Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

В. Г. ДЕГТЯРЕВ, Н. М. РЕПНИКОВА,
И. А. САВУШКИНА, Н. В. ШАДРИНЦЕВА

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ТРАНСПОРТНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Сборник задач

Часть 1

Санкт-Петербург 2008

УДК 519.1(075.6)
ББК В183
С71

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Балтийского государственного технического университета
М. С. Попов;
кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики ПГУПС *В. В. Гарбарук*

С71 **Специальные** разделы математики для транспортных специальностей : сборник задач. Ч. 1 / В. Г. Дегтярев, Н. М. Репникова, И. А. Савушкина, Н. В. Шадринцева. – СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2008. – 161 с.

В доступной для студентов форме излагаются основные элементы теории (кратко, без доказательств), приводится решение некоторого количества задач и примеров, а также типовые расчеты (примеры для самостоятельного решения) по следующим разделам дисциплины высшая математика: «Матрицы и определители», «Элементы векторной алгебры», «Элементы аналитической геометрии» и «Линейное программирование».

Пособие соответствует типовой программе Научно-методического совета по математике Министерства науки и образования РФ и может быть использовано студентами технических вузов в учебном процессе.

УДК 519.1(075.6)
ББК В183

1. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Матрицы и действия над ними.

Справочный материал.

1. Матрицей размера $m \times n$ называется таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} - элемент матрицы, стоящей в i - ой строке и j - ом столбце.

2. Если $m = n$ (т. е. число строк равно числу столбцов), то матрица называется квадратной порядка n.

Элементы квадратной матрицы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ называются диагональными, а их совокупность образует главную диагональ.

3. Сложение (вычитание) матриц одного и того же размера осуществляется поэлементно:

$C = A + B$, если $c_{ij} = a_{il} + b_{ij}$ $(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n})$.

4. При умножении матрицы на число – каждый элемент матрицы умножается на это число:

$C = \lambda \cdot A$, если $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ $(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n})$.

5. Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением номеров.

6. Умножение матрицы A на матрицу B определено только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Тогда произведением матриц $\underset{m\times p}{A}\times\underset{p\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i строки матрицы A на соответствующие элементы j столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ip}b_{pj}\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$$

Примеры:

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\\0&3\end{pmatrix}$.

Найти $D=A^T-3B$.

Решение: Найдем матрицу A^T, транспонированную к A, $A^T=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\3&4\end{pmatrix}$.

Найдем матрицу $3B$, умножив все элементы матрицы B на 3.
Проведем вычитание матриц A^T и $3B$.
Таким образом:

$$D=A^T-3B=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\3&4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0&2\\3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&6\\9&3\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-6\\-7&0\\3&-5\end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0&1\\3&4\end{pmatrix}$.

Найти $A\cdot B$.

Решение: произведение матриц A,B не определено, так как число столбцов матрицы A не равно числу строк матрицы B.

3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\\0&3\end{pmatrix}$.

Найти $A\cdot B$ и $B\cdot A$

Решение:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\3&1\\0&3\end{pmatrix}=$$

$$\langle \text{по формуле (1)} \rangle = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 3+3\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 3 \\ 0\cdot 0+3\cdot 3+4\cdot 0 & 0\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Аналогично:

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 13 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание на то, что в общем случае, произведение матриц <u>не коммутативно</u>, то есть: $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Задачи для самостоятельного решения.

I. *Выполнить действия.*

1. Найти матрицу $C = -5A + 2B$, если

а. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

б. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти $3A + 2E$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, а $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Проверить, что $(A+B)^T = A^T + B^T$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти

а. $3A + B^T$.

б. $2A^T - 4B$.

II. *Найти произведения матриц.*

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

III. *Проверить перестановочность матриц.*

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

VI. *Решить матричные уравнения.*

1. $5A + 2X - B = 0$, если $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $3A+2X=E$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ и E - единичная матрица 3-го порядка.

3. $2A-3X=B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.2. Определители квадратных матриц.

Справочный материал.

1. Определителем матрицы второго порядка называется число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (1)$$

2. Определителем матрицы третьего порядка называется число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \quad (2)$$

3. Определителем квадратной матрицы A n -го порядка называется число, которое ставится в соответствие данной матрице по определенному правилу, которое будет приведено ниже.

   Определитель n–го порядка обозначается:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n–го порядка называется определитель $(n-1)$ - го порядка, полученный из данного вычеркиванием i–ой строки и j–ого столбца.
5. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число, которое находится по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

   <u>Замечание:</u>

   Здесь и далее, говоря об элементах, строках или столбцах определителя, мы будем иметь ввиду элементы, строки или столбцы соответствующей матрицы.
6. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad (3)$$

Равенство (3) называется разложением определителя по элементам i – ой строки или по j- му столбцу.

7. Определитель треугольной и, в частности, диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.
8. Некоторые свойства определителей:
   8.1. Определитель не изменится при транспонировании матрицы.
   8.2. Определитель не изменится, если к элементам какой либо строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на число, отличное от нуля.
   8.3. Определитель равен нулю, если:
   - Все элементы какой либо строки равны нулю.
   - Элементы любых двух строк пропорциональны либо, в частном случае, равны.

   Перечисленные свойства справедливы и для столбцов.

Примеры:

1. Вычислить определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Согласно формуле (1)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 22$$

Выражение (2) можно получить следующим образом. Припишем справа к таблице элементов определителя первые два столбца. Со знаком «+» в сумму (2) входят произведения элементов, стоящих на главной диагонали и на прямых, параллельных этой диагонали. Слагаемые со знаком «-» получаются аналогично по отношению к побочной диагонали.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{matrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) \cdot 5 + (-4) \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-2) \cdot 3 - (-3) \cdot 4 \cdot 2 = -5$$

2. Найти минор и алгебраическое дополнение элемента a_{32} определителя

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

Вычислить определитель Δ_2, разложив его по элементам первой строки

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить определитель второго порядка:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix},\ \Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Определить, при каких значениях α определители не равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & \alpha+1 & 9 \end{vmatrix}.$$

4. Решить уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1.3. Обратная матрица.

Справочный материал.

1. Квадратная матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A того же порядка, если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \qquad (1)$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

2. Квадратная матрица A называется невырожденной (или неособенной), если ее определитель отличен от нуля, т.е. $\det A \neq 0$.
3. Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$.

   В этом случае ее можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A},$$

где $\tilde{A}$ - присоединенная матрица, элементы которой $A_{ij} = A_{ij}^T$ равны алгебраическим дополнениям элементов матрицы A^T, транспонированной к матрице A, т.е.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Примеры:

1. Выяснить, является ли матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ обратной к матрице

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение*:*

Найдем произведения $A^{-1} \cdot A$ и $A \cdot A^{-1}$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

В соответствии с определением (1) данные матрицы являются взаимно обратными.

2. Определить, имеют ли данные матрицы обратные:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -4 & -12 & 16 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Матрица A обратной не имеет, т. к. она не квадратная (ее размер 3×4).

Матрица B имеет обратную, т. к. ее определитель

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$$

Матрица C обратной не имеет, т. к. определитель этой матрицы

$$\det C=\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\ -4 & -12 & 16\\ 5 & 3 & 7\end{vmatrix}=0\ \left(\begin{matrix}\text{элементы 1-ой и 2-ой стоки}\\ \text{соответственно пропорциональны}\end{matrix}\right).$$

3. Найти матрицу, обратную к данной $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Решение:

- Найдем определитель матрицы A: $\det A=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 0\end{vmatrix}=-14\neq 0$.

Так как $\det A\neq 0$, следовательно, матрица A имеет обратную. Напомним, что обратная матрица A вычисляется по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где A_{ij} алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

- Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1 \qquad A_{12}=(-1)^{3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & 0\end{vmatrix}=-3 \qquad A_{13}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -3 & -1\end{vmatrix}=6$$

$$A_{21}=(-1)^{3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1 \qquad A_{22}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 0\end{vmatrix}=-3 \qquad A_{23}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-8$$

$$A_{31}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5 \qquad A_{32}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{33}=(-1)^{6}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

- Находим обратную матрицу по формуле (1):

$$A^{-1}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ -3 & -3 & -1\\ 6 & -8 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{5}{14}\\ \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14}\\ -\frac{6}{14} & \frac{8}{14} & -\frac{2}{14}\end{pmatrix}.$$

- Проверим правильность вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ -3 & -3 & -1\\ 6 & -8 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 0\end{pmatrix}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-14 & 0 & 0\\ 0 & -14 & 0\\ 0 & 0 & -14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Вычислить, какие из приведенных матриц имеют обратные.
   - $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.
   - $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.
   - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
   - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.
2. Для следующих матриц найти обратные:
   - $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
   - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
   - $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Решить матричные уравнения:
   - $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

   Указание: X – квадратная матрица второго порядка.

   Исходное матричное уравнение имеет вид $AX = B$.

   Для нахождения матрицы X достаточно умножить обе части исходного

   уравнения на A^{-1} слева $X = A^{-1} \cdot B$.
4. Выполнить действия $A \cdot B - 3C^{-1}$, где

   $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = B \cdot C^T + 3E$, где

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.4. Ранг матрицы.

Справочный материал.

1. Рангом матрицы $A(rangA$ или $r(A))$ называется максимальный порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.
   - Ранг прямоугольной матрицы $A_{m\times n}$ удовлетворяет неравенству:
   $$0\le r(A)\le \min(m,n).$$
   - Если матрица A - квадратная порядка n, то $rang(A)=n$ тогда и только тогда, когда $|A|\ne 0$.
2. Элементарные преобразования, не меняющие ранга матрицы
   - Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
   - Прибавление к элементам какой либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число
   - Перестановка двух строк (столбцов) матрицы.
   - Транспонирование матрицы.
   - Отбрасывание нулевой строки (столбца).
3. С помощью элементарных преобразований матрицу $A=(a_{ij})_{m\times n}$ приводят к ступенчатому виду:

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & ... & b_{1r} & ... & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & ... & b_{2r} & ... & b_{2n}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & b_{rr} & ... & b_{rn}\\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0\end{pmatrix}, \text{ где}$$

все диагональные элементы $b_{11},b_{22},...,b_{rr}$, отличные от нуля, а элементы, расположенные ниже диагональных элементов равны нулю.

Так как минор $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$, то ранг ступенчатой матрицы B равен r

(т.е. числу ненулевых строк ступенчатой матрицы *B*).

4. *Базисный минор* – это не равный нулю минор, порядок которого равен рангу матрицы. Матрица может иметь несколько базисных миноров.

Пример.

Найти ранг матрицы и указать один из базисных миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \\ 7 & 3 & 1 \\ -10 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение: матрица имеет размер (5×3), $\min(5{,}3)=3$, значит $r(A)\le 3$.

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \\ 7 & 3 & 1 \\ -10 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{matrix} \textit{транспонируем} \\ \textit{матрицу\_A} \end{matrix} \right\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\langle \begin{matrix} \textit{поменяем} \\ \textit{местами} \\ \text{I}\,\textit{и}\,\text{II} \\ \textit{строки} \end{matrix} \right\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{matrix} \textit{умножим\_I} \\ \textit{строку\_на\_2} \\ \textit{и\_прибавим\_к} \\ \textit{3-ей\_строке} \end{matrix} \right\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили ступенчатую матрицу, у которой две ненулевые строки. Таким образом ранг исходной матрицы *A* равен двум.

Выделенный минор может быть выбран в качестве базисного.

Задачи для самостоятельного решения:

Найти с помощью элементарных преобразований ранг матрицы:

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & 7 \\ 8 & 7 & -2 & -1 & 15 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ 5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Общий вид системы линейных уравнений.

Справочный материал.

1. Общий вид системы m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

2. <u>В матричной форме</u> система (1) имеет вид:

$$AX = B, \text{ где } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Здесь A - матрица системы, X - столбец неизвестных, B - столбец свободных членов.

3. Если определитель матрицы системы n линейных уравнений с n переменными $\Delta = |A| \neq 0$, то *единственное* решение системы определяется одним из известных методов, например,

а. *методом обратной матрицы* по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (3)$$

б. *по формулам Крамера*:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (4)$$

где Δ_j - определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов B.

4. <u>Методом Гаусса</u> можно решать любую систему уравнений вида (1).

С помощью элементарных преобразований над строками расширенная матрица системы (1) может быть приведена к виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right) \qquad (5)$$

Матрица (5) является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ \qquad 0 = b'_{r+1} \\ \qquad \dots\dots\dots \\ \qquad 0 = b'_m \end{cases}, \qquad (6)$$

которая с точностью до обозначения неизвестных эквивалентна исходной системе.

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1},\dots,b'_m$ отлично от нуля, то система (6), а следовательно и исходная система (1) несовместны.

Если же $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$, то система совместна и формулы (6) дают по существу явное выражение для базисных неизвестных $x_1,\dots,x_r$ через свободные неизвестные $x_{r+1},\dots,x_n$.

Пример решения типового варианта.

Задание №1.

Для данных матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Найти:

1. $D = B^T \cdot C$.
2. $F = A^{-1} \cdot B - 2C$.

Решение:

1. Транспонируем матрицу B: $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем $D = B^T \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$,

в частности элемент $d_{31} = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 = -9$

<u>Ответ:</u> $D = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 4 \\ -9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

2. Матрица A - невырожденная, так как $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Обратную матрицу находим по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Найдем алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 1 = 1$, $A_{12} = (-1)^3 \cdot 1 = -1$,

$A_{21} = (-1)^3 \cdot 1 = -1$, $A_{22} = (-1)^4 \cdot 2 = 2$.

Запишем $A^{-1} = \dfrac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Вычислим

$$F = A^{-1} \cdot B - 2C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $F = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Задание №2.

Вычислить определитель, используя его свойства:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Известно, что определитель матрицы n – го порядка может быть разложен по элементам любой строки (столбца).

В частности верна формула:

$$\det A = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn}, \qquad (1)$$

где k – номер строки, по которой ведется разложение; A_{kj} - алгебраические дополнения соответствующих элементов.

Разложим данный определитель по элементам 1 – ой строки:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= 3\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -5 & -7 & 5 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} -3 & 4 & -6 \\ 2 & -7 & 5 \\ -4 & 5 & -6 \end{vmatrix} + (-5)\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & 5 \\ -4 & 3 & -6 \end{vmatrix} + 8\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -7 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-2) + 3\cdot 25 - 5\cdot 23 - 8\cdot(-8) = 18$$

(Определители третьего порядка вычислены по правилу треугольников.)

Объем вычислений может быть уменьшен, если в строке (столбце), по которой ведется разложение, есть элементы равные нулю (т. к. $a_{kj}A_{kj} = 0$).

При вычислении определителя n – го порядка используют следующие методы:

1. *Метод понижения порядка.*

Используя свойства определителя, его преобразуют так, чтобы все элементы некоторого ряда[1], кроме одного, стали равны нулю, а затем раскладывают определитель по этому ряду. При этом разложение будет содержать только один определитель (*n-1)* – го порядка, к которому применяют тот же прием.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{matrix} \text{2 - ю строку} \\ \text{прибавим к 1 - ой} \end{matrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{matrix} \text{а) 2 - ой столбец умножим на (-1)} \\ \text{и прибавим к 3 - му столбцу,} \\ \text{б) 2 - ой столбец умножим на 2} \\ \text{и прибавим к 4 - му столбцу.} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -2 & -5 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} = (-1)\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -5 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{matrix} \text{2 - ой столбец умножим на 2} \\ \text{и прибавим к 1 - му столбцу} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a_{32}A_{32} = 2\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-9) = 18$$

2. *Сведение определителя к треугольному виду:*

Определитель преобразуется так, чтобы все элементы, лежащие по одну сторону от главной диагонали, стали равными нулю.

[1] Под рядом будем понимать строку или столбец определителя.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \langle IV + I \rangle = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{matrix} (-3)\cdot I + II \\ 2\cdot I + III \\ 4\cdot I + IV \end{matrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -12 \\ 0 & -5 & -7 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} \text{общий множитель элементовв} \\ \text{2-ой строки выносим} \\ \text{за знак определителя} \end{matrix} \right\rangle = 2\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -5 & -7 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & -14 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{matrix} 5\cdot II + III \\ (-3)\cdot II + IV \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= 2\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -21 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \langle III + IV \rangle = 6 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6\cdot((-1)\cdot 1\cdot 1\cdot(-3)) = 18$$

Таким образом определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Задание №3.

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \qquad (1)$$

1. с помощью обратной матрицы.
2. по формулам Крамера.
3. методом Гаусса.

Решение:

1. Заметим, что дана система, у которой число уравнений равно числу неизвестных.

Запишем систему (1) в матричной форме:

$$AX = B, \qquad (2)$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Если в системе (1) $\det A = \Delta \neq 0$, то матрица A имеет единственную обратную A^{-1}.

В этом случае решение системы находится по формуле:

$$X = A^{-1}\cdot B \qquad (3).$$

Вычислим определитель матрицы A:

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, так как $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную A^{-1}.

Для построения матрицы A^{-1} вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$ $\quad$ $A_{12} = (-1)^{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$A_{21} = (-1)^{3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $\quad$ $A_{22} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{31} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad$ $A_{32} = (-1)^{5}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$A_{13} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{23} = (-1)^{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$A_{33} = (-1)^{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле (3) решение системы имеет вид:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

то есть $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 3$.

Ответ: $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 3$.

2. По формулам Крамера решение системы находится следующим образом:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}\ \ (\Delta \neq 0),\ i = 1,2,3, \qquad (4)$$

где Δ_i - определитель, получающийся из определителя системы, заменой i - го столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \text{ (найден в п.1).}$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -18,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -27.$$

Согласно формуле (4), определяем решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{-9} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-27}{-9} = 3.$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

3. Метод Гаусса – состоит в последовательном исключении неизвестных.

Составим расширенную матрицу системы, приписав справа к матрице системы столбец свободных членов: $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$.

Проводя элементарные преобразования <u>над строками</u> этой матрицы, сведем ее к трапециевидному (в частности, треугольному) виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}+\mathrm{I}]{\mathrm{II}-2\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}\div 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{5\mathrm{II}+\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}\div 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Последняя матрица является расширенной матрицей системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ \quad x_2 = 2 \\ \quad\quad x_3 = 3 \end{cases}$, которая эквивалентна исходной. Этот этап называется прямым ходом метода Гаусса.

Осуществив обратный ход метода Гаусса, прочитав систему снизу вверх, получим решение системы:

$$x_3 = 3,\quad x_2 = 2,\quad x_1 = -2x_2 + x_3 + 2 = -4 + 3 + 2 = 1.$$

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = 2 - 4 + 3 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

Замечание: Заметим, что наиболее важным при решении систем, является метод Гаусса, так как им можно решать и системы, у которых $m \neq n$ и который позволяет однозначно установить, является ли данная система определенной, неопределенной или несовместной.

Задание №4.

При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Дана однородная система у которой число уравнений равно числу неизвестных. Эта система (1) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю $(\det A = 0)$. Из этого условия находим коэффициент α.

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & \alpha & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Раскладывая определитель по элементам третьей строки, получаем:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - \alpha \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или}$$

$7 + 11\alpha + 15 = 0$, следовательно $11\alpha = -22$ и $\alpha = -2$.

Подставляем $\alpha = -2$ в заданную систему.

Получим:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & 0 \\ 0 & 10 & -22 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -11/5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/5 & 0 \\ 0 & 1 & -11/5 & 0 \end{array}\right)$$

Последняя расширенная матрица соответствует новой системе:

$$\begin{cases} x_1 \quad -\dfrac{7}{5}x_3 = 0 \\ \quad x_2 - \dfrac{11}{5}x_3 = 0 \end{cases}$$, которая равносильна исходной системе.

Считая x_1 и x_2 - базисными переменными, а x_3 - свободной, можем записать множество решений исходной системы в виде: $\begin{matrix} x_1 = {}^{7}\!/_{5}\, x_3 \\ x_2 = {}^{11}\!/_{5}\, x_3 \end{matrix}$, где x_3 - любое вещественное число. Таким образом система имеет бесчисленное множество решений.

.

Задание №5.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ и указать один из базисных миноров.

Решение:

Так как элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, а ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк, то для нахождения ранга матрицы надо:

- Свести исходную матрицу к ступенчатому виду.
- Подсчитать число ненулевых строк в ступенчатой матрице.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{matrix} \textit{поменяем} \\ \textit{местами} \\ 1 \textit{и} 3 - \textit{ю} \\ \textit{строки} \end{matrix} \right\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\langle \begin{matrix} \mathrm{I} \cdot (-5) + \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \cdot (-3) + \mathrm{III} \\ \mathrm{I} \cdot (-7) + IV \end{matrix} \right\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 52 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{matrix} \mathrm{II} \div 3 \\ \mathrm{III} \div 2 \\ IV \div 4 \end{matrix} \right\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\langle \begin{matrix} \mathrm{II} \cdot (-1) + \mathrm{III} \\ \mathrm{II} \cdot (-1) + IV \end{matrix} \right\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица сведена к ступенчатому виду. Число ее ненулевых строк равно двум, следовательно $rangA = 2$.

Замечание: вычисляя ранг матрицы можно преобразовывать как строки, так и столбцы матрицы.

Задание №6.

Исследовать системы линейных уравнений с помощью теоремы Кронекера – Капелли и в случае совместности решить их.

$$1.\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 8 \end{cases}, \qquad 2.\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1 \\ 5x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$$

Решение:

1. Определим ранг матрицы системы и расширенной матрицы.

Для этого выпишем расширенную матрицу системы, и с помощью линейных преобразований над строками, сведем ее к ступенчатому виду.

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Таким образом ранги расширенной и основной матриц системы равны:

$$r(A) = r(A/B) = r = 2.$$

Число неизвестных в данной системе $n = 4$, т. е.

$r(A) = r(A/B) = r < n\ (2 < 4)$.

В силу теоремы Кронекера – Капелли система совместна и имеет бесчисленное множество решений (т.е. система является неопределенной).

Выпишем систему равносильную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = -3 \end{cases} \qquad (*)$$

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ - базисный минор(составлен из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2).

Выбор базисного минора определяет базисные переменные (их число равно r). Остальные неизвестные, число которых ($n – r$) называются свободными.

В системе (*): базисные переменные - x_1, x_2,

свободные переменные - x_3, x_4.

Чтобы найти общее решение системы, надо выразить базисные переменные через свободные. «Обратным ходом» метода Гаусса из последнего

уравнения системы (*), получаем: $x_2 = -3 - x_3 + 3x_4$, тогда
$x_1 = 2 - 5x_2 - 3x_3 = 2 - 5(-3 - x_3 + 3x_4) - 3x_3 = 17 + 2x_3 - 15x_4$.
Задавая свободным переменным произвольные значения $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2$ запишем общее решение системы в виде:

$$\begin{cases} x_1 = 17 + 2C_1 - 15C_2 \\ x_2 = -3 - C_1 + 3C_2 \\ x_3 = C_1 \\ x_4 = C_2 \end{cases}.$$

2. Проведем элементарные преобразования над строками расширенной матрицы системы:

$$(A/B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle \mathrm{I}-\mathrm{II} \rangle} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\left\langle \substack{(-2)\mathrm{I}+\mathrm{II} \\ (-5)\mathrm{I}+\mathrm{III}} \right\rangle} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Итак $r(A) = 2$, $r(A/B) = 3$, следовательно $r(A) \neq r(A/B)$, т.е. система несовместна (не имеет решений).
Замечание: При решении системы уравнений при $m<n$ (число уравнений меньше числа неизвестных) нужно уметь разбивать переменные, заданной системы уравнений на основные и свободные. Находить любое возможное решение системы, имеющей хотя бы одну группу основных переменных. А так же необходимо знать и уметь объяснить, какие системы уравнений называются совместными (определенными и неопределенными) и несовместными.

2.2. Типовой расчет.

Вариант 1.

1. Выполнить действие: $C = A \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -8 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_3 = -8 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & -6 & -4 \\ 1 & 2 & 15 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Вариант 2.

1. Выполнить действие: $C = A \cdot A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 7 \\ 11x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 12 \\ 5x_1 - 3x_3 = 6 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -\alpha x_1 + 4x_3 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -8 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$$

Вариант 3.

1. Выяснить, какие из операций можно выполнить:

- $A + B$.
- $A^T + B$.
- $A + B^T$.
- $A \cdot B$.
- $B \cdot A$.
- $A^T \cdot B$.
- $A \cdot B^T$.
- $A^T \cdot B^T$.
- $B^T \cdot A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 22 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} -\alpha x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 7 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \end{cases}$$

Вариант 4.

1. Вычислить: $2A \cdot B - C^{-1}$,если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -8 \\ 4 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - \alpha x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

Вариант 5.

1. Найти: $2A - B^2$,если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ -3x_1 - x_2 + 5x_3 = -6 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + \alpha x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4=1 \\ 6x_1+4x_2+4x_3+6x_4=1 \\ -x_1+4x_2-3x_3+x_4=6 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=5 \end{cases}$$

Вариант 6.

1. Выполнить действия: $C \cdot B - 3A^{-1}$,если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 & 4 \\ -6 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3=2 \\ x_1-2x_2+4x_3=3 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} \alpha x_1-2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-4x_3=0 \\ 5x_1-2x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -7 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5 \\ 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2 \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_4=3 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=2 \end{cases}$$

Вариант 7.

1. Выполнить действия: $A \cdot B$,если

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\2&3&2\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix}3&8&3&-1\\2&3&4&1\\1&-3&-2&-2\\5&-8&4&2\end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases}x_1+x_3=3\\x_2+2x_3=4\\x_1+x_2+3x_3=9\end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-2x_3=0\\3x_1+x_2+\alpha x_3=0\\x_1+5x_2-5x_3=0\end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&5&-1\\1&-1&6&-1\end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases}6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7\\9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13\\3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\end{cases} \qquad \begin{cases}4x_1+3x_2-3x_3-x_4=4\\3x_1-x_2+3x_3-2x_4=1\\3x_1+x_2-x_4=0\\5x_1+4x_2-2x_3+x_4=3\end{cases}$$

Вариант 8.

1.

- Найти: A^2-2A ,если

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}.$$

- Найти: $A\cdot B$, если

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&4\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

2 Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -8 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 8 & -2 \\ 2 & -2 & 5 & -12 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 9.

1. Найти:_ $A \cdot C$ и $B \cdot C$:,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить можно ли найти произведения AB, CA, CB?

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 3 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 7x_1 + 3x_2 - 2\alpha x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Вариант 10.

1. Вычислить: $CB - 4A^{-1}$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Вариант 11.

1. Вычислить: $A^{-1} \cdot B - 2C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & -3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & -9 \\ 1 & 4 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 16 \\ 5x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - \alpha x_3 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}$$

Вариант 12.

1. Вычислить: $2A^{-1} + CB$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

6 Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1 \\ x_1+3x_2-13x_3+22x_4=-1 \\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4=5 \\ 2x_1+3x_2+4x_3-7x_4=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=2 \\ 3x_1+3x_2-5x_3+x_4=-3 \\ -2x_1+x_2+2x_3-3x_4=5 \\ 3x_1+x_3-10x_4=8 \end{cases}$$

Вариант 13.

1. Найти: $C=B-3A$, если

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α**:**

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=0 \\ x_1-5x_2-\alpha x_3=0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+7x_3+x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+x_3+5x_4=8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ 6x_1+8x_2-14x_3=17 \\ 2x_1-2x_2-x_3=1 \\ 5x_1+11x_3-16x_3=21 \end{cases}$$

Вариант 14.

1. Найти: $A+2B$; $A\cdot B^T$; $B^T\cdot A$,

если $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 2\\ 4 & -1 & -1 & 4\\ 0 & 5 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=5\\ -2x_1+3x_3=-1\\ x_1+4x_2+3x_3=1\end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=0\\ 2x_1+5x_2+3x_3=0\\ \alpha x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & -2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & -1 & 5 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3\\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7\\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2\\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3\\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9\\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1\\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2\\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1\\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2\end{cases}$$

Вариант 15.

1. Вычислить $3AB-C^{-1}$,

если $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -3 & 2\\ 1 & 1 & -3 & 4\end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \alpha x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 7 \\ 7 & -15 & -11 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 19 \end{cases}$$

Вариант 16.

1. Вычислить $\left(A - B^T\right) \cdot B$,

если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - \alpha x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 - 7x_4 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 - 13x_3 - 11x_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Вариант 17.

1. Вычислить $\left(A - B^T\right) \cdot B$,

если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Вариант 18.

1. Вычислить $C^{-1} - 2AB$,

если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 3 \\ 4x_1 - x_2 - 9x_3 - 7x_5 = 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 3 \\ 3x_1 - 6x_3 - x_4 - 4x_5 = 4 \end{cases}$$

Вариант 19.

1. Вычислить: $(A - B^T) \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 4 & 18 & 48 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ \alpha x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Вариант 20.

1. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $2A-3X=B$. Проверить, что $(AB)^T=B^TA^T$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 6 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -4\end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=1\\ 5x_1+3x_2-2x_3=2\\ 3x_1+2x_2-3x_3=0\end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases}\alpha x_1-2x_2+x_3=0\\ 2x_1+3x_2-x_3=0\\ 4x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 5 & -4 & -5 & -3\\ 4 & 1 & -3 & -4 & -2\end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases}x_1-4x_2+2x_3-x_4=0\\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=2\\ x_1+7x_2-3x_3+3x_4=5\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+x_4=2\\ -x_1+3x_2-2x_3+4x_4=3\\ 7x_1+5x_2-12x_3-2x_4=5\end{cases}$$

Вариант 21.

1. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $3A+2X=E$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ 4 & 3 & -8\\ 2 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 11x_5 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10 \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$$

Вариант 22.

1. Вычислить: $3C - A^{-1}B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

4. При каком значении α однородная система имеет ненулевое решение. Найти все решения системы при найденном α:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -7 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 6x_1 + 13x_2 - 12x_3 + 8x_4 = 0 \\ 2x_1 + -3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

Вариант 23.

1. Вычислить: $A^{-1}B - 2C$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ 11x_1 - 10x_2 - 5x_3 = 14 \\ 9x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

4. Определить имеет ли однородная система ненулевые решения:

$$\begin{cases} 7x_1 - \alpha x_2 - 5x_3 = 0 \\ 11x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 + 3x_5 = 8 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 9x_1 + 6x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20 \end{cases}$$

Вариант 24.

1. Проверить, что $(A+B)^T = A^T + B^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$$

4. Определить имеет ли однородная система ненулевые решения:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 19x_3 + 25x_4 = 25 \\ 10x_1 + 22x_2 + 16x_3 + 39x_4 = 25 \\ 5x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 25x_4 = 30 \\ 20x_1 + 46x_2 + 34x_3 + 89x_4 = 70 \end{cases}$$

Вариант 25.

1. Вычислить: $3A + B^{-1}C$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = 14 \end{cases}$$

4. Определить имеет ли однородная система ненулевые решения:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=4 \\ 4x_1+3x_2+x_3+x_4=5 \\ 5x_1+11x_2+3x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-7x_2-x_3+2x_4=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5 \\ 6x_1-3x_2+x_3-4x_4=7 \\ 4x_1-2x_2+14x_3-31x_4=18 \end{cases}$$

Вариант 26.

1. Вычислить: $(A-B^T)\cdot B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ x_1+5x_2-4x_3=-5 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-4 \end{cases}$$

3. Определить имеет ли однородная система ненулевые решения:4

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=0 \\ \alpha x_1+2x_2-2x_3=0 \\ x_1-8x_2+6x_3=0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & 12 & 11 & -5 \\ 1 & -3 & 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2 \\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3 \\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2 \end{cases}$$

Вариант 27.

1. Найти матрицу C^{-1}, обратную к матрице $C = A \cdot B^T + 3E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & -2 \\ 6 & 5 & -2 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 8x_3 = -2 \\ 3x_1 - 9x_2 - 4x_3 = -4 \\ 12x_1 + x_2 - 10x_3 = -1 \end{cases}$$

4. Определить имеет ли однородная система ненулевые решения:

$$\begin{cases} 6x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \\ 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

Вариант 28.

1. Найти $3A + B^T$ и $A \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -6 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

4. Определить имеет ли однородная система ненулевые решения:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}$$

Вариант 29.

1. Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A = CB^T + 3E$, если

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

4. Определить имеет ли однородная система ненулевые решения:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Вариант 30.

1. Вычислить: $(A - B^T) \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

4. Определить имеет ли однородная система ненулевые решения:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - \alpha x_3 = 0 \\ 8x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & 8 & 6 & -7 \\ 4 & 1 & -8 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Исследовать системы линейных уравнений по теореме Кронекера – Капели:

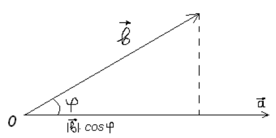
$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 11x_5 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Справочный материал.

Скалярное произведение векторов.

1. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.



Скалярное произведение принято обозначать: $\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\vec{b},\ (\vec{a}\vec{b})$.

Итак, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ (1)

Так как $|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ есть проекция вектора $\vec{b}$ на ось, определяемую вектором $\vec{a}$ (обозначается $Пр_{\vec{a}}\vec{b}$), тогда из (1) следует:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|Пр_{\vec{b}}\vec{a} \qquad (2)$$

2. Если векторы представлены своими координатами $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, то скалярное произведение равно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (3)$$

В частности $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, откуда

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} \qquad (4)$$

и в силу (3) $$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (5)$$

3. Условие перпендикулярности двух векторов.
   Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\left(\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0\right)$ является равенство нулю их скалярного произведения, т.е.

$$\left(\vec{a}\perp\vec{b}\right) \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \qquad (6)$$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (7)$$

4. Угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (8)$$

5. Проекция вектора $\vec{b}$ на ось, определяемую вектором $\vec{a}$:

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \qquad (9)$$

Векторное произведение векторов.

1. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который

a) Имеет модуль $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\wedge\vec{b})$.

b) $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$.

c) Направлен так, чтобы тройка векторов $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ была правой.

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$

(1)

Заметим, что $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\left(S_{парал} = |\vec{c}|\right)$.

2. Векторное произведение векторов, заданных координатами $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b}\left(b_x, b_y, b_z\right)$, тогда

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (2)$$

3. Необходимое и достаточное условие коллениарности не равных нулю векторов представляет собой равенство нулю их векторного произведения, т.е.:

$$(\vec{a}\parallel\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0 \quad \text{или} \qquad (3)$$

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \qquad (4)$$

Смешанное произведение векторов.

1. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b},\vec{c}$ называется число равное скалярному произведению одного из этих векторов на векторное произведение двух других.

   Обозначение: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

   (1)

   Заметим, что при составлении смешанного произведения, безразлично какие два рядом стоящие векторы перемножать векторно, это позволяет смешанное произведение обозначать:

   $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ (2)

2. Геометрический смысл смешанного произведения:

$$V=\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|, \qquad (3)$$

   где V – объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b},\vec{c}$.

3. Выражение смешанного произведения через координаты векторов $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}(c_x,c_y,c_z)$:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} \qquad (4)$$

4. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b},\vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \qquad (5)$$

Примеры:

1. Вычислить модуль и направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Решение:

Модуль вектора определяется по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Следовательно, $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{3}$.

Направляющие косинусы вектора определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Откуда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Найти площадь параллелограмма *ABCD*, если
   $A(0,1,0),\ B(2,2,3),\ C(-3,2,1)$.

Решение:

Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AB}\{2,1,3\}$ и $\overrightarrow{BC}\{-5,0,-2\}$.

Так как $\overrightarrow{BC}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$, то $\overrightarrow{AD} = \{-5,0,-2\}$.

Площадь $S_n = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 11\vec{j} + 5\vec{k}$.

Площадь параллелограмма: $S_n = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2 + 5^2} = 5\sqrt{6}$.

3. В пространстве даны четыре точки
$A(-1,3,2),\ B(2,0,-4),\ C(1,-3,-2),\ D(4,-2,3)$. Вычислить объем треугольной пирамиды $ABCD$.

Решение:

Из курса средней школы известно, что объем треугольной пирамиды равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах
$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$.

Следовательно искомый объем $V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Запишем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}(3,-3,-6),\ \overrightarrow{AC}(2,-6,-4),\ \overrightarrow{AD}(5,-5,1)$.

Вычислим смешанное произведение: $\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -6 & -4 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 108$.

$$V = \frac{1}{6} \cdot 108 = 18 \text{ (куб. ед.)}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Даны векторы $\vec{a}(4,-2,-4)$ и $\vec{b}(6,-3,2)$.

Вычислить:

а) $\vec{a}\vec{b}$;

b) $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$;

c) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$;

d) $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$;

e) $Пр_{\vec{a}}\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$;

2. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(2,3,-1)$ и $\vec{b}(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=-6$. Найти координаты вектора $\vec{x}$.
3. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1),\ B(2,3,4),\ C(4,3,2)$.
4. Определить при каких значениях α и β вектор $\alpha\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ будет коллениарен вектору $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$.
5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(1,1,1),\ B(2,0,2),\ C(2,2,2),\ D(3,4,-3)$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Справочный материал.

4.1. Аналитическая геометрия на плоскости.

1. Расстояние между точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ вычисляются по формуле:
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$
2. Координаты точки $C(x_0,y_0)$, делящей отрезок AB в отношении λ определяется формулами:
$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (2)$$
При $\lambda=1$ получаем координаты середины отрезка AB:
$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2};\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (3)$$

3. Уравнение вида:
$$Ax+By+C=0 \qquad (4)$$
где A и B одновременно не обращаются в ноль, называется общим уравнением прямой.

Вектор $\vec{n}(A,B)$ - нормальный вектор прямой (4)

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ и перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}(A,B)$:
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (5)$$

5. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельно вектору $\vec{s}(m, p)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (6)$$

6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = kx + b \qquad (7)$$

где $k = tg\alpha$, угловой коэффициент, b – отрезок, отсекаемый ею на оси Oy.

7. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (8)$$

8. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ в данном направлении:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (9)$$

9. Уравнение прямой в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (10)$$

Здесь a и b – отрезки, отсекаемые прямой (10) на осях координат.

10. Расстояние точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется формулой:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (11)$$

11. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности.

Прямые заданы уравнениями: $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$	Прямые заданы уравнениями: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$
1. $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$ 2. Условие параллельности: $k_1 = k_2$ 3. Условие перпендикулярности: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$	1. $\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert} \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ 2. Условие параллельности: $(\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ 3. Условие перпендикулярности: $(\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

Примеры:

1. Уравнение прямой $2x - 3y - 6 = 0$ записать в отрезках на осях. Сделать чертеж.

Решение:

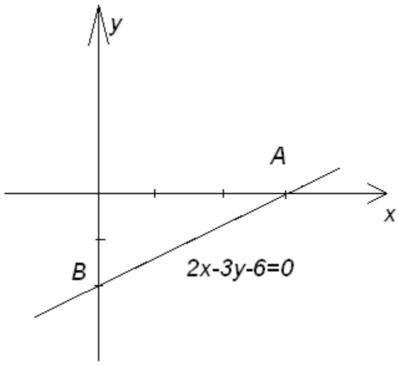
Уравнение прямой в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (1)$$

Преобразуем уравнение $2x-3y-6=0$ к виду (1):

$$2x-3y=6 \Rightarrow \frac{2x}{6}+\frac{-3y}{6}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$$

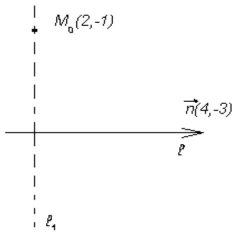
Откладываем на оси *Ox* три единицы в положительном направлении, а по оси *Oy* две единицы в направлении противоположном положительному. Получаем точки $A(3,0)$ и $B(0,-2)$ и их соединяем.



2. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2,-1)$ перпендикулярно и параллельно прямой $4x-3y+2=0$.

Решение:

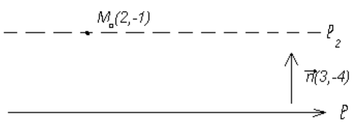
- Нормальный вектор $\vec{n}(4,-3)$ прямой $l: 4x-3y+2=0$ можно выбрать в



качестве направляющего вектора искомой прямой l_1. Воспользуемся для нахождения искомой прямой уравнением $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$.

Тогда $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-3}$ или $3x+4y-2=0$ - искомое уравнение.

- Так как прямая l_2 параллельна прямой l, то в качестве нормального



вектора прямой l_2 может быть $\vec{n}(4,-3)$.

Используем уравнение: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Здесь $A=4,\ B=-3,\ x_0=2,\ y_0=-1$.

Искомое уравнение имеет вид:

$4(x-2)-3(y+1)=0$.

3. Найти координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-2,3)$ относительно прямой $x-3y-1=0$.

Решение:

Точки M_1 и M_2 лежат на прямой перпендикулярной данной прямой $x-3y-1=0$ и одинаково удалены от нее.

Найдем уравнение прямой M_1M_2. Угловой коэффициент прямой k_2 находится из условия $k_1k_2=-1$. Так как угловой коэффициент прямой $x-3y-1=0$ равен $k_1=\dfrac{1}{3}$, то $k_2=-3$.

Запишем уравнение прямой M_1M_2:

$$y-3=-3(x+2),\ \text{т т. } 3x+y+3=0$$

Найдем координаты точки пересечении прямых $x-3y-1=0$ и $3x+y+3=0$, т.е. решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ 3x+y+3=0 \end{cases},\quad x=-\frac{4}{5},\ \ y=-\frac{3}{5}.$$

Точка пересечения прямых $M\left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ делит отрезок M_1M_2 пополам.

Воспользуемся формулами деления отрезка пополам:

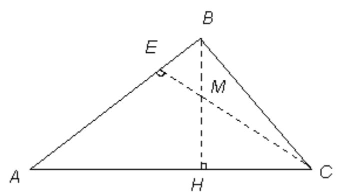
$$\bar{x}_M=\frac{x_1+x_2}{2};\quad -\frac{4}{5}=\frac{-2+x_2}{2}$$

$$\bar{y}_M=\frac{y_1+y_2}{2}\quad -\frac{3}{5}=\frac{3+y_2}{2}$$

Откуда получаем координаты точки M_2: $x=\dfrac{2}{5},\ \ y=4\dfrac{1}{5}$ и $M_2\left(\dfrac{2}{5},4\dfrac{1}{5}\right)$.

4. Даны вершины треугольника $A(-3,2)$, $B(2,0)$ и точка пересечения высот $M(-1,3)$. Найти уравнения сторон треугольника и высоты, опущенной на сторону AB.

Решение:



Запишем уравнение прямой AB, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}$;

$AB: \dfrac{y-2}{0-2}=\dfrac{x+3}{2+3}\Rightarrow 2x+5y-4=0$.

Уравнение прямой AC запишем, используя уравнение прямой по точке и нормальному вектору:

$$A(x-x_A)+B(y-y_A)=0$$

В качестве нормального вектора $\vec{n}(A,B)$ может быть взят вектор $\overrightarrow{BM}=\vec{n}(-3,3)$.

$$AC:\ -3(x+3)+3(y-2)=0\Rightarrow x-y+5=0$$

Аналогично найдем уравнение стороны BC: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{n_{BC}}(2,1)$.

$$BC:\ 2(x-2)+1(y-0)=0\Rightarrow 2x+y-4=0$$

Чтобы найти высоту CE, используем уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно вектору $\vec{s}(m,p)$: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$.

В качестве направляющего вектора $\vec{s}(m,p)$ может быть выбран нормальный вектор прямой AB: $\overrightarrow{n_{AB}}=\vec{s}(m,p)=(2,5)$

$$CE:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{5}\Rightarrow 5x-2y+11=0$$

5. Записать с помощью неравенств ту полуплоскость, в которой лежит точка $A(2,3)$ и границей является прямая $2x+3y+5=0$.

Решение:

Подставим координаты точки в левую часть уравнения данной прямой:

$$2\cdot 2+3\cdot 3+5=18>0$$

Следовательно, данная точка не лежит на данной прямой, а искомая полуплоскость определяется неравенством: $2x+3y+5>0$.

4.2. Аналитическая геометрия в пространстве.

4.2.1. Плоскость.

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, перпендикулярно вектору $\bar{n}\{A,B,C\}$ имеет вид:
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$$
2. Общее уравнение плоскости:
$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (2)$$
где $\vec{n}(A,B,C)$ - нормальный вектор плоскости.
3. Уравнение плоскости в отрезках:
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (3)$$
где *a, b, c* отрезки, отсекаемые плоскостью (3) на координатных осях *Ox, Oy, Oz* соответственно.
4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$:
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$
5. Углом между плоскостями
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (5)$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (6)$$

Условие перпендикулярности плоскостей :

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (7)$$

6. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (8)$$

4.2.2. Прямая линия в пространстве.

1. Общее уравнение прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\bar{s}\{m, n, p\}$, имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (10)$$

Уравнение (10) называется *каноническим*.

3. Пусть прямые заданы уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \qquad (11)$$

Тогда угол между этими прямыми определяется как угол между их направляющими векторами $\bar{s}_1\{m_1, n_1, p_1\}$ и $\bar{s}_2\{m_2, n_2, p_2\}$.

Угол между прямыми (16) определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (12)$$

Условие параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (13)$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0 \qquad (14)$$

4.2.3. Прямая линия и плоскость в пространстве.

1. Угол между прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле:
$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (15)$$
Условие параллельности прямой и плоскости:
$$Am+Bn+Cp=0 \qquad (16)$$
Условие перпендикулярности:
$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (17)$$
Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой (12), тогда координаты точки пересечения находятся из системы уравнений:
$$\begin{cases} x=x_0+mt; y=y_0+nt; z=z_0+pt \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases} \qquad (18)$$

Примеры:

1. Даны точки $M_1(1{,}0{,}-2)$ и $M_2(5{,}2{,}1)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение:

Воспользуемся уравнением: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Нормальный вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{n}(4{,}2{,}3),\ A=4,\ B=2,\ C=3$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид:
$$4(x-1)+2(y-0)+3(z+2)=0 \text{ или } 4x+2y+3z+2=0$$

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2{,}1{,}3)$ и перпендикулярно к прямым:
$$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3} \qquad (1)$$
$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{4} \qquad (2)$$

Решение:

Известны направляющие векторы прямых (1) и (2): $\vec{s_1}(2,-2,3)$ и $\vec{s_2}(3{,}1{,}4)$. Поскольку искомая прямая перпендикулярна к прямым (1) и (2), то она перпендикулярна к векторам $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$. Тогда за направляющий вектор $\vec{s}$ можно взять $\vec{s}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}$,

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=-11\vec{i}+\vec{j}+8\vec{k}$$

Уравнение искомой прямой имеет вид: $\frac{x-2}{-11}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{8}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(1,2), B(2,-2), C(6,1)$.

Требуется:

a) Написать уравнение стороны AB;

b) Написать уравнение высоты CD и вычислить ее длину;

c) Найти угол между высотой CD и медианой BM;

2. Прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями: $L_1: -2x+y-1=0$ и $L_2: 2y+1=0$.

Найти:

a) Расстояние d между прямимы;

b) Точку пересечения прямых;

3. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точки $M_1(1,0,1)$ и $M_2(0,2,0)$ и параллельно вектору $\vec{a}(3,0,1)$.

4. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-3,0,2)$ параллельно:

a) Вектору $\vec{s}(2,-3,5)$;

b) Прямой $\begin{cases}3x-y+2z-7=0\\ x+3y-2z-3=0\end{cases}$;

c) Прямой $x=-2+t, y=2t, z=1-\frac{1}{2}t$;

5. Задана плоскость $P: x+y-z+1=0$ и прямая $L: \frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$, причем $L \notin P$.

Вычислить:

a) $\sin(P \wedge L)$;

b) координаты точки пересечения прямой и плоскости;

Пример решения типового расчета.

Задание №1.

Даны вершины $A(-2;4), B(6;-2), C(8;7)$ треугольника.

Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A в радианах с точностью до *0.001;*
3. уравнение высоты, проведенной через вершину C;
4. уравнение медианы, проведенной через вершину C;
5. точку пересечения высот треугольника;
6. длину высоты, опущенной из вершины C;
7. систему линейных неравенств, определяющих внутреннюю область треугольника.
8. сделать чертеж;

Решение:

1. Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ определяется на плоскости по формуле
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1).$$
Тогда длина стороны AB находится $AB = \sqrt{(6+2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{100} = 10$, $AB = 10$.
2. Угол φ между прямыми, угловые коэффициенты которых равны k_1 и k_2, вычисляются по формуле
$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (2),$$
где k_1 - угловой коэффициент AB, k_2 - угловой коэффициент AC.
Найдем уравнение прямых AB и AC по формуле
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (3).$$
AB: $\dfrac{x+2}{6+2} = \dfrac{y-4}{-2-4} \Rightarrow 3x + 4y - 10 = 0$.
Чтобы найти угловой коэффициент запишем уравнение AB в виде: $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{5}{2}$.
Значит $k_{AB} = -\dfrac{4}{3}$.
Уравнение прямой AC также находим по формуле (3).
AC: $\dfrac{x+2}{8+2} = \dfrac{y-4}{7-4} \Rightarrow 3x - 10y + 46 = 0$; $y = \dfrac{3}{10}x + \dfrac{23}{5}$; $k_{AC} = \dfrac{3}{10}$;
Применяя формулу (2), имеем
$$tgA = \frac{\frac{3}{10} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \frac{3}{10}\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{4.2}{3.1} \approx 1.355$$
$$A = arctg(1.355) \approx 53^0 4'.$$
Используя таблицу перевода градусной меры в радианную, находим $A \approx 0.935$ рад.

3. Запишем уравнение высоты, проведенной через точку C, используя уравнение прямой, проведенной по точке и направляющему вектору $\vec{s}(m,p)$: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$.

В качестве направляющего вектора $\vec{s}(m,p)$ может быть выбран нормальный вектор прямой AB, т.е. $\overrightarrow{n_{AB}}(3{,}4)=\vec{s}(3{,}4)$.

Уравнение высоты CT имеет вид: $\frac{x-8}{3}=\frac{y-7}{4}\Rightarrow 4x-3y-11=0$.

Аналогично найдем уравнение высоты BM.

Направляющий вектор высоты $BM:\overrightarrow{s_{BM}}=\overrightarrow{n_{AC}}(3,-10)$.

$$BM:\ \frac{x-6}{3}=\frac{y+2}{-10}\Rightarrow 10x+3y-54=0$$

Из курса средней школы, известно, что три высоты пересекаются в одной точке. Чтобы найти точку пересечения высот CT и BM, нужно решить систему уравнений.

$\begin{cases}4x-3y-11=0\\10x+3y-54=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{65}{14}\\y=\frac{53}{21}\end{cases}$. Точка пересечения высот $\left(\frac{65}{14},\frac{53}{21}\right)$.

4. Известно, что медиана представляет отрезок, соединяющий вершину C с серединой противоположной стороны (AB). Найдем координаты середины отрезка AB по формулам:

$$\bar{x}_P=\frac{x_A+x_B}{2};\quad \bar{y}_P=\frac{y_A+y_B}{2};$$

$$\bar{x}_P=\frac{-2+6}{2}=2;\quad \bar{y}_P=\frac{4+(-2)}{2}=1$$

$$P(2{,}1).$$

Уравнение медианы CP находим по формуле (3):

$$CP:\ \frac{x-8}{2-8}=\frac{y-7}{1-7}\Rightarrow\quad x-y-1=0.$$

5. Длина высоты CT - расстояние от точки C до прямой AB: $3x+4y-10=0$.

Воспользуемся формулой расстояния α от точки $C(x_c,y_c)$ до прямой $Ax+By+C=0$

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Получим $d_{CT}=\frac{|3\cdot 8+4\cdot 7-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{42}{5}=8\frac{2}{5}$ ед.

6. Запишем с помощью системы неравенств множество точек, лежащих внутри треугольника с вершинами $A(-2;4), B(6;-2), C(8;7)$. Уравнения сторон треугольника:

$AB: 3x+4y-10=0$

$AC:\ 3x-10y+46=0$

$BC:\ 9x-2y-58=0$

Множество внутренних точек можно рассматривать как пересечение трех полуплоскостей, из которых первая ограничена прямой AB и содержит точку C, вторая ограничена прямой BC и содержит точку A, третья ограничена прямой AC и содержит точку B.

Подставим в левую часть уравнения $AB:\ 3x+4y-10=0$ координаты точки $C(8;7)$.

Получим $3\cdot 8+4\cdot 7-10=42>0$.

Следовательно, неравенство для первой полуплоскости будет $3x+4y-10>0$.

Найдем полуплоскость, ограниченную прямой $BC:\ 9x-2y-58=0$, $A(-2;4)$.

$$9\cdot(-2)-2\cdot 4-58=-84<0$$

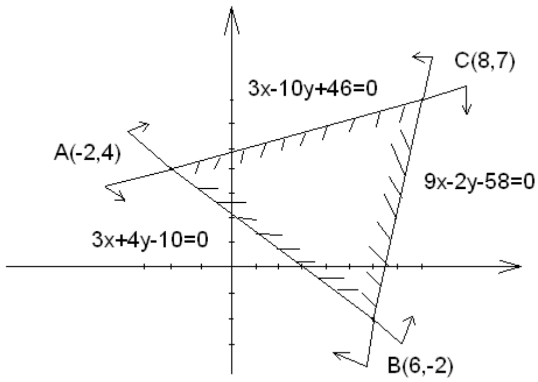
Второе неравенство: $9x-2y-58<0$.

Аналогично находится третья полуплоскость. $AC:\ 3x-10y+46=0$, $B(6;-2)$.

$$3\cdot 6-10\cdot(-2)+46=84>0$$

Третье неравенство: $3x-10y+46>0$.

Таким образом, множество внутренних точек треугольника ABC определяется системой неравенств: $\begin{cases} 3x+4y-10>0 \\ 9x-2y-58<0 \\ 3x-10y+46>0 \end{cases}$.



Задача №2.

Докажите, что векторы $\vec{a}(-2,1,1), \vec{b}(1,-2,3), \vec{c}(14,-13,7)$ компланарны и найдите линейную зависимость между ними.

Решение:

Векторы компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 14 & -13 & 7\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -13 & 7\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 14 & 7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 14 & -13\end{vmatrix}=0$$

Следовательно данные векторы компланарны.

Компланарность означает их линейную зависимость. Найдем эту зависимость. Выразим векторы $\vec{a}$ через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е. $\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$.

Запишем последнее равенство в координатах:

$$\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}14\\ -13\\ 7\end{pmatrix}\text{ или }\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+14\beta\\ -2\alpha-13\beta\\ 3\alpha+7\beta\end{pmatrix}$$

Из равенства матриц получили систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}\alpha+14\beta=-2\\ -2\alpha-13\beta=1\\ 3\alpha+7\beta=1\end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 14 & -2\\ -2 & -13 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 14 & -2\\ 0 & 15 & -3\\ 0 & -35 & 7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 14 & -2\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & -5 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 14 & -2\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 14 & -2\\ 0 & 5 & -1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha+14\beta=-2\\ 5\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{4}{5}\\ \beta=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

$\vec{a}=\frac{4}{5}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{c}$ или $5\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}=0$.

Ответ: $5\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}=0$.

Задача №3.

Даны вершины пирамиды $ABCD$: $A(2,0,0); B(0,2,0); C(0,0,3); D(8,5,8)$.

Найти:

1. длину ребра AB;
2. уравнение и площадь грани ABC;
3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC;
4. угол между ребром AD и гранью ABC;
5. объем пирамиды;

Решение:

1. Воспользуемся уравнением прямой в пространстве, проходящей через две точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2):
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (1)$$
Подставим координаты точек $A(2,0,0)$ и $B(0,2,0)$ в (1), получим
$$AB:\ \frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-0}{0-0}$$
$$AB:\ \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}.$$
Длину ребра можно рассматривать как длину вектора $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$.
Длина вектора определяется по формуле: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.
Тогда $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$.
2. Площадь грани ABC находим, используя векторное произведение $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$
$$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0);\ \overrightarrow{AC}=(-2,0,3)$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{vmatrix}=6\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$$
$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2+4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{88}=\sqrt{22}$$
Уравнение грани представляет собой уравнение плоскости, проходящей через три точки:
$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$
Подставляя в формулу (2) координаты точек A, B, C, получим
$$\begin{vmatrix}x-2_1 & y-0 & z-0\\ 0-2 & 2-0 & 0-0\\ 0-2 & 0-0 & 3-0\end{vmatrix}=0$$
$$6x+6y+4z-12=0$$
$$3x+3y+2z-6=0$$
- уравнение грани ABC.
3. Уравнение высоты в данном случае представляет собой уравнение прямой в пространстве.
Используем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{n}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}\ , \qquad (3)$$

(x_0, y_0, z_0) - координаты точки $D(8,5,8)$,

(n, m, p) - координаты направляющего вектора прямой, которая перпендикулярна грани ABC.

Следовательно, вектор нормали плоскости ABC коллинеарен вектору высоты из вершины D.

$$\vec{W}=(3,3,2) \Rightarrow n=3, m=3, p=2$$

Уравнение высоты имеет вид:

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-8}{2}$$

Длина высоты h_D - расстояние от точки D до плоскости ABC, воспользуемся формулой:

$$d=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$h_D=\frac{|3\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 8-6|}{\sqrt{3^2+3^2+2^2}}=\frac{49}{\sqrt{22}}\ \text{ед.}$$

4. Угол между ребром AD и гранью ABC найдем как угол между векторами $\overrightarrow{AD}=(6,5,8)$ и $\vec{W}=(3,3,2)$.

$$\sin\varphi=\cos(\overrightarrow{AD},\vec{W})=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\vec{W}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\vec{W}|}=\frac{18+15+16}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{22}}\approx 0.934$$

$$\varphi=\arcsin(0.934)\approx 57^0$$

5. Объем пирамиды $ABCD$ равен:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0);\ \overrightarrow{AC}=(-2,0,3);\ \overrightarrow{AD}=(6,5,8)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 3\\ 6 & 5 & 8\end{vmatrix}=98$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot 98=\frac{49}{3}\ \text{ед.}^3$$

4.3. Типовой расчет:

Задача 1: Даны вершины $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ треугольника. Найти:

1. длину стороны AB;
2. внутренний угол A в радианах с точностью до *0.001;*
3. уравнение высоты, проведенной через вершину C;

4. уравнение медианы, проведенной через вершину C;
5. точку пересечения высот треугольника;
6. длину высоты, опущенной из вершины C;
7. систему линейных неравенств, определяющих внутреннюю область треугольника.
8. сделать чертеж;
    1. $A(1,1)$, $B(7,4)$ и $C(4,5)$;
    2. $A(1,1)$, $B(-5,4)$ и $C(-2,5)$;
    3. $A(-13,3)$, $B(-1,-2)$ и $C(2,2)$;
    4. $A(-14,6)$, $B(-2,1)$ и $C(1,5)$;
    5. $A(6,0)$, $B(2,-3)$ и $C(-3,9)$;
    6. $A(6,0)$, $B(2,-3)$ и $C(-3,9)$;
    7. $A(7,-4)$, $B(3,-7)$ и $C(-2,5)$;
    8. $A(-8,4)$, $B(4,-1)$ и $C(7,3)$;
    9. $A(20,-2)$, $B(-4,5)$ и $C(-8,2)$;
    10. $A(1,0)$, $B(7,3)$ и $C(4,4)$;
    11. $A(4,1)$, $B(0,-2)$ и $C(-5,10)$;
    12. $A(14,10)$, $B(-2,-2)$ и $C(5,22)$;
    13. $A(-1,1)$, $B(5,4)$ и $C(2,5)$;
    14. $A(-1,1)$, $B(-7,4)$ и $C(-4,5)$;
    15. $A(22,4)$, $B(-2,-3)$ и $C(-6,0)$;
    16. $A(1,-1)$, $B(-5,2)$ и $C(-2,3)$;
    17. $A(-1,-1)$, $B(5,2)$ и $C(2,3)$;
    18. $A(-8,3)$, $B(4,-2)$ и $C(7,2)$;
    19. $A(3,-3)$, $B(-1,-6)$ и $C(-6,6)$;
    20. $A(23,5)$, $B(-1,-2)$ и $C(-5,1)$;
    21. $A(5,1)$, $B(1,-2)$ и $C(-4,10)$;
    22. $A(-7,3)$, $B(5,-2)$ и $C(8,2)$;
    23. $A(5,-1)$, $B(1,-4)$ и $C(-4,8)$;
    24. $A(22,6)$, $B(-2,1)$ и $C(-6,-2)$;
    25. $A(1,-1)$, $B(7,2)$ и $C(4,5)$;
    26. $A(-9,2)$, $B(3,-3)$ и $C(6,1)$;
    27. $A(15,9)$, $B(-1,-3)$ и $C(6,21)$;
    28. $A(-1,-1)$, $B(-7,2)$ и $C(-4,3)$;
    29. $A(0,1)$, $B(6,4)$ и $C(3,5)$;
    30. $A(-6,5)$, $B(6,0)$ и $C(9,4)$;

Задача 2: Докажите, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны и найдите линейную зависимость между ними.

1. $\vec{a}(6,-9,6)$, $\vec{b}(12,5,-1)$ и $\vec{c}(14,2,1)$;
2. $\vec{a}(-4,8,-11)$, $\vec{b}(1,3,-1)$ и $\vec{c}(2,-2,4)$;
3. $\vec{a}(3,-1,5)$, $\vec{b}(1,7,-3)$ и $\vec{c}(4,-5,9)$;
4. $\vec{a}(2,3,1)$, $\vec{b}(1,-3,2)$ и $\vec{c}(2,21,-5)$;
5. $\vec{a}(3,-4,8)$, $\vec{b}(3,4,-4)$ и $\vec{c}(6,2,1)$;
6. $\vec{a}(2,3,1)$, $\vec{b}(1,-4,4)$ и $\vec{c}(-4,5,-9)$;
7. $\vec{a}(5,-5,10)$, $\vec{b}(3,-11,12)$ и $\vec{c}(1,-1,2)$;
8. $\vec{a}(0,0,3)$, $\vec{b}(2,-3,0)$ и $\vec{c}(0,0,3)$;
9. $\vec{a}(4,-11,3)$, $\vec{b}(0,5,-5)$ и $\vec{c}(-1,-1,3)$;
10. $\vec{a}(2,2,1)$, $\vec{b}(2,-1,4)$ и $\vec{c}(2,6,21)$;
11. $\vec{a}(1,3,-2)$, $\vec{b}(7,5,3)$ и $\vec{c}(-15,51,-72)$;
12. $\vec{a}(7,2,-4)$, $\vec{b}(2,0,-3)$ и $\vec{c}(-33,-6,30)$;
13. $\vec{a}(4,-8,11)$, $\vec{b}(3,9,-3)$ и $\vec{c}(1,-1,2)$;
14. $\vec{a}(-1,-1,-3)$, $\vec{b}(2,-4,-6)$ и $\vec{c}(0,3,6)$;
15. $\vec{a}(5,3,2)$, $\vec{b}(-8,4,1)$ и $\vec{c}(-1,17,8)$;
16. $\vec{a}(16,-1,3)$, $\vec{b}(10,8,-3)$ и $\vec{c}(2,-3,2)$;
17. $\vec{a}(2,1,-4)$, $\vec{b}(2,2,1)$ и $\vec{c}(2,6,21)$;
18. $\vec{a}(15,-51,72)$, $\vec{b}(7,5,3)$ и $\vec{c}(1,3,-2)$;
19. $\vec{a}(2,-3,1)$, $\vec{b}(-1,4,4)$ и $\vec{c}(3,-2,6)$;
20. $\vec{a}(1,1,3)$, $\vec{b}(-1,2,3)$ и $\vec{c}(0,1,2)$;
21. $\vec{a}(0,-4,6)$, $\vec{b}(3,0,2)$ и $\vec{c}(0,2,1)$;
22. $\vec{a}(0,0,1)$, $\vec{b}(4,-6,0)$ и $\vec{c}(4,-6,-1)$;
23. $\vec{a}(-2,3,1)$, $\vec{b}(1,-4,2)$ и $\vec{c}(-3,2,4)$;
24. $\vec{a}(2,3,1)$, $\vec{b}(1,-4,4)$ и $\vec{c}(4,-5,9)$;
25. $\vec{a}(2,6,21)$, $\vec{b}(2,1,-4)$ и $\vec{c}(2,2,1)$;
26. $\vec{a}(2,-3,-1)$, $\vec{b}(2,-8,4)$ и $\vec{c}(-3,2,4)$;
27. $\vec{a}(4,6,2)$, $\vec{b}(2,-6,4)$ и $\vec{c}(4,42,-10)$;
28. $\vec{a}(-2,3,-1)$, $\vec{b}(1,-4,-4)$ и $\vec{c}(-3,2,-6)$;
29. $\vec{a}(4,-8,11)$, $\vec{b}(1,3,-1)$ и $\vec{c}(-2,2,-4)$;
30. $\vec{a}(1,4,9)$, $\vec{b}(2,-1,0)$ и $\vec{c}(0,1,2)$;

Задача 3:

Найти:

1. длину ребра AB;
2. уравнение и площадь грани ABC;

3. уравнение и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC;
4. угол между ребром AD и гранью ABC;
5. объем пирамиды;

1. $D(2,3,1)$, $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,1)$;
2. $D(2,1,3)$, $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ и $C(0,0,1)$;
3. $D(3,1,2)$, $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$ и $C(0,0,2)$;
4. $D(3,2,1)$, $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,1)$;
5. $D(2,3,1)$, $A(3,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,2)$;
6. $D(2,3,1)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,3)$;
7. $D(3,2,1)$, $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$ и $C(0,0,2)$;
8. $D(3,1,2)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,3)$;
9. $D(3,2,1)$, $A(3,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,2)$;
10. $D(3,1,2)$, $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,3)$;
11. $D(2,3,1)$, $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ и $C(0,0,1)$;
12. $D(1,2,3)$, $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,3)$;
13. $D(2,3,1)$, $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$ и $C(0,0,2)$;
14. $D(3,1,2)$, $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ и $C(0,0,1)$;
15. $D(3,1,2)$, $A(3,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,2)$;
16. $D(3,2,1)$, $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ и $C(0,0,1)$;
17. $D(2,1,3)$, $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$ и $C(0,0,2)$;
18. $D(1,2,3)$, $A(3,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,2)$;
19. $D(3,1,2)$, $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,1)$;
20. $D(2,3,1)$, $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,3)$;
21. $D(2,1,3)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,3)$;
22. $D(2,1,3)$, $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,3)$;
23. $D(1,2,3)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,3)$;
24. $D(2,1,3)$, $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,1)$;
25. $D(1,2,3)$, $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,1)$;
26. $D(2,1,3)$, $A(3,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,2)$;
27. $D(1,2,3)$, $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ и $C(0,0,1)$;
28. $D(3,2,1)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,3)$;
29. $D(1,2,3)$, $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$ и $C(0,0,2)$;
30. $D(3,2,1)$, $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,3)$;

5. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

5.1 Постановка задач линейного программирования

Общая задача линейного программирования (ЛП) формулируется, как задача об оптимизации (максимизации или минимизации) линейной функции нескольких переменных при наличии ограничений на эти переменные в виде линейных равенств или неравенств или и того и другого (ограничения на знаки переменных обычно выделяются отдельно). Математически это выглядит следующим образом:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min)$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_l \ge 0\ \ (l \le n). \end{gathered} \qquad (1)$$

Основная задача ЛП имеет вид:

$$\begin{gathered} f(X) = CX \to min \\ AX=B \\ X \ge O. \end{gathered} \qquad (2)$$

Задача *(2)* записана в матричной форме:

- матрица $C = (c_1,c_2,\ldots,c_n)$ – матрица цен,
- матрица A – матрица из коэффициентов, стоящих перед неизвестными,
- матрица $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)^т$ – вектор неизвестных,
- матрица $B = (b_1,b_2,\ldots,b_m)^т$ – вектор свободных членов.

Отличительные особенности основной задачи – это всегда задача на минимизацию целевой функции, в этой задаче все ограничения имеют вид равенств и все неизвестные – неотрицательны.

Путем изменения знака целевой функции и добавления новых неизвестных общая задача *(1)* всегда может быть преобразована к основной задаче *(2)*, пример преобразования будет приведен ниже.

Каноническая задача ЛП имеет вид:

$$f(X) = c_0 - \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to min$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \dots +a_{1k}x_k+x_{k+1}=b_1 \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \dots +a_{2k}x_k+x_{k+2}=b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ &a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+ \dots +a_{rk}x_k+x_{k+r}=b_r \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0 \\ &(k+r=n,\ b_j \geq 0,\ j=1,2,\dots,r) \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь все свободные члены b_1, b_2, ..., b_r неотрицательны.

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$ называются **свободными переменными**, а переменные $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ называются **базисными переменными**.

Отличительной особенностью канонической задачи по сравнению с основной задачей является то, что в ней целевая функция выражена только через свободные переменные, базисные переменные присутствуют в каждом уравнении только по одному, все свободные члены неотрицательны.

Основная задача *(2)* не всегда может быть приведена к каноническому виду *(3)*. Пример приведения основной задачи к каноническому виду также приведен ниже.

Пример. Нижеследующую общую задачу ЛП привести к основной задаче, а затем, получившуюся основную задачу ЛП привести к канонической задаче:

$$f(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 \leq -3 \\ &-4x_1 + 6x_2 \geq -5 \\ &x_1 \geq 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

Эта задача отличается от основной задачи тем, что, во-первых, целевая функция максимизируется, а не минимизируется, как в основной задаче, во-вторых, ограничения задачи имеют вид неравенств, а должны быть равенства и, в третьих, неотрицательна только одна переменная, x_1, вторая же переменная, x_2, может принимать значения любого знака. Поэтому преобразуем эту задачу следующим образом: 1) вместо целевой функции $f(X)$ введем функцию $f^*(X) = -f(X) = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$; 2) для преобразования неравенств (*) в равенства введем две новых неотрицательных переменных x_3 и x_4 так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$x_1 - x_2 + x_3 = -3$$

$$4x_1 - 6x_2 + x_4 = 5$$

(здесь, во втором из неравенств *(*)* мы предварительно поменяли знак неравенства на противоположный); 3) наконец, вместо переменной x_2 введем две новых неотрицательных переменных x_5 и x_6: $x_2 = x_5 - x_6$. В результате, задача *(*)* приводится к виду:

$$f^*(X) = -2x_1 - 3x_5 + 3x_6 \rightarrow min$$

$$x_1 - x_5 + x_6 + x_3 = -3$$

$$4x_1 - 6x_5 + 6x_6 + x_4 = 5 \qquad (**)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0.$$

Задача *(**)* является основной задачей ЛП. Преобразуем теперь задачу *(**)* к каноническому виду. Для этого поменяем знак в первом из уравнений на противоположный и добавим в получившемся уравнении в левую часть новую переменную $x_7 \geq 0$. Тогда получим задачу:

$$f^*(X) = -2x_1 - 3x_5 + 3x_6 \rightarrow min$$

$$-x_1 + x_5 - x_6 - x_3 + x_7 = 3$$

$$4x_1 - 6x_5 + 6x_6 + x_4 = 5$$

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0.$$

Здесь переменные x_4, x_7 являются базисными, а остальные переменные – свободными. Задача является канонической.

Геометрический метод решения задач линейного программирования

Если число переменных в общей задаче линейного программирования равно двум или трем, то такая задача имеет особенно простое геометрическое истолкование и, соответственно, ее решение может быть получено геометрическим методом. Для конкретности рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to max$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{gathered} \qquad (4)$$

Каждому из ограничений задачи *(4)* соответствует полуплоскость, а в совокупности они представляют на плоскости Ox_1x_2 многоугольник (или пустое множество). Геометрически, с учетом ограничений на знак переменных x_1 и x_2, имеем следующую картину:

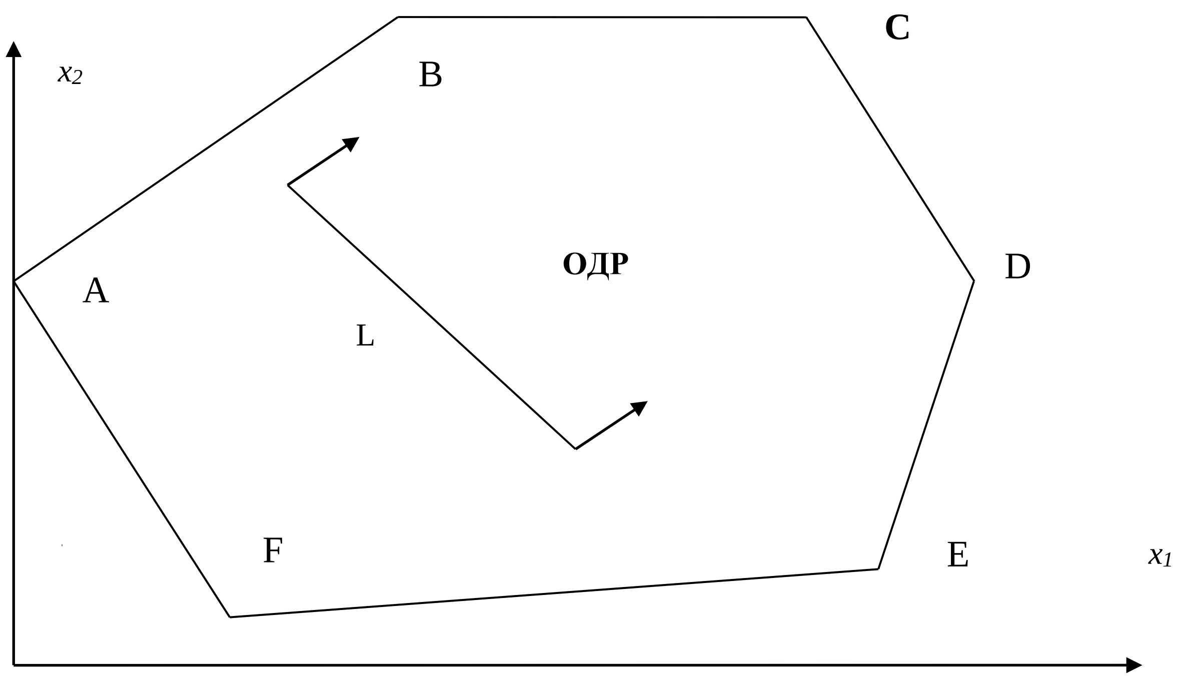


Рис. 1.

Область допустимых решений (**ОДР**) – это область внутри шестиугольника ABCDEF. Фиксированным значениям целевой функции *f(X)* соответствует фиксированное положение прямой L (уравнение прямой L: $c_1x_1 + c_2x_2 = d$, где *d* фиксированное значение), возрастание *f(X)* соответствует движению прямой L в направлении, указанном стрелками. Когда прямая L занимает положение, соответствующее ее прохождению через точку **C** **(**точка **C** выделена жирно – это одна из вершин шестиугольника**)**, целевая функция достигает своего наибольшего значения. Таким образом, решением задачи ЛП будет $x_1 = x_1^c$, $x_2 = x_2^c$, а $f(X^{опт}) = f(X^c)$, где x_1^c, x_2^c – координаты точки C.

Пример. Решить следующую задачу линейного программирования:

$$2x + y \to max$$

$$x + y \geq 1,$$

$$x + 2y \leq 6,$$

$$y \leq 2,$$

$$x \le 3,$$

$$(x \ge 0, y \ge 0).$$

Здесь для удобства студентов выбраны более привычные для них переменные x и y. Область допустимых решений изображена на Рис. 2:

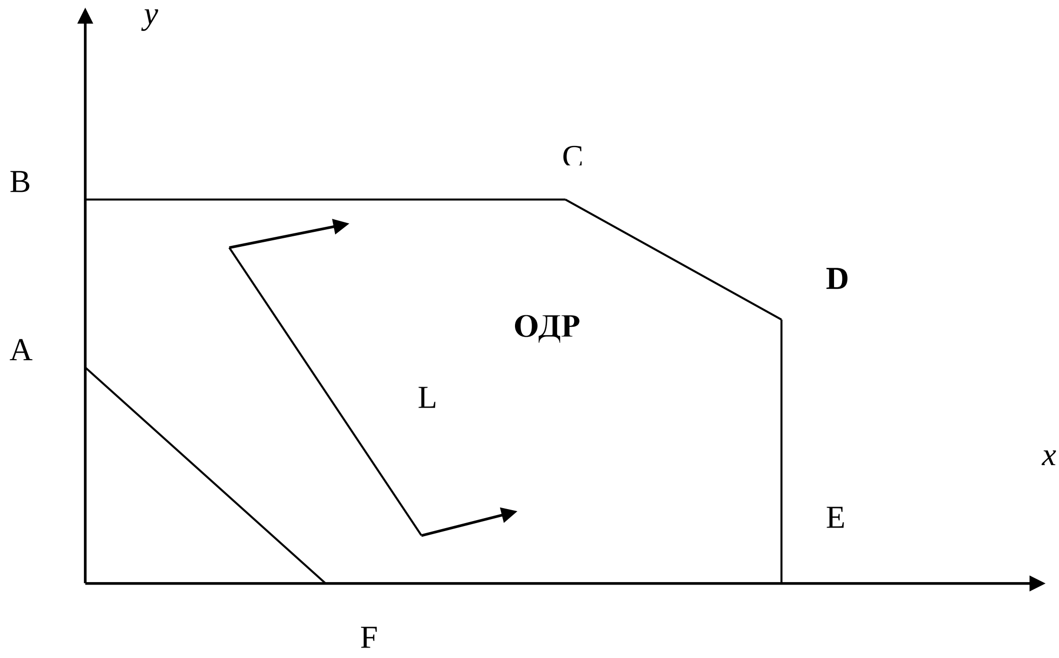


Рис. 2.

Она представляет собой многоугольник ABCDEF (здесь уравнение прямой BC: $y = 2$, CD: $x + 2y = 6$, DE: $x = 3$, EF: $y = 0$, AF: x + y =1,AB: $x = 0$). Прямая L соответствует уравнению целевой функции: $2x + y = d$, где d – параметр. Очевидно, что целевая функция будет достигать максимума в **ОДР**, когда прямая L будет проходить через точку **D.** Точка **D** это точка пересечения прямых CD и DE, решая совместно систему уравнений:

$$x + 2y = 6,$$

$$x = 3,$$

получим координаты точки D: $x = 3, y = 3/2$. Таким образом, решением данной задачи будет $x = 3, y = 3/2$, значение целевой функции при этом будет $f(X^{опт}) = 4 + 3/2 = 11/2$.

Таблица и алгоритм решения канонических задач линейного программирования симплекс – методом

Каноническую задачу ЛП можно записать в виде таблицы:

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	…	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	…	x_n
x_{k+1}	b_1	a_{11}	a_1	…	a_{1k}	1	0	…	0
x_{k+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}	0	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{k+r}	b_r	a_{r1}	a_{r2}	…	a_{rk}	0	0	…	1
$f(X)$	c_0	c_1	c_2	…	c_k	0	0	…	0

Начальный базисный план задачи получается из этой таблицы и имеет вид вектора

$X^b = (0,0,\dots,\ 0,b_1,b_2,\ \dots\ ,b_r)^m$, то-есть $x_1{}^b=0, x_2{}^b=0, \dots, x_k{}^b=0, x_{k+1}{}^b=b_1, x_{k+2}{}^b=b_2, \dots, x_n{}^b=b_r$.

Описываемый ниже алгоритм решения канонической задачи ЛП основан на этой таблице.

Схема алгоритма

Рис. 3.

Рассмотрим подробнее последний блок алгоритма о преобразовании таблиц. По условию, в этом случае в столбце таблицы, соответствующему положительному элементу c_p, есть положительные элементы a_{ip} ; для каждого из этих элементов находим отношение b_i/a_{ip} и находим наименьшее из этих отношений, пусть оно соответствует элементу a_{kp}, это означает, что таблицу нужно преобразовывать, переводя переменную x_k из базисных переменных в свободные переменные, а переменную x_p наоборот переводят из свободных переменных в базисные; делается это следующим образом: сначала преобразуется k –тая строка таблицы – путем деления всех элементов этой строки на a_{kp} - результаты заносятся в k – тую строку новой таблицы, затем по формулам метода Гаусса для систем линейных алгебраических уравнений преобразуются остальные элементы таблицы (табличный вариант этого метода носит название «правила двух перпендикуляров» и оно состоит в том, что элемент новой таблицы получается путем вычитания из соответствующего элемента старой таблицы произведения элементов, стоящих на концах перпендикуляров, проведенных от старого элемента на p – тый столбец и на уже полученную k - тую строку новой таблицы). Рассмотрим пример.

Пример.

$$f(X) = -3x_4 + 8x_5 + 2x_6 + 15 \to min$$

$$x_1 - 2x_4 + 3x_5 - 7x_6 = 12;$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 8;$$

$$x_3 + x_4 + 4x_5 - 5x_6 = 7;$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Задача является канонической, переменные x_1, x_2, x_3 – базисные переменные, остальные переменные x_4, x_5, x_6 – свободные. Заполняем исходную симплекс – таблицу:

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	*12*	*1*	*0*	*0*	**-2**	*3*	*-7*
x_2	*8*	*0*	*1*	*0*	**2**	*1*	*-3*
x_3	*7*	*0*	*0*	*1*	**1**	*4*	*-5*
$f(X)$	*15*	*0*	*0*	*0*	**3**	*-8*	*-2*

x_1	20	1	1	0	0	4	-10
x_4	**4**	**0**	**1/2**	**0**	1	**1/2**	**-3/2**
x_3	3	0	-1/2	1	0	7/2	-7/2
$f(X)$	3	0	-3/2	0	0	-19/2	5/2

В строке для $f(X)$ среди элементов $c_1, c_2, \ldots, c_6$ есть только один положительный элемент $c_4 = 3$, а в столбце над этим элементом (столбец выделен жирным шрифтом) есть два положительных элемента (***1*** и ***2***). Вычисляем для этих двух элементов отношения b_i/a_{ip}, получаем 8/2 = 4, 7/1 = 7. Наименьшим из чисел 4 и 7 является 4, это число соответствует элементу a_{24} =2, стоящем в строке таблицы, соответствующей базисной переменной x_2. Это означает, что переменная x_2 из базисных переменных перейдет в разряд свободных, а на ее место в разряд базисных придет переменная x_4, что и отражено в первом столбце следующей части таблицы. Преобразование таблицы начинается со старой строки для x_2: все элементы этой строки делятся на число a_{24} =2 и результат заносится в строку для x_4 новой части таблицы (эта строка выделена жирным шрифтом). Дальнейшие преобразования таблицы осуществляются по правилу двух перпендикуляров (строка и столбец, на которые нужно опускать перпендикуляры, выделены жирным шрифтом). Например, первый элемент, стоящий в строке для x_1 (а там стоит число 12), получается по формуле 12 – 4(-2) = 20, потому что на концах перпендикуляров, опущенных из ячейки для числа 12 на выделенные жирным шрифтом строку и столбец, стоят числа 4 и (-2). Число 20 записывается в соответствующую ячейку новой части таблицы и так пересчитываются все остальные элементы старой части таблицы. После преобразования таблицы снова смотрим на строчку для $f(X)$, среди элементов c_j этой строки есть положительный элемент $c_6 = 5/2$, а в столбце над этим элементом нет положительных элементов. В соответствии с алгоритмом, получаем, что задача не имеет решения в силу неограниченности целевой функции.

5.4. Метод искусственного базиса

Как уже отмечалось, основная задача не всегда может быть приведена к канонической, даже, если она может быть приведена к канонической, это приведение может быть не очевидным. Поэтому для этой цели применяется метод искусственного базиса. Этот метод состоит в следующем. Кроме исходной основной задачи формулируется вспомогательная задача, которая всегда имеет решение, и по решению вспомогательной задачи делается вывод, либо о том, что исходная задача имеет допустимый план и далее эта задача решается симплекс – методом, либо о том, что исходная основная задача не имеет решения. Рассмотрим этот процесс более подробно.

Пусть исходная основная задача формулируется в следующем виде:

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow min$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0). \end{gathered} \qquad (A)$$

Примечание: Если в ограничениях задачи *(A)* среди свободных членов b_j есть отрицательные, то в соответствующем уравнении нужно изменить на противоположный знаки в правой и левой частях, чтобы справа стоял положительный элемент.

Введем новые дополнительные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, число которых равно числу ограничений задачи *(A)*, и сформулируем новую вспомогательную задачу в виде:

$$g(X) = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m} \to min$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0). \end{gathered} \qquad (B)$$

Несколько слов по поводу формулирования задачи *(B)*: целевая функция задачи *(B)* взята в виде суммы новых дополнительных переменных, а ограничения задачи *(B)* получены из ограничений задачи *(A)* путем прибавления к каждому уравнению (в левой части уравнения) по одной дополнительной переменной. Задача *(B)* становится канонической, если в целевой функции этой задачи с помощью ограничений этой задачи выразить базисные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ через свободные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$. Поэтому, как каноническая задача, задача *(B)* всегда имеет решение. Ее исходный базисный план имеет вид: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_m$.

По поводу взаимосвязи решений задач *(A)* и *(B)* доказаны определенные теоремы, которые позволяют сформулировать нижеследующий алгоритм перехода от задачи *(B)* к исходной задаче *(A)*:

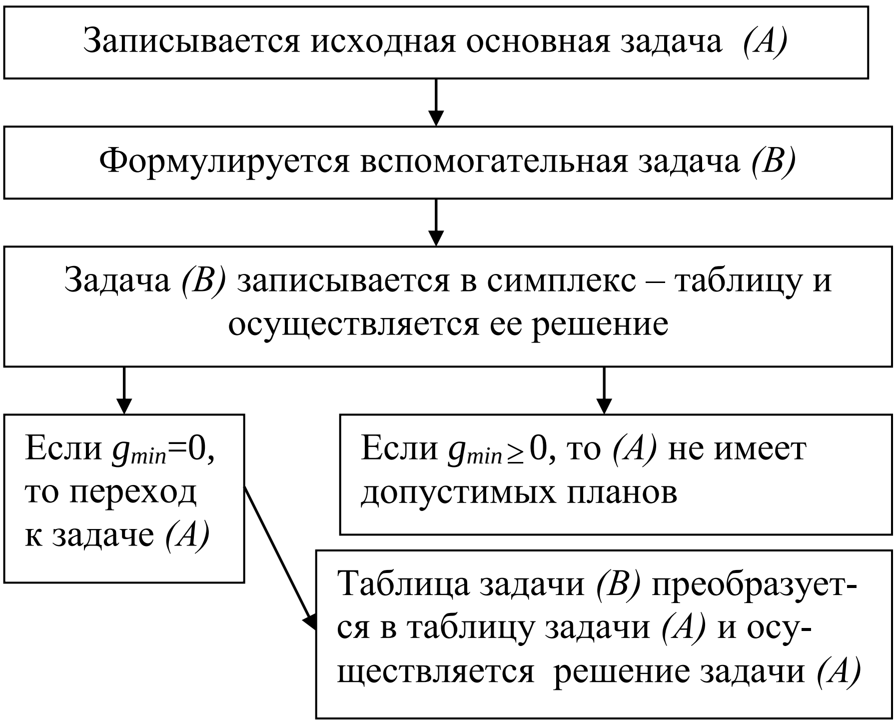


Рис. 4.

Пример. Решить следующую задачу линейного программирования

$$f(X) = 3x_1 + x_2 \to max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 - x_3 = 5 \qquad (A)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Задача *(A)* не является основной, так как целевая функция в ней на максимум, а должна быть на минимум. Поэтому заменим целевую функцию на противоположную по знаку, тогда получим

$$f_1(X) = -3x_1 - x_2 \to min \qquad (*)$$

Составим для задачи *(A)* вспомогательную задачу *(B)*, для этого включим в ограничения задачи *(A)* искусственные переменные x_4 и x_5, а целевую функцию возьмем, как сумму этих переменных $g(X) = x_4 + x_5$, тогда получим следующую задачу *(B):*

$$g(X) = 13 - 2x_1 - x_2 \rightarrow min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1 - x_3 + x_5 = 5 \qquad (B)$$

$$x_j \geq 0.$$

Здесь целевая функция $g(X)$ выражена через свободные переменные x_1, x_2 (с помощью ограничений задачи *(В)*).

Составим симплекс – таблицу для решения задачи *(В):*

Базисные перемен.	Свободн. члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	*8*	*1*	***1(*)***	*1*	*1*	*0*
x_5	*5*	*1*	***0***	*-1*	*0*	*1*
$g(X)$	*13*	*2*	***1***	*0*	*0*	*0*
x_2	***8***	***1***	***1***	***1***	***0***	***0***
x_5	*5*	***1(*)***	*0*	*-1*	*0*	*1*
$g(X)$	*5*	***1***	*0*	*-1*	*-1*	*0*
x_2	*3*	*0*	*1*	*2*	*1*	*-1*
x_1	***5***	***1***	***0***	***-1***	***0***	***1***
$g(X)$	*0*	*0*	*0*	*0*	*-1*	*-1*
x_2	*3*	*0*	*1*	*2*		
x_1	*5*	*1*	*0*	*-1*		
$f_1(X)$	*-18*	*0*	*0*	*-1*		

В соответствии с постановкой задачи *(В)* заносим информацию об этой задаче в исходную симплекс – таблицу. В строке для целевой функции $g(X)$ два положительных элемента – 2 и 1, выбираем столбик, соответствующий элементу 1(он выделен полужирным шрифтом), в этом столбике над 1 только один положительный элемент – тоже 1 (в строке, соответствующей базисной переменной x_4), а это означает, что переменная x_4 исключается из числа базисных переменных, а на ее место приходит переменная x_2 (она стоит над столбиком, выделенным полужирно). Преобразование таблицы начинается со старой строчки с x_4, она без изменения переносится в новую часть таблицы, но уже с x_2 в качестве базисной переменной («без изменения» потому, что ключевой элемент равен 1, а деление на 1 не меняет элементов). Строка новой части таблицы с базисной переменной x_2 выделена жирно. Остальные элементы этой части таблицы преобразуются по «правилу двух перпендикуляров» на выделенные жирно строку и столбец. Далее, реализуется еще один шаг симплекс – метода, в результате которого переменная x_5 уходит из числа базисных, а на ее место приходит переменная x_1, а целевая функция $g(X)$ достигает своего минимума, равного нулю. В соответствии с алгоритмом, заключительная часть таблицы переносится в новую часть, но уже с исходной целевой функцией $f_1(X)$, разумеется, эта функция пересчитывается на свободную переменную x_3. В строке таблицы для $f(X)$ нет положительных элементов (кроме $c_0 = 18$), а это означает, что базисный план будет оптимальным, он получается из последней части таблицы: $x_1^б = 5,\ x_2^б = 3,\ x_3^б = 0$, целевая функция исходной задачи на базисном плане также получается из таблицы: $f(X^б) = 18$.

5.5. Элементы теории двойственности в линейном программировании

Рассмотрим общую задачу линейного программирования на минимизацию целевой функции:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i\,,\ i = 1,2,\ldots,m_1, \qquad (C)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i,\ i = m_1 + 1,\ \ldots,\ m,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ \ldots\ ,\ n_1.$$

Эту задачу назовем прямой задачей или задачей *(C)*. Двойственной задачей по отношению к задаче *(C)* или задачей *(D)* в двойственной паре *(C, D)*, будет задача, которая строится по следующим правилам:

1) решается задача на максимизацию функции, имеющей столько переменных, сколько строк в системе ограничений задачи C, т. е. m;

2) матрица цен и матрица свободных членов меняются ролями;

3) коэффициенты системы ограничений задачи *(D)* являются элементами транспонированной матрицы системы ограничений задачи *(C);*

4) в неравенствах системы ограничений задачи *(D)* стоит только знак $\le$;

5) в системе ограничений задачи *(D)* неравенства стоят только в тех строчках системы, номера которых соответствуют номерам неотрицательных переменных, т. е. для $j = 1,2,..,n_1$;

6) в допустимых планах задачи *(D)* $y_i \ge 0$ только для тех i, которые являются номерами строк системы ограничений задачи (C), где стоят неравенства, т. е. при $i = 1,2,\ldots,m_1$.

Рассмотрим конкретный пример постановки двойственной задачи.

Пример.

$$f(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 + 6x_6 \rightarrow min$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 2$$

$$x_2 - x_3 - x_4 \le 3$$

$$x_3 + x_4 - x_5 \ge 4$$

$$x_5 + x_6 = 7$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_4 \le 0,\ x_5 \le 0.$$

Перепишем эту задачу так, чтобы все неравенства в системе ограничений были только со знаком $\geq$, а все переменные, имеющие определенный знак, были только неотрицательными. Для этого в первых двух неравенствах системы ограничений изменим знак на противоположный, а вместо неположительных переменных x_4 и x_5 введем новые переменные $x_4^* = -x_4 \geq 0$, $x_5^* = -x_5 \geq 0$. Тогда получим следующую задачу *(C)*:

$$f(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4^* + x_5^* + 6x_6 \to min$$

$$-2x_1 + x_2 - x_3 \geq -2$$

$$-x_2 + x_3 - x_4^* \geq -3$$

$$x_3 - x_4^* + x_5^* \geq 4$$

$$-x_5^* + x_6 = 7$$

$$(m = 4, n = 6)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4^* \geq 0, x_5^* \geq 0.$$

Основываясь на вышеприведенных правилах, получим следующую задачу *(D)*:

$$g(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = -2y_1 - 3y_2 + 4y_3 + 7y_4 \to max$$

$$-2y_1 \leq 1$$

$$y_1 - y_2 \leq 2$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 = -1$$

$$-y_2 - y_3 \leq -4$$

$$y_3 - y_4 \leq 1$$

$$y_4 = 6$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Для пары двойственных задач доказаны ряд теорем, позволяющих применять их для нахождения решений той и другой двойственных задач. Приведем, пожалуй, основную из этих теорем.

Теорема. *Если одна из пары двойственных задач имеет решение, то и другая задача тоже имеет решение, причем значения целевых функций на оптимальных планах обеих задач совпадают.*

Модифицированный симплекс-метод (метод обратной матрицы)

Модифицированный симплекс-метод или, как его еще называют, метод обратной матрицы основан на теории двойственности, он более экономный с точки зрения объема вычислений, чем простой симплекс-метод. Ниже будет изложен алгоритм этого метода, причем алгоритм будет излагаться без доказательств и обоснований, однако, в достаточной степени подробно. При этом будут использованы термины и обозначения теории двойственности. Алгоритм удобно использовать с помощью таблицы. Схема таблицы имеет вид:

N	$f(X)$	Y	Δ_j
j_1 j_2 . . . j_m	x_{j1} x_{j2} . . . x_{jm}	D^{-1}	λ

Здесь N – номер итерации алгоритма, $j_1, j_2, \ldots, j_m$ – номера базисных переменных, $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jm}$ - значения базисных переменных на базисном плане, Y – вектор значений базисных переменных на базисном плане двойственной задачи, D – квадратная матрица, соответствующая базисным столбцам матрицы A для коэффициентов системы ограничений исходной задачи, D^{-1} – матрица обратная матрице D, Δ_j – номер и значение коэффициента, соответствующего элементу строки для целевой функции простого симплекс-метода, λ - некоторая матрица-столбец, о вычислении которой будет сказано ниже.

Переходим к изложению алгоритма:

1) Вектор Y – план двойственной задачи вычисляется по формуле

$$Y^m = C^* D^{-1},$$

где C^* - часть матрицы цен C, соответствующая базисным переменным.

2) Коэффициенты Δ_j, соответствующие свободным переменным, вычисляются по формулам

$$\Delta_j = (Y, A_j) - c_j,$$

где (Y, A_j) – скалярное произведение вектора Y на j – тый столбец матрицы A, c_j – соответствующий коэффициент целевой функции исходной задачи.

3) Для коэффициентов Δ_j могут иметь место три случая:

а) все $\Delta_j \leq 0$, тогда базисные планы обеих задач будут оптимальными;

б) среди Δ_j есть хотя бы одно $\Delta_p > 0$, тогда нужно вычислять матрицу λ, вычисляется она по формуле

$$\lambda = D^{-1} A_p,$$

где A_p – столбец матрицы A, соответствующий номеру положительного коэффициента $\Delta_p > 0$; если при этом все элементы λ_k матрицы λ будут неположительными $\lambda_k \leq 0$, исходная задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции;

в) среди Δ_j есть хотя бы одно $\Delta_p > 0$ и среди элементов соответствующей матрицы λ есть положительные; тогда осуществляется переход к следующей итерации алгоритма, таблица преобразуется по такой же схеме как и при простом симплекс-методе.

Задачи для самостоятельного решения

1. Привести данные задачи к форме основной задачи ЛП:

а) $f(X)= x_1 + 2x_2 – x_3 \to min$

$$2x_1 – x_2 + x_3 \le 5$$

$$x_1 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 – 2x_2 \ge 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0;$$

б) $f(X) = 2x_1 – x_2 \to max$

$$x_1 – 2x_2 \le 3$$

$$x_1+ x_2 \ge 2$$

$$x_2 \le 5$$

$$x_1,x_2 \ge 0;$$

в) $f(X) = 12x_1 + x_2 \to min$

$$2x_1 – x_2 \quad \le 14$$

$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_1 + 3x_2 \ge 1$$

$$x_1 \ge 0.$$

2. Решить задачи геометрическим методом:

а) $f(X) = 2x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 – x_2 \ge 1$$

$$x_1,x_2 \ge 0;$$

б) $f(X) = x_1 – 3x_2 \to min$

$$x_1 – x_2 \le 3$$

$$2x_1 + x_2 \ge 3$$

$$0 \le x_2 \le 4, x_1 \ge 0;$$

в) $f(X) = x_1 + 3x_2 \to max$

$$x_1 – x_2 \le 1$$

$$2x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 - x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 \ge 0;$$

г) $f(X) = x_1 - 2x_2 \to min$

$$x_1 \ge 10$$

$$-2x_1 + x_2 \le 8$$

$$x_1 - 2x_2 \ge 12$$

$$x_2 \ge 0;$$

д) $f(X) = x_1 + x_2 \to max$

$$0 \le x_1 \le 1$$

$$0 \le x_2 \le 2$$

$$0 \le x_1 + x_2 \le 3.$$

3. Решить симплекс – методом следующие задачи:

а) $f(X) = 6x_1 + 2x_2 + x_3 \to min$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 5$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4;$$

б) $f(X) = - x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4;$$

в) $f(X) = 2x_3 - x_4 \to min$

$$x_2 + 3x_4 \le 5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$$

$$2x_3 + x_5 \le 10$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5;$$

г) $f(X) = x_4 - x_2 \to min$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$$

$x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4;$

д) $f(X) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to min$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$

$-2x_1 + 4x_2 \leq 12$

$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

4. Решить методом искусственного базиса следующие задачи:

а) $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to min$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$x_1 - x_2 - x_4 = 3$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0;$

б) $f(X) = x_2 - x_3 \to min$

$-2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$

$3x_1 + x_2 + x_4 = 3$

$x_j \geq 0, j =1,2,3;$

в) $f(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to max$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

$x_1 + 3x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3;$

г) $f(X) = - 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 10x_4 \to min$

$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$

$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

5. Построить для данной задачи двойственную ей задачу:

а) $f(X) = x_4 – x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 – 2x_3 \leq 3$$
$$x_2 + 2x_3 – x_4 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0;$$

б) $f(X) = x_1 – 3x_2 + 2x_3 \to min$

$$3x_1 – x_2 + 2x_3 \geq 7$$
$$-2x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10$$
$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$$

в) $f(X) = 2x_3 – 2x_4 – x_5 \to max$

$$x_1 – 2x_3 + x_4 + x_5 = 4$$
$$x_2 + 3x_3 – x_4 +2x_5 \leq 2$$
$$x_3 \geq 0, x_5 \geq 0;$$

г) $f(X) = x_1 + 2x_2 – 4x_3 \to max$

$$-x_1 + x_2 – x_3 = 3$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

6. Решить задачи методом обратной матрицы:

а) $f(X) = x_1 – x_3 \to min$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1$$
$$x_1 + 2x_2 =2$$
$$x_1,x_2,x_3 \geq 0;$$

б) $f(X) = 2x_1 + x_2 – x_3 \to min$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 =4$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1,x_2,x_3 \geq 0;$$

в) $f(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3;$$

г) $f(X) = 3x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$5x_2 - 3x_3 = 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Решение типового варианта

В каждый вариант набора задач входит 10 задач, которые должны быть решены тем или другим методом. Типовой вариант имеет следующий вид:

1. $f(X) = x_1 + x_2 \rightarrow max$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$0 \leq x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 0.$$

2. $f(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. $f(X)= 6x_1 + 2 x_2 + x_3 \rightarrow min$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 5$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

4. $f(X)= -x_1 + x_2 \rightarrow max$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$$

5. $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to min$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 - x_4 = 3$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$$

6. $f(X) = x_1 - x_3 \to min$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

7. $f(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 \to max$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 1$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2.$$

8. $f(X) = x_1 - 2x_2 + x_3 \to max$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + 4x_4 = 3$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \to min$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 7$$

$$-3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

10. $f(X) = 2x_1 + x_2 \to min$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 6$$

$$x_2 + 3x_3 \geq 4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Переходим к решению задач типового варианта:

1. $$f(X) = x_1 + x_2 \rightarrow max$$

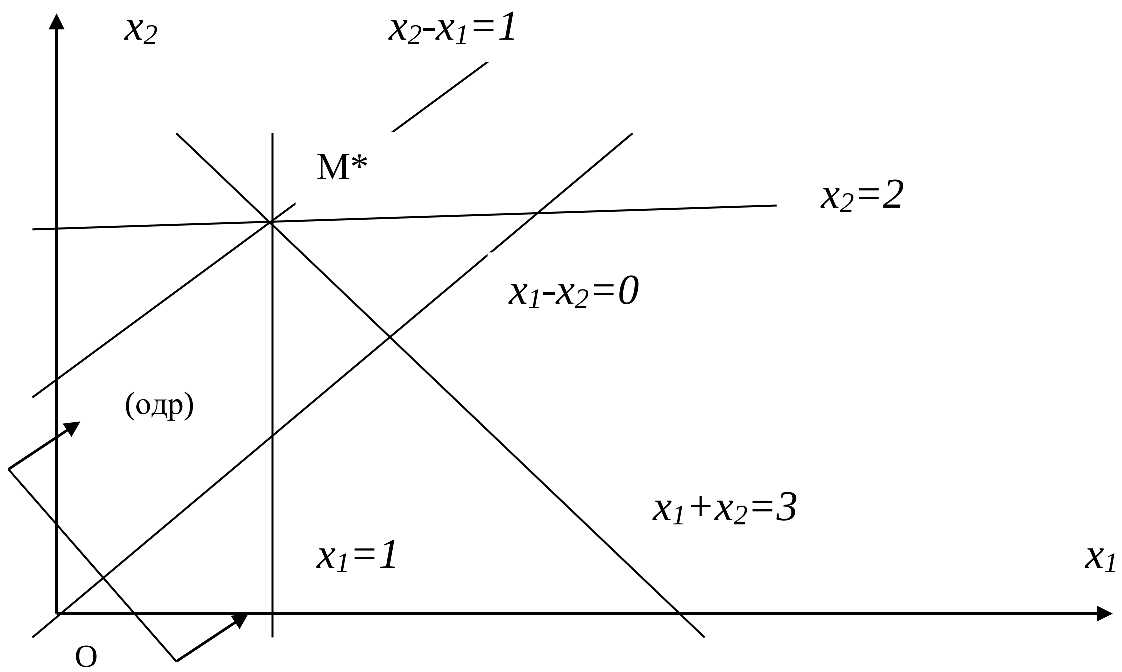
$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$0 \leq x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 0$$

Геометрически на плоскости (x_1,x_2), как следует из рисунка, области допустимых решений (одр) соответствует параллелограмм, ограниченный прямыми $x_1 = 0, x_1 = 1, x_2 - x_1 = 0, x_2 - x_1 = 1$. Неравенства $x_2 \leq 2, x_1 + x_2 \leq 3$ не повлияли на (одр). Целевой функции на рисунке соответствует прямая со стрелками. Увеличению значения целевой функции соответствует перемещение этой прямой параллельно самой себе в направлении, указанном стрелками. Очевидно, в (одр) наибольшее значение целевой функции достигается тогда, когда эта прямая проходит через точку M* (угловая точка параллелограмма). Точка M* является точкой пересечения прямых $x_1 = 1$ и $x_2 - x_1 = 1$, решая совместно эту систему уравнений, находим координаты точки M* ($1,2$). Итак, решением задачи будет $x_1^*=1, x_2^*=2, f(X^*)=3$.



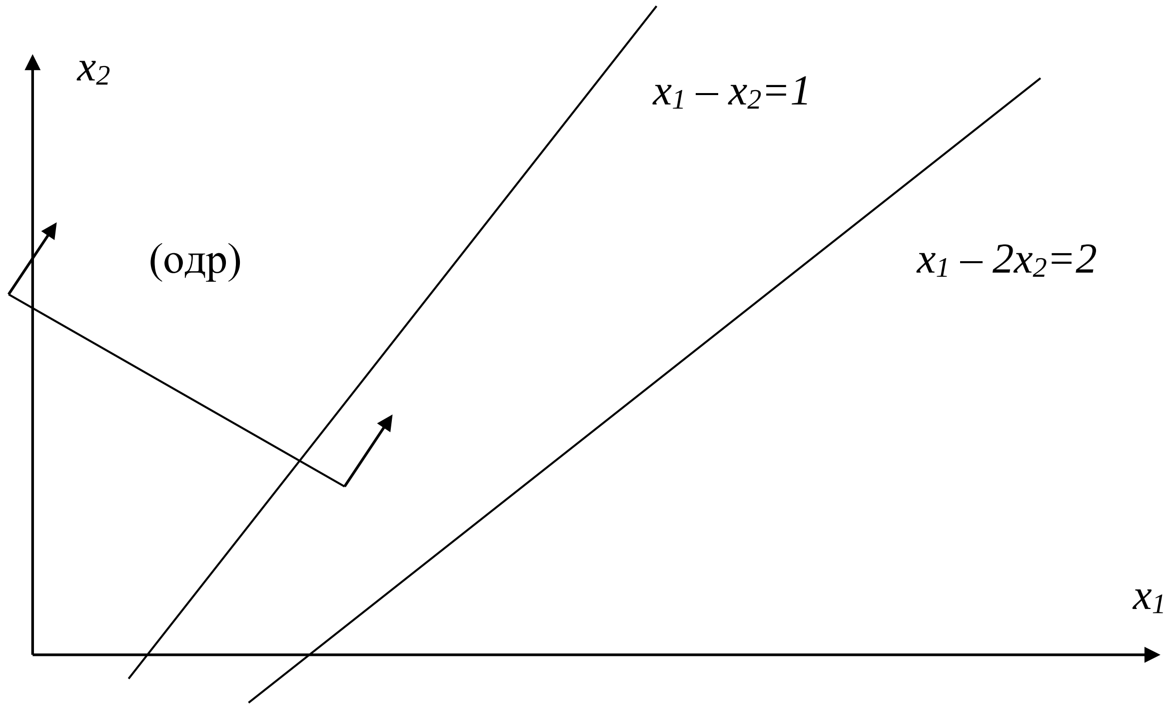
2. $f(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Из ограничений задачи следует, что область допустимых решений (одр) представляет собой неограниченную область между прямыми $x_2 = 0, x_1 = 0, x_1 - x_2 = 1;$ неравенство $x_1 - 2\,x_2 \leq 2$ не повлияло на вид (одр). Целевой функции соответствует прямая, со стрелками, стрелки указывают направление возрастания целевой функции. Из рисунка следует, что увеличением значений x_1 и x_2 целевую функцию на (одр) можно сделать как угодно большой. Таким образом, данная задача линейного программирования не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции.



3. $f(X)= 6x_1 + 2\,x_2 + x_3 \rightarrow min$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 5$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

Задача является почти канонической, базисными переменными являются переменные x_3 и x_4, однако, целевая функция содержит базисную переменную x_3, а она должна быть выражена только через свободные переменные. С помощью первого из ограничений ($2x_1 + x_2 + x_3 = 4$) исключаем из выражения для целевой функции базисную переменную x_3, тогда получим

$$f(X)= 4 + 4x_1 + x_2.$$

Теперь задача является полностью канонической и мы можем записать ее в симплекс-таблицу:

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	4	2	1	1	0
x_4	5	1	-2	0	1
$f(X)$	4	-4	-1	0	0

Уже в исходной таблице в строке для целевой функции коэффициенты $c_j \le 0$, $(j = 1,2,3,4)$, а это значит, что базисный план – оптимальный. Таким образом, оптимальным решением задачи будет $x_1^*=0, x_2^*=0, x_3^*=4, x_4^*=5, f(X^*)=4.$

4. $$f(X)= -x_1 + x_2 \to max$$

$$x_1 – x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 -2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$$

Эта задача также является почти канонической, базисными переменными будут x_3 и x_4, целевая функция выражена через свободные переменные, однако, целевая функция на максимум, а должна быть на минимум, поэтому заменим целевую функцию на противоположную по знаку, тогда она будет на минимум

$$f_1(X)= x_1 – x_2 \to min$$

и заполним исходную симплекс-таблицу:

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	1	1	-1	1	0
x_4	2	1	-2	0	1
$f_1(X)$	0	-1	1	0	0

В строке для целевой функции есть один положительный элемент *«1»*, однако, в столбце над ним нет положительных элементов, а это значит, что задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции.

5. $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to min$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 - x_4 = 3$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$$

Данная задача не является канонической, поэтому будем решать ее методом искусственного базиса. В системе ограничений есть одна базисная переменная x_3 (в первом ограничении), введем во второе ограничение вторую искусственную базисную переменную x_5 и рассмотрим целевую функцию вспомогательной задачи в виде $g(X) = x_5$, тогда вспомогательная задача будет формулироваться следующим образом:

$$g(X) = x_5 \to min$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 3 \qquad (*)$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5.$$

Во вспомогательной задаче *(*)* базисными переменными будут переменные

x_3 и x_5 и, если целевую функцию $g(X)$ с помощью второго ограничения выразить через свободные переменные

$$g(X) = 3 - x_1 + x_2 + x_4 \to min,$$

то задача становится канонической, запишем ее в симплекс – таблицу:

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	3	-1	1	1	0	0
x_5	3	1	-1	0	-1	1
$g(X)$	3	1	-1	0	-1	0
x_3	6	0	0	1	-1	1
x_1	3	1	-1	0	-1	1
$g(X)$	0	0	0	0	0	-1

В строке для целевой функции $g(X)$ только один положительный элемент «*1*», а в столбике над ним также только один положительный – тот, который соответствует строчке для x_5, поэтому переменная x_5 уходит из числа базисных переменных, а на ее место приходит переменная x_1. Преобразуем таблицу по правилу двух перпендикуляров, получаем новый раздел таблицы, в котором целевая функция $g(X)$ достигает своего минимума, равного «*0*». Следовательно, можем перейти к решению исходной задачи. Для этого выпишем ограничения, исходя из заключительной таблицы вспомогательной задачи, исключая столбец для x_5:

$$x_3 - x_4 = 6$$

$$x_1 - x_2 - x_4 = 3$$

а целевую функцию $f(X)$ с помощью этих ограничений выразим через свободные переменные x_2 и x_4:

$$f(X) = x_1 + x_2 + x_3 = 9 + 2x_2 + 2x_4 \to min,$$

после чего таблица для этой задачи принимает вид

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	6	0	0	1	-1

x_1	3	1	-1	0	-1
$f(X)$	9	0	-2	0	-2

Как следует из строки для целевой функции, получено оптимальное решение: $x_1^* = 3,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 6, x_4^* = 0, f(X^*) = 9.$

6. $f(X) = x_1 - x_3 \to min$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1$$
$$x_1 + 2x_2 \ \ = 2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Задача не является канонической, поэтому будем решать ее методом искусственного базиса. Чтобы была положительная константа в первом ограничении, сменим знак правой и левой частей этого равенства и по числу ограничений задачи введем две дополнительные переменные x_4 и x_5 и целевую функцию вспомогательной задачи $g(X) = x_4 + x_5$, тогда вспомогательная задача формулируется следующим образом:

$$g(X) = x_4 + x_5 \to min$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

Данная задача является канонической и мы можем внести ее исходные данные в таблицу (естественно, при этом целевая функция $g(X)$ выражается с помощью ограничений через свободные переменные):

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	1	-1	-1	-1	1	0
x_5	2	1	2	-1	0	1
$g(X)$	3	0	1	-2	0	0

x_4	2	-1/2	0	-3/2	1	1/2
x_2	1	1/2	1	-1/2	0	1/2
$g(X)$	2	-1/2	0	-3/2	0	-1/2

Судя по строке для целевой функции получено оптимальное решение вспомогательной задачи, однако, оптимальное значение целевой функции $g(X^*)= 2>0$, а это означает, что исходная задача не имеет решения, ввиду отсутствия допустимых планов.

7. $$f(X)= x_1 – x_2 + 3x_3 \to max$$

$$x_1 + x_2 – 2x_3 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 – 3x_3 \leq 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

Для данной задачи нужно построить двойственную задачу. Прежде всего, исходную задачу преобразуем так, чтобы по ней уже легко было строить двойственную. Исходная задача должна быть на минимизацию целевой функции и все неравенства должны иметь вид $\geq$, поэтому, изменим знак целевой функции и умножим на (-1) правую и левую части второго неравенства в системе ограничений:

$$f_1(X) = - x_1 + x_2 – 3x_3 \to min$$

$$x_1 + x_2 – 2x_3 \geq 0$$

$$x_1 – 2x_2 + 3x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Для данной задачи двойственная задача строится по алгоритму, изложенному в начале этой главы:

$$g(Y)= - y_2 \to max$$

$$y_1 – y_2 \leq -1$$

$$y_1 – 2y_2 \leq 1$$

$$-2y_1 + 3y_2 = -3$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Здесь число переменных (y_1 и y_2) равно числу ограничений исходной задачи, матрицы цен и свободных членов поменялись местами, задача формулируется, как задача на максимум, матрица ограничений является транспонированной по отношению к матрице ограничений исходной задачи, третьему ограничению, как соответствующему неограниченной по знаку переменной x_3,

соответствует знак = и обе переменные неотрицательные, так как в системе ограничений стоят только неравенства.

8. $$f(X)= x_1 – 2x_2 + x_3 \rightarrow max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + 4x_4 = 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Для этой задачи также необходимо построить двойственную задачу.

Также, как и в предыдущей задаче, преобразуем вначале исходную задачу:

$$f_1(X)= -x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow min$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4$$

$$- x_1 - 2x_2 \geq -3$$

$$-x_1 + 4x_4 = 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Для этой задачи строим двойственную задачу по тому же алгоритму, что выше:

$$g(Y) = 4y_1 – 3y_2 + 3y_3 \rightarrow max$$

$$y_1 – y_2 – y_3 \leq -1$$

$$y_1 – 2y_2 \leq 2$$

$$2y_1 \leq -1$$

$$4y_3 \le 0$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

По сравнению с предыдущей задачей пояснения здесь нужны лишь в той части, что переменная y_3 не ограничена по знаку, так как ей в системе ограничений исходной задачи соответствует равенство.

9. $$f(X) = -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \to min$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 7$$

$$-3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

Задача является канонической, базисными переменными являются переменные x_2, x_4, x_5. Поэтому сразу приступаем к решению задачи по методу обратной матрицы. Выпишем матрицы, входящие в задачу:

$$A = \begin{pmatrix} 2;1;-3;0;0 \\ 1;0;+1;1;0 \\ -3;0;-2;0;1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}; D = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1;0;0 \\ 0;1;0 \\ 0;0;1 \end{pmatrix}$$

$$C = (-2;1;-3;-1;0); C^* = (1;-1;0)$$

Здесь матрица C^* - часть матрицы C, соответствующая базисным переменным. Столбцы A_2, A_4, A_5 матрицы A являются базисными столбцами.

Подставим то, что уже известно в таблицу: $j_1 = 2; j_2 = 4; j_3 = 5;$ $X_б = (0;10;0;7;4)$. Заносим это в первый раздел в первые два столбца таблицы и одновременно в третий столбец заносим матрицу D^{-1}:

1	3	(1; -1; 0)	$\Delta_1 = 3$
2 4 5	10 7 4	$\begin{pmatrix} 1;0;0 \\ 0;1;0 \\ 0;0;1 \end{pmatrix}$	2 1 -3
2	-12	(-1/2; -1; 0)	$\Delta_3 = 7/2$

1 *4* *5*	*5* *2* *19*	$\begin{pmatrix} 1/2;0;0 \\ -1/2;1;0 \\ 3/2;0;1 \end{pmatrix}$	*-3/2* *5/2* *-13/2*
3	*-74/5*	*(1/5; -12/5; 0)*	
1 *3* *5*	*31/5* *4/5* *121/5*		

По формулам метода обратной матрицы вычисляем и заносим в таблицу значения $f(X_б)$ и базисный план двойственной задачи $Y_б$:

$$f(X_б)=\sum_{j=1}^{5} c_j x_j = 1\bullet 10 - 1\bullet 7 + 0 \bullet 4 =3;$$

$$Y_б = C^* D^{-1} = (1;-1;0).$$

Найдем Δ_j, соответствующие номерам свободных неизвестных x_1 и x_3:

$$\Delta_1 = (Y_б, A_1) - c_1 = 2\bullet 1 - 1\bullet 1 - 3\bullet 0 + 2 = 3 > 0;$$

$$\Delta_3 = (Y_б, A_3) - c_3 = -3 - 1 + 3 = -1 < 0.$$

Ясно, что $\Delta_p = 3 > 0$ $(p=1)$. Поместим Δ_1 в таблицу и найдем соответствующее $\lambda = D^{-1}A_1 = A_1 = (1;-1;0)$ и внесем его в таблицу. Поскольку есть положительное значение Δ_p, то базисный план можно улучшить. Переходим ко второй части таблицы (вторая итерация алгоритма). Вычисляем наименьшее ключевое отношение: $\theta = \min(10/2; 7/1)= 5$ и так как оно соответствует первой строке, то первая строка таблицы будет ключевой, а, как всегда, в методе обратной матрицы последний столбец также будет ключевым. Это означает, что базисная переменная x_2 переходит в число свободных переменных (соответствует первой ключевой строке), а свободная переменная x_1 переходит в число базисных переменных (соответствует индексу положительной Δ_1). Исходя из этого, преобразуем большую часть таблицы (кроме последнего столбца) по правилу двух перпендикуляров и внесем во второй раздел таблицы (вторая итерация). Затем вновь вычисляем Δ_j с небазисными номерами *(2 и 3)*:

$\Delta_2 = -3/2 < 0,\ \Delta_3 = 7/2 > 0$ и заносим Δ_3 в таблицу. Вновь вычисляем вектор $\lambda = D^{-1}A_3 = (-3/2;5/2;-13/2)$ и заносим его в таблицу. Среди компонент вектора λ есть только одна положительная $5/2$ и она соответствует второй строке второго раздела таблицы, а это означает, что переменная x_4 переходит в число базисных переменных, а переменная x_3 из свободных перейдет в базисные переменные (в соответствии с индексом положительной Δ_3). Далее таблица преобразуется так же, как и в предыдущем случае. В таблице приведены только значения $X_б$ и $f(X_б)$.

И снова вычисляем Δ_j для свободных переменных: $\Delta_2 = (Y, A_2) - c_2 = 1/5 - 1 < 0,\ \Delta_4 = (Y, A_4) - c_4 = -12/5 + 1 < 0.$ Так как все $\Delta_j < 0$, то базисный план – оптимальный. Итак, $X^{опт} = (31/5, 0, 4/5, 0, 121),\ f(X^{опт}) = -74/5$. Решение задачи закончено.

10. $$f(X) = 2x_1 + x_2 \to min$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 6$$
$$x_2 + 3x_3 \geq 4$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

Данная задача не является не только канонической, но даже не является основной. Поэтому преобразуем ее к основной задаче. Для этого вычтем из левых частей неравенств по одной новой неотрицательной переменной, чтобы сделать их равенствами:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6$$
$$x_2 + 3x_3 - x_5 = 4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_6 = 1$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5,6.$$

Задача с такими ограничениями будет основной, но она не будет канонической. Ее можно решать методом искусственного базиса. А можно попытаться привести ее к канонической задаче. Для этого применим к этой системе уравнений метод Гаусса. Тогда она преобразуется в систему:

$$x_3 = 11/14 - x_4/14 + 2x_5/7 + x_6/14$$

$$x_2 = 23/14 + 3x_4/14 + x_5/7 - 3x_6/14 \qquad (*)$$

$$x_1 = 13/7 + 2x_4/7 - x_5/7 + 11x_6/14$$

Система ограничений *(*)* является канонической, базисными переменными здесь являются переменные x_1, x_2, x_3. Запишем теперь задачу с этими ограничениями и с исходной целевой функцией, в которой базисные переменные x_1, x_2 с помощью соотношений *(*)* выражены через свободные переменные:

$$f(X) = 7/2 + 11x_4/14 - x_5/7 + 19x_6/14 \rightarrow min$$

$$x_1 - 2x_4/7 + x_5/7 - 11x_6/14 = 13/7$$

$$x_2 - 3x_4/14 - x_5/7 + 3x_6/14 = 23/14$$

$$x_3 + x_4/14 - 2x_5/7 - x_6/14 = 11/14$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5/$$

Эта задача является канонической и для нее можно составить симплекс-таблицу:

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	*13/7*	*1*	*0*	*0*	*-2/7*	*1/7*	*-11/14*
x_2	*23/14*	*0*	*1*	*0*	*-3/14*	*-1/7*	*3/14*
x_3	*11/14*	*0*	*0*	*1*	*1/14*	*-2/7*	*-1/14*
$f(X)$	*7/2*	*0*	*0*	*0*	*-11/14*	*1/7*	*-19/14*
x_5	*13*	*7*	*0*	*0*	*-2*	*1*	*-11*

x_2	7/2	1	1	0	-1/2	0	-19/14
x_3	9/2	2	0	1	-1/2	0	-45/14
$f(X)$	23/14	-1	0	0	-9/14	0	3/14

В начальной части этой таблицы, в строке для целевой функции есть только один положительный элемент *(1/7)* и он соответствует столбику для

x_5, а в столбике над этим элементом есть также только один положительный элемент *(1/7)* и он соответствует строке для базисной переменной x_1, поэтому эти переменные меняются местами: переменная x_5 становится базисной, а переменная x_1 становится свободной переменной:; таблица преобразуется по правилу двух перпендикуляров, результат преобразования представлен во второй части таблицы. В строке для целевой функции есть одна положительная величина *(3/14)*, а в столбике над ней нет положительных величин – это означает, что задача не имеет решения в силу неограниченности целевой функции.

5.9. Типовой расчет

В данном наборе представлено 30 вариантов задач для студентов. Требования для студентов:

- задачи 1 и 2 необходимо решать геометрическим методом;
- задачи 3 и 4 – простым симплекс – методом;
- задачи 5 и 6 – методом искусственного базиса;
- в задачах 7 и 8 необходимо для заданных задач построить двойственные им задачи;
- задачи 9 и 10 нужно решать методом обратной матрицы.

Вариант 1

1. $f(X)= x_1 + x_2 \to max$

$$0 \le x_1 \le 1$$

$$0 \le x_2 \le 2$$

$$0 \le x_1 + x_2 \le 3$$

$$-1 \le x_1 - x_2 \le 0.$$

2. $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to max$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 + 2x_2 \le 3$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

3. $f(X) = 6x_1 + 2x_2 + x_3 \to min$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 5$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$$

4. $f(X) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 2$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5.$$

5. $f(X) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 10x_4 \to max$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$$

6. $f(X) = x_2 - x_3 \to min$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$$

7. $f(X) = x_1 - 2x_2 - x_3 \to max$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 3$$

$$x_1 - x_2 \le 1$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2.$$

8. $f(X) = 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 \to min$

$$x_1 - 3x_3 \le -2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -3$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$$

9. $f(X) = 6x_1 + 2x_2 + x_3 \to min$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 – 2x_2 + x_4 = 5$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$$

10. $f(X) = 2x_1 – x_2 + 3x_3 – 2x_4 + x_5 \to max$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 – x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 2$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5.$$

Вариант 2

1. $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to max$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$

$$3x_1 + x_2 \le 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \ge 2$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3.$$

2. $f(X) = x_2 – x_1 \to max$

$$x_1 + 3x_2 \le 12$$

$$3x_1 – x_2 \ge 6$$

$$3x_1 + 4x_2 \ge 0$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2.$$

3. $f(X) = -x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$
4. $f(X) = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow min$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3$$
$$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$
5. $f(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow min$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$
6. $f(X) = 3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 \rightarrow max$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 =7$$
$$x_1 - 2x_2 -5x_3 - 3x_4 =-12$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$
7. $f(X)= 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow min$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 5$$
$$x_1 - 2x_2 = 3$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 \geq 1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$
8. $f(X) = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow max$
$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$
$$5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$
9. $f(X) = -x_1 + x_2 \rightarrow max$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

10. $f(X) = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow min$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3$$

$$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Вариант 3

1. $f(X)= x_1 - 4x_2 \rightarrow min$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0.$$

2. $f(X)= 4x_1 + 6x_2 \rightarrow max$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$0 \leq x_1 \leq 7$$

$$0 \leq x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

3. $f(X) =2x_3 - x_4 \rightarrow min$

$$x_2 + x_4 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$$

$$2x_3 + x_5 \leq 10$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

4. $f(X) = x_4 - x_2 \rightarrow min$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

5. $f(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to max$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 + 3x_2 \leq 5$

$x_j \geq 0, j = 1, 2{,}3.$

6. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \to min$

$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$

$2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3$

$x_j \geq 0, j = 1, 2{,}3.$

7. $f(X)= 3x_1 + x_2 \to max$

$x_1 + 2x_2 \leq 2$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

$x_2 + x_3 = 3$

$x_j \geq 0, j = 1, 2.$

8. $f(X) = - x_1 + 2x_2 - x_3 \to min$

$x_1 + 4x_2 + x_3 = 5$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$

$x_j \geq 0, j = 1, 2{,}3.$

9. $f(X) =2x_3 – x_4 \to min$

$x_2 + x_4 \leq 5$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$

$2x_3 + x_5 \leq 10$

$x_j \geq 0, j = 1{,}2{,}3{,}4{,}5.$

10. $f(X) = x_4 – x_2 \to min$

$x_1 + x_2 – 2x_3 = 3$

$x_2 – 2x_3 + x_4 = 1$

$x_j \geq 0, j = 1{,}2{,}3{,}4.$

Вариант 4

1. $f(X)=2x_1 + 3x_2 \to max$

$-2x_1 + 3x_2 \leq 5$

$x_1 – 4x_2 \leq \ \leq 2$

$x_1 – x_2 \leq 4$

$x_j \geq 0, j = 1, 2.$

2. $f(X)= x_1 – x_2 + x_3 \to min$

$x_1 + 2x_2 – x_3 + x_4 = 3$

$x_1 – 4x_2 + x_3 = - 2$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

3. $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max$

$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5$

$2x_1 – x_3 + x_4 = 1$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$

4. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to max$

$2x_1 + 2x_2 – 3x_3 + x_4 \leq 6$

$x_2 – x_3 + x_4 \leq 2$

$x_1 – x_2 + 2x_3 \leq 5$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$

5. $f(X)=x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max$

$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5$

$x_1 – x_3 + x_4 = 1$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$

6. $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to max$

$x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$

$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 – x_5 = -6$

$x_1 + 2x_2 + 2x_4 – x_5 = 2$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4,5.$

7. $f(X) = - x_1 + 2x_2 - x_3 \to min$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 4$$
$$2x_1 + x_3 - x_4 \ge 4$$
$$2x_1 - x_3 + x_4 = 3$$
$$x_1 \ge 0, x_4 \ge 0.$$
8. $f(X) = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to min$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1$$
$$x_j \ge 0, j = 1, 2,3.$$
9. $f(X) =2x_3 - x_4 \to min$
$$x_2 + x_4 \le 5$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$$
$$2x_3 + x_5 \le 10$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5.$$
10. $f(X) = x_4 - x_2 \to min$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$$
$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$$

Вариант 5

1. $f(X)=x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to min$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 =3$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1$$
$$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4.$$
2. $f(X)= x_1 + x_2 \to max$
$$x_1 + x_3 = 2$$
$$x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4.$$
3. $f(X) = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 -2x_4 - 3x_5 \to max$
$$x_1 + 2x_2 + 6x_5 = 10$$

$$-3x_2 + x_3 + 2x_5 = 8$$
$$3x_2 + x_4 + 3x_5 = 6$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

4. $f(X) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to min$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$$
$$-2x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

5. $f(X) = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to min$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq -2$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

6. $f(X) = 3x_1 + x_2 + x_3 \to max$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 =4$$
$$5x_2 - 3x_3 =2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

7. $f(X) = 2x_1 - x_2 + x_3 \to max$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

8. $f(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 \to max$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 =1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 -2x_4 - 3x_5 \to max$
$$x_1 + 2x_2 + 6x_5 = 10$$
$$-3x_2 + x_3 + 2x_5 = 8$$
$$3x_2 + x_4 + 3x_5 = 6$$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$

10. $f(X) = x_1 – 3x_2 + 2x_3 \to min$

$3x_1 – x_2 + 2x_3 \leq 7$

$-2x_1 + 4x_2 \leq 12$

$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

Вариант 6

1. $f(X)= x_1 + 2x_2 \to max$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 3x_2 \leq 2$

$x_j \geq 0, j = 1, 2.$

2. $f(X)= x_2 – x_1 \to max$

$x_1 + 3x_2 \leq 12$

$3x_1 – x_2 \geq 6$

$3x_1 + 4x_2 \geq 0$

$x_j \geq 0, j = 1, 2.$

3. $f(X) = 8x_1 – 3x_2 + x_3 \to max$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$

$x_1 – 2x_2 = 3$

$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 11$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

4. $f(X) = x_1 – x_2 + 3x_3 \to max$

$x_1 + x_2 – 2x_3 = 6$

$x_1 + 2x_2 – 3x_3 = 1$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

5. $f(X)= 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 \to min$

$x_1 - 3x_3 \leq -2$

$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -3$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

6. $f(X) = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 \rightarrow max$

$$x_1 + 2x_2 + 6x_5 = 10$$

$$-3x_2 + x_3 + 2x_5 = 8$$

$$3x_2 + x_4 + 3x_5 = 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = 2x_1 + 3x_3 - x_5 \rightarrow max$

$$x_1 - x_2 + 2x_5 = 3$$

$$-2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

8. $f(X) = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \rightarrow min$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq -2$$

$$x_1 - 4x_2 + 4x_3 \geq 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

9. $f(X) = 8x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow max$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 - 2x_2 = 3$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 11$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

10. $f(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Вариант 7

1. $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = -2$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

$$2.\ f(X)=x_1+2x_2 \rightarrow max$$

$$0 \le x_1 \le 2$$

$$0 \le x_2 \le 3$$

$$x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2.$$

$$3.\ f(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$$

$$x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 - x_2 \le 1$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2.$$

$$4.\ f(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow max$$

$$4x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 7$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

$$5.\ f(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow max$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

$$6.\ f(X)= 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \rightarrow max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$$

$$7.\ f(X) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow min$$

$$x_1 + 2x_2 \ge 5$$

$$2x_1 + 3x_2 \ge 1$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$8.\ f(X)= - 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2$$

$$- x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 \geq 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

9. $f(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

10. $f(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow max$

$$4x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 7$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Вариант 8

1. $f(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow min$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. $f(X) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$3x_1 - x_2 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

3. $f(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

4. $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 4$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

5. $f(X) = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to min$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$

$3x_1 + x_2 - x_3 \geq 1$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

6. $f(X) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to min$

$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

7. $f(X) = 3x_2 + 4x_1 \to max$

$2x_1 + 5x_2 \leq 1$

$3x_1 + x_2 \leq 2$

$- x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

8. $f(X) = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \to min$

$x_1 - 2x_2 + x_4 = - 3$

$x_3 - 2x_3 = 2$

$3x_2 - x_4 + x_5 \leq 5$

$x_2 + x_3 \geq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$

9. $f(X) = x_1 + 2x_2 \to max$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 - 2x_2 \leq 2$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

10. $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$

$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 4$

$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

Вариант 9

1. $f(X) = 2x - x_2 \rightarrow min$

$$2x_1 - x_2 \leq 12$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. $f(X) = x_2 - x_1 \rightarrow max$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$3x_1 - x_2 \geq 6$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 0$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

3. $f(X) = x_1 - 3x_2 \rightarrow min$

$$x_1 - x_2 \leq 3$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

4. $f(X) = x_1 - x_2 + 4x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

5. $f(X) = -x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow min$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

6. $f(X)= 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \rightarrow max$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31$$
$$- x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

8. $f(X) = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow max$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10$$

$$6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20$$

$$10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

9. $f(X) = x_1 - 3x_2 \rightarrow min$

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

10. $f(X) = x_1 - x_2 + 4x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Вариант 10

1. $f(X) = x_1 - 4x_2 \rightarrow min$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0.$$

2. $f(X) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow max$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$0 \le x_1 \le 7$$

$$0 \le x_2 \le 6.$$

3. $f(X) = x_1 + 2x_2 \to min$

$$x_1 – x_2 \le 1$$

$$x_1 + x_2 \le -1$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

4. $f(X) = x_1 – 4x_2 + x_3 \to min$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 – x_3 = 1$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

5. $f(X) = x_1 – x_2 + 3x_3 \to max$

$$x_1 + x_2 – 2x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 – 3x_3 = 1$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

6. $f(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to max$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$-x_1 + 4x_2 – 2x_3 \le 6$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

7. $f(X) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to max$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 -4x_3 = 4$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

8. $f(X) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to min$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2$$

$$x_1 - x_2 – 4x_3 \le - 3$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow min$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq -1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

10. $f(X) = x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow min$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

Вариант 11

1. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$

$$-2x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

2. $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow min$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$$

3. $f(X) = x_1 + 3x_2 \rightarrow max$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

4. $f(X) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

5. $f(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow max$

$$- x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

6. $f(X) = 2x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 6$$

$$x_2 + 3x_3 \ge 4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \ge 1$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

7. $f(X) = x_1 + 2x_2 \to max$

$$2x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

8. $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to min$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 1$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 6$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = -1$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = x_1 + 3x_2 \to max$

$$x_1 – x_2 \le 1$$

$$2x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

10. $f(X) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to max$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 – x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

Вариант 12

1. $f(X) = x_1 – x_2 + x_3 \to min$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 = -2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

2. $f(X) = x_1 + x_2 \rightarrow max$
$$x_1 + x_3 = 2$$
$$x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

3. $f(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow min$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5$$
$$x_1 + 2x_3 = 4$$
$$x_1 - 2x_2 = 1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

4. $f(X) = 6x_1 + 3x_2 \rightarrow max$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 16$$
$$2x_1 + x_2 \leq 15$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

5. $f(X) = -4x_1 - 7x_2 -8x_3 -5x_4 \rightarrow max$
$$x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 4$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

6. $f(X) = x_1 + x_2 - x_3 -2x_5 \rightarrow min$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = -3$$
$$x_3 - 2x_4 = 2$$
$$3x_1 - x_4 + x_5 \leq 5$$
$$x_2 + x_3 \geq 3$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = x_1 - 2x_2 \rightarrow max$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 7$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 + 4x_2 \le 5$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

8. $f(X) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to min$

$$3x_1 + 5x_2 \le 8$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 5$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to min$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 5$$

$$x_1 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 = 1$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

10. $f(X) = 6x_1 + 3x_2 \to max$

$$2x_1 + 3x_2 \le 16$$

$$2x_1 + x_2 \le 15$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Вариант 13

1. $f(X) = x_1 + x_2 \to max$

$$0 \le x_1 \le 1$$

$$0 \le x_2 \le 2$$

$$0 \le x_1 + x_2 \le 3$$

$$-1 \le x_1 - x_2 \le 0.$$

2. $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 + x_2 \le 2$$

$$x_1 + 2x_2 \le 3$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

3. $f(X) = 2x_1 + x_2 \to max$

$x_1 + x_2 \le 150$

$0.01x_1 + 0.03x_2 \le 1$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

4. $f(X) = 12x_1 + x_2 \to min$

$2x_1 - x_2 \le 14$

$x_1 + x_2 \le 6$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

5. $f(X) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to min$

$x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 27$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \ge 24$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$

6. $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to max$

$x_1 + x_2 + 2x_3 =12$

$x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 + 2x_2 \le 3$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$

7. $f(X) = 2x_1 - 9x_2 \to min$

$3x_1 + 2x_2 \le 7$

$x_1 + x_2 \ge 2$

$x_1 + 5x_2 = 4$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

8. $f(X) = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to max$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$

$x_1 + 4x_2 + x_3 \le 5$

$x_2 + x_3 \le 4$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$

9. $f(X) = 2x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \le 150$$

$$0.01x_1 + 0.03x_2 \le 1$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$10.\ f(X) = 12x_1 + x_2 \to min$$

$$2x_1 - x_2 \le 14$$

$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

Вариант 14

$$1.\ \ f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to max$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 12$$

$$3x_1 + x_2 \le 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \ge 2$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

$$2.\ \ f(X) = x_1 + x_2 \to max$$

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$

$$2x_1 + x_2 \ge 2$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

$$3.\ f(X) = x_1 + x_2 \to max$$

$$x_1 + x_3 = 2$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

$$4.\ f(X) = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to max$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$$

$$5.\ \ f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to max$$

$$3x_1 + x_2 \le 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \ge 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

6. $f(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \to min$

$$2x_1 + x_2 + x_4 - 5x_5 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$2x_1 + x_4 + x_5 = 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = 7x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

8. $f(X) = -x_1 + x_2 + x_4 \to max$

$$2x_1 + x_2 + x_4 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

9. $f(X) = x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + x_3 = 2$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

10. $f(X) = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to max$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

$$5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

Вариант 15

1. $f(X) = - x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$3x_1 - x_2 \geq 6$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 0,$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

$$2.\ f(X) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$3x_1 - x_2 \leq 15$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

$$3.\ f(X) = x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$-x_1 + 4x_2 = 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

$$4.\ f(X) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 10x_4 \rightarrow min$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

$$5.\ f(X) = x_1 - 4x_2 \rightarrow min$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$3x_1 - x_2 \geq 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

$$6.\ f(X) = 5x_1 - x_2 + 5x_3 - 11x_4 - 2x_5 \rightarrow min$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 8$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 8$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

$$7.\ f(X) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow min$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

8. $f(X) = 2x_1 - x_2 + x_3 \to max$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$$

$$-2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = x_1 - 2x_2 + x_3 \to max$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$-x_1 + 4x_2 = 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

10. $f(X) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 10x_4 \to min$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

Вариант 16

1. $f(X) = x_1 - 4x_2 \to min$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -1$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0.$$

2. $f(X) = 4x_1 + 6x_2 \to max$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

3. $f(X) = x_2 - x_3 \to min$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

4. $f(X) = 3x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + 2x_2 – x_3 = 4$$

$$5x_2 – 3x_3 = 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

5. $f(X) = x_1 - 4x_2 \rightarrow min$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 – 2x_2 \geq -1$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

6. $f(X) = x_1 + 5x_2 - 2x_3 \rightarrow min$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = 4x_1 - x_2 \rightarrow max$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

8. $f(X) = - x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow min$

$$x_1 + 2x_2 – x_3 \geq 4$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 7$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

9. $f(X) = x_2 – x_3 \rightarrow min$

$$- 2x_1 + x_2 + x_3 – 2x_4 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

10. $f(X) = 3x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$5x_2 - 3x_3 = 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Вариант 17

1. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$

$$-2x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

2. $f(X) = x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow min$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 - 4x_2 - x_4 = -2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

3. $f(X) = 2x_1 - 3x_2 + x_4 \rightarrow min$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$x_3 + x_4 = 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

4. $f(X) = 2x_3 - 2x_4 - x_5 \rightarrow min$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 4$$

$$x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

5. $f(X) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow max$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

6. $f(X) = 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to min$

$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 10$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 12$

$- x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 10$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$

7. $f(X) = - 2x_1 + x_2 \to max$

$x_1 - 2x_2 \geq 1$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

8. $f(X) = 2x_1 - x_2 + x_3 \to min$

$x_1 + x_2 – 2x_3 \geq 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$

$x_1 - x_2 - x_3 = 1$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

9. $f(X) =2x_1 – 3x_2 + x_4 \to min$

$x_1 + 2x_2 – x_3 =2$

$x_3 + x_4 =6$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$

10. $f(X) =2x_3 – 2x_4 – x_5 \to min$

$x_1 -2x_2 + x_4 + x_5 = 4$

$x_2 + 3x_3 – x_4 + x_5 = 2$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$

Вариант 18

1. $f(X) = x_1+ x_2 + x_3 \to max$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

2. $f(X) = x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + x_3 = 2$$
$$x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

3. $f(X) = -2x_1 + 3x_3 \to max$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

4. $f(X) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to min$
$$2x_1 + x_2 - 3x_4 = 10$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 7$$
$$-3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5.$$

5. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \to max$
$$-2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 - 4x_2 \le 2$$
$$x_1 - x_2 \le 5$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

6. $f(X) = -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 \to min$
$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 15$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = x_1 + 7x_2 \to max$
$$2x_1 + 8x_2 \le 5$$
$$x_1 - x_2 \ge 1$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

8. $f(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to max$
$$x_1 + x_2 - x_4 \ge 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1 + x_3 - x_4 = 5$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4.$$

9. $f(X) = -2x_1 + 3x_3 \rightarrow max$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

10. $f(X) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow min$

$$2x_1 + x_2 - 3x_4 = 10$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 7$$

$$-3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

Вариант 19

1. $f(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

2. $f(X) = x_2 - x_1 \rightarrow max$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$3x_1 - x_2 \geq 6$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 0$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

3. $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

4. $f(X) = 2x_1 - x_2 \rightarrow min$

$$2x_1 - x_2 \leq 12$$

$$x_2 + x_1 \leq 6$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

5. $f(X) = x_1 - x_2 \rightarrow min$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$x_1 - 4x_2 = -2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

6. $f(X) = 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 3x_5 \rightarrow min$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 14$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 10$$
$$-4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 6$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = - x_1 + 2x_2 \rightarrow max$
$$2x_2 + x_1 \leq 3$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

8. $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow min$
$$x_1 + x_3 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow max$
$$x_1 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

10. $f(X) = 2x_1 - x_2 \rightarrow min$
$$2x_1 - x_2 \leq 12$$
$$x_2 + x_1 \leq 6$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

Вариант 20

1. $f(X) = x_1 + 2x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 - x_1 \le 1$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

2. $f(X) = x_1 + 3x_2 \to max$

$$3x_1 - x_2 \le 5$$
$$-2x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

3. $f(X) = 3x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \le 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 3$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

4. $f(X) = x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

5. $f(X) = x_1 + 2x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 2$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

6. $f(X) = 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 3x_5 \to min$

$$-2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 12$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 8$$
$$x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 6$$
$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = -x_1 + 2x_2 \to max$

$$2x_1 + x_2 \ge 2$$

$$3x_1 + 7x_2 \le 7$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

8. $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to max$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \ge 5$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 7$$

$$x_1 + x_4 = 5$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

9. $f(X) = 3x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \le 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 3$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

10. $f(X) = x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_1 - x_2 \le 2$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

Вариант 21

1. $f(X) = x_1 + 3x_2 \to max$

$$x_1 + 2x_2 \le 3$$

$$x_2 - x_1 \le 2$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

2. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \to min$

$$-2x_1 + x_2 \le 3$$

$$3x_1 - x_2 \le 4$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

3. $f(X) = -x_1 + 2x_2 \to min$

$$2x_1 - 3x_2 \le 2$$

$$x_1 + 2x_2 \le 3$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

4. $f(X) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$-x_1 + 2x_2 \leq 1$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

5. $f(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$x_1 + 3x_2 \leq 12$

$3x_1 - x_2 \geq 6$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

6. $f(X) = -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 - 3x_5 \rightarrow \min$

$2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 22$

$x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 10$

$x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 6$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$

7. $f(X) = -2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$2x_1 - x_2 \geq 2$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

8. $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5$

$x_1 - x_2 + x_3 \geq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

9. $f(X) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

$2x_1 - 3x_2 \leq 2$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

10. $f(X) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$-x_1 + 2x_2 \leq 1$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

Вариант 22

1. $f(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

2. $f(X) = x_1 + x_2 \rightarrow min$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

3. $f(X) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow min$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

4. $f(X) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow max$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

5. $f(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

6. $f(X) = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow max$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 10$$

$$6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20$$

$$10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = x_1 + 5x_2 \rightarrow min$

$$3x_1 + x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

8. $f(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow max$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow min$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

10. $f(X) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow max$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

Вариант 23

1. $f(X) = x_1 + x_2 \rightarrow max$

$$- x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

2. $f(X) = x_1 + 3x_2 \rightarrow min$

$$- x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

3. $f(X) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow max$

$$x_1 + 2x_2 \le 5$$

$$- x_1 + 3x_2 \le 4$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

4. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \to max$

$$-x_1 + x_2 \le 3$$

$$4x_1 – x_2 \le 4$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

5. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

6. $f(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 \to min$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 4$$

$$2x_1 + x_4 + x_5 = 6$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = 7x_1 + 3x_2 \to max$

$$4x_1 + x_2 \le 5$$

$$x_1 + x_2 \ge 2$$

$$x_1 + x_4 =5$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2.$$

8. $f(X) = x_1 - x_2 - x_3 \to min$

$$4x_1 – 3x_2 \le 5$$

$$x_1 +9 x_2 \ge 2$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 3$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = 2x_1 + 4x_2 \to max$

$$x_1 + 2x_2 \le 5$$

$$- x_1 + 3x_2 \le 4$$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

10. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$

$-x_1 + x_2 \leq 3$

$4x_1 - x_2 \leq 4$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

Вариант 24

1. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$

$4x_1 - x_2 \leq 4$

$x_2 \leq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

2. $f(X) = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow max$

$-3x_1 + x_2 \leq 4$

$2x_1 - x_2 \leq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

3. $f(X) = -34x_1 - x_2 \rightarrow min$

$3x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1 + 3x_2 \leq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

4. $f(X) = 12x_1 + x_2 \rightarrow min$

$2x_1 - x_2 \leq 14$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

5. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 + 2x_2 \leq 7$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

6. $f(X) = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \rightarrow max$

$x_1 - 2x_2 + x_4 = -3$

$3x_1 – x_4 + x_5 \le 5$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5.$

7. $f(X) = 2x_1 - x_2 \to max$

$x_1 – 3x_2 \le 7$

$x_1 - 8x_2 \ge 2$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

8. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to max$

$x_1 – x_2 + x_3 \le 5$

$x_1 + x_2 + 2x_4 = 3$

$3x_1 +2 x_2 \ge 2$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$

9. $f(X) = - 34x_1 - x_2 \to min$

$3x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 + 3x_2 \le 3$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

10. $f(X) = 12x_1 + x_2 \to min$

$2x_1 - x_2 \le 14$

$x_1 + x_2 \le 6$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

Вариант 25

1. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \to max$

$x_1 + x_2 \le 5$

$x_1 – x_2 \le 4$

$x_2 \le 3$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

2. $f(X) = - 3x_1 - 5x_2 \to min$

$- 2x_1 + x_2 \le 4$

$3x_1 – x_2 \le 2$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

3. $f(X) = -3x_1 - 5x_2 \to min$

$$3x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 5$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

4. $f(X) = 3x_1 + x_2 \to max$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

5. $f(X) = 3x_1 + 2x_2 \to max$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

6. $f(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to max$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

7. $f(X) = 3x_1 - 2x_2 \to min$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

8. $f(X) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \to max$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 4$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = -3x_1 - 5x_2 \to min$

$3x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 + 4x_2 \le 5$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

10. $f(X) = 3x_1 + x_2 \to max$

$x_1 + 2x_2 \le 3$

$3x_1 + x_2 \le 4$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

Вариант 26

1. $f(X) = 3x_1 + 2x_2 \to max$

$x_1 + x_2 \le 1$

$x_1 - x_2 \le 3$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

2. $f(X) = -3x_1 - 2x_2 \to min$

$-3x_1 + x_2 \le 5$

$x_1 - x_2 \le 2$

$3x_1 - x_2 \le 2$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

3. $f(X) = 3x_1 + 7x_2 \to max$

$x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 + 3x_2 \le 7$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

4. $f(X) = x_1 - x_2 \to min$

$x_1 + 3x_2 \le 12$

$3x_1 - x_2 \le 6$

$x_j \ge 0, j = 1,2.$

5. $f(X) = 3x_1 + 2x_2 \to max$

$x_1 + 5x_2 \le 12$

$$3x_1 + x_2 \le 7$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

6. $f(X) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to min$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 10$$

$$x_1 + 3x_2 \le 5$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

7. $f(X) = 3x_1 + 8x_2 \to max$

$$4x_1 - x_2 \ge 1$$

$$x_1 + 3x_2 \le 5$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

8. $f(X) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \to max$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 4$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \le 7$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 2$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = 3x_1 + 7x_2 \to max$

$$x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 + 3x_2 \le 7$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

10. $f(X) = x_1 - x_2 \to min$

$$x_1 + 3x_2 \le 12$$

$$3x_1 - x_2 \le 6$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

Вариант 27

1. $f(X) = 3x_1 + x_2 \to max$

$$3x_1 + x_2 \ge 3$$

$$x_1 \le 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

2. $f(X) = -x_1 - 3x_2 \rightarrow min$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 2$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

3. $f(X) = -4x_1 + 3x_2 \rightarrow min$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 5$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

4. $f(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow min$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 5$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

5. $f(X) = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow max$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

6. $f(X) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow max$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 5$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 8$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow min$

$$x_1 + 2x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

8. $f(X) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow max$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 6$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 5$$
$$x_1 - x_2 + 7x_3 \geq 1$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = -4x_1 + 3x_2 \rightarrow min$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 5$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

10. $f(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow min$
$$4x_1 - 3x_2 \leq 5$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

Вариант 28

1. $f(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow min$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

2. $f(X) = x_1 + 5x_2 \rightarrow min$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$2x_1 - x_2 \leq 3$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

3. $f(X) = x_1 + 4x_2 \rightarrow max$
$$-2x_1 + 3x_2 \leq 1$$
$$x_1 - x_2 \leq 3$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

4. $f(X) = x_1 + 5x_2 \rightarrow max$
$$x_1 - 4x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 3x_2 \le 13$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

5. $f(X) = 2x_1 + 7x_2 \to max$

$$x_1 - 4x_2 \le 3$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 13$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

6. $f(X) = x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \to max$

$$4x_1 - 3x_2 + x_4 \le 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 \le 6$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = 7x_1 + 5x_2 \to max$

$$4x_1 + x_2 \ge 3$$

$$x_1 \le 2$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

8. $f(X) = 5x_1 + x_2 - 3x_3 \to max$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 7$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6$$

$$x_1 - 2x_2 + 7x_3 \ge 2$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = x_1 + 4x_2 \to max$

$$-2x_1 + 3x_2 \le 1$$

$$x_1 - x_2 \le 3$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

10/ $f(X) = x_1 + 5x_2 \to max$

$$x_1 - 4x_2 \le 3$$

$$2x_1 - 3x_2 \le 13$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

Вариант 29

1. $f(X) = 7x_1 + 5x_2 \to max$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

2. $f(X) = 2x_1 + 3x_2 \to max$

$-3x_1 + 2x_2 \leq 1$

$x_1 - 2x_2 \leq 2$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

3. $f(X) = x_1 + 5x_2 \to min$

$-4x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 - 3x_2 \leq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

4. $f(X) = x_1 + 7x_2 \to max$

$x_1 - x_2 \leq 7$

$x_1 - 3x_2 \leq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

5. $f(X) = x_1 + 5x_2 \to max$

$x_1 + 2x_2 \geq 3$

$x_1 + 7x_2 \leq 9$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

6. $f(X) = x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_5 \to max$

$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 7$

$x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 11$

$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 12$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$

7. $f(X) = 2x_1 + 5x_2 \to max$

$3x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

8. $f(X) = x_1 + x_2 - x_3 \to max$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$

$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8$

$x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2,3.$

9. $f(X) = x_1 + 5x_2 \to min$

$-4 x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 - 3x_2 \leq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

10. $f(X) = x_1 + 7x_2 \to max$

$x_1 - x_2 \leq 7$

$x_1 - 3x_2 \leq 3$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

Вариант 30

1. $f(X) = 4x_1 + 5x_2 \to max$

$x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$x_j \geq 0, j = 1,2.$

2. $f(X) = x_1 + 4x_2 \to max$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$$x_1 \leq 6$$
$$x_2 \leq 7$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

3. $f(X) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow min$
$$-3x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 - 5x_2 \leq 7$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

4. $f(X) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow min$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 2$$
$$x_1 - 5x_2 \leq 7$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

5. $f(X) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow max$
$$-2x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 7$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

6. $f(X) = 13x_1 + 5x_3 + 9x_4 + 6x_5 \rightarrow min$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 11$$
$$3x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 16$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 7$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

7. $f(X) = x_1 + 5x_2 \rightarrow min$
$$3x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_j \geq 0, j = 1,2.$$

8. $f(X) = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \rightarrow max$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

9. $f(X) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow min$
$$-3x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 - 5x_2 \leq 7$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2.$$

10. $f(X) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow min$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 2$$
$$x_1 - 5x_2 \leq 7$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2.$$

6. ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М., Наука, 1983.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М. Наука, 1999.

3. Луценко М.М. Линейная алгебра. Учебное пособие.– СПб, ПГУПС, 1999.

4. Мухачева Э.А., Рубинштейн Г.Ш. Математическое программирование. Новосибирск, Наука, 1987.

5. Клепикова Л.С. Линейная алгебра. Методические указания.– СПб, ПГУПС, 1998.

6. Макеева Л.С., Галанова З.С., Малинская Л.Х., Шайфер М.П. Определители и матрицы. Методические указания.– СПб, ПГУПС, 1996.

7. Артамонова Н.Е., Павлова И.И. Матрицы. Методические указания.– СПб, ПГУПС, 2005.

8. Луценко М.М. Решение задачи линейного программирования. Методические указания.– СПб, ПГУПС, 1984.

9. Родин В.И., Галанова З.С., Ермошин А.А., Конова С.Ю. Линейное программирование. Часть 1. Методические указания.– СПб, ПГУПС, 1996.

10. Родин В.И., Галанова З.С., Ермошин А.А., Конова С.Ю. Линейное программирование. Часть 2. Методические указания.– СПб, ПГУПС, 1997.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Матрицы, определители и действия над ними
1.1. Матрицы и действия над ними
1.2. Определители квадратных матриц
1.3. Обратная матрица
1.4. Ранг матрицы
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений
2.1. Общий вид системы линейных уравнений
2.2. Типовой расчет
3. Элементы векторной алгебры
3.1. Скалярное произведение векторов
3.2. Векторное произведение векторов
3.3.Смешанное произведение векторов
4. Элементы аналитической геометрии
4.1.Аналитическая геометрия на плоскости
4.2. Аналитическая геометрия в пространстве
4.2.1. Плоскость
4.2.2. Прямая линия в пространстве
Прямая линия и плоскость в пространстве
4.3. Типовой расчет.
5. Линейное программирование
5.1 Постановка задач линейного программирования
5.2. Геометрический метод решения задач линейного программирования
5.3. Таблица и алгоритм решения канонических задач линейного программирования симплекс – методом
5.4.Метод искусственного базиса
5.5. Элементы теории двойственности в линейном программировании
5.6. Модифицированный симплекс-метод (метод обратной матрицы)
5.7. Задачи для самостоятельного решения
5.8. Решение типового варианта
5.9. Типовой расчет
6. Литература

Учебное издание

Дегтярев Валентин Григорьевич
Репникова Нина Михайловна
Савушкина Ирина Анастасьевна
Шадринцева Наталия Владимировна

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ТРАНСПОРТНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Сборник задач

Часть 1

Публикуется в авторской редакции.

Подписано в печать с оригинал-макета 24.10.2008.
Формат 60×84 1/16. Бумага для множ. апп. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 10,125. Тираж 200 экз.
Заказ
Петербургский государственный университет путей сообщения.
190031, СПб., Московский пр., 9.
Типография ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.