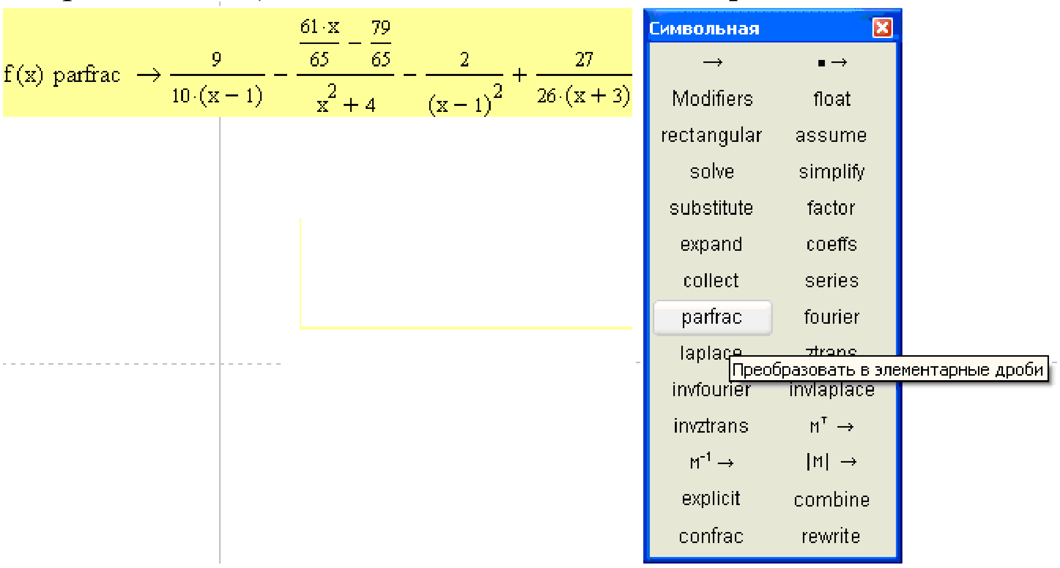


4) Выполняем разложение на элементарные дроби.

<u>Первый способ</u> (с помощью команд меню Symbolics ► Variable ► Convert to Partial Fractions (Символика ► Переменная ► Преобразовать в элементарную дробь)

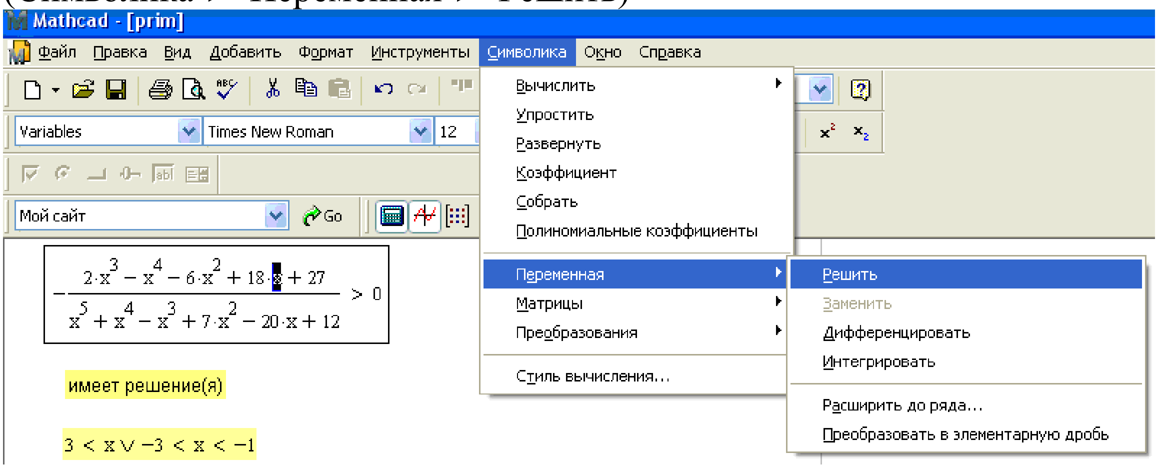


<u>Второй способ</u> (с помощью ключевого слова **parfac** на панели **Символьная**)



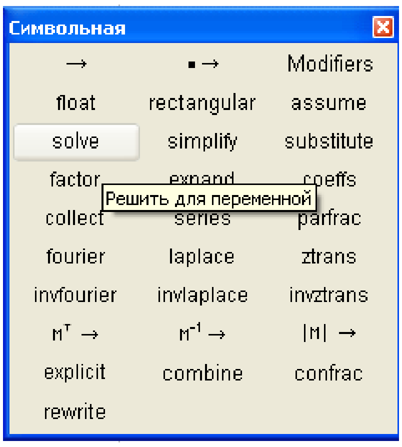
5) Выясним при каких *x* выражение принимает положительные значения.

<u>Первый способ</u> (с помощью команд меню Symbolics ► Variable ► Solve (Символика ► Переменная ► Решить)



Второй способ (с помощью ключевого слова **solve** на панели **Символьная**)

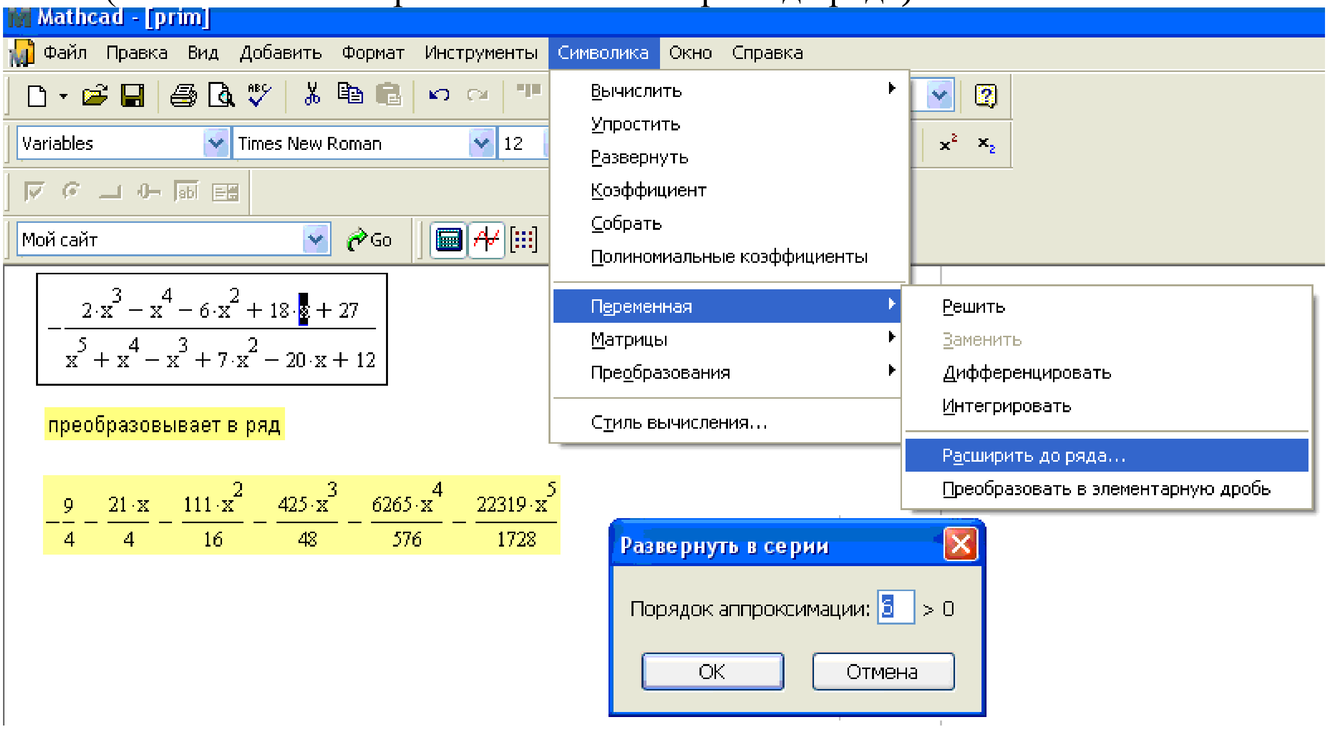
$$f(x) > 0 \text{ solve } \rightarrow 3 < x \vee -3 < x < -1$$



Таким образом выражение принимает положительные значения при $x \in (3;\infty]$ либо $x \in (-3;-1)$

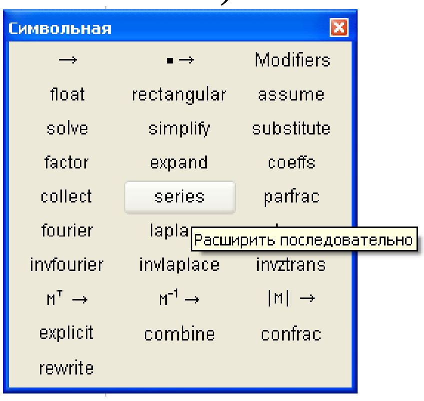
6) Разложим выражение в ряд Тейлора с точностью до шестого порядка:

Первый способ (с помощью команд меню Symbolics ► Variable ► Expand to Series (Символика ► Переменная ► Расширить до ряда)



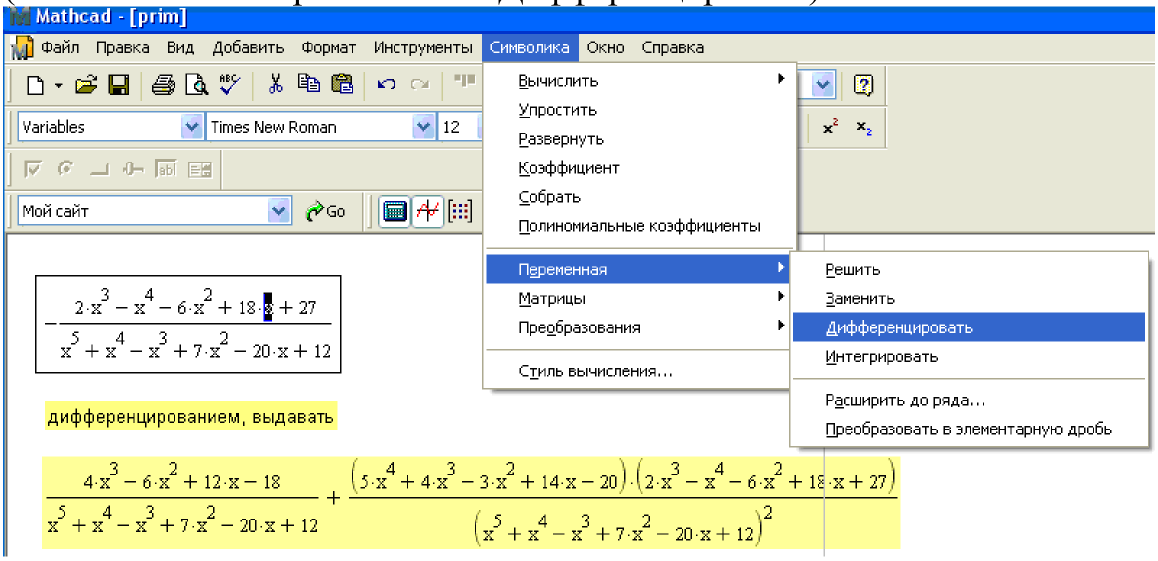
Второй способ (с помощью ключевого слова **series** на панели **Символьная**)

$$f(x) \text{ series}, x, 6 \rightarrow -\frac{9}{4} - \frac{21\cdot x}{4} - \frac{111\cdot x^2}{16} - \frac{425\cdot x^3}{48} - \frac{6265\cdot x^4}{576} - \frac{22319 x^5}{1728}$$

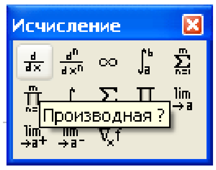


7) Найдем первую производную:

Первый способ (с помощью команд меню Symbolics ► Variable ► Differentiate (Символика ► Переменная ► Дифференцировать)



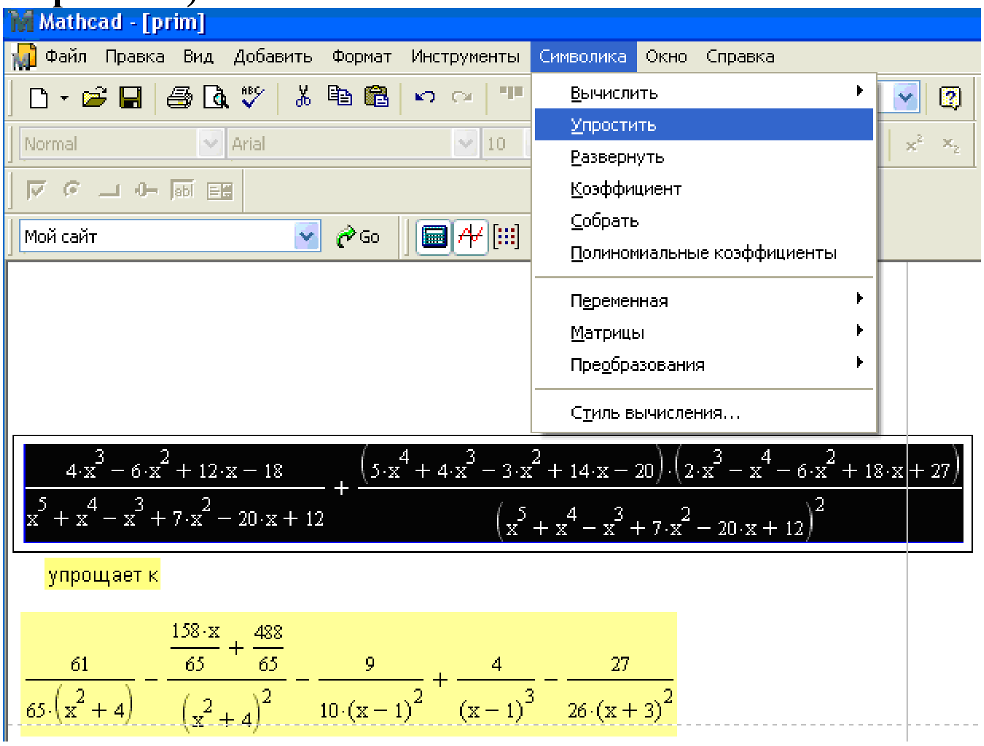
Второй способ (с помощью выбора знака **Производная ?** на панели **Вычисление**)



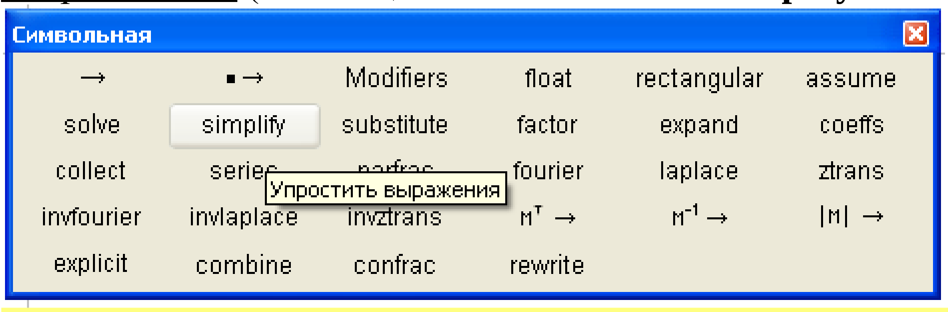
$$\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) \rightarrow \frac{4\cdot x^3-6\cdot x^2+12\cdot x-18}{x^5+x^4-x^3+7\cdot x^2-20\cdot x+12}+\frac{\left(5\cdot x^4+4\cdot x^3-3\cdot x^2+14\cdot x-20\right)\cdot\left(2\cdot x^3-x^4-6\cdot x^2+18\cdot x+27\right)}{\left(x^5+x^4-x^3+7\cdot x^2-20\cdot x+12\right)^2}$$

Упростим полученное выражение:

Первый способ (с помощью команд меню **Symbolics ► Simplify (Символика ► Упростить)**



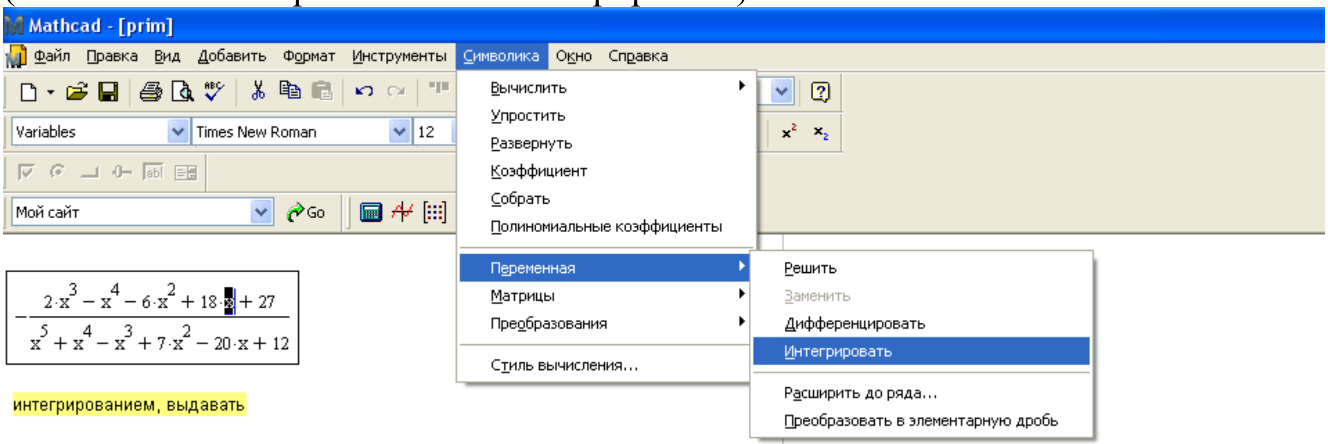
Второй способ (с помощью ключевого слова **simplify** на панели **Символьная**)



$$\frac{d}{dx}f(x)\ \text{simplify} \rightarrow \frac{61}{65\cdot\left(x^2+4\right)} - \frac{\frac{158\cdot x}{65}+\frac{488}{65}}{\left(x^2+4\right)^2} - \frac{9}{10\cdot(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} - \frac{27}{26\cdot(x+3)^2}$$

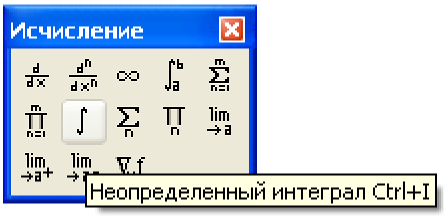
8) Найдем интеграл:

Первый способ (с помощью команд меню Symbolics ► Variable ► Integrate (Символика ► Переменная ► Интегрировать)



$$\frac{61\cdot\ln\left(x^2+4\right)}{130\cdot(x-1)} - \frac{27\cdot\ln(x+3)}{26\cdot(x-1)} - \frac{9\cdot\ln(x-1)}{10\cdot(x-1)} + \frac{2}{x-1} - \frac{79\cdot\left(2\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{x}{2}\right)-\pi\right)}{260\cdot(x-1)} - \frac{61\cdot x\cdot\ln\left(x^2+4\right)}{130\cdot(x-1)} + \frac{79\cdot x\cdot\left(2\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{x}{2}\right)-\pi\right)}{260\cdot(x-1)} + \frac{9\cdot x\cdot\ln(x-1)}{10\cdot(x-1)} + \frac{27\cdot x\cdot\ln(x+3)}{26\cdot(x-1)}$$

Второй способ (с помощью выбора знака **Неопределенный интеграл** на панели **Вычисление**)

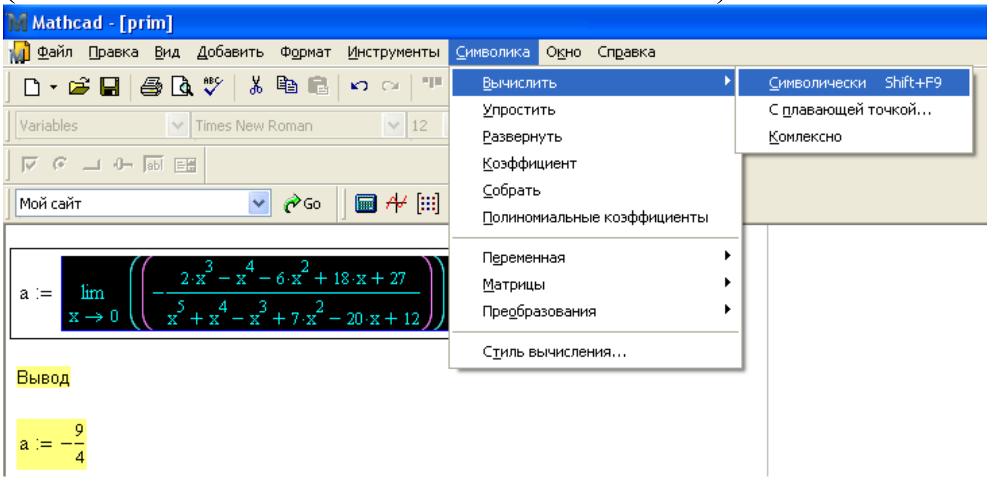


$$\int f(x)\,dx \rightarrow \frac{61\cdot\ln\left(x^2+4\right)}{130\cdot(x-1)} - \frac{27\cdot\ln(x+3)}{26\cdot(x-1)} - \frac{9\cdot\ln(x-1)}{10\cdot(x-1)} + \frac{2}{x-1} - \frac{79\cdot\left(2\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{x}{2}\right)-\pi\right)}{260\cdot(x-1)} - \frac{61\cdot x\cdot\ln\left(x^2+4\right)}{130\cdot(x-1)} + \frac{79\cdot x\cdot\left(2\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{x}{2}\right)-\pi\right)}{260\cdot(x-1)} + \frac{9\cdot x\cdot\ln(x-1)}{10\cdot(x-1)} + \frac{27\cdot x\cdot\ln(x+3)}{26\cdot(x-1)}$$

9) Вычисляем определенный интеграл $\int_a^b$ от выражения, где a - предел выражения при $x \to 0$, b - предел выражения при $x \to \infty$.

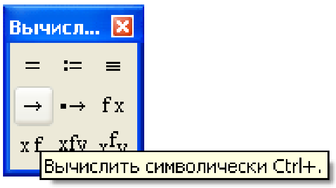
Определяем a:

Первый способ (с помощью команд меню Symbolics ► Evaluate ► Symbolically (Символика ► Вычислить ► Символически)



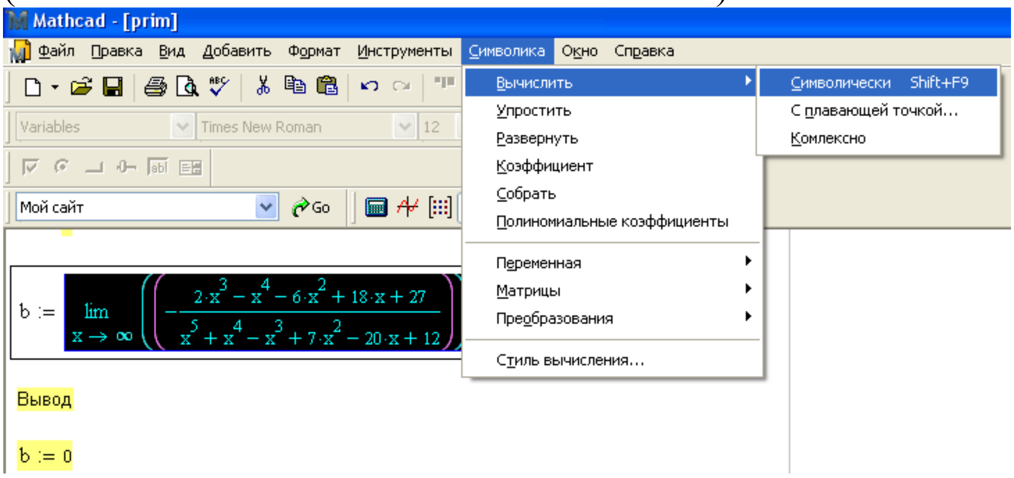
Второй способ (с помощью выбора знака **Вычислить символически** на панели **Вычисление**)

$$a := \lim_{x \to 0} f(x) \to -\frac{9}{4}$$



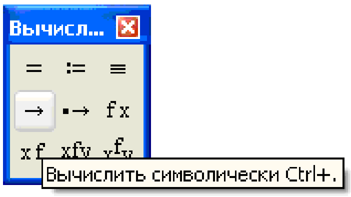
Аналогично определяем пределяем b:

Первый способ (с помощью команд меню Symbolics ► Evaluate ► Symbolically (Символика ► Вычислить ► Символически)



Второй способ (с помощью выбора знака **Вычислить символически** на панели **Вычисление**)

$$b := \lim_{x \to \infty} f(x) \to 0$$



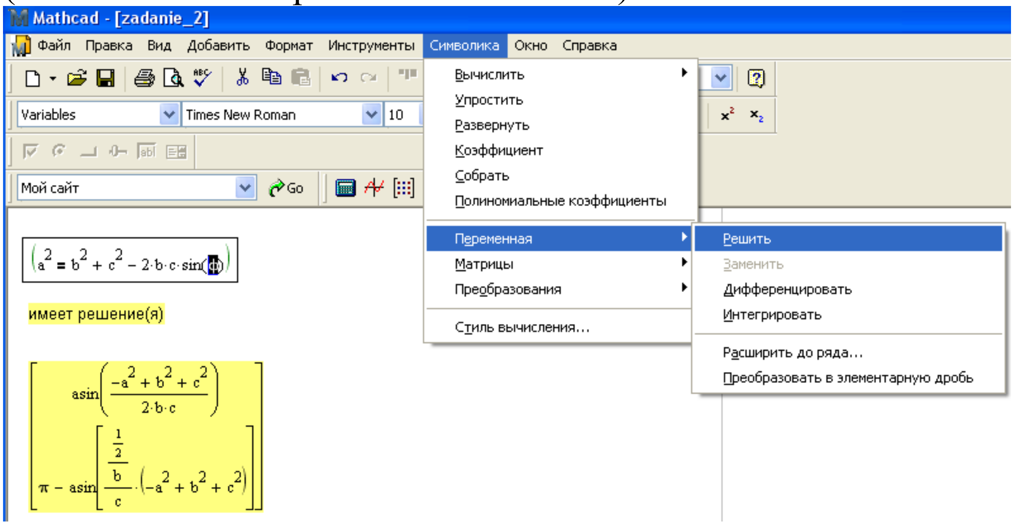
Вычисляем определенный интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx \to \frac{191\cdot\ln(4)}{130} - \frac{122\cdot\ln(2)}{65} - \frac{9\cdot\ln(13)}{10} + \frac{61\cdot\ln(145)}{130} + \frac{79\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{9}{8}\right)}{130} - \frac{18}{13}$$

Задание 2. Выразите из равенства $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sin\phi$ угол ϕ.

Решение:

<u>Первый способ</u> (с помощью команд меню Symbolics ► Variable ► Solve (Символика ► Переменная ► Решить)



<u>Второй способ</u> (с помощью ключевого слова **solve** на панели **Символьная**)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \sin(\phi)\ \text{solve}, \phi \ \rightarrow \begin{bmatrix} \operatorname{asin}\left(\dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2\cdot b\cdot c}\right) \\ \pi - \operatorname{asin}\left[\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{b}{c}}\cdot\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\right] \end{bmatrix}$$

Таким образом имеем два решения:

$$\phi = a\cdot\arcsin\left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}\right) \text{ и } \phi = \pi - a\cdot\arcsin\left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}\right)$$

Задание 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$.

<u>Первый способ</u> (с помощью ключевого слова **solve** на панели **Символьная**)

$3x - 4\cdot y = 1 \qquad x^2 + y^2 = 8$

$$3x - 4\cdot y = 1\ \text{solve}, y \ \rightarrow \frac{3\cdot x}{4} - \frac{1}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 8\ \text{solve}, y \ \rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{x^2 - 8}\cdot i \\ \sqrt{x^2 - 8}\cdot i \end{pmatrix}$$

$$x1 := \frac{3\cdot x}{4} - \frac{1}{4} = -\sqrt{x^2 - 8}\cdot i\ \text{solve}, x \ \rightarrow \frac{3}{25} - \frac{4\cdot\sqrt{199}}{25}$$

$$y1 := \frac{3\cdot x1}{4} - \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{3\cdot\sqrt{199}}{25} - \frac{4}{25}$$

$$x2 := \frac{3\cdot x}{4} - \frac{1}{4} = \sqrt{x^2 - 8}\cdot i\ \text{solve}, x \ \rightarrow \frac{4\cdot\sqrt{199}}{25} + \frac{3}{25}$$

$$y2 := \frac{3\cdot x2}{4} - \frac{1}{4} \rightarrow \frac{3\cdot\sqrt{199}}{25} - \frac{4}{25}$$

Второй способ (с помощью блока решений Given-Find)

Given $\quad x^2 + y^2 = 8 \quad 3x - 4\cdot y = 1$

$$\text{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4\cdot\sqrt{199}}{25}+\frac{3}{25} & \frac{3}{25}-\frac{4\cdot\sqrt{199}}{25} \\ \frac{3\cdot\sqrt{199}}{25}-\frac{4}{25} & -\frac{3\cdot\sqrt{199}}{25}-\frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

Ïðîâåðêà

$$\left(\frac{4\cdot\sqrt{199}}{25}+\frac{3}{25}\right)^2+\left(\frac{3\cdot\sqrt{199}}{25}-\frac{4}{25}\right)^2 = 8 \qquad 3\cdot\left(\frac{3}{25}-\frac{4\cdot\sqrt{199}}{25}\right)-4\cdot\left(-\frac{3\cdot\sqrt{199}}{25}-\frac{4}{25}\right) = 1$$

Задание 4 При каких $a \in R$ система $\begin{cases} a^3x + 2ay = 3 \\ 4x + ay = 4a \end{cases}$ имеет единственное решение ? Найдите это решение.

Находим точки $a \in R$ при которых определитель равен 0.

$$\Delta := \begin{pmatrix} a^3 & 2\cdot a \\ 4 & a \end{pmatrix} \qquad |\Delta| \rightarrow a^4 - 8\cdot a \qquad a^4 - 8\cdot a \text{ solve}, a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1-\sqrt{3}\cdot i \\ -1+\sqrt{3}\cdot i \end{pmatrix}$$

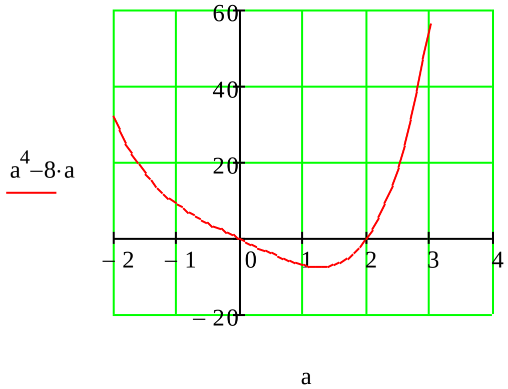
Установили: при $a = 0$ и при $a = 2$ система не имеет решений или имеет бесчисленное множество решений.
Ищем решение системы с помощью блока решений Given-Find.

Given $\quad a^3\cdot x + 2\cdot a\cdot y = 3 \quad 4\cdot x + a\cdot y = 4\cdot a$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \text{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{8\cdot a - 3}{a^3 - 8} \\ -\frac{4\cdot a^4 - 12}{8\cdot a - a^4} \end{pmatrix}$$

$$a^3\cdot x + 2\cdot a\cdot y - 3 \text{ simplify} \rightarrow 0 \qquad 4\cdot x + a\cdot y - 4\cdot a \text{ simplify} \rightarrow 0$$

$a := -2, -1.9 .. 3$



Установили решение системы:

$x = -\frac{8a-3}{a^3-3}$

$y = -\frac{4a^4-12}{8a-a^4}$

Варианты заданий

Вариант 1

1. Для выражения $\frac{x^4+x^3+2x^2+4x-8}{x^5-3x^4+9x^3-23x^2+36}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.
2. Выразите из равенства $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\varphi$ угол φ.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x=2y. \end{cases}$
4. При каких $a \in \mathrm{R}$ система $\begin{cases} a^3x+2ay=3, \\ 4x+ay=4a \end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 2

1. Для выражения $\frac{x^4-x^3+x^2-3x-6}{x^5+x^3+2x^2-12x+8}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.
2. Выразите из равенства $\frac{mv^2}{2}=mgh+E$ переменную m.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+2xy=7, \\ x^2y+xy^2=6. \end{cases}$
4. При каких $a \in \mathrm{R}$ система $\begin{cases} a^2x+3ay=2, \\ 9x+ay=4+a \end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 3

1. Для выражения $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2}{x^5 + 4x^4 + 14x^3 + 38x^2 + 45x + 18}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

2. Выразите из равенства $S = 4\pi r^2 + \pi(R + r)l$ переменную R.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ xy = 1. \end{cases}$

4. При каких $a \in \mathrm{R}$ система $\begin{cases} a^2 x - 2y = 3 + a, \\ 4ax + a^2 y = 2 \end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 4

1. Для выражения $\dfrac{x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24}{x^5 + 6x^3 + 2x^2 - 27x + 18}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

2. Выразите из равенства $\dfrac{Mu^2}{2} = Mgh(1 - \cos\beta)$ угол β.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 2, \\ 3x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

4. При каких $a \in \mathrm{R}$ система $\begin{cases} (a^2 - 1)x + 2y = 3a, \\ 4x + (a^2 + 1)y = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 5

1. Для выражения $\dfrac{x^4+2x^3-4x^2-5x-6}{x^5-x^4-x^3-7x^2-20x-12}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

2. Выразите из равенства $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{(\rho_2-\rho_1)gS}}$ переменную m.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2+xy=3,\\ x^2-xy+y^2=1.\end{cases}$

4. При каких $a\in\mathrm{R}$ система $\begin{cases}(a^2-4)x-7y=3,\\ x+(a^2+4)y=2a\end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 6

1. Для выражения $\dfrac{x^4+2x^3-6x^2+7x-4}{x^5-2x^4-4x^3-10x^2-21x-12}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

2. Выразите из равенства $u=\sqrt{2gh(1-\cos\alpha)}$ угол α.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2y-xy^2=30,\\ x+xy-y=13.\end{cases}$

4. При каких $a\in\mathrm{R}$ система $\begin{cases}ax+y=3a+1,\\ ax+(a^3-6)y=2a\end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 7

1. Для выражения $\dfrac{x^4-2x^3+2x^2-10x-15}{x^5+2x^4-3x^3+12x^2-28x+16}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

2. Выразите из равенства $a=g+k\dfrac{l_0-l}{m_1+m_2}$ переменную m_2.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+xy+y^2=2, \\ xy=-1. \end{cases}$

4. При каких $a\in\mathrm{R}$ система $\begin{cases} (a^2-4)x+(a+2)y=1, \\ (4-2a)x+a^2y=2a \end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 8

1. Для выражения $\dfrac{x^4-2x^3-2x^2-12x-48}{x^5-x^4-16x^3+19x^2+21x+36}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

2. Выразите из равенства $S=\pi DH+\pi L\dfrac{D+d}{2}$ переменную D.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2-25xy+28y^2=0, \\ y^2-xy=-3. \end{cases}$

4. При каких $a\in\mathrm{R}$ система $\begin{cases} (a^2-4)x-9y=1, \\ 5x-a^2y=2a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 9

1. Для выражения $\dfrac{x^4+5x^3+8x^2+10x+12}{x^5-6x^4+3x^3+10x^2+32x+32}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

2. Выразите из равенства $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{x}$ переменную x.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x^2+2xy+y^2=11,\\ x^2+2xy+3y^2=17.\end{cases}$

4. При каких $a\in\mathrm{R}$ система $\begin{cases}(a^2-6)x-3y=2a,\\ 9x-a^2y=4\end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 10

1. Для выражения $\dfrac{x^4+2x^3-7x^2+2x-8}{x^5+3x^4+x^3-3x^2-14x+12}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

2. Выразите из равенства $c\cdot\ln\dfrac{x+b}{c}+a\dfrac{b}{c}=0$ переменную x.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2+y^2+3xy=12,\\ 2(x+y)^2-y^2=14.\end{cases}$

4. При каких $a\in\mathrm{R}$ система $\begin{cases}a^2x+y=2a^2+1,\\ -6x+(5-a^2)y=4\end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 11

1. Для выражения $\dfrac{x^4-6x^3+16x^2-48x+64}{x^5+2x^4-4x^2-5x+6}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

2. Выразите из равенства $ae^{2x+bc}+\ln(2b+c)=0$ переменную x.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \left|x^2-4y+3\right|+y=1, \\ 2x+2y=1. \end{cases}$

4. При каких $a\in\mathrm{R}$ система $\begin{cases} 2x-(5-a^2)y=2, \\ a^2x+3y=4+a \end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Вариант 12

1. Для выражения $\dfrac{x^4-2x^3+4x^2-14x-21}{x^5-2x^4-4x^3+17x^2-36x+36}$ выполните задания, перечисленные в первом пункте указаний к лабораторной работе.

2. Выразите из равенства $a=g+\dfrac{k(l_0-l)}{m_1+m_2}$ переменную k.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \left|x^2+12y+1\right|+2y=-3, \\ x+2y=1. \end{cases}$

4. При каких $a\in\mathrm{R}$ система $\begin{cases} 8x+(a^2+1)y=2, \\ (a^2-1)x+y=4a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение? Найдите это решение.