

**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТЕХНОЛОГИИ И ДИЗАЙНА»**

**Региональный институт непрерывного профессионального образования**

**Кафедра теоретической и прикладной механики**

**Е.В. Полякова, А.Г. Усов,  
Т.С. Грибкова, А.В. Орестова**

# **Техническая механика**

**Методические указания  
к выполнению контрольных работ  
для студентов заочной формы обучения**

**Санкт-Петербург  
2012**

## **ВВЕДЕНИЕ**

Главными задачами изучения курса технической механики является изучение основных законов и теорем механики, а также развитие у студентов умения применять их к решению практических задач.

Следует иметь в виду, что для понимания теорем и выводов технической механики необходимы сведения из высшей математики (аналитическая геометрия, основы дифференциальной геометрии, дифференциальное и интегральное исчисление). Недостаточные знания этих разделов математики могут привести к сложностям при изучении механики и трудностям при решении практических задач.

В процессе изучения технической механики студенты выполняют две контрольные работы в соответствии с указаниями, полученными на установочных лекциях (контрольная работа № 1 – темы 1-6, контрольная работа № 2 – тема 7).

Для изучения курса технической механики в качестве основных источников рекомендуются учебники С.М. Тарга «Краткий курс теоретической механики», И.И. Артоболевского «Теория механизмов и машин» и лекции ведущих преподавателей.

### **Выбор варианта**

Шифром, по которому выбирается тот или иной вариант расчетно-графической работы, является номер зачетной книжки или студенческого билета. Выбор номера схемы на рисунке или в таблице следует производить по предпоследней цифре шифра, а исходные данные в таблицах – по последней цифре.

### **Оформление работы**

Контрольная работа выполняется в тетради с указанием на обложке название дисциплины, фамилии и инициалов студента, номера зачетной книжки и почтового адреса.

При оформлении контрольной работы изложение каждого задания должно начинаться с новой страницы. Условие задания должно быть переписано полностью, вместе с заданным рисунком и данными из таблицы. Далее кратко записываются данные задачи и указываются искомые величины. Решение каждой задачи должно сопровождаться подробными пояснениями, указывающими, на основании каких положений механики проводится решение задачи. С левой стороны листа следует оставить поле шириной не менее 25 мм.

Исправление ошибок в контрольных работах после рецензирования производится в тексте работы на оставшихся свободных листах. При этом необходимо приводить подробные пояснения по всем замечаниям, сделанным рецензентом.

При защите контрольных работ студент в беседе с преподавателем должен показать знания теоретического материала и умение самостоятельно решать аналогичные задачи.

# СТАТИКА

## Тема 1. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

### Задание 1

Найти реакции связей (опор), наложенных на основное тело конструкции – балку или сварной стержень.

Исходные данные приведены в *таблице 1.1*. Схемы конструкций приведены ниже (размеры, м).

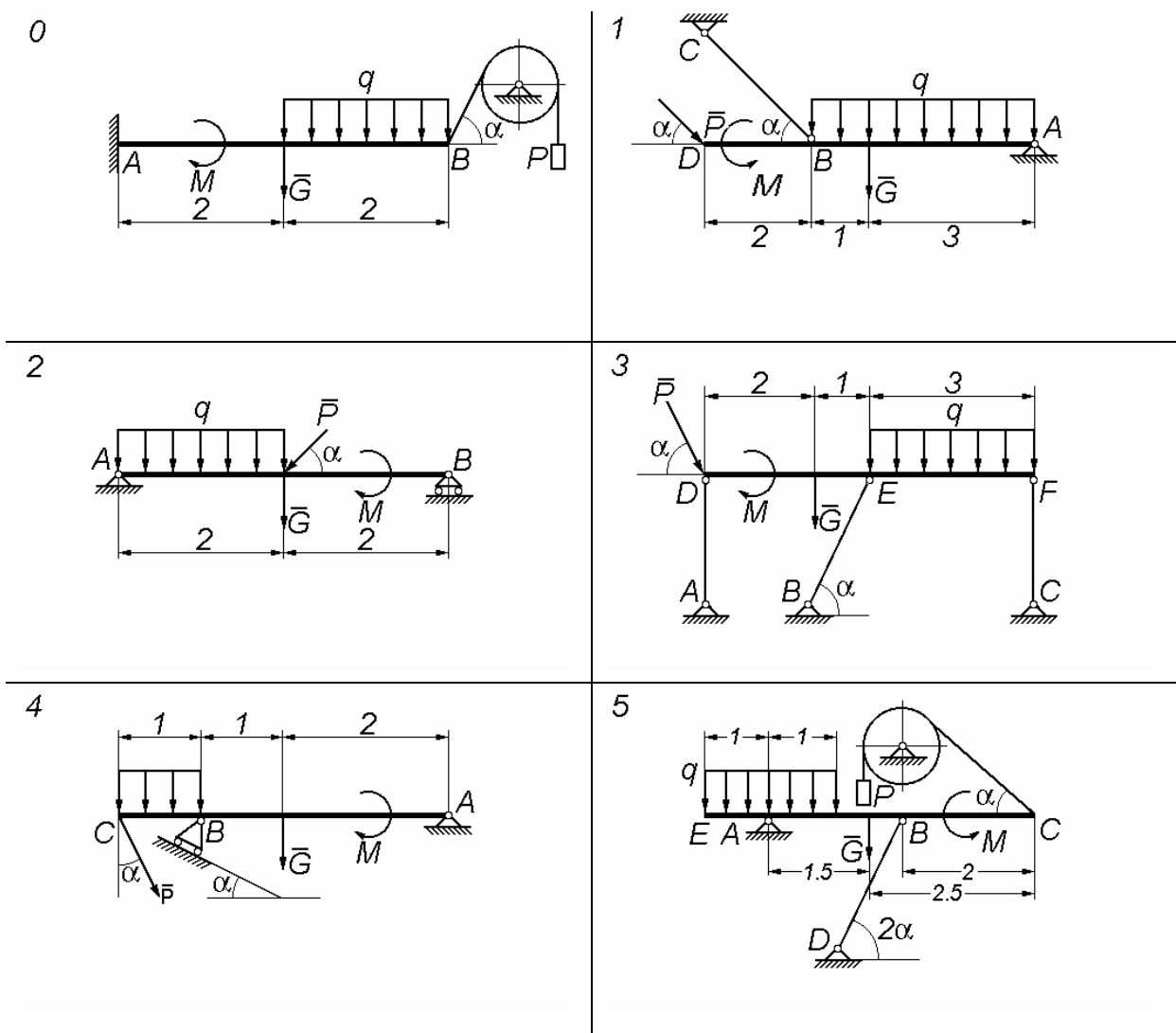


Рис. 1.1

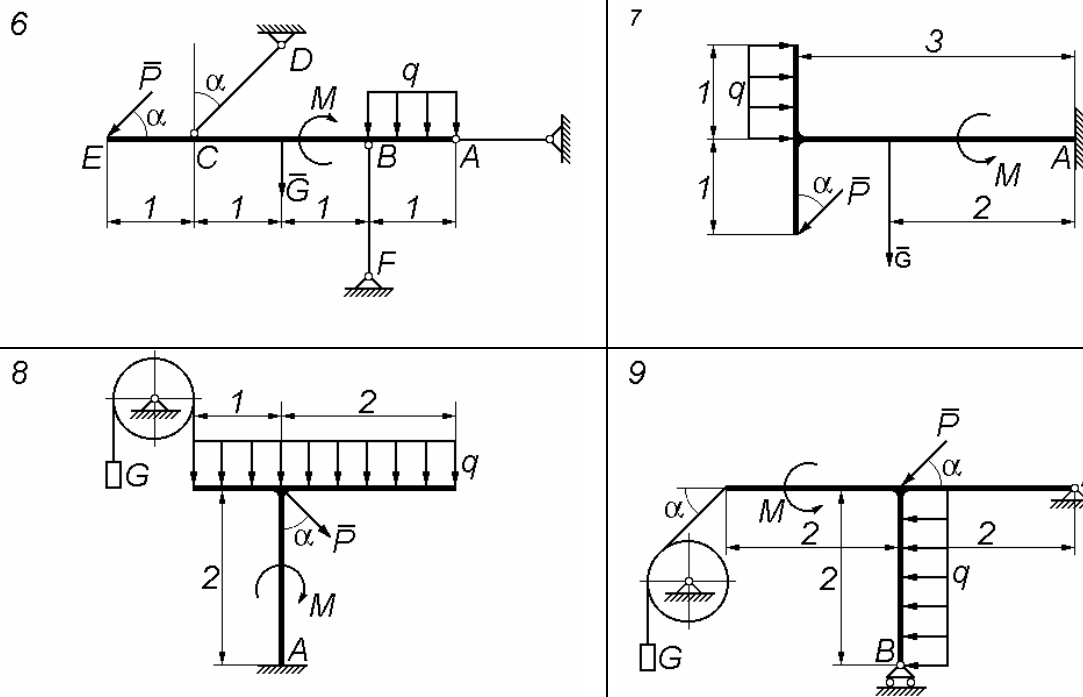


Рис. 1.1. Продолжение

Таблица 1.1

Номер варианта исходных данных	Заданные величины				
	$G$ , кН	$P$ , кН	$M$ , кН·м	$q$ , кН/м	$\alpha$ , град
0	10	5	20	1	30
1	12	4	10	2	15
2	8	6	5	4	45
3	14	3	8	3	60
4	16	8	12	2	30
5	6	7	4	3	60
6	10	6	8	0,5	15
7	6	12	15	4	45
8	4	8	9	1.5	30
9	20	10	6	5	60

**Основные теоретические положения, используемые при решении задач**

Тела, ограничивающие перемещения данного тела, являются по отношению к нему связями. В точках контакта тела со связью возникают силы их взаимодействия. Силы, которыми связи действуют на данное тело, называются реакциями связей. При решении задач, кроме активных сил, действующих на данное тело, необходимо учитывать и эти контактные силы (реакции связей).

Реакции связей в задачах статики определяют, решая уравнения равновесия, составляемые для отдельных тел или конструкций. Эти уравнения будут указаны ниже. Но направления реакций связей во многих случаях могут и должны быть определены предварительно (до составления уравнений равновесия) из рассмотрения свойств связей.

В вариантах предлагаемых заданий используются виды связей (опор), которые приведены ниже.

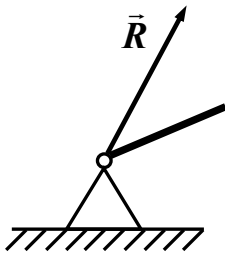


Рис. 1.2

*Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора*

Эта опора изображается, как показано на рисунке 1.2. Она препятствует любому поступательному движению (тела) балки, но дает ему возможность свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. Реакция  $\vec{R}$  цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

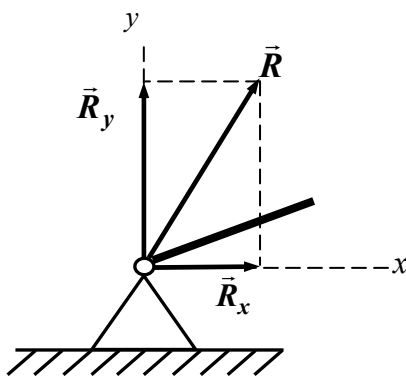


Рис. 1.3

При решении задач реакция  $\vec{R}$  заменяется двумя взаимно перпендикулярными составляющими, например,  $\vec{R}_x$  и  $\vec{R}_y$  (рис. 1.3). Определив в ходе решения задачи составляющие  $\vec{R}_x$  и  $\vec{R}_y$ , находят модуль и направление реакции  $\vec{R}$ . Если знак величины какой-либо силы окажется отрицательным, то это означает, что направление силы противоположно тому, которое было предварительно указано на рисунке.

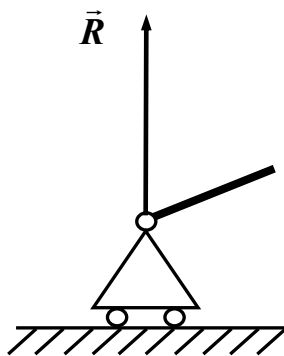


Рис. 1.4

*Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора*

(рис. 1.4), нижняя обойма которой поставлена на катки, не препятствует перемещению балки параллельно опорной плоскости, если не учитывать сил трения. Линию действия реакции такой опоры следует считать проходящей через центр шарнира перпендикулярно к опорной плоскости. Таким образом, не известен только модуль этой реакции.

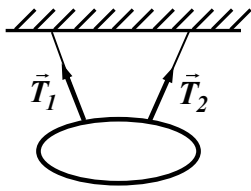


Рис. 1.5

Если на твердое тело наложена *гибкая связь* (нить, канат, трос, цепь и др.), то реакция связи, приложенная к телу в точке его крепления к связи, направлена вдоль связи от тела, как показано на *рисунке 1.5*.

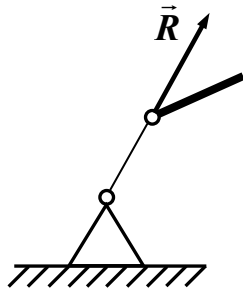


Рис. 1.6

Опорой конструкции может служить *невесомый стержень с двумя концевыми шарнирами* (рис. 1.6). Невесомым называют стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Реакция  $\vec{R}$  прямолинейного стержня направлена вдоль оси стержня.

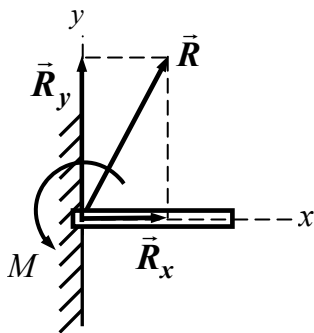


Рис. 1.7

В случае *заделки* одного тела в другое (рис. 1.7) реакцию опоры (стены) следует представить, как состоящую из силы  $\vec{R}$ , разложенной на составляющие  $\vec{R}_x$  и  $\vec{R}_y$ , а также из момента  $M$ .

Во всех вариантах задания присутствует прямолинейный участок конструкции, находящийся под действием распределенной нагрузки постоянной интенсивности  $q$  (рис. 1.8). Такую нагрузку следует заменить ее равнодействующей  $\vec{Q}$ , направленной перпендикулярно нагруженному отрезку (длиной  $l$ ) и приложенной в его середине. Модуль равнодействующей определяется выражением

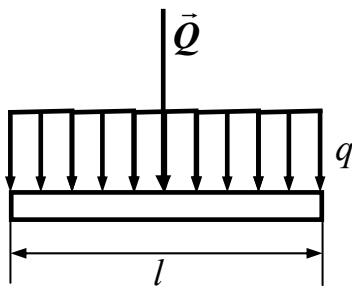


Рис. 1.8

$$Q = q \cdot l. \quad (1.1)$$

Среди всевозможных уравнений равновесия тела под действием произвольной плоской системы сил не может быть более трех независимых.

Из них можно определить не более трех неизвестных (реакций). При правильном выполнении настоящего задания число искомых реакций равно трем.

При решении задач можно пользоваться любой из указываемых ниже трех форм системы уравнений равновесия тела (конструкции) под действием произвольной плоской системы сил.

При составлении уравнений равновесия в первой форме требуют, чтобы суммы проекций всех сил на произвольно выбранные оси декартовых координат  $x$ ,  $y$  и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки  $O$  равнялись нулю, т. е. записывают уравнения:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.2)$$

При составлении уравнений равновесия во второй форме можно ограничиться составлением одного уравнения равновесия в проекциях, например, на ось  $x$ , и добавить два уравнения моментов относительно двух произвольных точек  $A$  и  $B$ , взятых так, чтобы ось  $x$  не была перпендикулярна прямой  $AB$ :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.3)$$

Третья форма уравнений равновесия получится, если составить три уравнения моментов относительно произвольно выбранных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащих на одной прямой:

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0. \quad (1.4)$$

Задание рекомендуется выполнять в следующем порядке:

- 1) выделить и изобразить на рисунке некоторое тело (конструкцию), из уравнений равновесия которого можно определить искомые реакции связей (опор);
- 2) изобразить на рисунке задаваемые внешние силы, приложенные к этому телу (конструкции); при этом следует заменить распределенные нагрузки их равнодействующими;
- 3) изобразить на рисунке реакции связей, наложенных на выбранное тело (конструкцию);
- 4) выбрать и указать на рисунке направления осей декартовых координат и точку (или точки), относительно которой будет составлено уравнение моментов;
- 5) составить уравнения равновесия тела;
- 6) решая уравнения равновесия, определить неизвестные величины.

Уравнения равновесия можно составлять в любой из указанных форм (уравнения (1.2), (1.3) или (1.4)). Следует стремиться к получению таких уравнений равновесия, в каждое из которых входила бы только одна неизвестная величина. В этом случае вместо совместного решения системы уравнений можно каждую из неизвестных величин непосредственно определить из соответствующего уравнения. Для этого оси координат целесообразно направить так, чтобы некоторые неизвестные силы оказались перпендикулярными к этим осям. Тогда величины этих неизвестных сил в соответствующее уравнение проекций не войдут. Если центр моментов, то есть точку, относительно которой должно быть составлено уравнение моментов, выбрать в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил, то из соответствующего уравнения моментов непосредственно определяется величина третьей неизвестной силы. Если, однако, при этом центр моментов оказывается расположенным так, что вычисление плеча искомой силы представляет значительные трудности, то лучше составить такое уравнение моментов (относительно другого центра), в которое войдут величины двух неизвестных сил, а затем совместно решить полученную систему уравнений.

**Выполняя задание, следует придерживаться следующей формы**

### Задание 1

Вариант схемы 4, вариант исходных данных 3.

Условие задачи

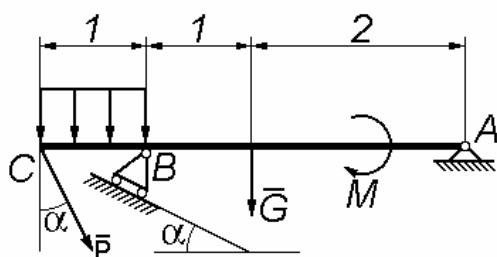


Рис. 1.9

Найти реакции связей (опор), наложенных на основное тело конструкции – балку или сварной стержень. Схема конструкции показана на рисунке 1.9 (размеры, м).

Дано:  $G = 14$  кН,  $P = 4$  кН,  $M = 7$  кН·м,  $q = 3$  кН/м,  $\alpha = 60^\circ$ .

Найти: реакции опор балки.



Решение.

На балку действуют (рис. 1.10) следующие активные силы: сила тяжести  $\vec{G}$ , приложенная в ее середине, сила  $\vec{P}$ , направленная под углом  $\alpha = 60^\circ$  к вертикали, равнодействующая  $\vec{Q}$  распределенной нагрузки, равная  $Q = q \cdot |CB| = 3$  кН, приложенная в середине участка  $CB$  и направленная вертикально вниз, и, наконец, пара сил с моментом  $M$ .

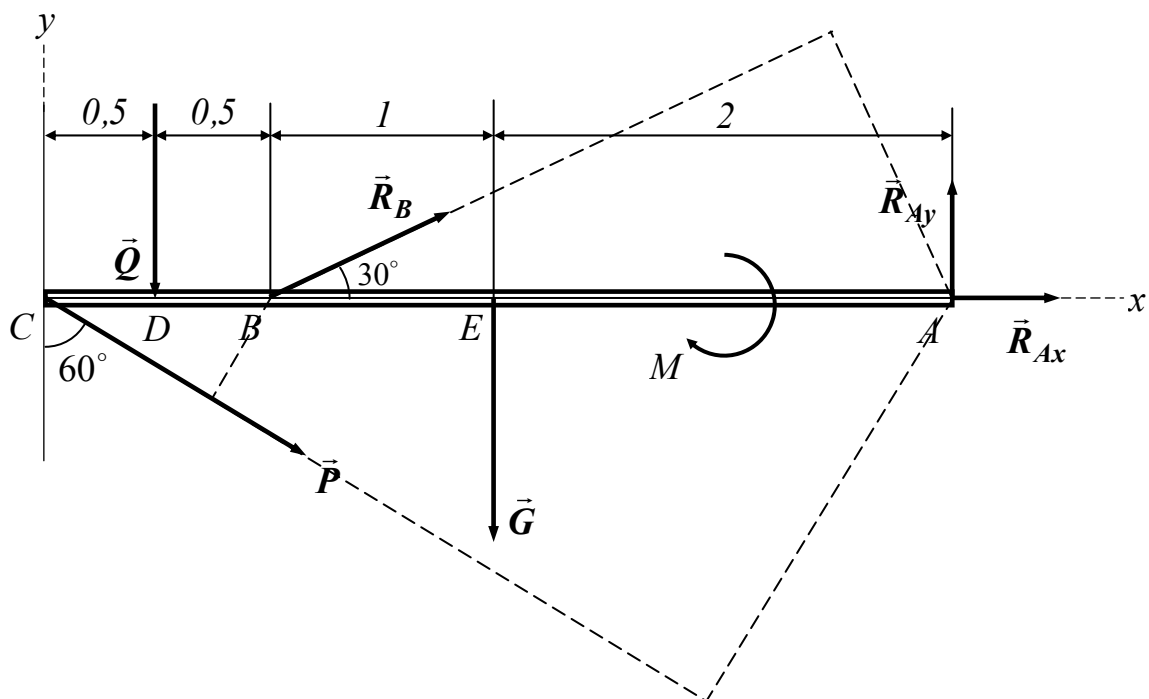


Рис. 1.10

Реакцию  $\vec{R}_B$  опоры  $B$  направляем перпендикулярно опорной плоскости, неизвестную по направлению реакцию  $\vec{R}_A$  представляем двумя взаимно перпендикулярными составляющими  $\vec{R}_{Ax}$  и  $\vec{R}_{Ay}$ .

Уравнение равновесия балки в проекциях на ось  $x$  имеет вид

$$P \cdot \sin 60^\circ + R_B \cdot \cos 30^\circ + R_{Ax} = 0. \quad (1.5)$$

Уравнение моментов относительно центра  $A$  имеет вид

$$P \cdot |CA| \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot |DA| - R_B \cdot |BA| \cdot \sin 30^\circ + G \cdot |EA| - M = 0. \quad (1.6)$$

Уравнение моментов относительно центра  $B$  имеет вид

$$P \cdot |CB| \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot |DB| - G \cdot |BE| - M + R_{Ay} \cdot |BA| = 0. \quad (1.7)$$

Решая эту систему уравнений равновесия, определим неизвестные величины. Уравнение моментов (1.6) позволяет вычислить реакцию  $R_{Ay}$ :

$$R_{Ay} = \frac{-P \cdot |CB| \cdot \sin 30^\circ - Q \cdot |DB| + G \cdot |BE| + M}{|BA|} \approx 5,83 \text{ кН}. \quad (1.8)$$

Из уравнения моментов (1.7) находим реакцию  $R_B$ :

$$R_B = \frac{P \cdot |CA| \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot |DA| + G \cdot |EA| - M}{|BA| \cdot \sin 30^\circ} \approx 26,33 \text{ кН}. \quad (1.9)$$

Подставив полученное значение  $R_B$  в уравнение (1.5), определяем неизвестную реакцию  $R_{Ax}$ :

$$R_{Ax} = -P \cdot \sin 60^\circ - R_B \cdot \cos 30^\circ \approx -26,27 \text{ кН}. \quad (1.10)$$

Для проверки вычислений составим уравнение равновесия балки в проекциях на ось  $y$ , направленную, как показано на *рисунке 1.9*. Справедливость проведенных расчетов подтверждается выполнением этого уравнения, т. е. равенством

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P \cdot \cos 60^\circ - Q + R_B \cdot \sin 30^\circ - G + R_{Ay} \approx 0. \quad (1.11)$$

Модуль полной реакции  $R_A$  определяется по формуле

$$R_A = \sqrt{(R_{Ax})^2 + (R_{Ay})^2} \approx 26,91 \text{ кН}. \quad (1.12)$$

Ответ:  $R_B \approx 26,33 \text{ кН}$ ,  $R_{Ax} \approx -26,27 \text{ кН}$ ,  $R_{Ay} \approx 5,83 \text{ кН}$ ,  $R_A \approx 26,91 \text{ кН}$ .

# КИНЕМАТИКА

## Тема 2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

### Задание 2

По заданным уравнениям движения точки  $M$  в декартовых координатах  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$  найти:

- 1) уравнение траектории движения точки;
- 2) скорость и ускорение точки в произвольный момент времени  $t$ , а также в момент времени  $t = t_1$ ;
- 3) касательное и нормальное ускорения точки в момент времени  $t_1$ ;
- 4) радиус кривизны траектории в точке, совпадающей с положением точки  $M$  в момент времени  $t = t_1$ .

Кроме того, построить, выбрав соответствующие масштабы для длин, скоростей и ускорений:

- 1) траекторию точки;
- 2) положение точки на траектории в момент времени  $t = t_1$ ;
- 3) скорость и ускорение точки, а также касательное и нормальное ускорения для момента времени  $t = t_1$ .

Уравнения движения точки и момент времени  $t = t_1$  выбрать по последней цифре шифра, величины коэффициентов  $a$  и  $b$ , приведенных в таблице 2.1, – по предпоследней цифре.

Уравнения движения точки и значение времени  $t$  к заданию 2:

0.	$x = a \sin(\pi/4)$	$y = b \cos(\pi/4)$	$t_1 = 3 \text{ с}$
1.	$x = a \sin(\pi/6)$	$y = 4 + b \cos(\pi/6)$	$t_1 = 1 \text{ с}$
2.	$x = 10at$	$y = bt^2$	$t_1 = 0,5 \text{ с}$
3.	$x = 1 - a \cos t$	$y = b \sin t$	$t_1 = \pi/4 \text{ с}$
4.	$x = a \cos 3t - 1$	$y = 3 + b \sin 3t$	$t_1 = \pi/18 \text{ с}$
5.	$x = a - \sin t$	$y = b + 2 \cos t$	$t_1 = \pi/3 \text{ с}$
6.	$x = at$	$y = at - bt^2$	$t_1 = 0,2 \text{ с}$
7.	$x = a \cos(2\pi/3)$	$y = 2 + b \sin(2\pi/3)$	$t_1 = 2 \text{ с}$
8.	$x = a + 2 \sin(\pi/4)$	$y = b + 2 \sin(\pi/4)$	$t_1 = 1 \text{ с}$
9.	$x = at^2 + bt$	$y = 2bt$	$t_1 = 0,3 \text{ с}$

*Таблица 2.1*

Заданная величина, м	Номер варианта исходных данных									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a$	2	3	1	4	5	6	3	2	1	4
$b$	6	1	2	5	4	3	2	5	3	2

## **Основные теоретические положения, используемые при решении задач**

Положение точки  $M$  в выбранной системе отсчета можно задать тремя ее координатами, например, прямоугольными декартовыми координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . При движении точки ее координаты являются функциями времени

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (2.1)$$

Если точка движется в одной плоскости, к примеру,  $Oxy$ , будем иметь два уравнения движения

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \quad (2.2)$$

Приведенные уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки (параметр – время  $t$ ). Для того чтобы получить уравнение траектории в виде уравнения, связывающего координаты точки, например, в виде  $y = \varphi(x)$ , необходимо из уравнений движения исключить время  $t$ .

Проекция скорости на оси прямоугольных декартовых координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени, т. е.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}. \quad (2.3)$$

Модуль скорости  $v$  определяется равенством

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (2.4)$$

Вектор скорости точки  $\vec{v}$  направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

Проекция ускорения точки на оси прямоугольных декартовых координат равны первым производным от соответствующих проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}. \quad (2.5)$$

Модуль ускорения  $a$  вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}. \quad (2.6)$$

В соответствии с содержанием данного задания ограничимся рассмотрением движений точки по плоскости. Выберем на плоской траектории точки начало  $O$  и положительное направление отсчета дуговой координаты  $s$ . Проведем через рассматриваемую точку  $M$  касательную и нор-

маль к траектории. Введем в рассмотрение единичные векторы (орты) касательной  $\vec{\tau}$  и главной нормали  $\vec{n}$ , направив орт  $\vec{\tau}$  в сторону возрастания дуговой координаты, а орт  $\vec{n}$  – в сторону вогнутости кривой (рис. 2.1).

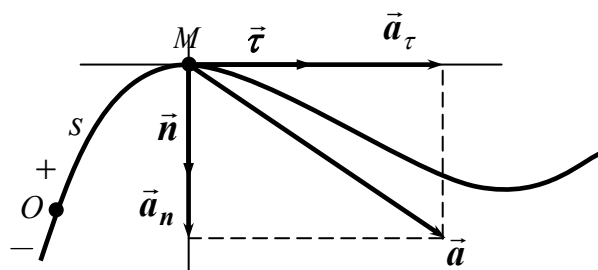


Рис. 2.1

Ускорение точки может быть представлено в виде геометрической суммы двух составляющих. Составляющая, направленная по касательной к траектории, называется касательным или тангенциальным ускорением. Это ускорение может быть представлено формулой

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau}, \quad (2.7)$$

где  $v_\tau = \frac{ds}{dt}$  – алгебраическая величина скорости, равная проекции скорости на положительное направление касательной к траектории в рассматриваемой точке оси.

Составляющая ускорения, направленная по главной нормали, называется нормальным ускорением. Нормальное ускорение определяется формулой

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}, \quad (2.8)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны траектории.

Таким образом, ускорение может быть представлено в виде

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (2.9)$$

Касательное ускорение характеризует быстроту изменения величины скорости точки. Оно направлено:

- в сторону скорости при ускоренном движении;
- в сторону, противоположную вектору скорости, при замедленном движении.

Нормальное ускорение всегда направлено в сторону вогнутости траектории, к центру ее кривизны, и характеризует быстроту изменения скорости по направлению.

Ускорение направлено в сторону вогнутости траектории (рис. 2.1) или (если  $a_n = 0$ ) по касательной к ней.

Так как векторы  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения может быть представлен в виде

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}. \quad (2.10)$$

При решении задач удобно использовать следующие соотношения:

$$|a_\tau| = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v_\tau} \right| = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \right| = \frac{|v_x a_x + v_y a_y|}{v}, \quad (2.11)$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}, \quad \rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

Знак скалярного произведения  $\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x a_x + v_y a_y$  определяет характер движения точки: положительное значение будет получено при совпадении направлений векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{a}_\tau$ , движение точки в этом случае является ускоренным; отрицательное значение указанного скалярного произведения соответствует замедленному движению точки; нулевое значение – равномерному.

**При выполнении задания следует придерживаться следующей формы.**

## Задание 2

Вариант данных 1.

### Условие задачи

По заданным уравнениям движения точки  $M$  в декартовых координатах  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$  найти:

- 1) уравнение траектории движения точки;
- 2) скорость и ускорение точки в произвольный момент времени  $t$ , а также в момент времени  $t = t_1$ ;
- 3) касательное и нормальное ускорения точки в момент времени  $t_1$ ;
- 4) радиус кривизны траектории в точке, совпадающей с положением точки  $M$  в момент времени  $t = t_1$ .

Кроме того, построить, выбрав соответствующие масштабы для длин, скоростей и ускорений:

- 1) траекторию точки;
- 2) положение точки на траектории в момент времени  $t = t_1$ ;

3) скорость и ускорение точки, а также касательное и нормальное ускорения для момента времени  $t = t_1$ .

Дано:

$$x = 3 \sin(\pi t / 6) \text{ м}, \quad y = 2 + 4 \cos(\pi t / 6) \text{ м}, \quad t_1 = 1 \text{ с}.$$

Решение.

1. Получим уравнение траектории движения точки в координатной форме, исключив время  $t$  из уравнений движения. Выражая  $\sin(\pi t / 6)$  и  $\cos(\pi t / 6)$  из заданных уравнений движения, имеем

$$\sin(\pi t / 6) = \frac{x}{3}, \quad \cos(\pi t / 6) = \frac{y-2}{4}. \quad (2.12)$$

Воспользовавшись тем, что  $\sin^2(\pi t / 6) + \cos^2(\pi t / 6) = 1$ , получаем уравнение траектории в виде

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{4}\right)^2 = 1. \quad (2.13)$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение эллипса с полуосями 3 и 4 с центром в точке  $(0,2)$  (рис. 2.2).

2. Выясним, где находится точка на траектории в момент времени  $t_1$ :

$$x|_{t=1} = 3 \sin(\pi / 6) = 1,5 \text{ м}, \quad (2.14)$$

$$y|_{t=1} = 2 + 4 \cos(\pi / 6) = 2 + 2\sqrt{3} \approx 5,5 \text{ м}.$$

Таким образом, точка в момент времени  $t = t_1 = 1 \text{ с}$  имеет координаты  $M_1(1,5; 5,5)$ . Ее положение на траектории указано на рисунке 2.2.

3. Определим скорость и ускорение точки  $M$  в произвольный момент времени  $t$ , а также в момент времени  $t_1$ .

Проекции скорости на оси  $x, y$  равны первым производным от соответствующих координат точки по времени

$$v_x = \dot{x} = \frac{\pi}{2} \cos(\pi t / 6), \quad v_y = \dot{y} = -\frac{2\pi}{3} \sin(\pi t / 6). \quad (2.15)$$

Модуль скорости  $v$  равен

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\pi}{6} \sqrt{9 \cos^2(\pi t / 6) + 16 \sin^2(\pi t / 6)} = \\ &= \frac{\pi}{6} \sqrt{9 + 7 \sin^2(\pi t / 6)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для момента времени  $t_1$  будем иметь

$$v_x|_{t=1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,36 \text{ м/с}, \quad v_y|_{t=1} = -\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \approx -1,05 \text{ м/с}, \quad (2.17)$$

$$v|_{t=1} \approx 1,72 \text{ м/с}.$$

По найденным проекциям построим вектор скорости  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$  в точке  $M_1$  (рис. 2.2).

Проведя построение, полезно убедиться в том, что вектор скорости  $\vec{v}$  в соответствии с теоретическими положениями направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

Проекции ускорения точки на оси прямоугольных декартовых координат равны первым производным от соответствующих проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени, т. е.

$$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x = -\frac{\pi^2}{12} \sin(\pi t / 6), \quad a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y = -\frac{\pi^2}{9} \cos(\pi t / 6). \quad (2.18)$$

Модуль ускорения  $a$  вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{\pi^2}{108} \sqrt{81 \sin^2(\pi t / 6) + 144 \cos^2(\pi t / 6)} =$$

$$= \frac{\pi^2}{108} \sqrt{81 + 63 \cos^2(\pi t / 6)}. \quad (2.19)$$

Для момента времени  $t = t_1 = 1$  с будем иметь

$$a_x|_{t=1} = -\frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{1}{2} \approx -0,41 \text{ м/с}^2, \quad a_y|_{t=1} = -\frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,95 \text{ м/с}^2, \quad (2.20)$$

$$a|_{t=1} \approx 1,03 \text{ м/с}^2.$$

По найденным проекциям ускорения строится вектор ускорения  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$  в точке  $M_1$  (рис. 2.2).

Следует удостовериться, что вектор ускорения  $\vec{a}$  направлен в сторону вогнутости траектории.

4. Найдем касательное и нормальное ускорения точки в момент времени  $t_1$ , используя соотношения

$$|a_\tau| = \frac{|v_x a_x + v_y a_y|}{v}, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \quad (2.21)$$

и результаты предыдущих вычислений.



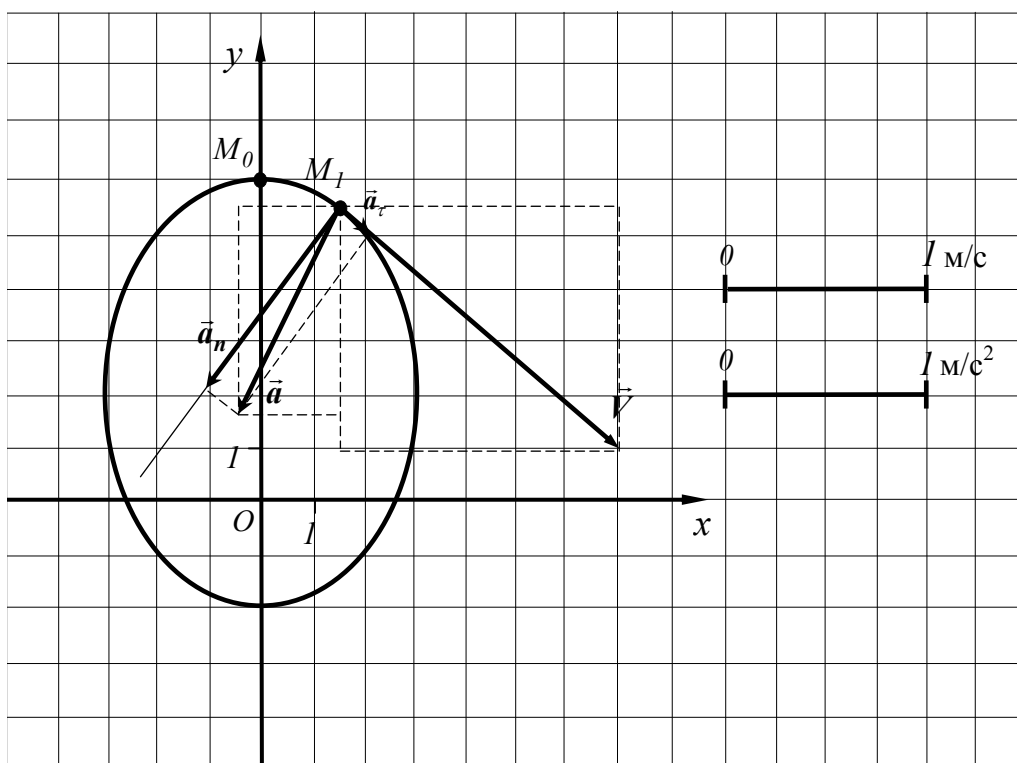


Рис. 2.2

Будем иметь

$$|a_\tau|_{t=1} \approx \frac{|1,36 \cdot (-0,41) + (-1,05) \cdot (-0,95)|}{1,72} \approx 0,26 \text{ м/с}^2, \quad (2.22)$$

$$a_n|_{t=1} \approx \sqrt{1,03^2 - 0,26^2} \approx 1 \text{ м/с}^2.$$

По знаку скалярного произведения  $\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x a_x + v_y a_y$  заключаем, что в данный момент времени движение точки является ускоренным.

5. Определим радиус кривизны траектории в точке  $M_1$ , для чего воспользуемся равенством

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}. \quad (2.23)$$

В результате получим  $\rho \approx \frac{1,72^2}{1} \approx 2,96 \text{ м}$ .

6. Векторы скорости, ускорения, касательного, нормального ускорений точки в соответствующем масштабе показаны на *рисунке 2.2*. Результаты вычислений для заданного момента времени приведены в *таблице 2.2*

Таблица 2.2

Координаты, м		Скорость, м/с			Ускорение, м/с <sup>2</sup>					Рад. крив., м
$x$	$y$	$v_x$	$v_y$	$v$	$a_x$	$a_y$	$a$	$a_\tau$	$a_n$	$\rho$
1,5	5,5	1,36	-1,05	1,72	-0,41	-0,95	1,03	0,26	1,00	2,96

## Тема 3. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

### Задание 3

По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза 1 определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки  $M$  механизма в момент времени  $t_1$ , когда путь, пройденный грузом, равен  $S$ .

Показать на рисунке векторы скорости и ускорения точки.

Схемы механизмов представлены на *рисунке 3.1*.

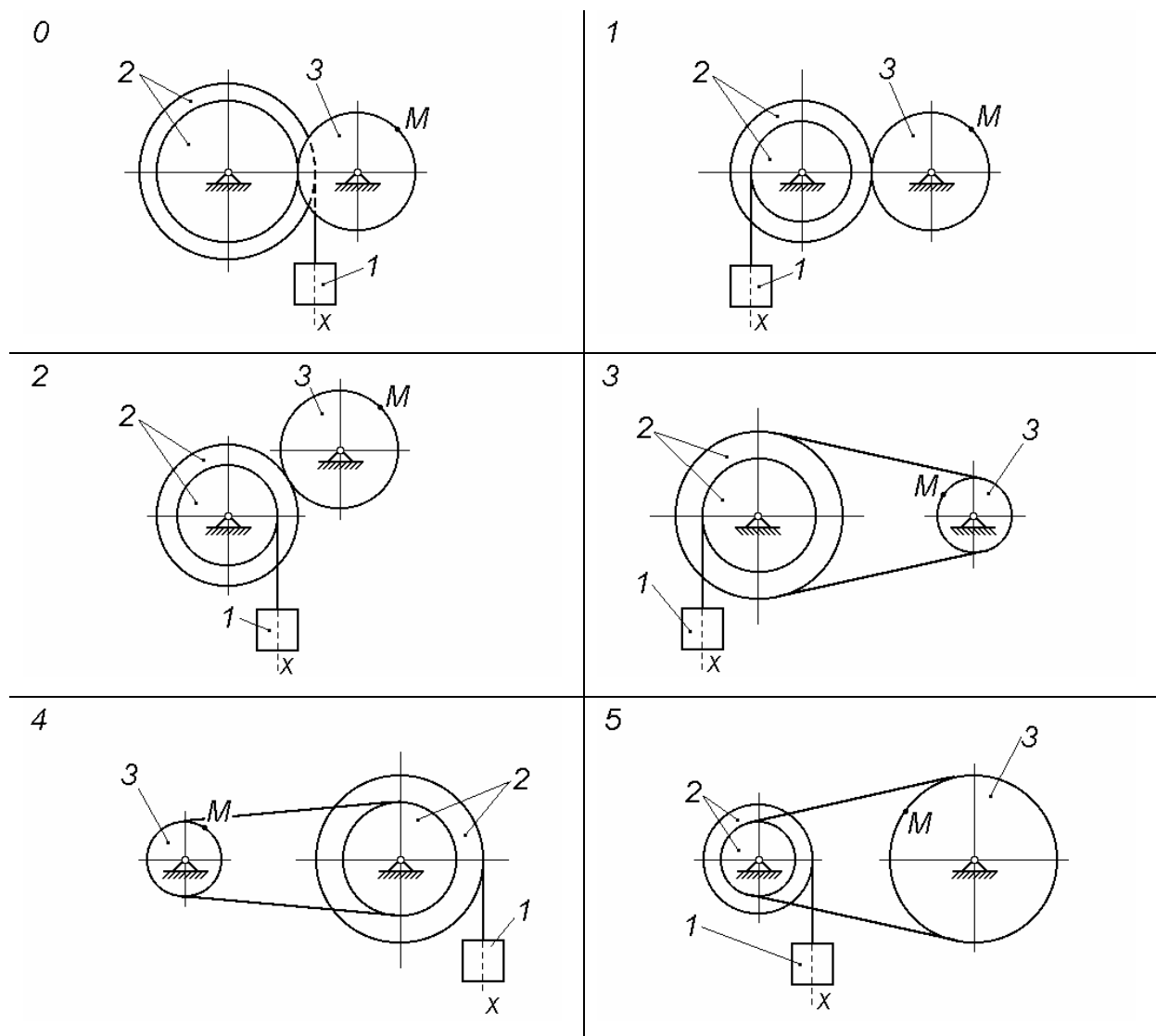


Рис. 3.1

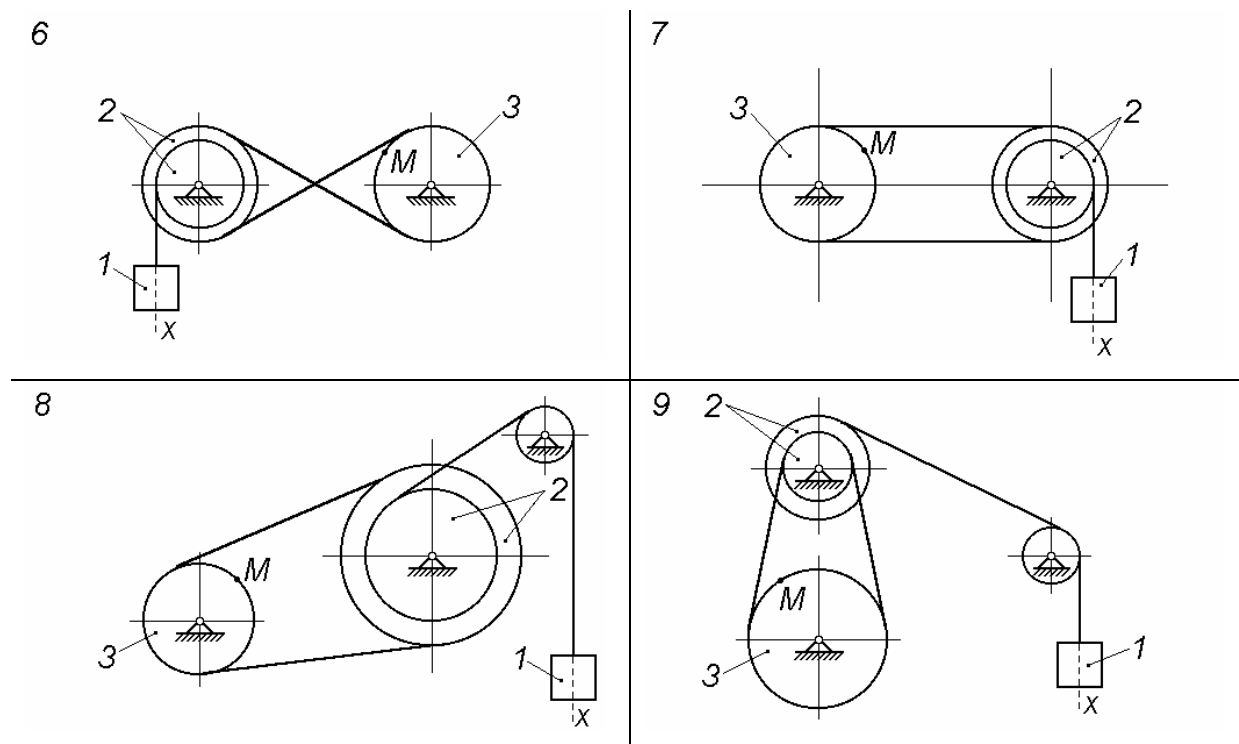


Рис. 3.1. Продолжение

Исходные данные приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Номер варианта исходных данных	Заданные величины				
	$R_2$ , см	$r_2$ , см	$R_3$ , см	$x = x(t)$ , см, $t$ - с	$S$ , м
0	60	45	36	$10 + 100 t^2$	0,5
1	100	60	75	$18 + 70 t^2$	0,2
2	100	60	30	$5 + 60 t^2$	0,5
3	40	25	20	$5 + 40 t^2$	0,3
4	20	15	10	$2 + 50 t^2$	0,1
5	15	10	20	$5 + 80 t^2$	0,2
6	20	10	30	$4 + 90 t^2$	0,5
7	40	30	20	$10 + 40 t^2$	0,3
8	30	15	40	$5 + 60 t^2$	0,2
9	25	20	50	$6 + 30 t^2$	0,3

Примечание. Для определения момента времени  $t_1$  необходимо учесть, что путь  $S$ , пройденный телом за время  $t = t_1$ , заданный в условии задания, равен

$$S = x(t_1) - x(t_0),$$

где  $t_0 = 0$ .

## ***Основные теоретические положения, используемые при решении задач***

Вращательное движение твердого тела полностью определяется заданием угла его поворота как функции времени:  $\varphi = \varphi(t)$ . Угол поворота обычно измеряют в радианах. Главными кинематическими характеристиками вращательного движения в целом являются угловая скорость и угловое ускорение.

Угловая скорость тела в данный момент времени равна первой производной по времени от угла поворота

$$\tilde{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (3.1)$$

Введенная таким образом угловая скорость  $\tilde{\omega}$  будет положительной, если в рассматриваемый момент времени тело вращается в направлении, соответствующем произвольно выбираемому положительному направлению отсчета угла  $\varphi$ , т. е. если в данный момент угол  $\varphi$  возрастает. Если в данный момент тело движется так, что угол  $\varphi$  убывает, то величина  $\tilde{\omega}$  будет отрицательной. Абсолютное значение угловой скорости будем обозначать через  $\omega$ :  $\omega = |\tilde{\omega}| = |\dot{\varphi}|$ . Если угол поворота измеряется в радианах, а время – в секундах, то единицей измерения угловой скорости будет рад/с (или, короче,  $\text{с}^{-1}$ ).

Угловое ускорение тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (3.2)$$

Если знаки  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\varepsilon}$  одинаковы, тело вращается ускоренно; если разные – замедленно. Абсолютное значение углового ускорения будем обозначать через  $\varepsilon$ :  $\varepsilon = |\tilde{\varepsilon}| = |\ddot{\varphi}|$ . Единицей измерения углового ускорения является рад/с<sup>2</sup> (или, короче,  $\text{с}^{-2}$ ).

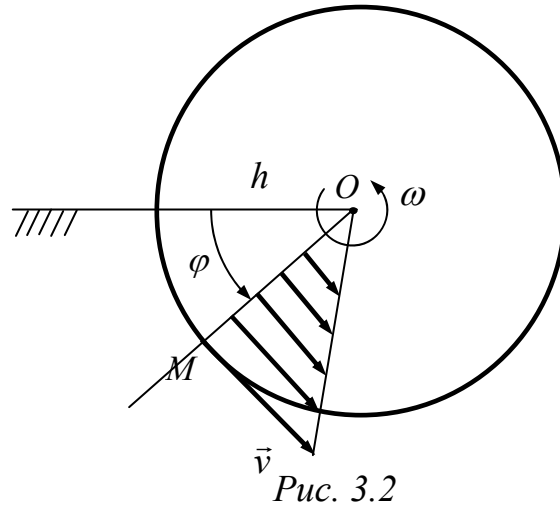
Кинематические характеристики движения отдельных точек твердого тела определяются характеристиками движения тела в целом и положением точек в теле.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси любая его точка описывает окружность с центром на оси вращения, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси. Радиус окружности представляет собой расстояние  $h$  от точки до оси вращения.

Величина скорости точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению угловой скорости  $\omega$  тела на расстояние  $h$  от этой точки до оси вращения

$$v = \omega \cdot h. \quad (3.3)$$

Из формулы (3.3) следует, что модули скоростей точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения. На *рисунке 3.2* показана эпюра скоростей точек, лежащих на отрезке  $OM$ .



Направление касательной к траектории любой точки тела считается положительным, если оно соответствует принятому в качестве положительного направлению отсчета угла  $\varphi$ . Проекция ускорения точки  $M$  на положительное направление касательной к траектории определяется равенством

$$a_\tau = \tilde{\varepsilon} \cdot h. \quad (3.4)$$

Модуль касательного ускорения

$$|a_\tau| = \varepsilon \cdot h. \quad (3.5)$$

Модуль нормального ускорения точки  $M$  равен

$$a_n = \omega^2 \cdot h. \quad (3.6)$$

Касательное ускорение  $\vec{a}_\tau$  точки  $M$  направлено по касательной к описываемой этой точкой окружности:

- в ту же сторону что и скорость (*рис. 3.3, а*), если вращение ускоренное (при этом знаки  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\varepsilon}$  одинаковы);
- в сторону, противоположную скорости (*рис. 3.3, б*), если вращение замедленное (при этом знаки  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\varepsilon}$  разные).

Нормальное ускорение  $\vec{a}_n$  точки всегда направлено от этой точки к оси вращения тела (к центру  $O$  описываемой точкой окружности), поэтому ускорение  $\vec{a}_n$  называют также центростремительным (или осестремительным).

Ускорение точки  $M$  является геометрической суммой своих нормальной и касательной составляющих, т. е.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (3.7)$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.8)$$

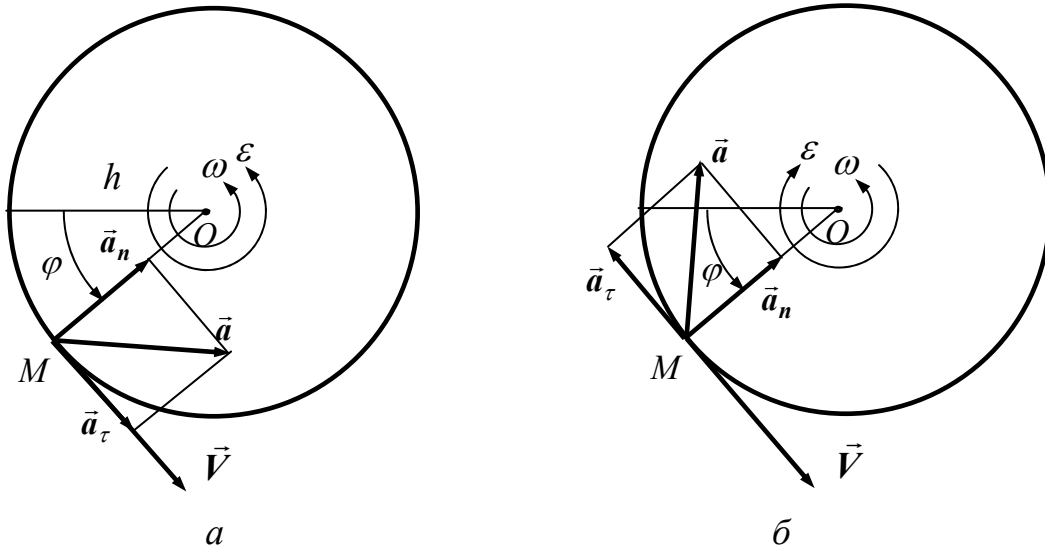


Рис. 3.3

**При выполнении задания следует придерживаться следующей формы.**  
**Задание 3**

Схема 1, вариант данных 5.

*Условие задачи*

По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза 1 определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки  $M$  механизма в момент времени  $t_1$ , когда путь, пройденный грузом, равен  $S$ .

Показать на рисунке векторы скорости и ускорения точки (рис.3.4).

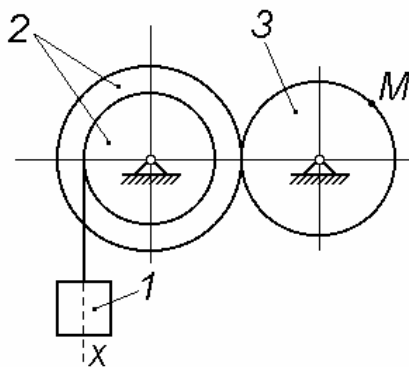


Рис. 3.4

Дано:  $R_2 = 60$  см,  $r_2 = 40$  см,

$R_3 = 50$  см,  $S = 0,2$  м,

$x(t) = 18 + 80t^2$  см,

Найти:  $V_M$ ,  $a_{M\tau}$ ,  $a_{Mn}$ ,  $a_M$ .

*Решение.*

Для определения момента времени  $t_1$  необходимо учесть, что путь  $S = 0,2 \text{ м} = 20 \text{ см}$ , пройденный грузом 1 за время  $t = t_1$ , определяется выражением

$$S = x(t_1) - x(t_0), \quad (3.9)$$

где  $t_0 = 0$ . Поэтому с учетом данных задачи получим следующее уравнение относительно неизвестного момента времени  $t_1$ :

$$20 = 18 + 80t_1^2 - 18 = 80t_1^2. \quad (3.10)$$

Отсюда  $t_1 = 0,5 \text{ с}$ .

Скорость груза 1 в прямолинейном поступательном движении определяется как первая производная по времени от координаты  $x(t)$

$$v_1 = \dot{x} = \frac{d}{dt}(18 + 80t^2) = 160t. \quad (3.11)$$

Обозначим через  $A$  точку схода нити с колеса 2 (рис. 3.5). Очевидно, что скорость этой точки совпадает со скоростью груза 1, так как нить предполагается нерастяжимой:  $v_A = v_1$ . С другой стороны, рассматривая точку  $A$  как точку, лежащую на ободке колеса радиуса  $r_2$ , заключаем, что ее скорость  $v_A = \omega_2 \cdot r_2$ . Следовательно,

$$v_1 = \omega_2 \cdot r_2, \quad (3.12)$$

и, значит,

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}. \quad (3.13)$$

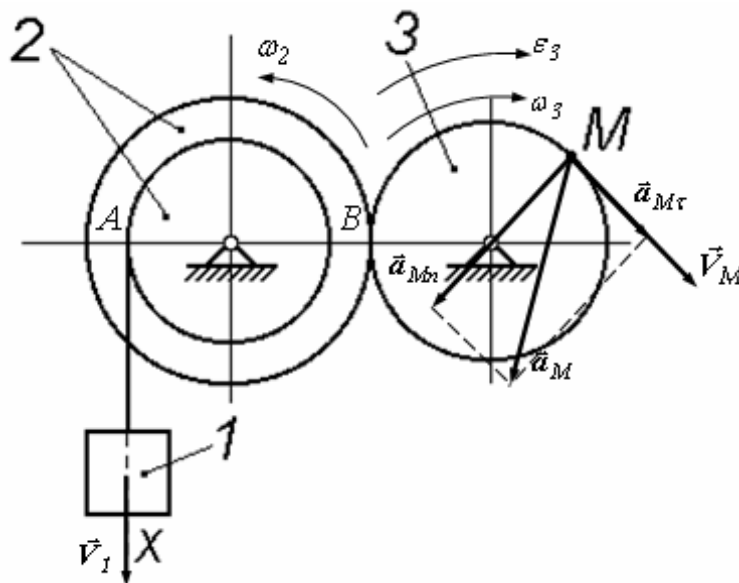


Рис. 3.5



Для получения соотношения, связывающего угловые скорости колес 2 и 3, учтем, что точки касания этих колес (иначе, точки их зацепления, совмещенные в полюсе  $B$ ) имеют равные скорости, так как отсутствует скольжение между колесами. Скорость той из этих точек, которая принадлежит ободу колеса 2, равна

$$v_B = \omega_2 \cdot R_2. \quad (3.14)$$

Скорость другой точки, лежащей на ободу колеса 3, равна

$$v_B = \omega_3 \cdot R_3. \quad (3.15)$$

Таким образом,

$$\omega_2 \cdot R_2 = \omega_3 \cdot R_3. \quad (3.16)$$

Выражая  $\omega_3$  из последнего уравнения и учитывая (3.13), будем иметь

$$\omega_3 = \frac{R_2}{R_3} \omega_2 = \frac{R_2}{R_3 r_2} v_1. \quad (3.17)$$

Подставляя сюда заданные в условии величины и учитывая равенство (3.11), получаем

$$\omega_3 = 4,8t. \quad (3.18)$$

Угловое ускорение колеса 3 равно

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 4,8 \text{ рад/с}^2. \quad (3.19)$$

Угловое ускорение положительно, как и угловая скорость этого колеса. Значит, вращение колеса 3 является ускоренным.

Скорость точки  $M$ , ее касательное, нормальное и полное ускорения рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} v_M &= \omega_3 \cdot R_3 = 240t; \\ a_{M\tau} &= \varepsilon_3 \cdot R_3 = 240 \text{ см/с}^2, \quad a_{Mn} = \omega_3^2 \cdot R_3 = 1152t^2, \\ a_M &= \sqrt{(a_{M\tau})^2 + (a_{Mn})^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Результаты вычислений для момента времени  $t_1 = 0,5$  с приведены ниже в таблице 3.2.

Векторы скорости, касательного, нормального и полного ускорений точки  $M$  показаны на рисунке 3.5.

Таблица 3.2

$v_M, \text{ см/с}$	$a_{M\tau}, \text{ см/с}^2$	$a_{Mn}, \text{ см/с}^2$	$a_M, \text{ см/с}^2$
120	240	288	374,89

## Тема 4. ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### Задание 4

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек  $B$  и  $C$ , а также угловую скорость и ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Схемы механизмов и необходимые для расчета данные приведены в *таблице 4.1*.

В задании приняты следующие обозначения:

$\omega_{OA}$  и  $\varepsilon_{OA}$  – угловые скорость и ускорение кривошипа  $OA$  при заданном положении механизма;

$\omega_I$  – угловая скорость колеса 1;

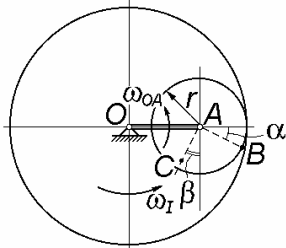
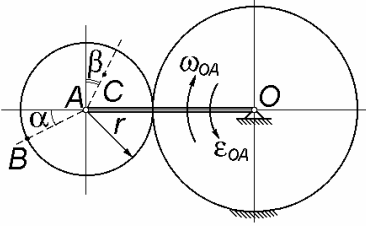
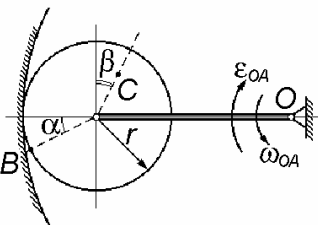
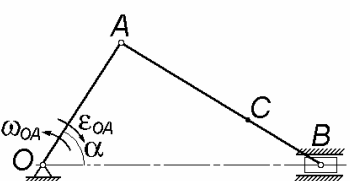
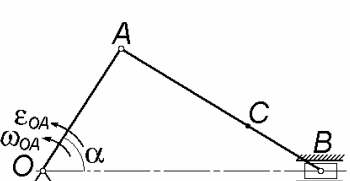
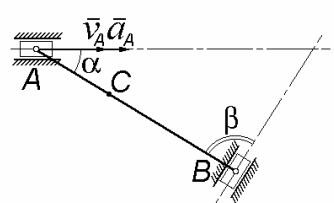
$V_A$  и  $a_A$  – скорость и ускорение точки  $A$ .

Качение колес происходит без скольжения.

*Таблица 4.1*

Схема механизма	Заданные величины	Номер варианта исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<p>0,1</p>	$\omega_{OA}$ , рад/с $\varepsilon_{OA}$ , рад/с <sup>2</sup> $r$ , см $OA$ , см $AC$ , см $\alpha$ , град $\beta$ , град	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
<p>2</p>	$\omega_{OA}$ , рад/с $\varepsilon_{OA}$ , рад/с <sup>2</sup> $r$ , см $OA$ , см $AC$ , см $\alpha$ , град $\beta$ , град	5	4	3	2	1	6	5	4	3	2
<p>3</p>	$\omega_{OA} = const$ , рад/с $\omega_I = const$ , рад/с $r$ , см $OA$ , см $AC$ , см $\alpha$ , град $\beta$ , град	4	6	8	1	2	3	4	8	5	7

Продолжение таблицы 4.1

Схема механизма	Заданные величины	Номер варианта исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	 $\omega_{OA} = const, \text{ рад/с}$ $\omega_I = const, \text{ рад/с}$ $r, \text{ см}$ $OA, \text{ см}$ $AC, \text{ см}$ $\alpha, \text{ град}$ $\beta, \text{ град}$	6	4	2	9	8	7	6	2	5	3
		8	2	7	3	5	4	1	6	3	
		15	10	25	30	12	18	28	40	32	
		18	58	32	64	80	48	40	60	72	
		12	2	5	18	5	3	8	16	17	
		30	45	60	90	120	135	30	45	60	
		0	60	30	45	150	30	120	60	135	
5	 $\omega_{OA}, \text{ рад/с}$ $\epsilon_{OA}, \text{ рад/с}^2$ $r, \text{ см}$ $OA, \text{ см}$ $AC, \text{ см}$ $\alpha, \text{ град}$ $\beta, \text{ град}$	3	5	2	6	7	8	9	2	1	6
		2	8	3	1	4	6	9	4	7	
		55	5	20	6	13	6	36	8	28	
		70	15	50	36	25	24	64	48	60	
		30	4	18	3	7	2	30	6	10	
		45	150	135	120	60	45	30	45	30	
		60	0	60	45	45	90	45	120	30	
6	 $\omega_{OA}, \text{ рад/с}$ $\epsilon_{OA}, \text{ рад/с}^2$ $r, \text{ см}$ $OA, \text{ см}$ $AC, \text{ см}$ $\alpha, \text{ град}$ $\beta, \text{ град}$	1	5	4	2	9	6	3	4	7	9
		6	8	9	5	2	3	1	8	7	
		3	40	7	34	68	30	12	20	40	
		18	50	32	64	60	48	40	60	72	
		2	25	6	30	15	12	8	6	24	
		30	60	45	120	135	30	45	90	60	
		45	45	30	45	30	135	120	30	135	
7	 $\omega_{OA}, \text{ рад/с}$ $\epsilon_{OA}, \text{ рад/с}^2$ $OA, \text{ см}$ $AB, \text{ см}$ $AC, \text{ см}$ $\alpha, \text{ град}$	3	5	2	6	7	8	9	2	4	6
		7	9	8	3	2	5	9	1	6	
		15	20	50	25	40	64	12	36	60	
		16	32	80	25	50	100	40	84	60	
		8	10	48	4	36	84	32	15	24	
		30	45	90	60	90	120	30	90	45	
8	 $\omega_{OA}, \text{ рад/с}$ $\epsilon_{OA}, \text{ рад/с}^2$ $OA, \text{ см}$ $AB, \text{ см}$ $AC, \text{ см}$ $\alpha, \text{ град}$	7	5	8	4	3	2	1	8	6	4
		3	1	2	7	8	5	1	9	4	
		16	24	50	25	15	32	12	10	48	
		20	32	80	25	40	64	40	36	60	
		7	5	40	20	16	56	12	15	10	
		45	30	30	45	90	45	135	120	90	
9	 $v_A, \text{ см/с}$ $a_A, \text{ см/с}^2$ $AB, \text{ см}$ $AC, \text{ см}$ $\alpha, \text{ град}$ $\beta, \text{ град}$	50	15	40	32	24	36	48	54	70	16
		12	7	5	3	16	8	9	12	20	
		75	16	36	60	64	28	72	40	10	
		64	3	30	30	25	13	28	36	2	
		30	60	45	45	30	30	60	60	30	
		45	45	30	60	135	60	30	60	120	

## ***Основные теоретические положения, используемые при решении задач***

Мгновенным центром скоростей (МЦС) твердого тела называется та его точка  $P$ , скорость которой в рассматриваемый момент времени равна нулю. В различные моменты времени мгновенным центром скоростей являются разные точки тела.

При определении направлений и величин скоростей точек звеньев механизма, а также угловых скоростей этих звеньев используются следующие свойства МЦС:

1) скорость любой точки тела направлена перпендикулярно к отрезку, соединяющему эту точку с МЦС, в сторону вращения;

2) скорость любой точки  $M$  тела равна произведению его угловой скорости на расстояние от этой точки до МЦС:

$$v_M = \omega \cdot |MP|; \quad (4.1)$$

3) угловая скорость тела равна скорости любой его точки  $M$ , деленной на расстояние от этой точки до МЦС:

$$\omega = \frac{v_M}{|MP|}; \quad (4.2)$$

4) скорости точек тела пропорциональны расстояниям от этих точек до МЦС:

$$\frac{v_M}{|MP|} = \frac{v_N}{|NP|} = \frac{v_L}{|LP|} = \dots \quad (4.3)$$

Таким образом, скорости точек тела при плоском движении распределяются в каждый данный момент точно так же, как и при вращении вокруг неподвижной оси. Роль оси вращения играет мгновенная ось, проходящая через мгновенный центр скоростей  $P$  перпендикулярно плоскости движения.

Решение задачи начинается с определения МЦС каждого звена механизма. При этом могут встретиться следующие ситуации:

1. Известны прямые, по которым направлены скорости двух точек звена, причем эти прямые не параллельны одна другой (*рис. 4.1*). В этом случае МЦС определяется как точка пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек к направлениям их скоростей. Заметим, что МЦС может оказаться за пределами звена; тогда его следует рассматривать как точку плоскости, неизменно связанной со звеном и движущейся вместе с ним.

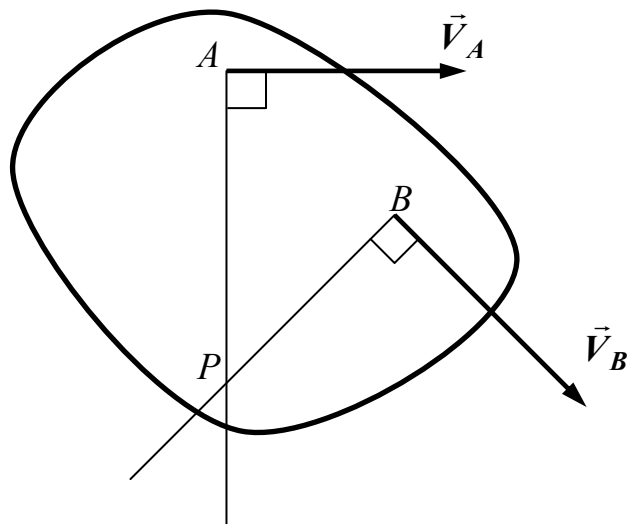


Рис. 4.1

2. Известны скорости двух точек звена, причем в данный момент эти скорости параллельны друг другу и перпендикулярны отрезку, соединяющему точки (рис. 4.2, а, б). В этом случае МЦС находится в точке пересечения прямой, проходящей через эти точки, с прямой, проходящей через концы векторов  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$ .

Если в случае, соответствующем рисунку 4.2, а выполняется равенство  $v_A = v_B$ , то МЦС находится в бесконечности, а угловая скорость звена в данный момент времени равна нулю.

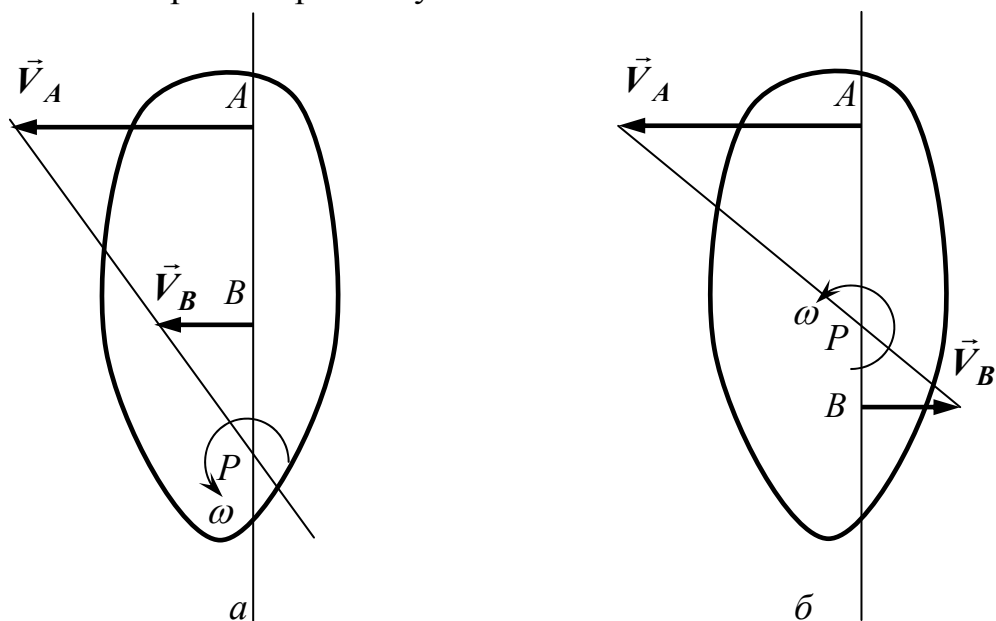


Рис. 4.2

3. Известны прямые, по которым направлены скорости двух точек звена в данный момент времени, причем эти прямые параллельны одна другой и не перпендикулярны отрезку, соединяющему указанные точки

(на рисунке 4.3 это точки  $A$  и  $B$ ). В этом случае перпендикуляры к скоростям, восстановленные из точек, не совпадают и параллельны один другому. В данный момент времени МЦС находится в бесконечности, угловая скорость звена равна нулю, а скорости всех его точек одинаковы по модулю и направлению.

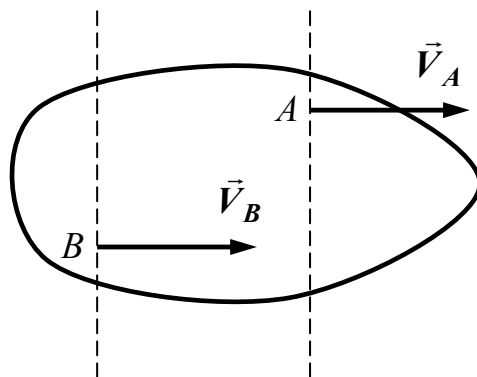


Рис. 4.3

Заметим, что движение фигуры в данный момент времени называется мгновенно поступательным, но, вообще говоря, не является поступательным, так как точки рассматриваемого звена, характеризующиеся одинаковыми скоростями, могут иметь различные ускорения.

4. Если плоское движение осуществляется путем качения тела по некоторой неподвижной поверхности, и скольжение в точке касания  $P$  отсутствует, то эта точка в данный момент времени является мгновенным центром скоростей (рис. 4.4).

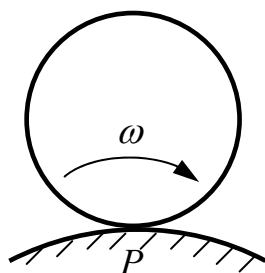


Рис. 4.4

5. Если тело вращается вокруг неподвижной оси, то его мгновенный центр скоростей все время расположен на этой оси.

Понятие мгновенного центра скоростей и его свойства используются для определения скоростей точек плоских механизмов и угловых скоростей их звеньев.

При отыскании ускорения произвольной точки  $B$  тела наряду с положениями предыдущих разделов кинематики используется теорема об ускорениях точек плоской фигуры, содержание которой выражается следующим равенством:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ep} + \vec{a}_{BA}^y, \quad (4.4)$$

где  $\vec{a}_A$  – ускорение точки  $A$ , принятой за полюс;  $\vec{a}_{BA}^{ep}$  и  $\vec{a}_{BA}^y$  – соответственно вращательное и центростремительное ускорения точки  $B$  во вращательном движении звена вокруг полюса  $A$ .

В качестве полюса  $A$  следует выбирать такую точку тела, ускорение которой легко находится из условия задачи.

Вектор  $\vec{a}_{BA}^{ep}$  направлен перпендикулярно отрезку  $AB$  в сторону вращения звена, если вращение ускоренное, и в противоположную сторону, если вращение замедленное. Вектор  $\vec{a}_{BA}^y$  направлен всегда от точки  $B$  к полюсу  $A$ . Модули вращательного и центростремительного ускорений вычисляются по формулам

$$a_{BA}^{ep} = \varepsilon \cdot |BA|, \quad a_{BA}^y = \omega^2 \cdot |BA|. \quad (4.5)$$

Вычисляя модуль ускорения точки  $B$ , определяемого геометрической суммой (4.4), удобно воспользоваться методом проекций.

**При выполнении задания следует придерживаться следующей формы**  
**Задание 4**

Схема 2, вариант данных 5.

*Условие задачи*

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек  $B$  и  $C$ , а также угловую скорость и ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

В задании приняты следующие обозначения:

$\omega_{OA}$  и  $\varepsilon_{OA}$  – угловые скорость и ускорение кривошипа  $OA$  при заданном положении механизма;

$\omega_1$  – угловая скорость колеса 1;

$v_A$  и  $a_A$  – скорость и ускорение точки  $A$ .

Качение колес происходит без скольжения.

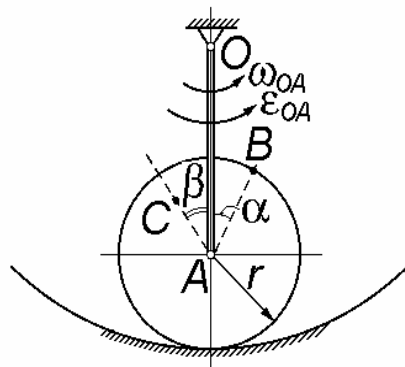


Рис. 4.5

Дано:  $\omega_{OA} = 1 \text{ рад/с}$ ,  $\varepsilon_{OA} = 5 \text{ рад/с}^2$ ,  
 $r = 12 \text{ см}$ ,  $OA = 25 \text{ см}$ ,  
 $AC = 7 \text{ см}$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  
 $\beta = 120^\circ$ .

Найти:  $v_B$ ,  $v_C$ ,  $a_B$ ,  $a_C$ ,  $\omega_1$ ,  $\varepsilon_1$ .

Решение.

Согласно данным задачи приведенный в условии рисунок принимает вид, показанный на рисунке 4.6.

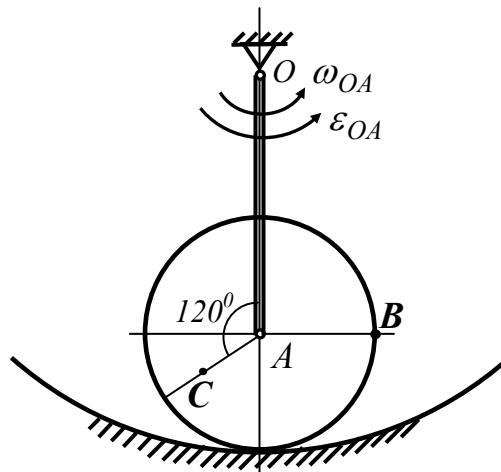


Рис. 4.6

1. Определим скорости точек  $B$  и  $C$ , а также угловую скорость  $\omega_1$  колеса.

Модуль скорости точки  $A$  кривошипа  $OA$  определяется равенством

$$v_A = \omega_{OA} \cdot |OA|. \quad (4.6)$$

Скорость точки  $A$  направлена перпендикулярно  $OA$  в сторону вращения кривошипа. Так как по условию задачи качение колеса по неподвижной поверхности происходит без скольжения, то мгновенный центр скоростей  $P$  колеса находится в точке касания колеса и поверхности.

Расстояния  $|BP|$  и  $|CP|$  определяются из рассмотрения треугольников  $ABP$  и  $ACP$  с использованием теоремы Пифагора и теоремы косинусов:

$$\begin{aligned} |BP| &= \sqrt{|AP|^2 + |AB|^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r = \sqrt{2} \cdot 12 \approx 16,97 \text{ см}; \\ |CP| &= \sqrt{|AC|^2 + |AP|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AP| \cdot \cos(\widehat{ACP})} = \\ &= \sqrt{7^2 + 12^2 - 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \cos 60^\circ} \approx 10,44 \text{ см}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Угловая скорость колеса

$$\omega_1 = \frac{v_A}{|AP|} = \frac{v_A}{r}. \quad (4.8)$$



Модули скоростей точек  $B$  и  $C$  вычисляются в соответствии с соотношениями

$$v_B = \omega_1 \cdot |BP|, \quad v_C = \omega_1 \cdot |CP|. \quad (4.9)$$

По результатам вычислений будем иметь

$$\begin{aligned} v_A &= 25 \text{ см/с}, & \omega_1 &\approx 2,08 \text{ рад/с}, \\ v_B &\approx 35,30 \text{ см/с}, & v_C &\approx 21,72 \text{ см/с}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Векторы скоростей точек  $B$  и  $C$  направлены перпендикулярно отрезкам, соединяющим эти точки с мгновенным центром скоростей, в сторону вращения колеса (рис. 4.7).

Для проверки расчетов определим скорости точек  $B$  и  $C$  другим способом, используя теорему о проекциях скоростей двух точек тела на ось, проведенную через эти точки. Эти проекции, согласно теореме, должны быть равны.

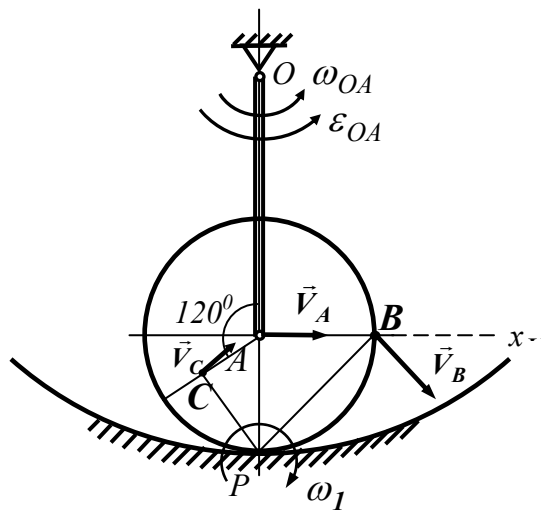


Рис. 4.7

Направим ось  $x$  вдоль прямой  $AB$  (рис. 4.7), тогда

$$v_A \cdot \cos(\vec{v}_A, x) = v_B \cdot \cos(\vec{v}_B, x), \quad (4.11)$$

или, как следует из рисунка 4.7,

$$v_A \cdot \cos 0^\circ = v_B \cdot \cos 45^\circ. \quad (4.12)$$

Отсюда видим, что  $v_B = \sqrt{2} \cdot v_A = \sqrt{2} \cdot 25 \approx 35,35 \text{ см/с}$ . Заключаем, что найденная ранее скорость точки  $B$  удовлетворяет теореме о распределении скоростей точек твердого тела.

Аналогично проводится проверка вычисления скорости точки  $C$ .

2. Определим ускорения точек  $B$  и  $C$ , а также угловое ускорение  $\varepsilon_1$  колеса.

Примем за полюс точку  $A$ , так как ее ускорение может быть легко найдено из условия задачи. Ускорение точки  $A$  как точки, принадлежащей кривошипу  $OA$ , складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{ep} + \vec{a}_A^y, \quad a_A^{ep} = \varepsilon_{OA} \cdot |OA|, \quad a_A^y = \omega_{OA}^2 \cdot |OA|. \quad (4.13)$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры ускорение точки  $B$  определяется геометрической суммой:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ep} + \vec{a}_{BA}^y, \quad (4.14)$$

или, если учесть (4.13),

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{ep} + \vec{a}_A^y + \vec{a}_{BA}^{ep} + \vec{a}_{BA}^y. \quad (4.15)$$

Модуль центростремительного ускорения точки  $B$  во вращательном движении колеса вокруг полюса  $A$  вычисляется по формуле

$$a_{BA}^y = \omega_1^2 \cdot |BA| = \omega_1^2 \cdot r. \quad (4.16)$$

Проведя расчеты, будем иметь

$$a_A^{ep} = 5 \cdot 25 = 125 \text{ см/с}^2, \quad a_A^y = 1^2 \cdot 25 = 25 \text{ см/с}^2, \quad (4.17)$$

$$a_{BA}^y \approx 2,08^2 \cdot 12 \approx 51,92 \text{ см/с}^2.$$

Для вычисления модуля вращательной составляющей ускорения  $a_{BA}^{ep}$  необходимо предварительно найти угловое ускорение  $\varepsilon_1$  колеса. В данном варианте задания следует воспользоваться определением углового ускорения как первой производной по времени от угловой скорости  $\omega_1$ :

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_A}{|AP|} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{v_A}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{dv_A}{dt} = \frac{a_A^{ep}}{r} = \frac{125}{12} \approx 10,42 \text{ рад/с}^2. \quad (4.18)$$

Тогда

$$a_{BA}^{ep} = \varepsilon_1 \cdot |BA| = \varepsilon_1 \cdot r \approx 10,42 \cdot 12 = 125,04 \text{ см/с}^2. \quad (4.19)$$

Теперь установим направления всех векторов, входящих в геометрическую сумму (4.15). Вращение кривошипа  $OA$  – ускоренное, следовательно, направление вектора  $\vec{a}_A^{ep}$  совпадает с направлением вектора скорости  $\vec{v}_A$ . Вектор  $\vec{a}_A^y$  направлен от точки  $A$  к оси вращения, т. е. к точке  $O$ . Вектор  $\vec{a}_{BA}^{ep}$  направлен перпендикулярно отрезку  $AB$  в сторону вращения

колеса, так как вращение колеса является ускоренным. Вектор  $\vec{a}_{BA}^u$  направлен от рассматриваемой точки  $B$  к полюсу  $A$  (рис. 4.8).

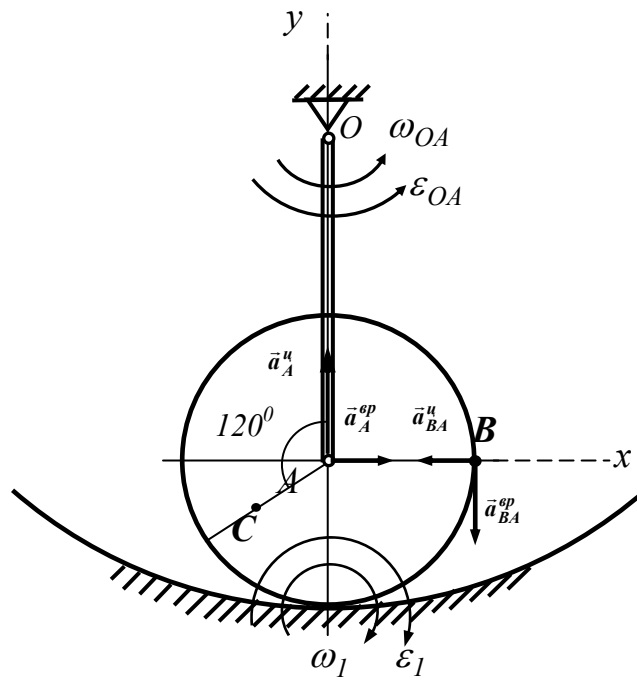


Рис. 4.8

Модуль ускорения точки  $B$  определим методом проекций, выбрав направление осей  $x$  и  $y$  так, как показано на рисунке 4.8. При этом имеем:

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= a_A^{ep} - a_{BA}^u = 125 - 51,92 = 73,08 \text{ см/с}^2, \\ a_{By} &= a_A^u - a_{BA}^{ep} = 25 - 125,04 = -100,04 \text{ см/с}^2, \\ a_B &= \sqrt{(a_{Bx})^2 + (a_{By})^2} \approx 123,89 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Перейдем к определению ускорения точки  $C$ . Как и при рассмотрении точки  $B$ , применим теорему об ускорениях точек тела в плоском движении:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^{ep} + \vec{a}_A^u + \vec{a}_{CA}^{ep} + \vec{a}_{CA}^u. \quad (4.21)$$

Модули вращательного и центростремительного ускорений во вращательном движении вокруг полюса  $A$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_{CA}^{ep} &= \varepsilon_1 \cdot |CA| \approx 10,42 \cdot 7 = 72,94 \text{ см/с}^2, \\ a_{CA}^u &= \omega_1^2 \cdot |CA| \approx 2,08^2 \cdot 7 \approx 30,28 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Вектор  $\vec{a}_{CA}^{ep}$  направлен перпендикулярно отрезку  $AC$  в сторону вращения колеса, так как вращение колеса является ускоренным. Вектор  $\vec{a}_{CA}^u$  направлен от точки  $C$  к полюсу  $A$  (рис. 4.9).

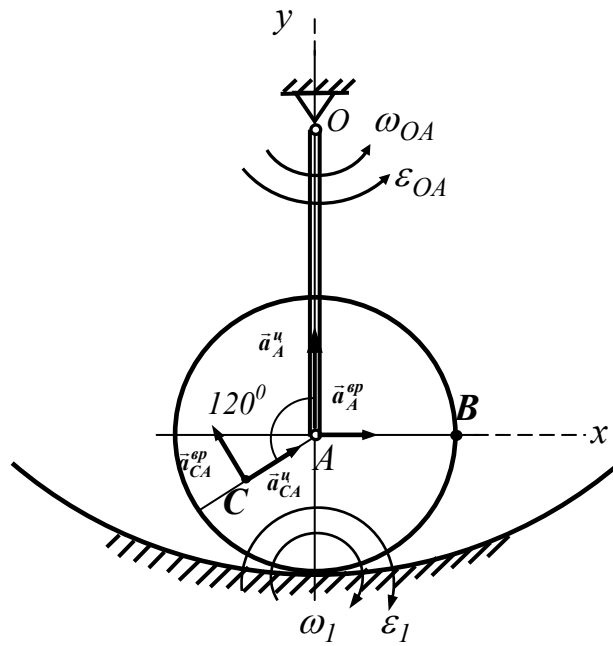


Рис. 4.9

Ускорение точки  $C$  найдем методом проекций:

$$\begin{aligned}
 a_{Cx} &= a_A^{np} + a_{CA}^u \cdot \cos 30^\circ - a_{CA}^{np} \cdot \cos 60^\circ \approx 114,75 \text{ см/с}^2, \\
 a_{Cy} &= a_A^u + a_{CA}^u \cdot \cos 60^\circ + a_{CA}^{np} \cdot \cos 30^\circ \approx 103,31 \text{ см/с}^2, \\
 a_C &= \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} \approx 154,40 \text{ см/с}^2.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

*Ответ:* для заданного положения механизма

$$\begin{aligned}
 v_B &\approx 35,30 \text{ см/с}, \quad v_C \approx 21,72 \text{ см/с}; \quad a_B \approx 123,89 \text{ см/с}^2, \quad a_C \approx 154,40 \text{ см/с}^2; \\
 \omega_1 &\approx 2,08 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon_1 \approx 10,42 \text{ рад/с}^2.
 \end{aligned}$$

## ДИНАМИКА

### Тема 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

#### Задание 5

Тело движется из точки  $A$  по участку  $AB$  (длиной  $l$ ), наклонному или горизонтальному, в течение  $\tau$  с. Его начальная скорость  $V_A$ . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен  $f$ . В точке  $B$  тело покидает плоскость со скоростью  $v_B$  и попадает в точку  $C$  со скоростью  $v_C$ , находясь в воздухе в течение  $T$  секунд.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Рисунки к заданию и исходные данные приведены в *таблице 5.1*.

*Таблица 5.1*

Схема (рисунок) к заданию	Номер варианта	Исходные данные
<p>0,1</p>	0; 5	Дано: $\alpha=30^\circ$ ; $v_A=0$ ; $f=0,2$ ; $l=10$ м; $\beta=60^\circ$ Определить: $\tau$ и $h$
	1; 6	Дано: $\alpha=15^\circ$ ; $v_A=2$ м/с; $f=0,2$ ; $h=4$ м; $\beta=45^\circ$ Определить: $l$ и уравнение траектории на участке BC
	2; 7	Дано: $\alpha=30^\circ$ ; $\beta=45^\circ$ ; $v_A=2,5$ м/с; $f \neq 0$ ; $l=8$ м; $d=10$ м. Определить: $\tau$ и $v_B$
	3; 8	Дано: $v_A=0$ ; $\tau=2$ с; $l=9,8$ м; $\beta=60^\circ$ ; $f=0$ Определить: $T$ и $\alpha$
	4; 9	Дано: $\alpha=30^\circ$ ; $v_A=0$ ; $l=9,8$ м; $\tau=3$ с; $\beta=45^\circ$ Определить: $f$ и $v_C$
<p>2,4</p>	0; 5	Дано: $\alpha=20^\circ$ ; $f=0,1$ ; $\tau=0,2$ с; $h=40$ м; $\beta=30^\circ$ Определить: $l$ и $v_C$
	1; 6	Дано: $\alpha=15^\circ$ ; $f=0,1$ ; $v_A=16$ м/с; $l=5$ м; $\beta=45^\circ$ Определить: $T$ и $v_B$
	2; 7	Дано: $v_A=21$ м/с; $f=0$ ; $\tau=0,3$ с; $v_B=20$ м/с; $\beta=60^\circ$ Определить: $\alpha$ и $T$
	3; 8	Дано: $\alpha=15^\circ$ ; $\tau=0,3$ с; $f=0,1$ ; $h=30$ м; $\beta=45^\circ$ Определить: $v_B$ и $v_A$
	4; 9	Дано: $\alpha=15^\circ$ ; $f=0$ ; $v_A=12$ м/с; $d=50$ м; $\beta=60^\circ$ Определить: $\tau$ и уравнение траектории на участке BC

Продолжение таблицы 5.1

<p>3,5</p>	0; 5	Дано: $\alpha=30^\circ; f=0,1; v_A=1\text{м/с}; \tau=1,5\text{с}; h=10\text{м}$ Определить: $d$ и $v_B$
	1; 6	Дано: $v_A=0\text{ м/с}; \alpha=45^\circ; f=0,1; l=10\text{м}$ Определить: $\tau$ и уравнение траектории на участке BC
	2; 7	Дано: $f=0; v_A=0; \alpha=30^\circ; \tau=2\text{с}; h=20\text{м}$ Определить: $T$ и $l$
	3; 8	Дано: $v_A=0\text{ м/с}; \alpha=30^\circ; f=0,2; l=10\text{м}; d=12\text{м}$ Определить: $\tau$ и $T$
	4; 9	Дано: $v_A=0\text{ м/с}; \alpha=30^\circ; f=0,2; l=6\text{м}; h=4,5\text{м}$ Определить: $\tau$ и $v_C$
<p>6,8</p>	0; 5	Дано: $\alpha=30^\circ; v_A=1\text{м/с}; l=3\text{м}; f=0,2; d=2,5\text{м}$ Определить: $h$ и $T$
	1; 6	Дано: $\alpha=30^\circ; l=6\text{м}; v_B=2v_A; \tau=1\text{с}; h=6\text{м}$ Определить: $f$ и $d$
	2; 7	Дано: $\alpha=30^\circ; l=2\text{м}; v_A=0\text{ м/с}; f=0,1; d=3\text{м}$ Определить: $h$ и $\tau$
	3; 8	Дано: $\alpha=15^\circ; l=3\text{м}; v_B=3\text{м/с}; f \neq 0; \tau=1,5\text{с}; d=2\text{м}$ Определить: $v_A$ и $h$
	4; 9	Дано: $\alpha=45^\circ; v_A=0\text{ м/с}; f=0,3; l=2\text{м}; h=4\text{м}$ Определить: $d$ и $\tau$
<p>7,9</p>	0; 5	Дано: $\alpha=15^\circ; f=0; v_A=20\text{м/с}; d=30\text{м}; h=10\text{м}$ Определить: $\tau$ и $l$
	1; 6	Дано: $\alpha=20^\circ; l=5\text{м}; v_B=0,5\text{м/с}; f \neq 0; \tau=3\text{с}; d=2\text{м}$ Определить: $v_A$ и $h$
	2; 7	Дано: $\alpha=30^\circ; l=4\text{м}; v_A=12\text{м/с}; f=0,1; h=6\text{м}$ Определить: $\tau$ и $d$
	3; 8	Дано: $\alpha=45^\circ; l=2\text{м}; v_B=0,5v_A; \tau=0,2\text{с}; h=0,5\text{м}$ Определить: $d$ и $f$
	4; 9	Дано: $\alpha=30^\circ; v_A=12\text{м/с}; l=2\text{м}; f=0,2; d=20\text{м}$ Определить: $h$ и $T$

**Основные теоретические положения, используемые при решении задач**

Рассмотрим материальную точку  $M$  массы  $m$ , движущуюся под действием сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  в инерциальной системе отсчета  $Oxyz$ . Основное уравнение динамики материальной точки имеет вид

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (5.1)$$

или

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (5.2)$$

где  $\vec{a}$  – вектор ускорения точки  $M$ ,  $\vec{r}$  – ее радиус-вектор относительно начала отсчета  $O$ .

Основное уравнение динамики справедливо как для свободной материальной точки, движение которой в пространстве не ограничено другими телами, так и для несвободной точки, на движение которой накладываются связи. Изучая движение несвободной материальной точки, в число приложенных сил следует включать реакции связей.

Уравнения (5.1) или (5.2) являются уравнениями движения материальной точки в векторной форме. Спроектируем обе части векторного равенства (5.2) на оси системы координат  $Oxyz$ ; получим

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \\ m\ddot{z} = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Уравнения (5.3) называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки в проекциях на оси декартовой системы координат. В частном случае, рассматриваемом в задании, когда траектория точки является плоской кривой, и все силы, действующие на точку, расположены в плоскости траектории, уравнения (5.3) принимают вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_{iy}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Поскольку действующие на точку силы определяют только ускорение движущейся точки, а скорость и положение точки на траектории зависят от скорости, которая сообщена точке в начальный момент, и от начального положения точки, то для определения конкретного вида движения материальной точки задают так называемые начальные условия. Это означает, что в некоторый момент времени, например, при  $t = 0$ , задают координаты движущейся точки  $x_0, y_0$  и проекции ее скорости  $v_{0x}, v_{0y}$ . Начальные условия используются для определения произвольных постоянных,

входящих в общее решение системы (5.4). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. При интегрировании системы двух дифференциальных уравнений второго порядка (5.4) появляются четыре произвольные постоянные.

Во всех вариантах задания движение тела, принимаемого за материальную точку, происходит под действием постоянных сил. Система дифференциальных уравнений при этом распадается на отдельные уравнения, решение которых определяется последовательным интегрированием.

*Задание рекомендуется выполнять в следующем порядке:*

1) рассмотреть прямолинейное движение материальной точки на участке  $AB$ , выбрав систему координат  $Ax_1y_1$  так, как указано на соответствующей схеме;

2) изобразить движущуюся точку в произвольном положении на участке  $AB$  и показать все действующие на точку силы, включая реакции связей;

3) записать систему дифференциальных уравнений движения в проекциях на оси системы координат  $Ax_1y_1$ ; учитывая, что при движении точки на участке  $AB$  координата  $y_1 = const$ , определить из второго уравнения системы нормальную реакцию наклонной плоскости; в соответствии с законом Кулона найти силу трения скольжения;

4) интегрируя дважды дифференциальное уравнение, соответствующее координате  $x_1$ , определить зависимости  $\dot{x}_1(t)$  и  $x_1(t)$ ;

5) сформулировать начальные условия и определить постоянные интегрирования;

6) записать выражения для скорости в точке  $B$  и длины  $l$  участка  $AB$ ;

7) рассмотреть участок  $BC$  свободного падения материальной точки, выбрав новую систему координат  $Bxu$  так, как указано на соответствующей схеме;

8) изобразить точку в произвольном положении на участке  $BC$  и показать действующую на точку силу тяжести;

9) записать и проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения в проекциях на оси системы координат  $Bxu$ ;

10) учитывая, что скорость  $\vec{v}_B$  является начальной скоростью для участка свободного падения, сформулировать начальные условия и определить постоянные интегрирования;



11) объединяя зависимости, полученные при рассмотрении двух участков движения материальной точки, определить неизвестные величины.

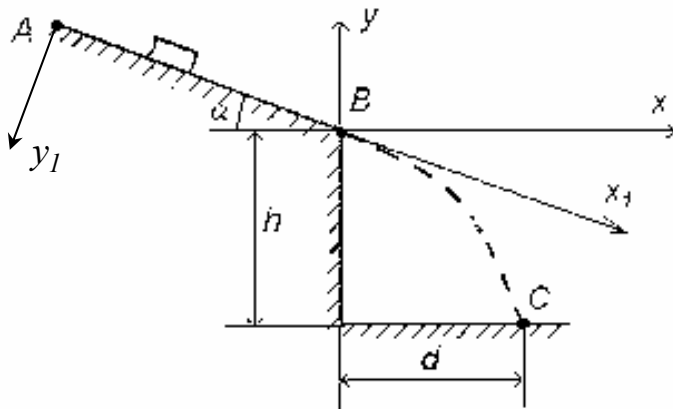
**При выполнении задания рекомендуется придерживаться следующей формы:**

### Задание 5

Схема 10, вариант данных 11.

#### Условие задачи

Тело, принимаемое за материальную точку, движется из точки  $A$  по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом в течение  $\tau$  с. Коэффициент трения скольжения на участке  $AB$  равен  $f$ . В точке  $B$  тело покидает плоскость и падает в точку  $C$ , положение которой задается величинами  $d, h$ .



Дано:

$$\alpha = 30^\circ; \quad \tau = 0,5 \text{ с};$$

$$f = 0,1; \quad d = 2 \text{ м}; \quad h = 4 \text{ м}.$$

Найти:

$$l \text{ и } V_A.$$

Рис. 5.1

Решение.

1. Рассмотрим движение тела, принимаемого за материальную точку, на участке  $AB$ . Изобразим тело в произвольном положении на участке  $AB$  и покажем действующие на него силы: силу тяжести  $m\vec{g}$ , нормальную реакцию  $\vec{N}$  наклонной плоскости и силу трения скольжения  $\vec{F}_{тр}$  (рис. 5.2).

Основное уравнение динамики в векторной форме имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}. \quad (5.5)$$

Запишем это уравнение в проекциях на оси  $Ax_1; Ay_1$ :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = mg \cdot \sin \alpha - F_{тр}, \\ m\ddot{y}_1 = mg \cdot \cos \alpha - N. \end{cases} \quad (5.6)$$

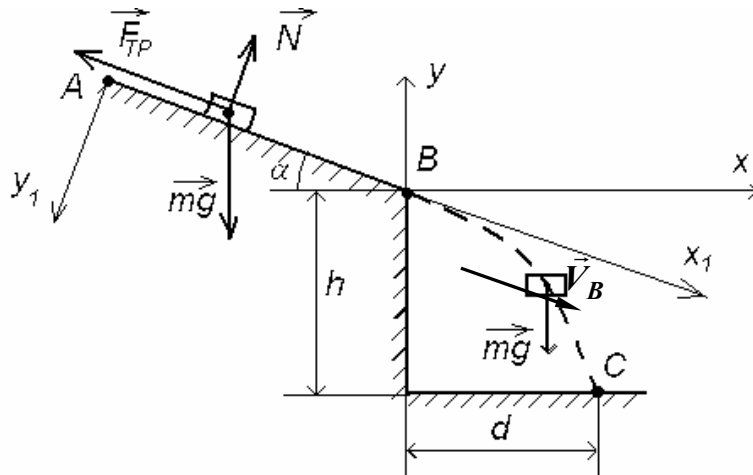


Рис. 5.2

При движении точки на участке  $AB$  ее координата  $y_1 = const$ , следовательно,  $\ddot{y}_1 = 0$ , что позволяет определить из второго уравнения системы (5.6) нормальную реакцию наклонной плоскости

$$N = mg \cdot \cos \alpha. \quad (5.7)$$

В соответствии с законом Кулона сила трения скольжения определяется равенством

$$F_{mp} = f \cdot N = f \cdot mg \cdot \cos \alpha. \quad (5.8)$$

Подстановка выражения (5.8) в первое уравнение системы (5.6) дает

$$m\ddot{x}_1 = mg \cdot \sin \alpha - f \cdot mg \cdot \cos \alpha, \quad (5.9)$$

или

$$\ddot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha). \quad (5.10)$$

Дважды интегрируя уравнение (5.10), будем иметь

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)t + C_1, \quad (5.11)$$

$$x_1 = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2. \quad (5.12)$$

Для определения произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  запишем начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad x_1(0) = x_{1,0} = 0; \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{1,0} = v_A. \quad (5.13)$$

Подстановка момента времени  $t = 0$  в уравнения (5.11), (5.12) с учетом соотношений (5.13) дает систему уравнений относительно неизвестных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\dot{x}_1(0) = C_1 = v_A, \quad (5.14)$$

$$x_1(0) = C_2 = 0. \quad (5.15)$$

Отсюда

$$C_1 = v_A, \quad C_2 = 0. \quad (5.16)$$

Перепишем уравнения (5.11), (5.12), используя найденные значения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)t + v_A, \quad (5.17)$$

$$x_1 = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + v_A t. \quad (5.18)$$

Определим скорость тела в точке  $B$  и длину  $l$  участка  $AB$ , подставив в уравнения (5.17), (5.18) момент времени  $t = \tau$ :

$$v_B = \dot{x}_1(\tau) = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)\tau + v_A, \quad (5.19)$$

$$l = x_1(\tau) = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \frac{\tau^2}{2} + v_A \tau. \quad (5.20)$$

2. Рассмотрим участок  $BC$  свободного падения тела. На этом участке на тело действует только сила тяжести (рис.5.2), и основное уравнение динамики в векторной форме имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g}. \quad (5.21)$$

Введем новую систему координат  $Bxy$  (рис. 5.2) и запишем систему дифференциальных уравнений движения точки в проекциях на оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, \\ m\ddot{y} = -mg, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = -g. \end{cases} \quad (5.22)$$

Последовательно интегрируя систему уравнений (5.22), будем иметь

$$\begin{cases} \dot{x} = B_1, \\ \dot{y} = -gt + B_2, \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\begin{cases} x = B_1 t + D_1, \\ y = -\frac{gt^2}{2} + B_2 t + D_2. \end{cases} \quad (5.24)$$

Учитывая, что скорость  $\vec{v}_B$  является начальной скоростью для участка свободного падения, сформулируем начальные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } t=0 \quad x(0) = x_0 = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_B \cos \alpha; \\ y(0) = y_0 = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = -v_B \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Подстановка начальных условий в системы уравнений (5.23), (5.24) позволяет определить произвольные постоянные  $B_1, B_2, D_1, D_2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = B_1 = v_B \cos \alpha, \\ \dot{y}(0) = B_2 = -v_B \sin \alpha, \\ x(0) = D_1 = 0, \\ y(0) = D_2 = 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

Таким образом,  $B_1 = v_B \cos \alpha$ ,  $B_2 = -v_B \sin \alpha$ ,  $D_1 = D_2 = 0$ , и, следовательно, системы уравнений (5.23), (5.24) примут вид

$$\begin{cases} \dot{x} = v_B \cos \alpha, \\ \dot{y} = -gt - v_B \sin \alpha, \end{cases} \quad (5.27)$$

$$\begin{cases} x = v_B \cos \alpha \cdot t, \\ y = -\frac{gt^2}{2} - v_B \sin \alpha \cdot t. \end{cases} \quad (5.28)$$

Составим условия попадания тела в точку  $C$ : при  $t=T$  выполняются равенства  $x = d$ ;  $y = -h$ . Подстановка этих соотношений в (5.28) дает

$$\begin{cases} d = v_B \cos \alpha \cdot T, \\ -h = -\frac{gT^2}{2} - v_B \sin \alpha \cdot T. \end{cases} \quad (5.29)$$

Воспользуемся теперь исходными данными задачи. Система уравнений (5.28) с двумя неизвестными  $T$  и  $v_B$  позволяет определить  $v_B$ , исключая неизвестную  $T$

$$v_B = \sqrt{\frac{gd^2}{2\cos^2 \alpha(h - dtg \alpha)}} = \frac{d}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h - dtg \alpha)}}, \quad (5.30)$$

$$v_B = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{9,81}{2(4 - 2/\sqrt{3})}} \approx 3,04 \text{ м/с}. \quad (5.31)$$

Возвращаясь к уравнениям (5.19), (5.20), определяем искомые величины

$$v_A = v_B - g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)\tau \approx 3,04 - 2,03 = 1,01 \text{ м/с}, \quad (5.32)$$

$$l = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)\frac{\tau^2}{2} + v_A\tau \approx 0,51 + 0,51 = 1,02 \text{ м}. \quad (5.33)$$

*Ответ:*  $v_A \approx 1,01 \text{ м/с}$ ,  $l \approx 1,02 \text{ м}$ .

## Тема 6. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

### Задание 6

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на схеме. Учитывая трение скольжения тела  $I$ , пренебрегая массами нитей и предполагая их нерастяжимыми, определить скорость тела  $I$  в тот момент, когда пройденный им путь станет равным  $S$ .

Исходные данные приведены в *таблице 6.1*.

Примечание. Все блоки, для которых радиусы инерции ( $i$ ) не заданы, считать однородными цилиндрами.

В задании приняты следующие обозначения:

$m_1, m_2, m_3, m_4$  – массы тел  $1, 2, 3, 4$ ;

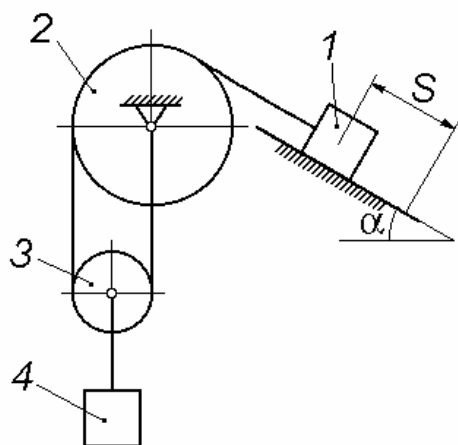
$\alpha$  – угол наклона плоскости к горизонту;

$f$  – коэффициент трения скольжения.

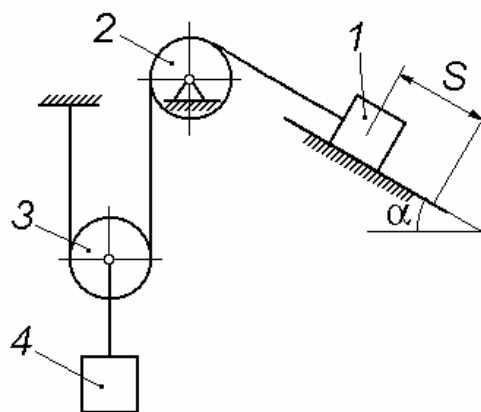
*Таблица 6.1*

Номер варианта исходных дан- ных	Заданные величины						
	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$m_3$ , кг	$m_4$ , кг	$\alpha$ , град	$f$	$S$ , м
0	$m$	$2m$	$0,2m$	$0,4m$	30	0,20	2,5
1	$m$	$4m$	$0,2m$	$0,2m$	60	0,10	2
2	$m$	$m$	$0,1m$	$0,1m$	30	0,12	2
3	$m$	$0,25m$	$0,1m$	$0,2m$	45	0,15	3
4	$m$	$0,3m$	$0,1m$	$0,3m$	60	0,20	1,5
5	$m$	$m$	$0,1m$	$0,2m$	30	0,10	1
6	$m$	$2m$	$0,3m$	$0,1m$	45	0,15	2
7	$m$	$0,5m$	$0,2m$	$0,1m$	60	0,12	3
8	$m$	$0,4m$	$0,1m$	$0,2m$	30	0,20	1,5
9	$m$	$3m$	$0,3m$	$0,1m$	45	0,10	1

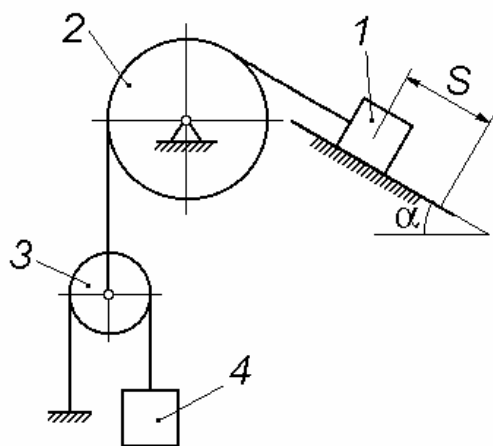
0,5



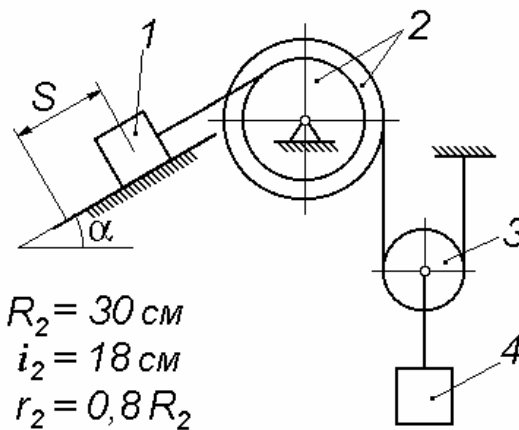
1,6



2,7



3,8



4,9

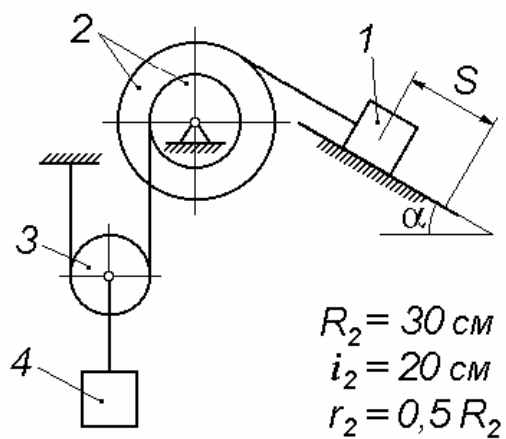


Рис. 6.1

## **Основные теоретические положения, используемые при решении задач**

*Кинетическая энергия механической системы* определяется как сумма кинетических энергий ее частей

$$T = \sum_i T_i. \quad (6.1)$$

Кинетическая энергия твердого тела определяется в зависимости от характера его движения следующим образом.

□ *При поступательном движении* твердого тела его кинетическая энергия равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс (или любой другой точки тела):

$$T = \frac{mv_C^2}{2} = \frac{mv^2}{2}, \quad (6.2)$$

где  $m$  – масса тела,  $v_C$  – скорость центра масс,  $v$  – скорость произвольно выбранной точки тела.

□ *При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси* его кинетическая энергия равна половине произведения его момента инерции относительно оси вращения на квадрат угловой скорости:

$$T = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (6.3)$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно оси его вращения,  $\omega$  – угловая скорость тела.

□ *При плоскопараллельном движении твердого тела* его кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии вращательного движения вокруг центра масс:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}, \quad (6.4)$$

где  $m$  – масса тела,  $v_C$  – скорость центра масс,  $I_C$  – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс,  $\omega$  – угловая скорость тела.

Моменты инерции однородных тел, имеющих правильную геометрическую форму, приводятся в справочниках. Например, момент инерции кругового однородного цилиндра относительно оси его симметрии  $Cz$  (рис. 6.2), определяется выражением

$$I_{Cz} = \frac{mR^2}{2}, \quad (6.5)$$

где  $m$  – масса цилиндра,  $R$  – радиус цилиндра.

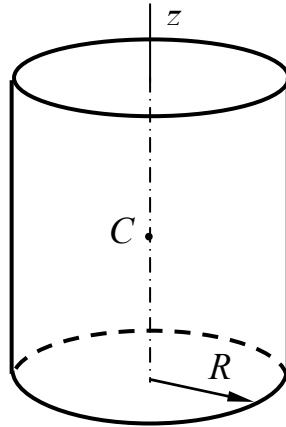


Рис. 6.2

Момент инерции тела сложной формы относительно некоторой оси выражается через массу тела и его радиус инерции  $i$  относительно этой оси по формуле

$$I = mi^2. \quad (6.6)$$

При выполнении данного задания следует использовать *теорему об изменении кинетической энергии механической системы*. Сформулируем эту теорему в интегральной форме. *Изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил системы при этом перемещении*, т. е.

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}^e + A_{1,2}^i, \quad (6.7)$$

где  $A_{1,2}^e$  – сумма работ внешних (external) сил, действующих на систему,

$A_{1,2}^i$  – сумма работ внутренних (internal) сил системы при перемещении системы из положения 1 в положение 2.

В данном задании, применяя теорему об изменении кинетической энергии системы, не нужно учитывать слагаемое  $A_{1,2}^i$ , так как сумма работ всех внутренних сил абсолютно твердого тела на любом его перемещении равна нулю, и сумма работ внутренних сил абсолютно гибкой и нерастяжимой нити равна нулю. В этом случае равенство (6.7) принимает вид

$$T_2 - T_1 = A_{1,2}^e. \quad (6.8)$$

При вычислении работ внешних сил следует учесть, что работа сил, приложенных к неподвижным центрам блоков (сил тяжести и реакций опор), равна нулю.



**Задание рекомендуется выполнять в следующем порядке:**

1) записать теорему об изменении кинетической энергии системы в виде (6.8), учитывая, что начальная кинетическая энергия системы равна нулю (движение начинается из состояния покоя);

2) представить кинетическую энергию системы в ее конечном положении как сумму кинетических энергий всех тел, входящих в систему; при этом кинетическая энергия каждого тела должна вычисляться по одной из формул (6.2) – (6.4) в соответствии с характером движения тела;

3) используя кинематические соотношения между скоростями точек системы, выразить все скорости, входящие в выражение кинетической энергии системы, через скорость тела  $I$ ;

4) изобразить на рисунке все внешние силы;

5) вычислить сумму работ внешних сил на заданном перемещении системы, выразив перемещения точек приложения сил через перемещение тела  $I$ ;

6) определить величину скорости тела  $I$  ( $v_1$ ), рассматривая равенство (6.8) как уравнение относительно этой скорости.

**Выполняя задание, рекомендуется придерживаться следующей формы:**

### **Задание 6**

Схема 10, вариант данных 11.

#### *Условие задачи*

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на *рисунке 6.3*. Учитывая трение скольжения тела  $I$ , пренебрегая массами нитей и предполагая их нерастяжимыми, определить скорость тела  $I$  в тот момент, когда пройденный им путь станет равным  $S$ .

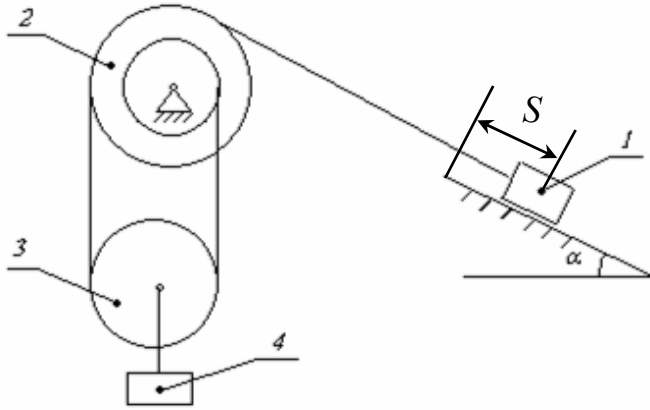
Примечание. Все блоки, для которых радиусы инерция ( $i$ ) не заданы, считать однородными цилиндрами.

В задании приняты следующие обозначения:

$m_1, m_2, m_3, m_4$  – массы тел  $1, 2, 3, 4$ ;

$\alpha$  – угол наклона плоскости к горизонту;

$f$  – коэффициент трения скольжения.



Дано:

$$m_1 = 2 \text{ кг}, \quad m_2 = 2 \text{ кг}, \quad m_3 = 4 \text{ кг}, \\ m_4 = 6 \text{ кг}, \quad R_2 = 0,4 \text{ м}; \quad r_2 = 0,2 \text{ м}; \\ i_2 = 0,25 \text{ м}; \quad \alpha = 30^\circ, \quad f = 0,2; \\ S = 1,2 \text{ м}.$$

Найти:  $v_1$ .

Рис. 6.3

Решение.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из абсолютно твердых тел  $1, 2, 3, 4$ , соединенных абсолютно гибкими нерастяжимыми нитями. Для такой системы теорема об изменении кинетической энергии имеет вид

$$T_{\text{кон}} - T_{\text{нач}} = A_{\text{нач,кон}}^e, \quad (6.9)$$

где  $T_{\text{нач}}$  и  $T_{\text{кон}}$  – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях,  $A_{\text{нач,кон}}^e$  – сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на ее перемещении из начального положения в конечное.

Так как в начальном положении система находится в покое, то

$$T_{\text{нач}} = 0. \quad (6.10)$$

Следовательно, уравнение (6.9) переписывается в виде

$$T_{\text{кон}} = A_{\text{нач,кон}}^e. \quad (6.11)$$

Определим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий всех четырех тел, входящих в систему,

$$T_{\text{кон}} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (6.12)$$

Так как тело  $1$  движется поступательно, его кинетическая энергия в соответствии с выражением (6.2) описывается равенством

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (6.13)$$

Тело  $2$  вращается вокруг неподвижной оси, значит, его кинетическая энергия определяется соотношением (6.3)

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2}, \quad (6.14)$$

где  $I_2 = m_2 i_2^2$  – момент инерции тела 2 относительно оси его вращения, формы,  $\omega_2$  – угловая скорость тела 2.

Кинетическая энергия тела 3, совершающего плоскопараллельное движение, согласно (6.4), имеет вид

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2}, \quad (6.15)$$

где  $v_C$  – скорость центра масс блока 3,  $I_3$  – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через центр масс  $C$  перпендикулярно плоскости рисунка (центральный момент инерции блока 3),  $\omega_3$  – угловая скорость блока 3.

Так как по условию задачи тело 3 представляет однородный цилиндр, для вычисления его центрального момента инерции следует воспользоваться формулой (6.5). Тогда

$$I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}. \quad (6.16)$$

Тело 4 совершает поступательное движение со скоростью  $V_C$ , следовательно,

$$T_4 = \frac{m_4 v_C^2}{2}. \quad (6.17)$$

Составим кинематические соотношения между скоростями точек системы, и выразим кинетические энергии  $T_2, T_3, T_4$  через скорость тела 1.

Угловая скорость блока 2

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}, \quad (6.18)$$

тогда

$$T_2 = \frac{m_2 i_2^2}{R_2^2} v_1^2. \quad (6.19)$$

Чтобы найти скорость центра масс и угловую скорость блока 3, рассмотрим распределение скоростей в блоках 2 и 3 (рис. 6.4, б).

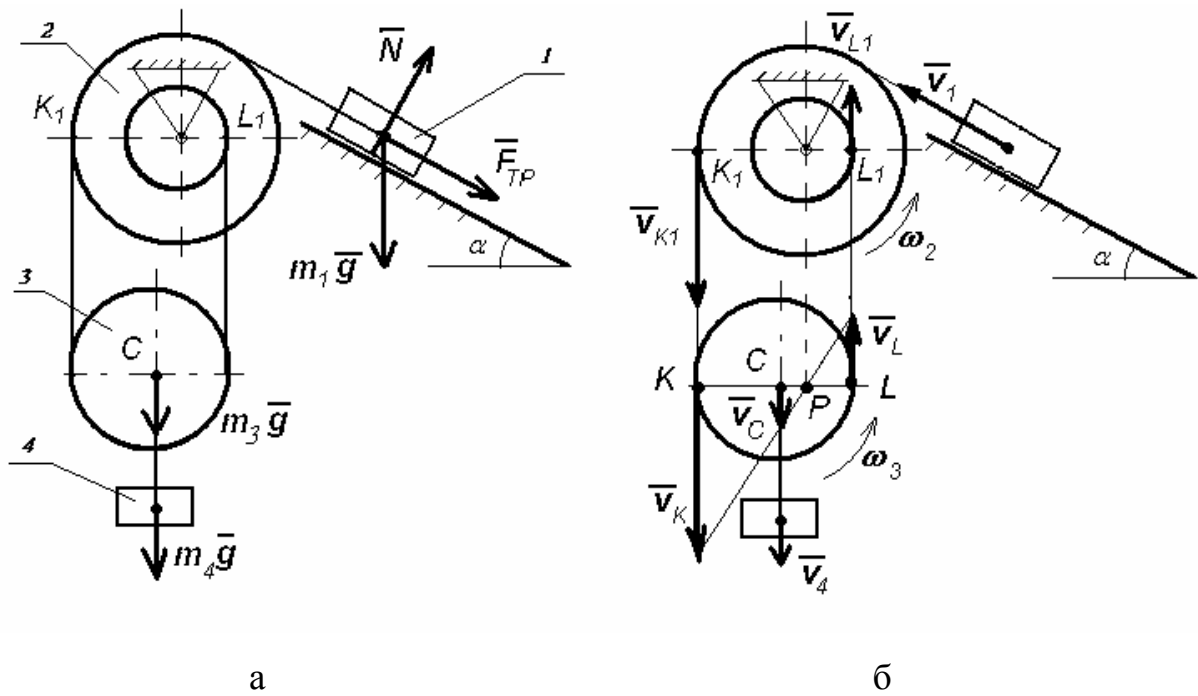


Рис. 6.3

Запишем следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned}
 v_K &= v_{K1} = v_1, \\
 v_L &= v_{L1} = \omega_2 r_2 = v_1 \frac{r_2}{R_2}.
 \end{aligned}
 \tag{6.20}$$

Покажем на рисунке мгновенный центр скоростей  $P$  блока 3. Точка  $P$  делит диаметр блока 3 в отношении  $R_2 : r_2$ , тогда

$$\omega_3 = \frac{v_K}{|KP|} = \frac{v_1}{R_2} = \omega_2.
 \tag{6.21}$$

Легко заметить, что

$$\begin{aligned}
 R_3 &= |KC| = \frac{R_2 + r_2}{2}, \\
 |CP| &= |KP| - |KC| = R_2 - \frac{R_2 + r_2}{2} = \frac{R_2 - r_2}{2},
 \end{aligned}
 \tag{6.22}$$

$$v_C = \omega_3 \cdot |CP| = \frac{R_2 - r_2}{2R_2} v_1.$$

Тогда

$$T_3 = m_3 \left[ \frac{(R_2 - r_2)^2}{8R_2^2} + \frac{(R_2 + r_2)^2}{16R_2^2} \right] v_1^2,
 \tag{6.23}$$

$$T_4 = m_4 \frac{(R_2 - r_2)^2}{8R_2^2} v_1^2. \quad (6.24)$$

Кинетическая энергия системы:

$$\begin{aligned} T_{\text{кон}} &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \\ &= \left[ m_1 + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + (m_3 + m_4) \frac{(R_2 - r_2)^2}{4R_2^2} + m_3 \frac{(R_2 + r_2)^2}{8R_2^2} \right] \cdot \frac{v_1^2}{2}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Подстановка исходных данных задачи дает

$$T_{\text{кон}} = \left[ 2 + 2 \frac{0,25^2}{0,4^2} + 10 \frac{0,2^2}{4 \cdot 0,4^2} + 4 \frac{0,6^2}{8 \cdot 0,4^2} \right] \cdot \frac{v_1^2}{2} \approx 2,27V_1^2. \quad (6.26)$$

Перейдем к определению  $A_{\text{нач,кон}}^e$  – суммы работ внешних сил, приложенных к системе, на ее перемещении из начального положения в конечное. Покажем на *рисунке 6.4, а* все внешние силы, совершающие ненулевую работу: силы тяжести, приложенные к телам 1, 3 и 4, а также силу трения, приложенную к телу 1. Будем иметь

$$\begin{aligned} A_{\text{нач,кон}}^e &= A_{\text{нач,кон}}(m_1 \vec{g}) + A_{\text{нач,кон}}(m_3 \vec{g}) + \\ &+ A_{\text{нач,кон}}(m_4 \vec{g}) + A_{\text{нач,кон}}(\vec{F}_{\text{тр}}). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Работа силы тяжести  $m_1 \vec{g}$  определяется выражением

$$A_{\text{нач,кон}}(m_1 \vec{g}) = -m_1 g S \sin \alpha. \quad (6.28)$$

Пусть  $h_3 = h_4$  – высота, на которую опускается центр масс тела 3 и тело 4, тогда

$$A_{\text{нач,кон}}(m_3 \vec{g}) = m_3 g h_3, \quad (6.29)$$

$$A_{\text{нач,кон}}(m_4 \vec{g}) = m_4 g h_4. \quad (6.30)$$

Определим  $h_3 = h_4$  следующим образом:

$$h_3 = h_4 = \int_0^{\tau} v_C dt = \int_0^{\tau} \frac{R_2 - r_2}{2R_2} v_1 dt = \frac{R_2 - r_2}{2R_2} \int_0^{\tau} v_1 dt = \frac{R_2 - r_2}{2R_2} S, \quad (6.31)$$

где  $\tau$  – время движения,  $\int_0^{\tau} v_1 dt = S$  – путь, пройденный телом 1.

Следовательно,

$$A_{нач,кон}(m_3 \vec{g}) + A_{нач,кон}(m_4 \vec{g}) = (m_3 + m_4)g \frac{R_2 - r_2}{2R_2} S. \quad (6.32)$$

Для нахождения силы трения, запишем основное уравнение динамики для тела (материальной точки)  $l$  в проекциях на нормаль к его траектории

$$0 = N - m_1 g \cos \alpha. \quad (6.33)$$

Тогда

$$F_{тр} = fN = m_1 g f \cos \alpha; \quad (6.34)$$

$$A_{нач,кон}(\vec{F}_{тр}) = -F_{тр}S = -m_1 g f S \cos \alpha. \quad (6.35)$$

Окончательно будем иметь

$$A_{нач,кон}^e = \left[ (m_3 + m_4) \frac{R_2 - r_2}{2R_2} - m_1 (\sin \alpha + f \cos \alpha) \right] g S. \quad (6.36)$$

Подставляя в равенство (6.36) исходные данные задачи, получим

$$A_{нач,кон}^e = \left[ 10 \frac{0,2}{2 \cdot 0,4} - 2(0,5 + 0,2 \cdot \sqrt{3} / 2) \right] \cdot 9,81 \cdot 1,2 \approx 13,58 \text{ Дж}. \quad (6.37)$$

С учетом выражений (6.26) и (6.37) теорема об изменении кинетической энергии (6.11) может рассматриваться как уравнение относительно неизвестной скорости  $v_1$

$$2,27v_1^2 = 13,58. \quad (6.38)$$

Отсюда

$$v_1 \approx 2,45 \text{ м/с}. \quad (6.39)$$

*Ответ:*  $v_1 \approx 2,45 \text{ м/с}$ .

## Тема 7. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

### Задание 7

*При кинематическом анализе решаются следующие задачи:*

- Определение положений звеньев механизма при заданном положении входного звена.
- Определение линейных скоростей точек механизма и угловых скоростей звеньев.
- Определение линейных ускорений точек механизмов и угловых ускорений звеньев.
- Определение функций положений звеньев, первых и вторых передаточных функций механизма.

Графическая часть работы выполняется на миллиметровке.

### 7.1. ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНОВ МЕХАНИЗМОВ

В контрольной работе № 2 рассматривается механизм, содержащий одну группу Ассур 2-го класса, 3-й модификации, 1-го и 2-го видов. Данные механизмы позволяют студенту освоить методику кинематического анализа плоских рычажных механизмов различных видов.

Кинематическое исследование начинают с построения планов положений механизма.

Планом механизма называют масштабное графическое изображение кинематической схемы механизма, соответствующее заданному положению входного звена. Для построения планов положений механизма выбирают систему координат.

Начало координат обычно совмещают с осью вращения входного звена (кривошипа). За нулевое положение выбирают положение входного звена, совпадающее с положительным направлением оси абсцисс ( $\varphi_1 = 0$ ).

В данной контрольной работе студент строит одно положение механизма для заданного угла поворота входного звена  $\varphi_1$ .

Рассмотрим построение планов механизмов 2-го класса с группой Ассур 3-й модификации.

#### 7.1.1. Механизм с группой 3-й модификации 1-го вида (рис. 7.1)

Механизм состоит из входного звена (кривошипа  $O_1A$ ) и присоединенной к нему и к стойке группы Ассур 2-го класса 3-й модификации 1-го вида (диада ВПВ). В данном механизме группа присоединяется ползуном к входному звену, а другой внешней вращательной парой к стойке. При работе механизма ползун вращает звено  $O_2B$  относительно стойки  $O_2$ . Звено  $O_2B$  в та-

ком механизме называется **кулисой**. Данный механизм называется **кривошипно-кулисным с вращательным движением кулисы**.

План положений механизма строится в масштабе  $K_L$  м/мм, представляющий собой отношение действительной величины звена в метрах к чертежной величине в миллиметрах.

Траекторией точки  $A$ , принадлежащей **кривошипу**, является окружность с радиусом  $O_1A$ . Если строится несколько положений механизма и угловая скорость входного звена постоянная ( $\omega_1 = \text{const}$ ), то данная окружность делится на равные части. Нулевому положению точки  $A$  соответствует положение кривошипа при  $\varphi_1 = 0$ . Последующие положения соответствуют направлению угловой скорости звена (рис. 7.1, а).

Чтобы получить положения кулисы  $O_2B$ , необходимо провести прямые через соответствующие точки  $A$  и центр вращения кулисы  $O_2$ . Траектория точки  $B$ , принадлежащая кулисе, есть дуга с радиусом  $O_2B$ .

Максимальный угол размаха  $\beta_{\text{max}}$  кулисы  $O_2B$  определяется построением крайних положений механизма, которые соответствуют тем положениям кривошипа, когда кривошип и кулиса составляют прямой угол, т. е.  $90^\circ$ . Эти положения показаны на рис. 7.1, б.

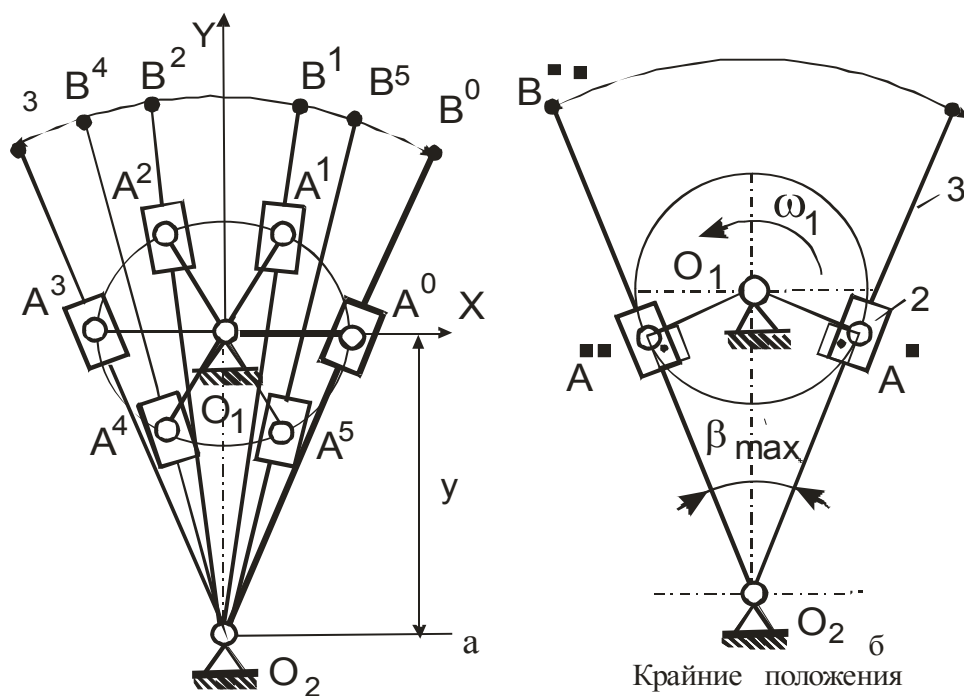


Рис. 7.1. План положений механизма с группой Асура 3-й модификации 1-го вида



### 7.1.2. Механизм с группой 3-й модификации 2-го вида (рис. 7.2)

Механизм состоит из входного звена (кривошипа  $O_1A$ ) и присоединенной к нему и к стойке группы Ассур 2-го класса 3-й модификации 2-го вида (диада ВПВ). В данном механизме группа присоединяется шатуном к входному звену, а ползуном к стойке.

Траекторией точки  $A$ , принадлежащей **кривошипу**, является окружность с радиусом  $O_1A$ . Данную окружность делим на равные части. Нулевому положению точки  $A$  соответствует положение кривошипа при  $\varphi_1 = 0$ . Последующие положения соответствуют направлению угловой скорости звена (рис. 7.2, а).

Чтобы получить положения шатуна, а также ползуна, необходимо провести прямые через соответствующие точки  $A$  и неподвижную точку  $B$ .

Для определения положения точки  $C$  необходимо от точки  $A$  отложить расстояние  $AC$  на соответствующем положении шатуна. Соединив последовательно точки  $C$ , получим траекторию, которая является **шатунной кривой**.

Максимальный угол размаха  $\beta_{max}$  шатуна  $AC$  определяется построением крайних положений механизма, которые соответствуют тем положениям кривошипа, когда кривошип и шатун составляют прямой угол, т. е.  $90^\circ$ . Построение крайних положений механизма второго вида показано на рис. 7.2, б.

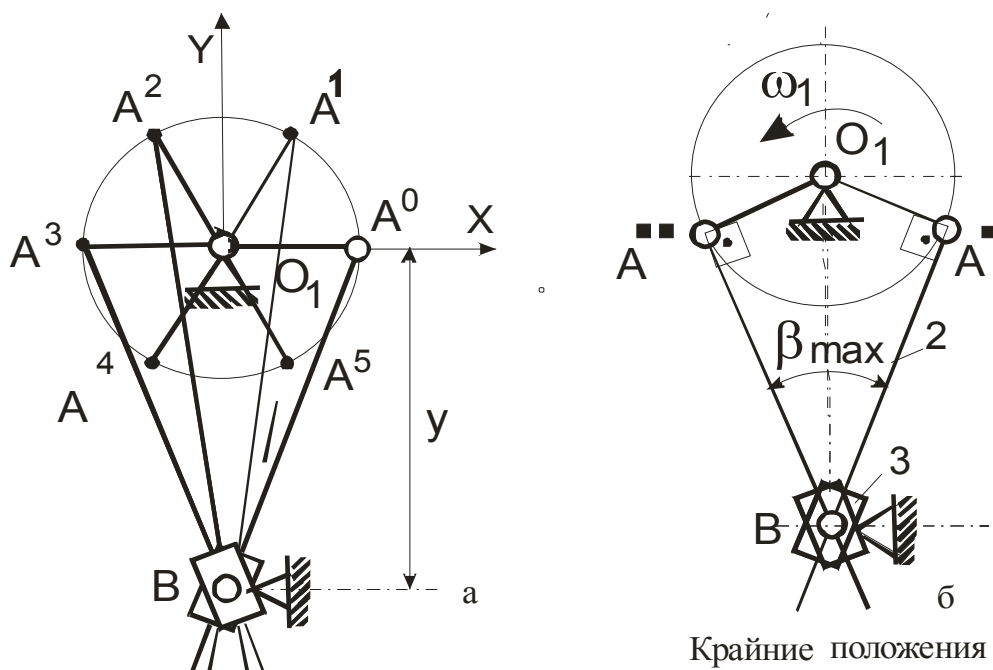


Рис. 1.2. План положений механизма с группой Асура 3-й модификации 2-го вида

## 7.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ С ГРУППАМИ АССУРА 3-Й МОДИФИКАЦИИ

### **Выбор масштаба $K_V$ для планов скоростей и масштаба $K_a$ для планов ускорений**

При выборе масштабов  $K_V$  и  $K_a$  необходимо выбирать длину векторов  $(\overline{P_V a})$ , и  $(\overline{P_a a})$  соответствующих скорости и ускорения точки  $A$ , таким образом, чтобы масштаб был точной величиной и для удобства вычислений имел не более двух значащих цифр.

#### **Масштаб плана скоростей**

Определим скорость точки  $A$ , принадлежащей кривошипу:

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1 A, \text{ мс}^{-1}.$$

Отложим на чертеже от произвольно выбранной точки  $P_V$ , которая называется полюсом плана скоростей, вектор  $(\overline{P_V a})$ , соответствующий скорости точки  $A$ . Тогда масштаб плана скоростей определится следующим образом:

$$K_V = \frac{V_A}{(\overline{P_V a})}, \text{ мс}^{-1} / \text{мм}.$$

Например, угловая скорость входного звена  $\omega_1 = 75,398 \text{ с}^{-1}$ , длина кривошипа  $O_1 A = 0,05 \text{ м}$ .

Тогда

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1 A = 75,398 \cdot 0,05 = 3,769 \text{ мс}^{-1}.$$

Если выбрать длину вектора  $(\overline{P_V a})^* = 100 \text{ мм}$ , то масштаб плана скоростей будет равен

$$K_V^* = \frac{V_A}{(\overline{P_V a})^*} = \frac{3,769}{100} = 0,03769 \text{ мс}^{-1} / \text{мм}.$$

Чтобы получить масштаб удобный для расчетов, округлим масштаб до величины  $K_V = 0,04$  и пересчитаем соответствующую ему длину вектора  $(\overline{P_V a})$ :

$$(\overline{P_V a}) = \frac{V_A}{K_V} = \frac{3,769}{0,04} = 94,225 \approx 94 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем масштаб плана скоростей равным:

$$K_V = 0,04 \text{ мс}^{-1} / \text{мм.}$$

Величина вектора скорости точки  $A$  на плане скоростей  $(\overline{P_V a}) = 94 \text{ мм.}$

### **Масштаб плана ускорений**

Определим ускорение точки  $A$  при  $(\omega_1 = \text{const})$ .

В курсовом проекте (работе) принято, что входное звено механизма вращается с постоянной угловой скоростью  $(\omega_1 = \text{const})$ . Тогда  $\varepsilon_1 = 0$  и полное ускорение входного звена механизма равно нормальному ускорению

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{A_1 O_1}^n = \omega_1^2 \mathbf{O_1 A}.$$

Отложим на чертеже от произвольно выбранной точки  $P_a$ , которая называется полюсом плана ускорений, вектор  $(\overline{P_a a})$ , соответствующий ускорению точки  $A$ . Тогда масштаб плана ускорений определится следующим образом:

$$K_a = \frac{\mathbf{a}_A}{(\overline{P_a a})}, \text{ мс}^{-2} / \text{мм.}$$

Например,  $\omega_1 = 75,398 \text{ с}^{-1}$ ,  $\mathbf{O_1 A} = 0,05 \text{ м}$ ,

$$\mathbf{a}_A = \omega_1^2 \cdot \mathbf{O_1 A} = 75,398^2 \cdot 0,05 = 284,2 \text{ мс}^{-2}.$$

Выберем предварительно длину вектора  $(\overline{P_a a})^* = 100 \text{ мм.}$

Масштаб плана ускорений будет равен

$$K_a^* = \frac{\mathbf{a}_A}{(\overline{P_a a})^*} = \frac{284,2}{100} = 2,842 \text{ мс}^{-2} / \text{мм.}$$

Округлим масштаб до величины  $K_a = 3$  и пересчитаем длину вектора  $(\overline{P_a a})$ :

$$(\overline{P_a a}) = \frac{\mathbf{a}_A}{K_a} = \frac{284,2}{3} = 94,7 \approx 95 \text{ мм.}$$

Теперь масштаб плана ускорений будет равен

$$K_a = 3 \text{ мс}^{-2} / \text{мм.}$$

Размер вектора ускорения точки  $A$  на плане ускорений  $(\overline{P_a a}) = 95 \text{ мм.}$

### 7.2.1. Механизм с группой 3-й модификации 1-го вида (рис. 7.2.1)

Рассматривается кинематический анализ кулисного механизма, в котором ползун 2 присоединяется вращательной парой А к кривошипу 1. Кулиса 3 присоединяется вращательной парой  $O_2$  к стойке.

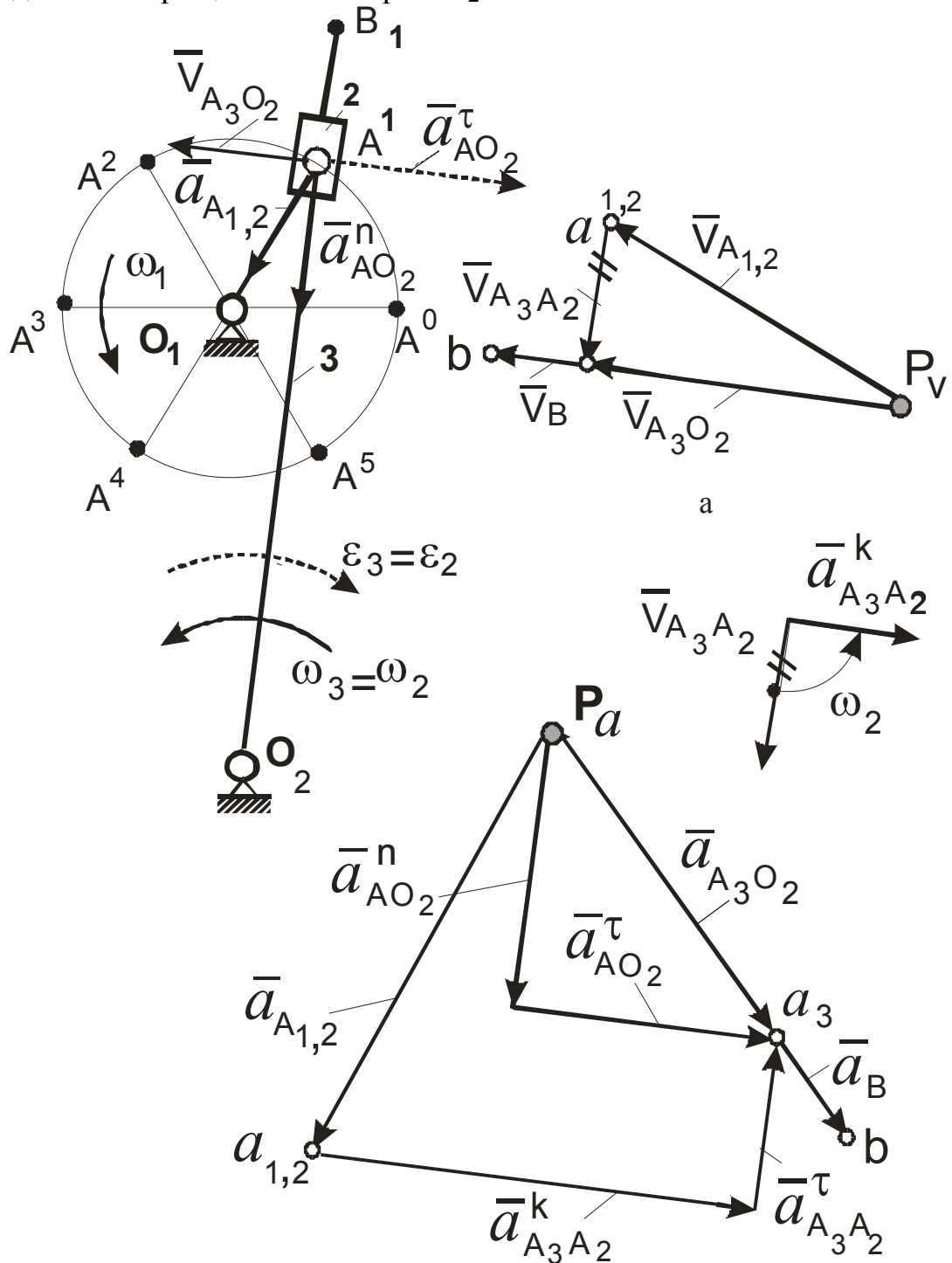


Рис. 7.2.1. Построение планов скоростей и ускорений для механизма с группой Ассур 3-й модификации 1-го вида.

## Составление векторных уравнений для построения планов скоростей

Структурный анализ данного механизма имеет вид:

Стойка –  $O_1-1 \rightarrow$  1-й кл.;

$A_{вр} - 2 - A_{пост} - 3 - O_2_{вр} \rightarrow$  2-й кл., 3-я мод., 1-й вид (диада **ВПВ**).

Кинематический анализ механизма начинают с входного звена.

В точке  $A$  вращательной парой соединяются кривошип и ползун (звено 2), поэтому  $\overline{V}_{A_2} = \overline{V}_{A_1} = \overline{V}_{A_{1,2}}$ . В точке  $A$  поступательной парой соединяются ползун (звено 2) и кулиса (звено 3), следовательно,  $\overline{V}_{A_3} \neq \overline{V}_{A_2}$ .

Перепишем запись структурного анализа с учетом нумерации звеньев

$A_{1,2} - 2 - A_3 - 3 - O_2$ .

Задача кинематического анализа механизма – определить для заданного положения механизма:

- скорость  $V_{A_{1,2}}$  и ускорение  $a_{A_{1,2}}$  точки  $A_{1,2}$ ;
- скорость  $V_{A_3}$  и ускорение  $a_{A_3}$  точки  $A_3$ ;
- скорость  $V_B$  и ускорение  $a_B$  точки  $B$ ;
- угловую скорость  $\omega_2$  и угловое ускорение  $\varepsilon_2$  ползуна 2;
- угловую скорость  $\omega_3$  и угловое ускорение  $\varepsilon_3$  кулисы 3.

Следует заметить, что скорость и ускорение точки  $B$  могут быть определены только после определения скорости и ускорения точки  $A_3$ .

### Входное звено

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1A, \text{ мс}^{-1}. \quad (7.1)$$

Вектор  $\overline{V}_A = (\overline{P_V a})$  направляется перпендикулярно к  $O_1A$  по направлению  $\omega_1$ .

### Присоединенная группа $A_{1,2} - 2 - A_3 - 3 - O_2$ (диада **ВПВ**)

Движение кулисы 3 можно представить как переносное вращательное движение вместе с точкой  $A_2$  (полюсом) и относительного поступательного движения по отношению к полюсу  $A_2$  со скоростью  $\overline{V}_{A_3 A_2}$ :

$$\overline{V}_{A_3} = \overline{V}_{A_2} + \overline{V}_{A_3 A_2}, \quad (7.2)$$

где  $\bar{V}_{A_3 A_2}$  – относительная скорость точки  $A_3$  по отношению к полюсу  $A_2$ .

При построении векторного уравнения (7.2) вектор относительной скорости  $\bar{V}_{A_3 A_2}$  не может быть построен, так как для него известна только линия действия  $\bar{V}_{A_3 A_2} \parallel AO_2$ , но неизвестна величина и направление.

В точке  $O_2$  вращательной парой соединяются кулиса и стойка. Движение кулисы рассматриваем как сложное движение, состоящего из переносного поступательного движения вместе с (полюсом) точкой  $O_2$ , скорость которой равна нулю:  $\bar{V}_{O_2} = 0$ , и относительного вращательного движения вокруг полюса  $O_2$  со скоростью  $\bar{V}_{A_3 O_2}$ .

Тогда в соответствии с теоремой сложения скоростей для точки  $A_3$  получаем

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{O_2} + \bar{V}_{A_3 O_2}, \quad (7.3)$$

где  $\bar{V}_{A_3 O_2}$  – относительная скорость точки  $A_3$  по отношению к полюсу  $O_2$ .

При построении векторного уравнения (7.3) вектор относительной скорости  $\bar{V}_{A_3 O_2}$  не может быть построен, так как для него известна только линия действия,  $\bar{V}_{A_3 O_2} \perp A_3 O_2$ , но неизвестна величина и направление ( $\omega_3$  – неизвестна).

Объединяем уравнения (7.2) и (7.3) в систему

$$\begin{cases} \bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{A_2} + \bar{V}_{A_3 A_2}, & \bar{V}_{A_3 A_2} \parallel AO_2; \\ \bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{O_2} + \bar{V}_{A_3 O_2}, & \bar{V}_{A_3 O_2} \perp AO_2. \end{cases} \quad (7.4)$$

Эту систему будем решать графически. Цель построения – определить скорость точки  $A_3$ .

*Необходимо обратить внимание на связь структурной записи кинематической цепи и способа составления системы уравнений.*

*Для точки  $A_3$ , стоящей в центре записи структурного анализа, составляются два векторных уравнения, для которых в качестве полюсов принимаются точки  $A_2$  и  $O_2$ , стоящие по краям кинематической цепи.*

**Построение плана скоростей производится в следующей последовательности:**

1. Выберем масштаб  $K_V$  плана скоростей.

2. Выберем полюс плана скоростей  $P_V$  — общее начало векторов абсолютных скоростей точек механизма.

3. Из полюса  $P_V$  построим вектор скорости точки  $A_{1,2}$  в масштабе  $K_V$ :

$$\left(\overline{P_V a_{1,2}}\right) = \frac{V_{A_{1,2}}}{K_V}, \text{ мм.}$$

Конец вектора обозначим буквой  $a_{1,2}$

4. Согласно первому уравнению системы (7.4), из конца вектора  $\overline{V}_{A_2}$ , т. е. через точку  $a_{1,2}$ , проведем линию действия относительной скорости  $\overline{V}_{A_3 A_2}$  параллельно звену  $AO_2$  ( $\overline{V}_{A_3 A_2} \parallel AO_2$ ).

5. Согласно второму уравнению системы (2.4), из полюса  $P_V$ , так как  $\overline{V}_{O_2} = 0$ , проведем линию действия относительной скорости  $\overline{V}_{A_3 O_2}$  перпендикулярно звену  $AO_2$  ( $\overline{V}_{A_3 O_2} \perp AO_2$ ).

6. Отметим точку пересечения двух линий действия относительных скоростей и обозначим её  $a_3$ .

7. Проведем из полюса  $P_V$  вектор в точку  $a_3$  — это вектор абсолютной скорости  $\overline{V}_{A_3}$  точки  $A_3$ . Проведем вектор из точки  $a_2$  в точку  $a_3$  — это вектор относительной скорости  $\overline{V}_{A_3 A_2}$  точки  $A_3$  по отношению к точке  $A_2$ .

Чтобы получить модули скоростей в размерности  $\text{мс}^{-1}$  необходимо измерить вектор в мм и умножить на масштаб  $K_V$ .

$$V_{A_3} = V_{A_3 O_2} = \left(\overline{P_V a_3}\right) K_V, \text{ мс}^{-1}; \quad (7.5)$$

$$V_{A_3 A_2} = \left(\overline{a_3 a_2}\right)_V K_V, \text{ мс}^{-1}. \quad (7.6)$$

Скорость точки  $B$ , принадлежащей кулисе  $AO_2$ , может быть получена с применением теоремы подобия:

$$\frac{O_2 A}{O_2 B} = \frac{\left(\overline{P_V a_3}\right)}{\left(\overline{P_V b}\right)}; \text{ отсюда } \left(\overline{P_V b}\right) = \left(\overline{P_V a_3}\right) \frac{O_2 B}{O_2 A}, \text{ мм.} \quad (7.7)$$

Расстояние  $O_2A$  является переменной величиной и его можно определить как  $O_2A = \overline{\Theta_2A} \cdot K_L$ , м. Здесь  $\overline{\Theta_2A}$  – отрезок на плане положений, в мм;  $K_L$  – масштаб плана положений механизма, м/мм.

Отложим на плане скоростей от полюса  $P_V$  отрезок  $(\overline{P_Vb})$  по линии действия вектора  $(\overline{P_Va_3})$ . Этот отрезок представляет собой вектор  $\overline{V}_B$  в масштабе  $K_V$ :

$$V_B = \overline{V}_B \cdot K_V = (\overline{P_Vb})K_V, \text{ мс}^{-1}. \quad (7.8)$$

### **Определение величины и направления угловых скоростей звеньев механизма**

Угловая скорость звена определяется по формуле

$$\omega_i = \frac{V_i}{R_i}, \text{ с}^{-1}, \quad (7.9)$$

где  $V_i$  – линейная скорость точки,

$R_i$  – радиус кривизны траектории точки.

*Звено 1 – входное звено  $O_1A$  (кривошип)*

Угловая скорость кривошипа определяется по заданной частоте вращения  $n_1$ ,  $\omega_1 = 2\pi n_1$ ,  $\text{с}^{-1}$ . Направление угловой скорости кривошипа  $\omega_1$  задается.

*Звено 2 – ползун*

Величина и направление угловой скорости ползуна равны угловой скорости кулисы

$$\curvearrowright \omega_2 = \curvearrowright \omega_3.$$

*Звено 3-кулиса  $O_2A$*

Величина угловой скорости кулисы определяется по формуле

$$\curvearrowright \omega_3 = \frac{V_{A_3O_2}}{AO_2} = \frac{(\overline{P_Va_3})K_V}{AO_2}, \text{ с}^{-1}, \quad (7.10)$$

где  $(\overline{P_Va_3})$  – длина отрезка на плане скоростей, мм;



$K_V$  – масштаб плана скоростей,  $\text{мс}^{-1}/\text{мм}$ ;

$AO_2$  – переменная длина от  $O_2$  до  $A$ , измеренная на кулисе, м.

Направление угловой скорости  $\omega_3$  определяется следующим образом. Так как звено 3 вращается вокруг неподвижной точки  $O_2$  то для определения направления  $\omega_3$  необходимо перенести с плана скоростей вектор  $\overline{V}_{A_3O_2}$  в точку  $A$  и проследить какому направлению угловой скорости соответствует вектор скорости  $\overline{V}_{A_3O_2}$ . На *рис. 7.1, а* этой скорости соответствует вращение звена  $AO_2$  против часовой стрелки. Следовательно,  $\omega_3$  будет направлена против часовой стрелки.

### Составление векторных уравнений и расчетных зависимостей для построения планов ускорений

**Входное звено  $O_1A$  – (кривошип).**

Полное ускорение точки  $A_1$  равно при ( $\omega_1 = \text{const}$ ):

$$\mathbf{a}_{A_1} = \mathbf{a}_{A_1O_1}^n = \omega_1^2 O_1A \quad (7.11)$$

С учетом масштаба  $K_a$  величина вектора  $\overline{\mathbf{a}}_{A_1}$  равна

$$\overline{\mathbf{a}}_{A_1} = (\overline{P_a a_1}) = \frac{\mathbf{a}_{A_1}}{K_a}, \text{ мм.} \quad (7.12)$$

Вектор ускорения  $\overline{\mathbf{a}}_{A_1}$  направлен по звену  $O_1A$  от точки  $A$  к точке  $O_1$ .

### Присоединенная группа $A_{1,2} - 2 - A_3 - 3 - O_2$

В точке  $A$  вращательной парой соединяются звено 1 и звено 2, поэтому ускорения  $\mathbf{a}_{A_1} = \mathbf{a}_{A_2} = \mathbf{a}_{A_{1,2}}$ . Кулиса 3 соединяется вращательной парой  $O_2$  со стойкой, поэтому  $\mathbf{a}_{O_2} = 0$ . В точке  $A$  ползун 2 поступательной парой присоединяется к кулисе 3, поэтому  $\mathbf{a}_{A_3} \neq \mathbf{a}_{A_2}$ . Подлежит определению ускорение  $\mathbf{a}_{A_3}$ .

Движение кулисы  $BO_2$  рассматриваем как сложное движение, состоящее из переносного вращательного движения вместе с ползуном 2, для которого ускорение точки  $A_2$  известно ( $\overline{\mathbf{a}}_{A_2} = \overline{\mathbf{a}}_{A_1}$ ), и относительного посту-

пательного движения по отношению к полюсу  $A_2$  с ускорением  $\bar{a}_{A_3A_2}$ , для которого неизвестны величина и направление.

Если при движении точки на плоскости имеет место вращательное переносное движение и относительное поступательное, то возникает дополнительное ускорение, которое называется *кориолисовым*.

Тогда, в соответствии с теоремой сложения ускорений при сложном движении для точки  $A_3$  имеем:

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_2} + \bar{a}^k_{A_3A_2} + \bar{a}_{A_3A_2}. \quad (7.13)$$

Движение коромысла  $BO_2$  рассматриваем как сложное движение, состоящее из переносного движения вместе с точкой (полюсом)  $O_2$ , ускорение которой равно нулю ( $\bar{a}_{O_2} = 0$ ), и относительного вращательного движения вокруг полюса  $O_2$  с ускорением  $\bar{a}_{A_3O_2}$ .

Тогда в соответствии с теоремой сложения ускорений при сложном движении для точки  $A_3$  получаем

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}_{A_3O_2}, \quad (7.14)$$

где  $\bar{a}_{A_3O_2}$  – относительное ускорение точки  $A_3$  по отношению к полюсу  $O_2$ .

При построении векторного уравнения (7.14) векторы относительных ускорений  $\bar{a}_{A_3O_2}$  и  $\bar{a}_{A_3A_2}$  не могут быть построены, так как для них неизвестны величина и направление. Разложим относительные ускорения на нормальные и касательные составляющие и объединим в систему уравнения (7.13) и (7.14):

$$\begin{cases} \bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_2} + \bar{a}^k_{A_3A_2} + \bar{a}^n_{A_3A_2} + \bar{a}^\tau_{A_3A_2}, & \bar{a}^\tau_{A_3A_2} \parallel A_3O_2; \\ \bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{O_2} + \bar{a}^n_{A_3O_2} + \bar{a}^\tau_{A_3O_2}, & \bar{a}^\tau_{A_3O_2} \perp A_3O_2. \end{cases} \quad (7.15)$$

Для первого уравнения системы (7.15) величины кориолисова и нормального ускорений определяются по известным зависимостям, а касательное ускорение известно по линии действия.

Величина кориолисова ускорения для плоского движения определяется по формуле

$$\mathbf{a}^k = 2\omega_{\text{пер}} V_{\text{отн}}. \quad (7.16)$$

Для данного случая  $\omega_{\text{пер}} = \omega_2$  и  $V_{\text{отн}} = V_{A_3A_2}$ . Следовательно,

$$\mathbf{a}_{A_3A_2}^k = 2\omega_2 V_{A_3A_2}. \quad (7.17)$$

Чтобы определить размер вектора  $\bar{\mathbf{a}}_{A_3A_2}^k$  в миллиметрах, необходимо разделить его модуль на масштаб  $K_a$ :

$$\bar{\mathbf{a}}_{A_3A_2}^k = \frac{\bar{\mathbf{a}}_{A_3A_2}^k}{K_a} = \frac{2\omega_2 V_{A_3A_2}}{K_a} = \frac{2\omega_2 (\overline{a_3 a_2})_V K_V}{K_a}, \text{ мс}^{-2} \quad (7.18)$$

где  $\omega_2$  – угловая скорость ползуна, которая известна по величине и направлению (в данном случае направлена против часовой стрелки);

$(\overline{a_3 a_2})_V$  – вектор на плане скоростей, мм.

Вектор  $\bar{\mathbf{a}}_{A_3A_2}^k$  будет направлен в ту сторону, в которую будет направлен вектор относительной скорости  $\bar{V}_{A_3A_2} = (\overline{a_3 a_2})_V$  при повороте его на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости переносного движения –  $\omega_2$ .

Вектор нормального ускорения  $\bar{\mathbf{a}}_{A_3A_2}^n = 0$ , так как относительное движение кулисы по ползуну прямолинейное. Линия действия касательного ускорения  $\bar{\mathbf{a}}_{A_3A_2}^\tau$  направлена по касательной к траектории относительного движения,  $\bar{\mathbf{a}}_{A_3A_2}^\tau \parallel AO_2$ .

Для второго уравнения системы (7.15) величина нормального ускорения определяется по зависимости (7.19) или (7.20), а касательное ускорение известно по линии действия:

$$\mathbf{a}_{A_3O_2}^n = \omega_3^2 AO_2, \text{ мс}^{-2} \quad (7.19)$$

$$\mathbf{a}_{A_3O_2}^n = \frac{V_{A_3O_2}^2}{AO_2} = \frac{[(P_V a_3) K_V]^2}{AO_2 K_L}, \text{ мс}^{-2}. \quad (7.20)$$

Чтобы определить размер вектора этого ускорения необходимо разделить его модуль на масштаб  $K_a$ :

$$\bar{a}_{A_3O_2}^n = \frac{a_{A_3O_2}^n}{K_a}, \text{ мм.} \quad (7.21)$$

Ускорение  $\bar{a}_{A_3O_2}^n$  направляется по звену  $AO_2$  от  $A$  к  $O_2$ . Касательное ускорение  $\bar{a}_{A_3O_2}^\tau \perp AO_2$ .

**Построение плана ускорений производится в следующей последовательности:**

1. Выберем полюс плана ускорений  $P_a$  – общее начало векторов абсолютных ускорений точек механизма.

2. Из полюса  $P_a$  строим вектор  $\overline{(P_a a)}$  равный  $\bar{a}_{A_{1,2}} = \frac{a_{A_{1,2}}}{K_a}$ . Конец вектора обозначим буквой  $a_{1,2}$ .

3. Согласно первому уравнению системы (7.15), из конца вектора  $\bar{a}_{A_{1,2}}$  строим вектор  $\bar{a}_{A_3A_2}^k$ , величина которого определяется выражением (7.18), и, учитывая, что  $\bar{a}_{A_3A_2}^n = 0$ , через конец вектора  $\bar{a}_{A_3A_2}^k$  проводим линию действия вектора  $\bar{a}_{A_3A_2}^\tau \parallel AO_2$ .

4. Согласно второму уравнению системы (7.15), из полюса  $P_a$  (первый вектор уравнения  $\bar{a}_{O_2} = 0$ ), строим вектор  $\bar{a}_{A_3O_2}^n$ , который направлен по звену от  $A$  к  $O_2$  ( $\bar{a}_{A_3O_2}^n \parallel AO_2$ ), величина которого определяется выражением (7.21). Через конец этого вектора проводим линию действия касательного ускорения  $\bar{a}_{A_3O_2}^\tau \perp AO_2$ .

5. Точку пересечения касательных  $\bar{a}_{A_3A_2}^\tau$  и  $\bar{a}_{A_3O_2}^\tau$  обозначим  $a_3$ .

6. Проведем из полюса  $P_a$  вектор в точку  $a_3$  – это вектор абсолютного ускорения точки  $A_3$ .

Чтобы получить значение этих ускорений в размерности  $\text{мс}^{-2}$ , необходимо измерить соответствующий вектор в миллиметрах и умножить на масштаб  $K_a$ :

$$\mathbf{a}_{A_3} = \overline{\mathbf{a}}_{A_3} K_a = (\overline{P_a a_3}) K_a, \text{мс}^{-2}; \quad (7.22)$$

$$\mathbf{a}_{A_3 O_2} = \mathbf{a}_{A_3}, \text{мс}^{-2}; \quad (7.23)$$

$$\mathbf{a}_{A_3 A_2} = \mathbf{a}^\tau_{A_3 A_2} = \overline{\mathbf{a}}^\tau_{A_3 A_2} K_a, \text{мс}^{-2}. \quad (7.24)$$

Ускорение точки  $B$ , принадлежащей кулисе  $AO_2$ , определяется по теореме подобия:

$$\frac{O_2 A}{O_2 B} = \frac{(\overline{P_a a_3})}{(\overline{P_a b})}; \text{ отсюда } (\overline{P_a b}) = (\overline{P_a a_3}) \frac{O_2 B}{O_2 A}, \text{мм}. \quad (7.25)$$

Отложим на плане ускорений от полюса  $P_a$  отрезок  $(\overline{P_a b})$  по линии действия вектора  $(\overline{P_a a_3})$ . Этот отрезок представляет собой вектор  $\overline{\mathbf{a}}_B$  в масштабе  $K_a$ :

$$\mathbf{a}_B = \overline{\mathbf{a}}_B K_a = (\overline{P_a b}) K_a, \text{мс}^{-2}. \quad (7.26)$$

### **Определение величины и направления угловых ускорений звеньев механизма**

Определение углового ускорения звена производится по формуле

$$\varepsilon_i = \dot{\omega}_i = \frac{\mathbf{a}_i^\tau}{R_i}, \quad (7.27)$$

где  $\mathbf{a}_i^\tau$  – касательное (тангенциальное) ускорение движущейся точки;

$R_i$  – радиус кривизны траектории точки.

*Звено 1 – кривошип*

Угловое ускорение кривошипа равно нулю,  $\varepsilon_1 = 0$ , так как кривошип вращается с постоянной угловой скоростью.

*Звено 2 – ползун*

Угловое ускорение ползуна равно угловому ускорению кулисы  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ .

*Звено 3 – кулиса*

Величина углового ускорения кулисы определяется по формуле

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{A_3O_2}^\tau}{AO_2} = \frac{\bar{a}_{A_3O_2}^\tau \cdot K_a}{AO_2 K_L}, \text{ с}^{-2}, \quad (7.28)$$

где  $\bar{a}_{A_3O_2}^\tau$  – длина отрезка на плане ускорений, мм;

$K_a$  – масштаб плана ускорений,  $\text{мс}^{-2}/\text{мм}$ ;

$AO_2$  – переменный размер кулисы от  $O_2$  до  $A$ , мм;

$K_L$  – масштаб схемы механизма, м/мм.

Направление углового ускорения  $\varepsilon_3$  определяется следующим образом. Перенесем с плана ускорений вектор  $\bar{a}_{A_3O_2}^\tau$  в точку  $A$  и проследим, какому направлению углового ускорения соответствует вектор ускорения  $\bar{a}_{A_3O_2}^\tau$ . На *рис. 7.1, б* этому касательному ускорению соответствует вращение звена  $AO_2$  против часовой стрелки. Следовательно,  $\varepsilon_3$  будет направлено против часовой стрелки.

### 7.2. Механизм с группой 3-й модификации 2-го вида (*рис. 7.2*)

Рассматривается кинематический анализ механизма, в котором шатун 2 присоединяется вращательной парой  $A$  к кривошипу 1. Ползун 3 присоединяется вращательной парой  $B$  к стойке.

Данный механизм при структурном анализе распадается на следующие группы □л□ра.

**Стойка –  $O_1-1$  → 1-й класс,**

**$A_{вр} - 2 - B_{пост} - 3 - B_{вр}$ , 2-й □л., 3-я мод. 2-й вид (диада **ВПВ**).**

Перепишем запись структурного анализа с учетом нумерации звеньев

**$A_{1,2} - 2 - B_2 - 3 - B_{3,0}$**

Задача кинематического анализа механизма определить для заданного положения механизма следующие параметры:

– скорость  $V_{A_{1,2}}$  и ускорение  $a_{A_{1,2}}$  точки  $A_{1,2}$ ;

– скорость  $V_{B_2}$  и ускорение  $a_{B_2}$  точки  $B_2$ ;

- скорость  $V_C$  и ускорение  $a_C$  точки  $C$ ;
- угловую скорость  $\omega_2$  и угловое ускорение  $\varepsilon_2$  шатуна  $AC$ ;
- угловую скорость  $\omega_3$  и угловое ускорение  $\varepsilon_3$  ползуна.

Следует заметить, что скорость и ускорение точки  $C$  могут быть определены только после определения скорости и ускорения точки  $B_2$

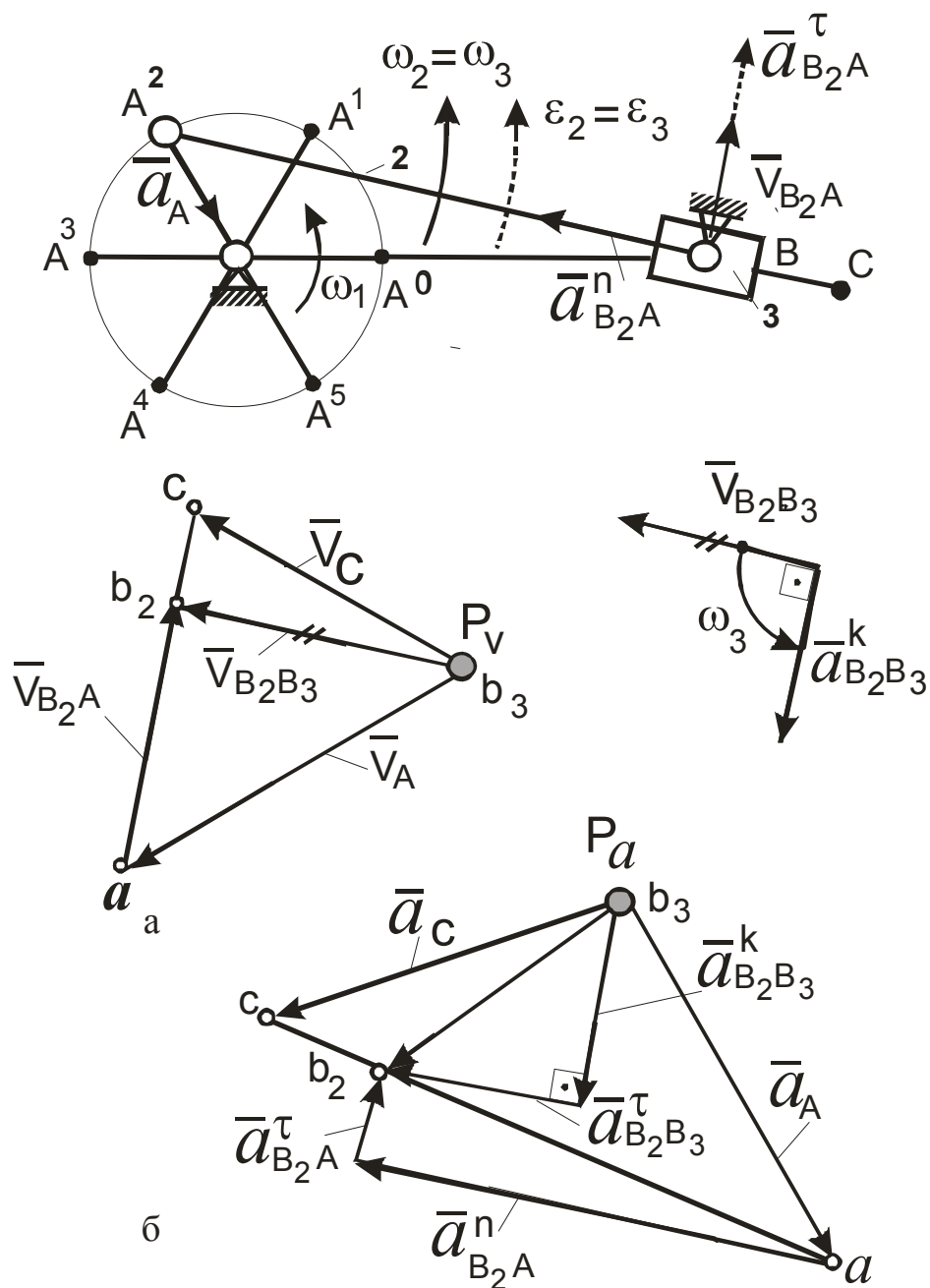


Рис. 7.2. Построение планов скоростей и ускорений для механизма с группой Ассур 3-й модификации 2-го вида

### **Построение плана скоростей механизма (рис. 7.2, а)**

Кинематический анализ механизма начинают с входного звена и далее в порядке присоединения групп Ассура.

**Входное звено  $O_1A$  – (кривошип)**

Точка  $A_1$  принадлежит кривошипу (звено 1), и ее скорость определяется по зависимости

$$\overline{V}_{A_1} = \omega_1 O_1A, \text{ мс}^{-1}. \quad (7.29)$$

Вектор этой скорости направлен в сторону угловой скорости  $\omega_1$  по касательной к траектории, т. е. перпендикулярно к радиусу  $O_1A$ .

С учетом масштаба  $K_V$  величина вектора  $\overline{V}_A$  равна

$$\overline{V}_A = (\overline{P_V a}) = \frac{V_A}{K_V}, \text{ мм}. \quad (7.30)$$

**Присоединенная группа  $A_2 - 2 - B_2 - 3 - B_{3,0}$**

В точке  $A$  вращательной парой соединяются кривошип (звено 1) и шатун (звено 2), поэтому  $\overline{V}_{A_2} = \overline{V}_{A_1} = \overline{V}_A$ . В точке  $B$  вращательной парой соединяются ползун (звено 3) и стойка (звено 0). Скорость точки  $B_0$ , принадлежащей стойке, равна нулю:  $\overline{V}_{B_3} = \overline{V}_{B_0} = 0$ .

В точке  $B$  поступательной парой соединяются шатун (звено 2) и ползун (звено 3), следовательно:  $\overline{V}_{B_2} \neq \overline{V}_{B_3}$ . Скорость точки  $B_2$  подлежит определению.

Движение шатуна рассматриваем как сложное движение, состоящее из переносного поступательного движения вместе с точкой (полюсом)  $A_2$ , скорость которой известна, и относительного вращательного движения вокруг полюса  $A_2$  со скоростью  $\overline{V}_{B_2A}$ .

Тогда в соответствии с теоремой сложения скоростей при сложном движении для точки  $B_2$  имеем:

$$\overline{V}_{B_2} = \overline{V}_A + \overline{V}_{B_2A}, \quad (7.31)$$

где  $\overline{V}_{B_2A}$  – относительная скорость точки  $B_2$  по отношению к полюсу  $A$ .

При построении векторного уравнения (7.31) вектор относительной скорости  $\overline{V}_{B_2A}$  не может быть построен, так как для него известна только



линия действия  $\overline{V}_{B_2A} \perp BA$ , но неизвестны величина и направление ( $\omega_2$  – неизвестна).

Движение шатуна 2 можно представить как переносное вращательное движение вместе с ползуном 3 и относительное поступательное движение по отношению к ползуну со скоростью  $\overline{V}_{B_2B_3}$ :

$$\overline{V}_{B_2} = \overline{V}_{B_3} + \overline{V}_{B_2B_3}, \quad (7.32)$$

где  $\overline{V}_{B_2B_3}$  – относительная скорость точки  $B_2$  по отношению к точке  $B_3$ , принадлежащей ползуну.

При построении векторного уравнения (7.32) вектор относительной скорости  $\overline{V}_{B_2B_3}$  не может быть построен, так как для него известна только линия действия  $\overline{V}_{B_2B_3} \parallel AB$ , но неизвестны величина и направление.

Объединяем уравнения (7.31) и (7.32) в систему

$$\begin{cases} \overline{V}_{B_2} = \overline{V}_A + \overline{V}_{B_2A}, & \overline{V}_{B_2A} \perp BA; \\ \overline{V}_{B_2} = \overline{V}_{B_3} + \overline{V}_{B_2B_3}, & \overline{V}_{B_2B_3} \parallel BA. \end{cases} \quad (7.33)$$

Эту систему будем решать графически. Цель построения – определить скорость точки  $B_2$ .

**Построение плана скоростей производится в следующей последовательности:**

1. Выберем полюс плана скоростей  $P_V$  — общее начало векторов абсолютных скоростей точек механизма.

2. Из полюса  $P_V$  построим вектор скорости точки  $A$  в масштабе  $K_V$ :

$$\left( \overline{P_V a} \right) = \frac{V_A}{K_V}, \text{ мм.} \quad (7.34)$$

Конец вектора обозначим буквой **a**.

3. Согласно первому уравнению системы (7.33), из конца вектора  $\overline{V}_A$ , т. е. через точку **a**, проведем линию действия относительной скорости  $\overline{V}_{B_2A}$  перпендикулярно звену  $AB$ ,  $\overline{V}_{B_2A} \perp BA$ .

4. Согласно второму уравнению системы (7.50), из полюса  $P_V$  (так как  $\overline{V}_{B_3} = 0$ ) проведем линию действия относительной скорости  $\overline{V}_{B_2B_3}$  параллельно звену  $AB$  ( $\overline{V}_{B_2B_3} \parallel AB$ ).

5. Отметим точку пересечения двух линий действия относительных скоростей и обозначим ее  $b_2$ .

6. Проведем из полюса  $P_V$  вектор в точку  $b_2$  – это вектор абсолютной скорости точки  $B_2$ . Проведем вектор из точки  $b_3$ , которая находится в полюсе  $P_V$ , в точку  $b_2$  – это вектор относительной скорости точки  $B_2$  по отношению к точке  $B_3$ .

Чтобы получить модули этих скоростей в размерности  $\text{мс}^{-1}$ , необходимо измерить вектор в мм и умножить на масштаб  $K_V$ :

$$V_{B_2} = (\overline{P_V b_2}) K_V, \text{мс}^{-1}; \quad (7.35)$$

$$V_{B_2B_3} = \overline{V}_{B_2B_3} K_V = (\overline{b_2 b_3})_V K_V, \text{мс}^{-1}. \quad (7.36)$$

Скорость точки  $C$ , принадлежащей кулисе  $AC$ , может быть получена по теореме подобия плана скоростей:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{(\overline{ab_2})_V}{(\overline{ac})_V}; \text{ отсюда } (\overline{ac})_V = (\overline{ab_2})_V \frac{AC}{AB}. \quad (7.37)$$

Отложим на плане скоростей от  $a$  отрезок  $(\overline{ac})_V$ , на отрезке  $(\overline{ab_2})_V$  и обозначим конец отрезка точкой  $c$ . Из полюса  $P_V$  проведем вектор в точку  $c$ . Это вектор – абсолютная скорость точки  $C$  в масштабе  $K_V$ .

Чтобы получить модуль этой скорости в размерности  $\text{мс}^{-1}$ , необходимо измерить вектор  $(\overline{P_V c})$  в миллиметрах и умножить на масштаб  $K_V$ :

$$V_C = \overline{V}_C K_V = (\overline{P_V c}) K_V, \text{мс}^{-1}. \quad (7.38)$$

### **Определение величины и направления угловых скоростей звеньев механизма**

Угловая скорость звена определяется по формуле

$$\omega_i = \frac{V_i}{R_i}, \text{с}^{-1},$$

где  $V_i$  – линейная скорость точки,

$R_i$  – радиус кривизны траектории точки.

*Звено 1 – входное звено  $O_1A$  (кривошип).*

Угловая скорость кривошипа определяется по следующей зависимости

$$\omega_1 = 2\pi n_1, \text{ с}^{-1},$$

где  $n_1$  – угловая скорость кривошипа,  $\text{с}^{-1}$ .

Направление угловой скорости кривошипа  $\omega_1$  задается.

*Звено 2 – шатун  $AB$ .*

Величина угловой скорости звена  $AB$  определяется по формуле

$$\omega_2 = \frac{V_{B2A}}{BA} = \frac{(\overline{b2a})_V \cdot K_V}{BA}, \text{ с}^{-1}, \quad (7.39)$$

где  $(\overline{b2a})_V$  – длина отрезка на плане скоростей, мм;

$K_V$  – масштаб плана скоростей,  $\text{мс}^{-1}/\text{мм}$ ;

$BA$  – длина шатуна, измеренная на плане положений от точки  $A$  до точки  $B$ , м.

Для определения направления угловой скорости  $\omega_2$  остановим на механизме точку  $A$ , перенесем с плана скоростей вектор  $\overline{V}_{B2A}$  в точку  $B$  и проследим какому направлению угловой скорости  $\omega_2$  соответствует вектор скорости  $\overline{V}_{B2A}$ . Этой скорости на *рис. 7.2, а* соответствует вращение звена  $BA$  против часовой стрелки. Следовательно,  $\omega_2$  будет направлена против часовой стрелки.

*Звено 3-ползун.*

Угловая скорость ползуна по величине и направлению равна угловой скорости звена 2,  $\omega_3 = \omega_2$ .

### **Составление векторных уравнений и расчетных зависимостей для построения планов ускорений**

Построение планов ускорений производится так же, как и план скоростей в порядке наложения групп Ассура.

**Входное звено  $O_1A$  – (кривошип)**

Полное ускорение точки  $A$  при  $\omega_1 = const$  определяется по зависимости

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{AO_1}^n = \omega^2 O_1A.$$

Вектор ускорения  $\bar{\mathbf{a}}_A$  направлен параллельно звену  $O_1A$  от точки  $A$  к точке  $O_1$ . С учетом масштаба  $K_a$  величина вектора  $\bar{\mathbf{a}}_A$  равна

$$\bar{\mathbf{a}}_A = (\overline{P_a a}) = \frac{\mathbf{a}_A}{K_a}, \text{ мм.}$$

**Присоединенная группа  $A_{1,2} - 2 - B_2 - 3 - B_{3,0}$**

В точке  $A$  шарнирно соединяются звено 1 и звено 2, поэтому ускорения  $\mathbf{a}_{A1} = \mathbf{a}_{A2} = \mathbf{a}_A$ . Ползун 3 соединяется вращательной парой  $B$  со стойкой, поэтому  $\mathbf{a}_{B3} = \mathbf{a}_{B0} = 0$ . В точке  $B$  шатун 2 поступательной парой присоединяется к ползуну 3, поэтому  $\mathbf{a}_{B2} \neq \mathbf{a}_{B3}$ . Подлежит определению  $\mathbf{a}_{B2}$ .

Движение кулисы  $BA$  рассматриваем как сложное движение, состоящее из переносного движения вместе с точкой (полюсом)  $A$ , ускорение которой известно, и относительного вращательного движения вокруг полюса  $A$ .

Тогда в соответствии с теоремой сложения ускорений при сложном движении для точки  $B_2$  получаем

$$\bar{\mathbf{a}}_{B_2} = \bar{\mathbf{a}}_A + \bar{\mathbf{a}}_{B_2A}, \quad (7.40)$$

где  $\bar{\mathbf{a}}_{B_2A}$  – относительное ускорение точки  $B_2$  вокруг полюса  $A$ .

При построении векторного уравнения (7.40) вектор относительного ускорения  $\bar{\mathbf{a}}_{B_2A}$  не может быть построен, так как его величина и направление неизвестны.

Движение шатуна  $BA$  рассматриваем как сложное движение, состоящее из переносного вращательного движения вместе с ползуном 3, для которого ускорение точки  $B_3$  известно ( $\mathbf{a}_{B_3} = \mathbf{a}_{B_0} = 0$ ) и относительного ускорения  $\bar{\mathbf{a}}_{B_2B_3}$  при поступательном движении шатуна по отношению к ползуну 3, для которого неизвестны величина и направление.

Если при движении точки на плоскости имеет место вращательное переносное движение и относительное поступательное, то возникает дополнительное ускорение, которое называется *кориолисовым*.

В соответствии с теоремой сложения ускорений при сложном движении для точки  $B_2$  имеем

$$\bar{\mathbf{a}}_{B_2} = \bar{\mathbf{a}}_{B_3} + \bar{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^k + \bar{\mathbf{a}}_{B_2B_3}. \quad (7.41)$$

Разложим относительные ускорения  $\bar{\mathbf{a}}_{B_2A}$  и  $\bar{\mathbf{a}}_{B_2B_3}$  на нормальные и касательные составляющие и объединим в систему уравнения (7.40) и (7.41):

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{a}}_{B_2} = \bar{\mathbf{a}}_A + \bar{\mathbf{a}}_{B_2A}^n + \bar{\mathbf{a}}_{B_2A}^\tau, & \bar{\mathbf{a}}_{B_2A}^\tau \perp AB; \\ \bar{\mathbf{a}}_{B_2} = \bar{\mathbf{a}}_{B_3} + \bar{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^k + \bar{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^n + \bar{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^\tau, & \bar{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^\tau \parallel AB. \end{cases} \quad (7.42)$$

Величины нормальных ускорений и кориолисово ускорение определяются по известным зависимостям, а касательные ускорения известны по линии действия:

$$\mathbf{a}_{B_2A}^n = \omega_2^2 BA \text{ или } \mathbf{a}_{B_2A}^n = \frac{V_{B_2A}^2}{BA} = \frac{[(\overline{b_2a})K_V]^2}{\overline{BA} \cdot K_L}, \text{ мс}^{-2}. \quad (7.43)$$

Чтобы определить размер вектора этого ускорения необходимо модуль ускорения  $\mathbf{a}_{B_2A}^n$  разделить на масштаб  $K_a$ :

$$\bar{\mathbf{a}}_{B_2A}^n = \frac{\mathbf{a}_{B_2A}^n}{K_a}, \text{ мм.} \quad (7.44)$$

Ускорение  $\bar{\mathbf{a}}_{B_2A}^n$  направляется по звену  $BA$  от  $B$  к  $A$ . Касательное ускорение  $\bar{\mathbf{a}}_{B_2A}^\tau \perp BA$ .

Вектор нормального ускорения  $\bar{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^n = 0$ , так как относительное движение шатуна и ползуна – прямолинейное. Линия действия касательного

ускорения  $\overline{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^\tau$  направлена по касательной к траектории относительного движения ( $\overline{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^\tau \parallel AB$ ).

Величина кориолисова ускорения для плоского движения определяется по формуле (7.16):

$$\mathbf{a}^k = 2\omega_{\text{пер}} V_{\text{отн}}.$$

Для данного случая  $\omega_{\text{пер}} = \omega_3$  и  $V_{\text{отн}} = V_{B_2B_3}$ .

Следовательно,  $\mathbf{a}_{B_2B_3}^k = 2\omega_3 V_{B_2B_3}$ ,  $\text{мс}^{-2}$ .

Чтобы определить размер вектора  $\overline{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^k$  в миллиметрах, необходимо его модуль разделить на масштаб  $K_a$ :

$$\overline{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^k = \frac{\mathbf{a}_{B_2B_3}^k}{K_a} = \frac{2\omega_3 (\overline{b_2 b_3})_V K_V}{K_a}, \text{мм} \quad (7.45)$$

где  $\omega_3$  — известна по величине и направлению (в данном случае, направлена против часовой стрелки);

$(\overline{b_2 b_3})_V$  — вектор на плане скоростей, мм.

Вектор  $\overline{\mathbf{a}}_{B_2B_3}^k$  будет направлен в ту сторону, в которую будет направлен вектор относительной скорости  $\overline{V}_{B_2B_3} = (\overline{b_2 b_3})_V$  при повороте его на  $90^\circ$  по направлению угловой скорости переносного движения  $\omega_3$ .

**Построение плана ускорений производится в следующей последовательности:**

1. Выберем полюс плана ускорений  $P_a$  — общее начало векторов абсолютных ускорений точек механизма.

2. Из полюса  $P_a$  построим вектор ускорения точки  $A$  в масштабе  $K_a$ ,

$$(\overline{P_a a}) = \frac{\mathbf{a}_A}{K_a}, \text{мм. Конец вектора обозначим } \mathbf{a}$$

3. Из точки  $\mathbf{a}$  строим вектор  $\overline{\mathbf{a}}_{B_2A}^n$ , величина которого определяется

выражением (7.44) и, который направлен по звену 2 от  $B$  к  $A$ :  $\bar{a}_{B_2A}^n \parallel BA$ . Через конец этого вектора проводим линию действия касательного ускорения  $\bar{a}_{B_2A}^\tau \perp BA$ .

4. Согласно второму уравнению системы (7.42), из полюса  $P_a$  (первый вектор уравнения  $\bar{a}_{B_3} = 0$ ), строим вектор кориолисова ускорения  $\bar{a}_{B_2B_3}^k$ , известный по величине (7.45) и направлению, и через его конец проводим линию действия касательного ускорения  $\bar{a}_{B_2B_3}^\tau \parallel AB$ .

5. Отметим точку пересечения двух линий действия касательных ускорений  $\bar{a}_{B_2A}^\tau$  и  $\bar{a}_{B_2B_3}^\tau$  и обозначим ее  $b_2$ ;

6. Проведем из полюса  $P_a$  вектор в точку  $b_2$  – это вектор абсолютного ускорения  $\bar{a}_{B_2}$  точки  $B_2$ .

Вектор относительного ускорения  $\bar{a}_{B_2A} = \bar{a}_{B_2A}^n + \bar{a}_{B_2A}^\tau$ . Вектор относительного ускорения  $\bar{a}_{B_2B_3} = \bar{a}_{B_2B_3}^\tau$ .

Чтобы получить модули этих ускорений в размерности  $\text{мс}^{-2}$  необходимо измерить соответствующие векторы в миллиметрах и умножить на масштаб  $K_a$ :

$$\mathbf{a}_{B_2} = \bar{\mathbf{a}}_{B_2} K_a = (P_a b_2) \cdot K_a, \text{мс}^{-2}; \quad (7.46)$$

$$\mathbf{a}_{B_2A} = \bar{\mathbf{a}}_{B_2A} \cdot K_a, \text{мс}^{-2}; \quad (7.47)$$

$$\mathbf{a}_{B_2B_3} = \bar{\mathbf{a}}_{B_2B_3} \cdot K_a, \text{мс}^{-2}. \quad (7.48)$$

Ускорение точки  $C$ , принадлежащей звену  $AC$ , определяется с применением теоремы подобия:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{(\overline{ab_2})_a}{(\overline{ac})_a}; \text{ отсюда } (\overline{ac})_a = (\overline{ab_2})_a \frac{AC}{AB}. \quad (7.49)$$

Отложим на плане ускорений от точки  $a$  отрезок  $(\overline{ac})_a$  по линии действия вектора  $(\overline{ab_2})_a$  и соединим полученную точку  $c$  с полюсом  $P_a$ . Этот отрезок представляет собой вектор  $\bar{\mathbf{a}}_{C}$  в масштабе  $K_a$ .

$$\bar{\mathbf{a}}_{C} = \bar{\mathbf{a}}_{C} \cdot K_a = (\overline{P_a c}) K_a, \text{мс}^{-2}. \quad (7.50)$$

## Определение величины и направления угловых ускорений

### звеньев механизма

Определение углового ускорения звена производится по формуле

$$\varepsilon_i = \dot{\omega}_i = \frac{a_i^\tau}{R_i},$$

где  $a_i^\tau$  – касательное (тангенциальное) ускорение движущейся точки;

$R_i$  – радиус кривизны траектории точки в её относительном движении.

*Звено 1 – (кривошип)*

Угловое ускорение кривошипа равно нулю, так как  $\omega_1 = const$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ .

*Звено 2 – шатун*

Величина углового ускорения кулисы  $\varepsilon_2$  определяется по формуле

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{B_2A}^\tau}{BA} = \frac{\bar{a}_{B_2A}^\tau \cdot K_a}{\overline{BA} \cdot K_L}, \text{ с}^{-2}, \quad (7.51)$$

где  $\bar{a}_{B_2A}^\tau$  – длина вектора на плане ускорений, мм;

$K_a$  – масштаб плана ускорений,  $\text{мс}^{-2}/\text{мм}$ ;

$\overline{BA}$  – переменный размер кулисы от  $B$  до  $A$ , мм;

$K_L$  – масштаб схемы механизма, м/мм.

Направление углового ускорения  $\varepsilon_2$  определяется следующим образом. Остановим на механизме точку  $A$ , перенесем с плана ускорений вектор  $\bar{a}_{B_2A}^\tau$  в точку  $B$  и проследим, какому направлению углового ускорения

шатунa соответствует вектор ускорения  $\bar{a}_{B_2A}^\tau$ . На рис. 7.2 этому касательному ускорению соответствует вращение звена  $BA$  против часовой стрелки. Следовательно, угловое ускорение  $\varepsilon_2$  будет направлено против часовой стрелки.

*Звено 3 – ползун*

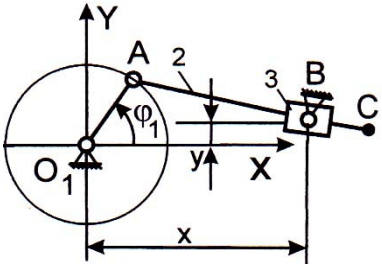
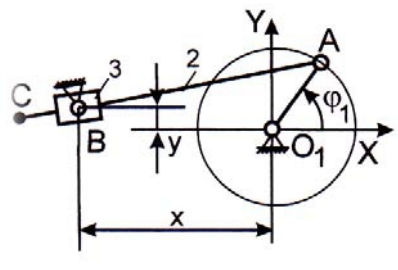
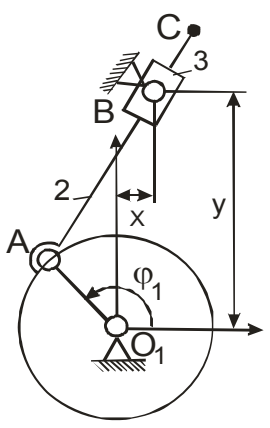
Угловое ускорение ползуна по величине и направлению равно угловому ускорению звена 2,  $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$ .

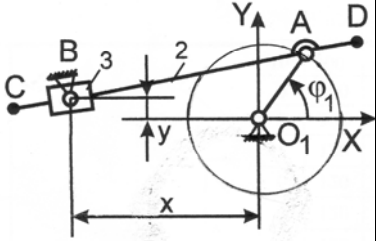


Приложение

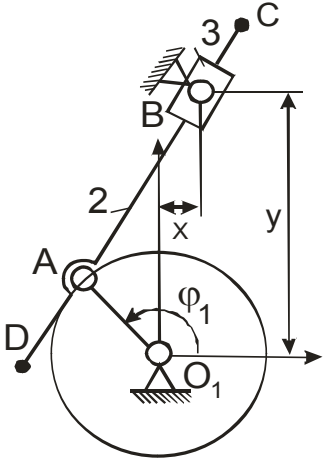
Таблица 7.1. Варианты заданий для контрольной работы № 2

№ схемы	Вариант	Параметры механизма						
		$\varphi_1$ гр	$\omega$ с <sup>-1</sup>	$O_1A$ м	$O_2B$ м	x м	y м	
1		1	60	40	0,04	0,24	0,005	-0,10
		2	60	40	0,04	0,24	-0,005	-0,11
		3	60	40	0,04	0,25	0,006	-0,12
		4	120	40	0,05	0,25	-0,006	-0,14
		5	120	50	0,05	0,24	0,007	-0,12
		6	120	50	0,05	0,25	-0,007	-0,13
		7	120	50	0,06	0,25	0,008	-0,15
		8	180	60	0,06	0,26	0,008	-0,12
		9	180	60	0,06	0,26	0,009	-0,13
		10	180	60	0,06	0,26	0,009	-0,14
2			$\varphi_1$ гр	$\omega$ с <sup>-1</sup>	$O_1A$ м	$O_2B$ м	x м	y м
		1	60	40	0,04	0,25	-0,005	0,10
		2	60	40	0,04	0,25	-0,005	0,11
		3	60	40	0,04	0,25	-0,006	0,12
		4	120	40	0,05	0,35	-0,006	0,14
		5	120	50	0,05	0,25	0,007	0,12
		6	120	50	0,05	0,25	0,007	0,13
		7	120	50	0,06	0,25	0,008	0,15
		8	300	60	0,06	0,25	-0,008	0,12
		9	300	60	0,06	0,24	-0,009	0,13
10	300	60	0,06	0,24	-0,009	0,14		
3			$\varphi_1$ гр	$\omega$ с <sup>-1</sup>	$O_1A$ м	AC м	x м	y м
		1	60	40	0,04	0,24	-0,005	-0,10
		2	60	40	0,04	0,24	-0,005	-0,11
		3	60	40	0,04	0,25	-0,006	-0,12
		4	120	40	0,05	0,25	0,006	-0,14
		5	120	50	0,05	0,24	0,007	-0,12
		6	120	50	0,05	0,25	0,007	-0,13
		7	120	50	0,06	0,25	0,008	-0,15
		8	180	60	0,06	0,26	0,008	-0,12
		9	180	60	0,06	0,26	0,009	-0,13
10	180	60	0,06	0,26	0,009	-0,14		

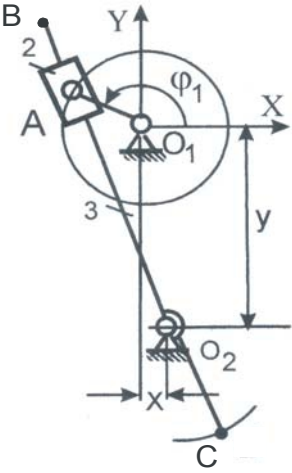
Вариант	Параметры механизма						
	$\varphi_1$ град	$\omega$ $c^{-1}$	$O_1A$ м	$AC$ м	$x$ м	$y$ м	
4							
	1	60	40	0,04	0,22	0,14	0,005
	2	60	40	0,04	0,22	0,14	-0,005
	3	60	40	0,04	0,24	0,15	0,006
	4	120	40	0,05	0,24	0,15	-0,006
	5	120	50	0,05	0,26	0,16	-0,007
	6	120	50	0,05	0,25	0,16	-0,007
	7	120	50	0,06	0,27	0,17	-0,008
	8	240	60	0,06	0,27	0,17	0,008
	9	240	60	0,06	0,28	0,18	0,009
10	240	60	0,06	0,28	0,18	0,009	
5							
	1	60	40	0,04	0,22	-0,14	0,005
	2	60	40	0,04	0,22	-0,14	-0,005
	3	60	40	0,04	0,24	-0,15	0,006
	4	120	40	0,05	0,24	-0,15	-0,006
	5	120	50	0,05	0,26	-0,16	-0,007
	6	120	50	0,05	0,25	-0,16	-0,007
	7	120	50	0,06	0,27	-0,17	-0,008
	8	300	60	0,06	0,27	-0,17	0,008
	9	300	60	0,06	0,28	-0,18	0,009
10	300	60	0,06	0,28	-0,18	-0,009	
6							
	1	0	40	0,04	0,24	-0,005	0,14
	2	0	40	0,04	0,24	-0,005	0,14
	3	0	40	0,04	0,25	-0,006	0,15
	4	180	40	0,05	0,25	0,006	0,15
	5	180	50	0,05	0,26	0,007	0,16
	6	180	50	0,05	0,26	0,007	0,16
	7	240	50	0,06	0,27	0,008	0,17
	8	240	60	0,06	0,27	0,008	0,17
	9	300	60	0,06	0,28	-0,009	0,18
10	300	60	0,06	0,28	-0,009	0,18	

7		Параметры механизма						
		Вариант	$\varphi_1$ , град	$\omega$ , $c^{-1}$	$O_1A$ , м	$AD$ , м	$AC$ , м	x, м
1	60	40	0,04	0,02	0,22	-0,16	,008	
2	60	40	0,04	0,02	0,22	-0,16	-0,01	
3	60	40	0,04	0,02	0,24	-0,17	,008	
4	120	40	0,05	0,02	0,24	-0,17	-0,01	
5	120	50	0,05	0,02	0,25	-0,18	-0,01	
6	120	50	0,05	0,03	0,25	-0,18	-0,01	
7	120	50	0,06	0,03	0,26	-0,19	-0,01	
8	300	60	0,06	0,04	0,26	-0,17	0,01	
9	300	60	0,06	0,06	0,26	-0,18	,008	
10	300	60	0,06	0,06	0,26	-0,18	0,01	

8		$\varphi_1$ , град	$\omega$ , $c^{-1}$	$O_1A$ , м	$AC$ , м	$AD$ , м	x, м	y, м
		1	0	40	0,04	0,24	0,02	-0,005
2	0	40	0,04	0,24	0,02	-0,005	0,12	
3	0	40	0,04	0,25	0,02	-0,006	0,14	
4	180	40	0,05	0,25	0,03	0,006	0,14	
5	180	50	0,05	0,26	0,03	0,007	0,16	
6	180	50	0,05	0,26	0,03	0,007	0,16	
7	240	50	0,06	0,27	0,04	0,008	0,17	
8	240	60	0,06	0,27	0,04	0,008	0,17	
9	300	60	0,06	0,28	0,04	0,009	0,18	
10	300	60	0,06	0,28	0,04	-0,009	0,18	

9		$\varphi_1$ , град	$\omega$ , $c^{-1}$	$O_1A$ , м	$O_2B$ , м	$O_2C$ , м	x, м	y, м
		1	60	40	0,04	0,25	0,02	-0,005
2	60	40	0,04	0,25	0,03	-0,005	-0,11	
3	60	40	0,04	0,25	0,04	-0,006	-0,12	
4	120	40	0,05	0,25	0,02	0,006	-0,14	
5	120	50	0,05	0,25	0,03	0,007	-0,12	
6	120	50	0,05	0,25	0,04	0,007	-0,13	
7	120	50	0,06	0,25	0,02	0,008	-0,15	
8	300	60	0,06	0,25	0,03	-0,008	-0,12	
9	300	60	0,06	0,25	0,04	-0,009	-0,13	
10	300	60	0,06	0,25	0,03	-0,009	-0,14	

10		$\varphi_1$	$\omega$	$O_1A$	$AC$	$O_1D$	$x$	$y$
		град	$\text{с}^{-1}$	м	м	м	м	м
1	0	40	0,04	0,25	0,02	0,005	-0,12	
2	0	40	0,04	0,25	0,03	-0,005	-0,12	
3	0	40	0,04	0,26	0,04	0,006	-0,14	
4	180	40	0,05	0,26	0,02	-0,006	-0,14	
5	180	50	0,05	0,27	0,03	0,007	-0,16	
6	240	50	0,05	0,27	0,04	-0,007	-0,15	
7	240	50	0,06	0,28	0,02	0,008	-0,17	
8	300	60	0,06	0,28	0,03	-0,008	-0,17	
9	300	60	0,06	0,28	0,04	0,009	-0,18	
10	300	60	0,06	0,28	0,03	-0,009	-0,18	

### Библиографический список

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для студентов высших технических учебных заведений. - Изд. 20-е, стер. - Москва: Высшая школа, 2010. - 415 с.

2. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям. - 15-е изд., стер. - Москва : КноРус, 2010 . - 603 с.

3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Учебное пособие для студентов математических, физических и технических специальностей. - Изд. 10-е, стер. - Санкт-Петербург. Ч. 1: Кинематика, статика, динамика материальной точки. Лань, 2009. - 467 с.

4. Полякова Е.В., Дятлова П.А., Чайкин В.А., Усов А.Г. Теоретическая механика. Расчетно-графические работы. Учебно-методическое пособие. СПб: Изд. СПГУТД, 2007. - 82 с.

5. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. - М.:Альянс, 2011. - 640 с.

6. Фролов К. В., С. А. Попов, А. К. Мусатов и др. Теория механизмов и машин. - М.: Высшая школа, 2005. - 496 с.: ил.

7. Попов С.А., Тимофеев Г.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин. - М.: Высшая школа, 2008. - 456 с.

8. Теория механизмов и машин: /учебное пособие для вузов / М. З. Коловский, А. Н. Евграфов, Ю. А. Семенов, А. В. Соловуц. - Изд. Центр «Академия», 2008. - 560 с.

9. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов: метод. указания к курсовому проекту и самостоятельной работе / Орестова А. В., Грибкова Т. С. - СПб.: СПГУТД, 2007 г.