Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

Кафедра информатики и компьютерных технологий

ПРОГРАММНЫЕ ПРОДУКТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания к самостоятельной работе
для студентов бакалавриата направления 131000

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2014

УДК 681.142.2 (073)

ПРОГРАММНЫЕ ПРОДУКТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: Методические указания к самостоятельной работе / Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». Сост. *О.Г. Быкова*. СПб, 2014. 51 с.

Методические указания предназначены для оказания помощи студенту при решении задач курса. Изложены теоретические сведения, на примерах рассмотрены решения задач. Приведены варианты заданий.

Методические указания предназначены для студентов бакалавриата направления подготовки 131000 «Нефтегазовое дело».

Научный редактор доц. *А.Б. Маховиков*

ВВЕДЕНИЕ

Учебная дисциплина «Программные продукты в математическом моделировании» опирается на знания, полученные при изучении курсов математики и информатики, которые преподавались на первых двух семестрах. В курсе математики рассматривались отдельные разделы математики и решались типичные задачи. В курсе информатики выполнялись различные вычисления с использованием пакетов Microsoft Excel и MathCAD. В данном курсе, опираясь на знания математики, будут ставиться задачи, которые, как правило, не имеют точного решения (такие задачи чаще всего встречаются в инженерной практике). На практике в большинстве случаев найти точное решение математической задачи не удается. Это происходит главным образом не потому, что мы не умеем этого делать, а потому что искомое решение не выражается в привычных элементарных или других известным функциях. Для их решения подключают методы приближенных вычислений, точность которых достаточна для решения практических задач. Разработка и исследование вычислительных алгоритмов и их применение к решению конкретных задач составляет содержание раздела современной математики – вычислительная математика. Вычислительную математику определяют в широком смысле как раздел информатики, включающий круг вопросов, связанных с применением компьютеров, и в узком смысле как теорию численных методов и алгоритмов решения поставленных задач. Общим для всех численных методов является сведение математической задачи к конечномерной. Это чаще всего достигается дискретизацией исходной задачи, т.е. переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента. После дискретизации исходной задачи надо построить вычислительный алгоритм, т.е. указать последовательность арифметических и логических действий для выполнения на компьютере, которые дают за конечное число действий решение дискретной задачи. Полученное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

Решение, полученное на компьютере, является всегда приближенным. Существуют четыре основные причины возникновения погрешности при численном решении исходной математической задачи.

1. несоответствие математической задачи (математической модели) изучаемому реальному явлению;
2. входные данные исходной задачи (начальные и граничные условия, коэффициенты и правые части уравнений) всегда задаются с некоторой погрешностью. Погрешность численного метода, обусловленная неточным заданием входных данных, принято называть неустранимой погрешностью;
3. при замене исходной задачи дискретной задачей возникает погрешность, называемая погрешностью дискретизации (погрешностью метода);
4. конечная разрядность чисел, представляемых в компьютере, приводит к погрешностям округления, которые могут нарастать в процессе вычислений.

Погрешность в решении, обусловленная двумя первыми источниками, называется неустранимой. Она может присутствовать в решении даже при точно решенной задаче. Вопрос о том, насколько хорошо описывает математическая модель исследуемое явление, проверяется сравнением результатов экспериментов и типичных частных решений при некоторых значениях входных параметров. Если исходных данных много, а их погрешности носят случайный характер, применяют статистические методы. Численные методы в большинстве случаев сами по себе являются приближенными, т.е. даже при отсутствии погрешностей во входных данных и при идеальном выполнении арифметических действий, они дают решение исходной задачи с некоторой погрешностью, называемой погрешностью метода. Это происходит потому, что численным методом обычно решается некоторая другая, более простая задача, аппроксимирующая (приближающая) исходную задачу. В ряде случаев используемый численный метод строится на базе бесконечного процесса, который в пределе приводит к искомому решению. Однако реально предельный переход не удается осуществить, процесс прерывается на некотором шаге и дает приближенное решение. Исследованию погрешности численных методов уделяется значительное внимание. Численный метод обычно зависит от одного или нескольких параметров, которыми можно распоряжаться. В качестве такого параметра служит, например, число итераций при решении уравнений, шаг, с которым вычисляются подынтегральные функции при вычислении определенного интеграла. Погрешность метода или ее оценка обычно зависят от соответствующего параметра. К численному методу, кроме требования достижения заданной точности, предъявляется ряд других требований. Предпочтение отдается методу, который требует меньше памяти компьютера, является логически более простым.

Численные методы дают приближенное решение задачи. Это значит, что вместо точного решения некоторой задачи находится решение другой задачи, близкое к искомому. Основная идея всех методов – дискретизация или аппроксимация (замена, приближение) исходной задачи другой задачей, более удобной для решения на компьютере, причем решение аппроксимирующей задачи зависит от некоторых параметров, управляя которыми можно определить решение с требуемой точностью. Под численными методами подразумеваются методы решения задач, сводящиеся к арифметическим и некоторым логическим действиям над числами, т.е. тем действиям, которые выполняет компьютер. Реализация этих методов будет производиться в тех пакетах, которые изучены в рамках курса информатики.

В курсе будут рассмотрены темы:

- ✓ Приближенное вычисление определенных интегралов;
- ✓ Интерполяция и экстраполяция;
- ✓ Решение нелинейных уравнений;
- ✓ Решение систем линейных алгебраических уравнений;
- ✓ Решение систем нелинейных уравнений;
- ✓ Решение обыкновенных дифференциальных уравнений 1 порядка;
- ✓ Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений 1 порядка;
- ✓ Решение обыкновенных дифференциальных уравнений 2 порядка. Задача Коши;
- ✓ Решение обыкновенных дифференциальных уравнений 2 порядка. Краевая задача;

✓ Решение дифференциальных уравнений в частных производных на примере уравнения Лапласа.

Эти темы различны по сложности и количеству методов, реализующих их решение. Естественно, будут рассмотрены не все существующие методы, а наиболее часто употребляющиеся для данных классов задач. Будут отмечены разные возможности для реализации данных методов в каждом из пакетов, в которых они будут выполняться.

Принципы, общие для всех численных методов:

1. исходная задача заменяется другой задачей – вычислительным алгоритмом;
2. задача содержит параметр N, которого нет в исходной задаче;
3. выбором этого параметра можно добиться, в принципе, любой близости решения второй задачи к решению первой;
4. неточная реализация алгоритма, вызванная округлениями, не меняет существенно его свойств.

При изучении курса можно, а вернее и нужно пользоваться литературой: в первую очередь методическими указаниями для выполнения задач [4, 5]. Затруднительно указать единый литературный источник, так как эти темы встречаются в разных источниках, часть из которых опубликованы в 1970 – 90-х годах XX века, часть ориентированы на ручной счет или на реализацию в программном виде.

Реализация методов в пакетах Microsoft Excel, MathCAD, выполненная в задачах курса, не имеет в полном объеме в настоящее время литературных аналогов. Тем не менее, при подготовке курса использовались следующие источники х [1 -3, 6 – 21].

Конечно, не исключен поиск в интернете, который также может предоставить всю необходимую информацию.

ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ И АППРОКСИМАЦИИ

Большинство численных методов основано на замене более сложных объектов, уравнений и т.д. более простыми. Одно из центральных понятий в математике – функция. В математике функция задается одним из трех возможных вариантов:

✓ Аналитической зависимостью ($u(x,y)=g(x,y)$), где $g(x,y)$ – известная функция;

✓ Таблицей значений функции $u(x,y)$ в отдельных точках, т.е. $u(x_1,y_1)$, $u(x_1,y_2)$, ... $u(x_n,y_m)$;

✓ Графически.

Наиболее удобной в обращении функцией на практике является алгебраический многочлен. Для его задания, требуется конечное число его коэффициентов. Значения многочлена просто вычисляются, легко дифференцируются, интегрируются.

Одной из основных задач численного анализа является задача об интерполяции функций: требуется восстановить функцию $f(x)$ для всех значений x на отрезке $a \le x \le b$, если известны ее значения в некотором конечном числе точек этого отрезка. Эти значения могут быть найдены в результате наблюдений (измерений) в эксперименте или в результате вычислений. Кроме того, может оказаться, что функция $f(x)$ задается формулой и вычисления ее значений по этой формуле очень трудоемки, поэтому желательно иметь для функции более простую (менее трудоемкую для вычислений) формулу, которая позволяла бы находить приближенное значение рассматриваемой функции с требуемой точностью в любой точке отрезка. Интерполяцией называется представление некоторой функции $y=f(x)$, заданной в виде таблицы, функцией $y=\varphi(x)$, которая идентична исходной в некоторой области изменения аргумента. Интерполяция необходима при создании модели объекта. Интерполяция применяется также при планировании эксперимента, при статистической обработке результатов эксперимента. Интерполяционный многочлен записывают в формах Лагранжа, Ньютона, Стирлинга, Бесселя, Лапласа-Эверетта. Методы интерполяции обычно являются вариациями одного-двух основных методов с незначительными преимуществами в разных задачах.

Основные этапы интерполяции:

- Выбор вида функции интерполяции;
- Определение коэффициентов функции интерполяции;
- Определение адекватности функции интерполяции.

Существует два основных метода интерполяции: точная в узлах и приближенная в узлах. Интерполяцией, точной в узлах, называется такая интерполяция, результатом которой является функция $y=\varphi(x)$, совпадающая в узлах с функцией $y=f(x)$ (рис. 1.1).

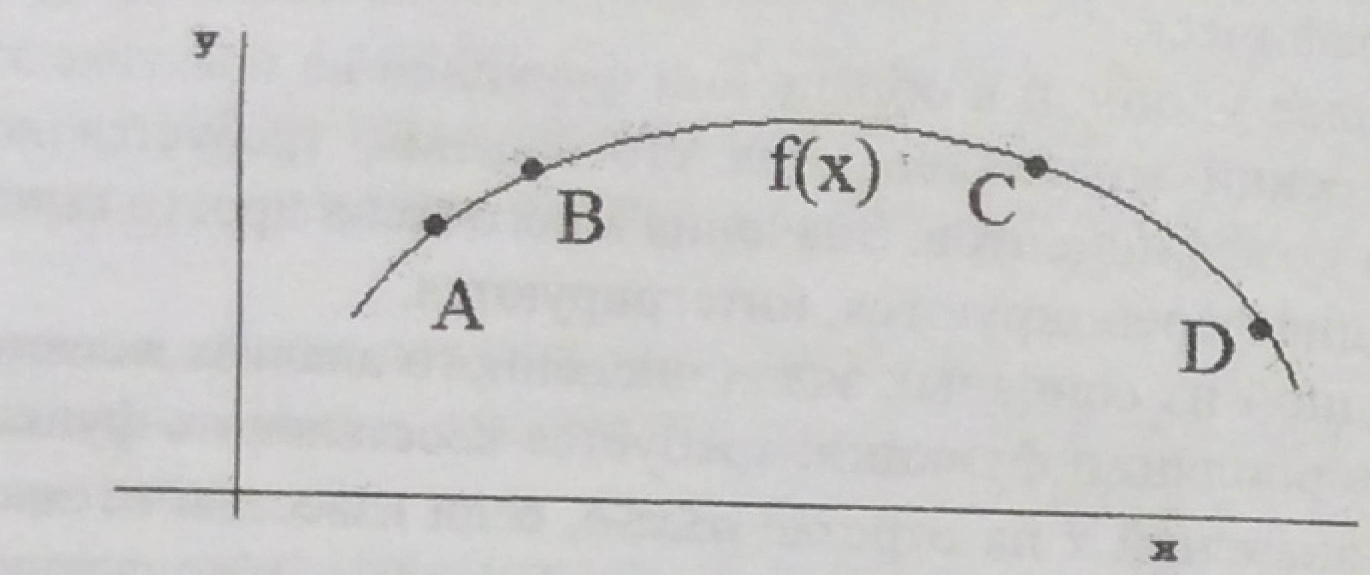


Рис. 1.1. Интерполяция, точная в узлах (интерполяция)

Такая интерполяция применяется главным образом в тех случаях, когда требуется определять значения в узком диапазоне изменения аргумента. Интерполяцией, приближенной в узлах, называется такая интерполяция, когда при которой значения функции $y=F(x)$ не совпадают в узлах интерполяции со значениями исходной функции $y=f(x)$. Такая интерполяция применяется для сглаживания неточностей исходных данных. В математике она называется аппроксимацией. Ее геометрический смысл показан на рис. 1.2.

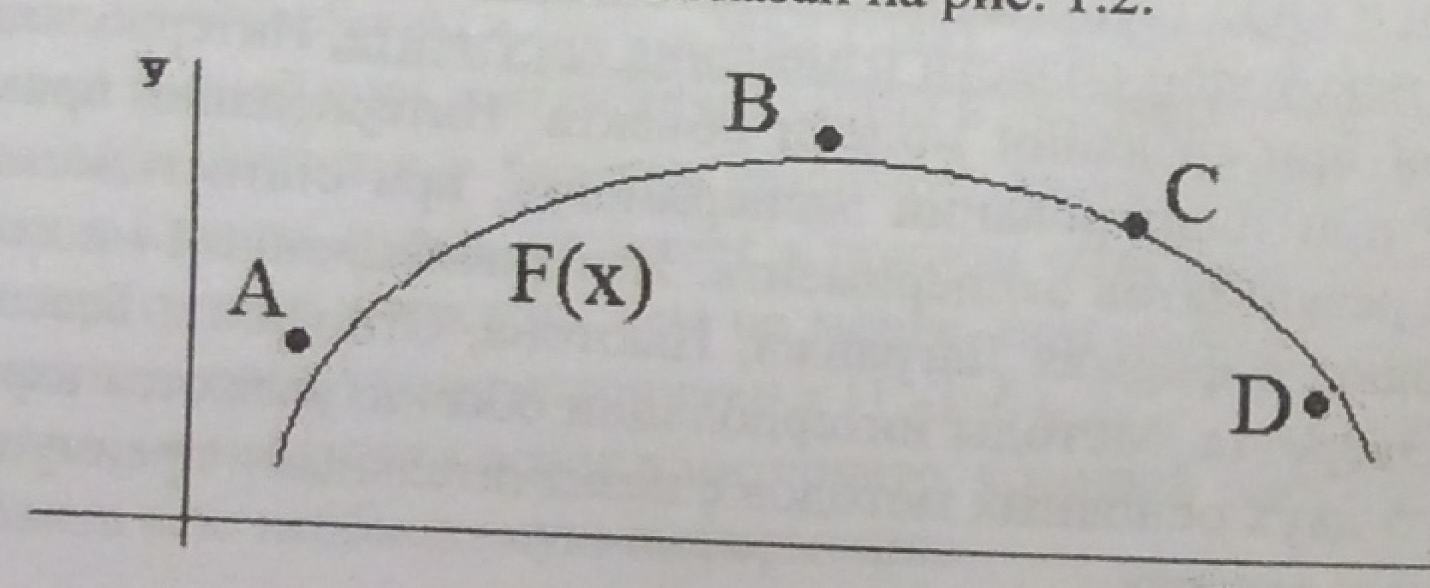


Рис. 1.2. Интерполяция, приближенная в узлах (аппроксимация)

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ ЛАГРАНЖА

Коэффициенты функции $f(x)$ определяются многими способами. Выбор способа зависит от вида функции, требуемой точности

интерполяции. В качестве функции будем использовать полином степени не выше заданного количества точек функции. Существует большое количество интерполяционных полиномов. Рассмотрим полиномиальную интерполяцию – интерполяционный полином Лагранжа[1]. Функцию $f(x)$ принимаем как полином степени $n-1$ при n заданных таблично значениях. Нужно построить полином степени $n-1$ вида $P_{n-1}(x)=a_1+a_2\cdot x+a_3\cdot x^2+\ldots+a_{n-1}\cdot x^{n-1}$, значения которого в точках x_i (узлах интерполирования) были бы равны значениям функции. Это графически означает, что график функции проходит через заданные точки.

Рассмотрим частный случай: заданы три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Полином Лагранжа в этом частном случае имеет вид:

$$P_{n-1}(x)=y_1\cdot\frac{(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}+$$
$$+y_2\cdot\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}+y_3\cdot\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)} \qquad (1.1)$$

Здесь полином второй степени представляется произведением двух сомножителей типа неизвестная минус постоянная величина. Такой вид полинома позволяет принимать при любом $x=x_i$ значения y_i, т.к. только одно из слагаемых будет отличным от нуля и равно именно данному значению y_i. Полином (1.1) для произвольного числа заданных точек будет записываться очень громоздко. Обычно его записывают короче, используя знак суммирования в виде:

$$P_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_2)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$

Эту запись можно еще преобразовать, чтобы удобнее было по формуле производить вычисления. Числитель и знаменатель каждой из дробей слагаемых умножим и разделим на одно и то же число $(x-x_i)$

[1] Жосеф Луи Лагранж – французский математик, астроном, механик

$$P_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_2)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_2)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)\cdot[(x-x_i)]}$$

Тогда каждое слагаемое имеет одинаковый сомножитель (числитель дроби), не зависящий от переменной суммирования. Такой сомножитель можно вынести за знак суммирования:

$$P_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)\cdot[(x-x_i)]}=$$

$$=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)\cdot$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_2)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)\cdot[(x-x_i)]}.$$

Для сокращения записи формулы вводят вспомогательную функцию *L(x)*, равную сомножителю перед знаком суммирования,

$$L(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) \qquad (1.2)$$

Это позволяет записать формулу короче

$$P_{n-1}(x)=L(x)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)\cdot[(x-x_i)]}$$

Как удобнее организовать вычисления по этой формуле? Расположим разности в виде таблицы

$x-x_1$	x_1-x_2	x_1-x_3	…	x_1-x_n
x_2-x_1	$x-x_2$	x_2-x_3	…	x_2-x_n
x_3-x_1	x_3-x_2	$x-x_1$	…	x_3-x_n
…	…	…	…	…
x_n-x_1	x_n-x_2	x_n-x_2	…	$x-x_n$

В этой таблице произведение элементов на главной диагонали равняется значению вспомогательной функции *L(x)*, а произведение элементов каждой строки вычисляет знаменатель каждого слагаемого полинома Лагранжа.

Задание. *Задана таблица данных*

X	*-1*	*0*	*1*
У	*13*	*8*	*7*

Вычислить значение функции при x=0,5, используя интерполяционный полином Лагранжа.

Решение производим в Microsoft Excel. В первый столбец заносим значения *x* (рис. 1.3).

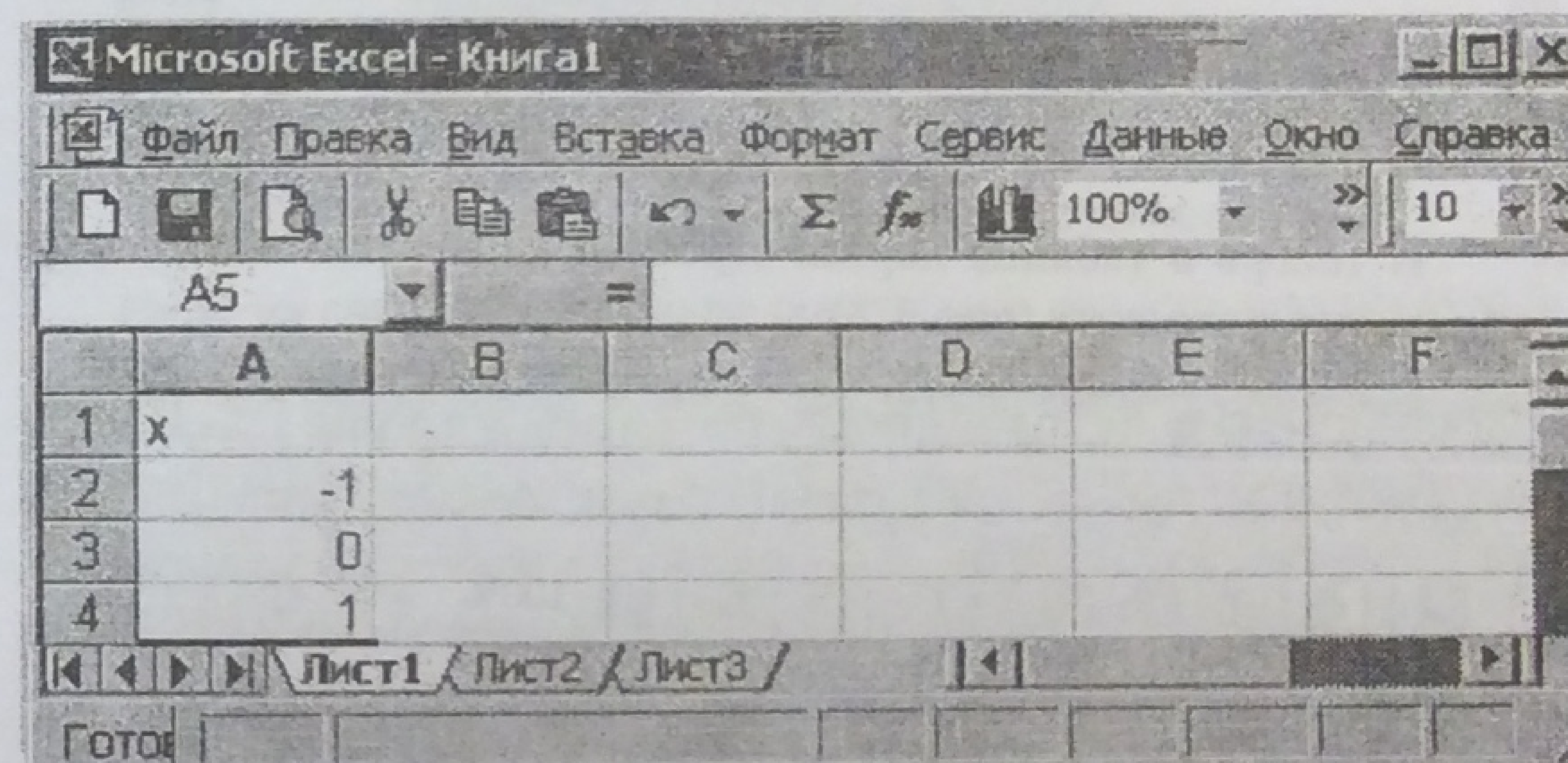


Рис. 1.3. Заполнение первого столбца таблицы

В таблице должны вычисляться разности x_i-x_j, следовательно, для копирования формул, вычисляющих разности значений аргументов во всей таблице, нужно и в верхней (вспомогательной) строке расположить значения аргумента. Это можно сделать с помощью функции ТРАНСП (рис. 1.4), не занося вручную значения.

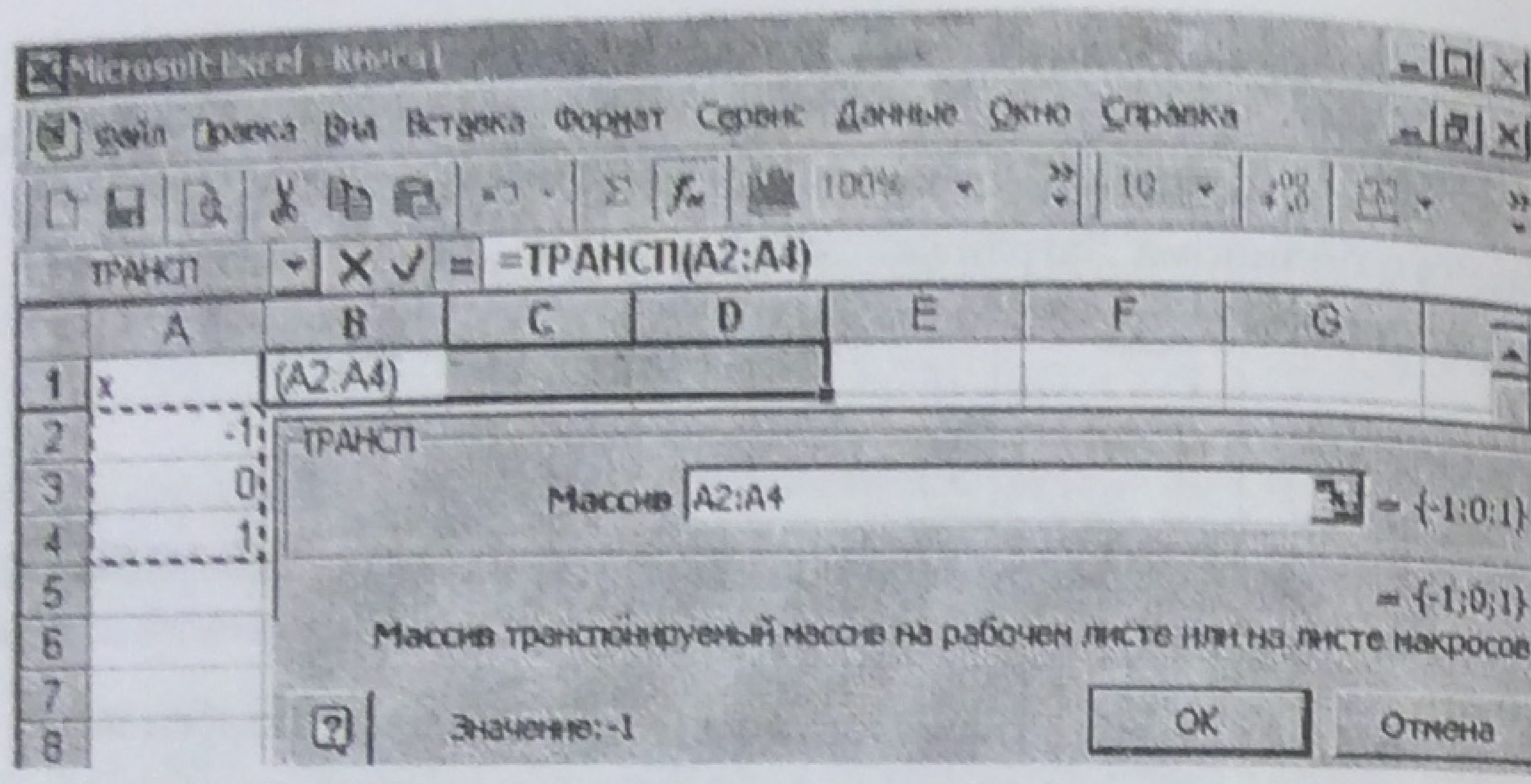


Рис. 1.4. Вспомогательные действия для заполнения аргументов в первую строку таблицы

И теперь в таблице первая строка и первый столбец содержат значения аргумента (рис. 1.5).

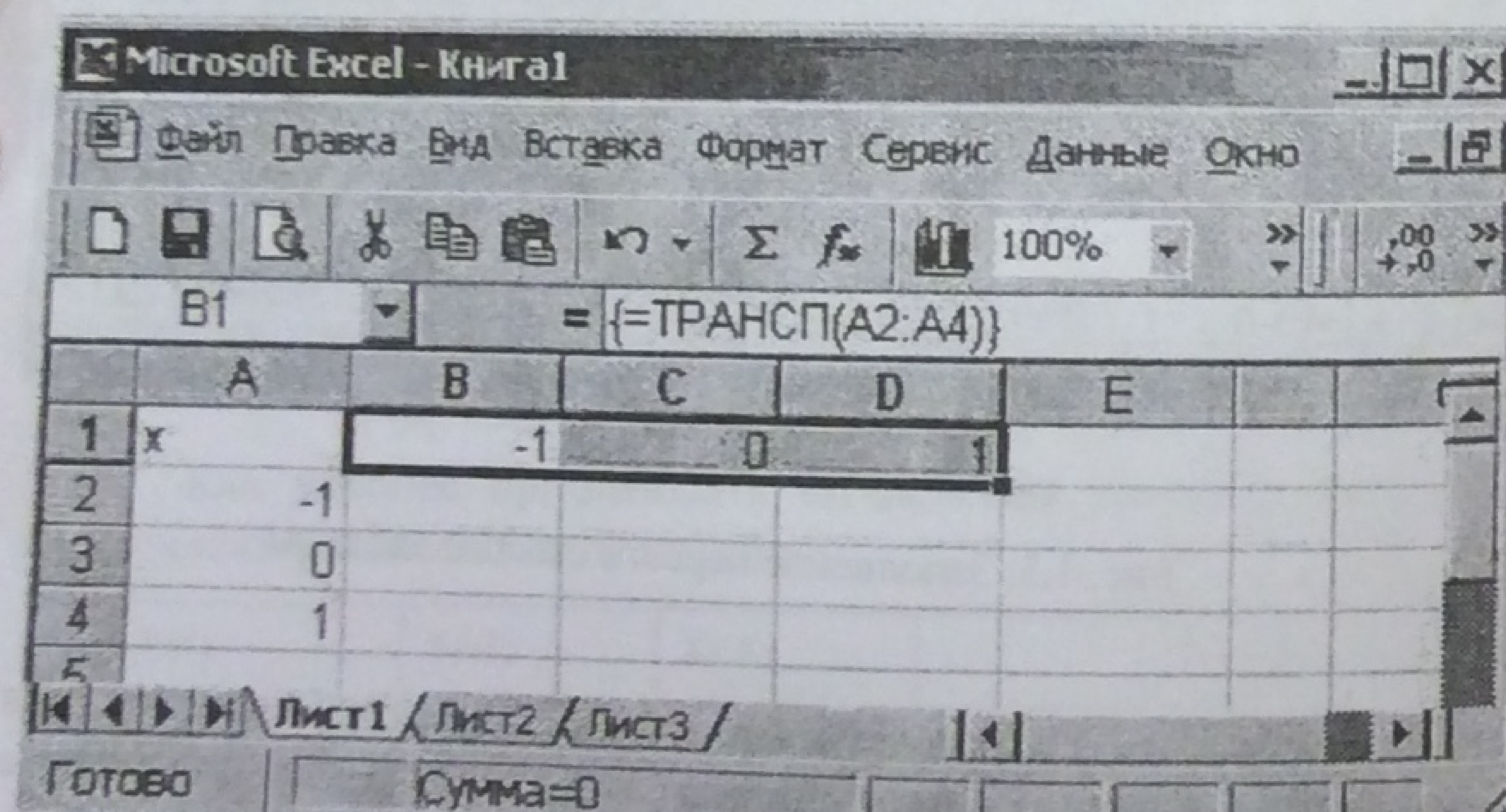


Рис. 1. 5. Заполнение аргументов в первую строку таблицы

Далее вычисляем разности x_i-x_j. Для возможности получить всю таблицу копированием нужно предусмотреть использование смешанных адресов в формуле (рис. 1.6).

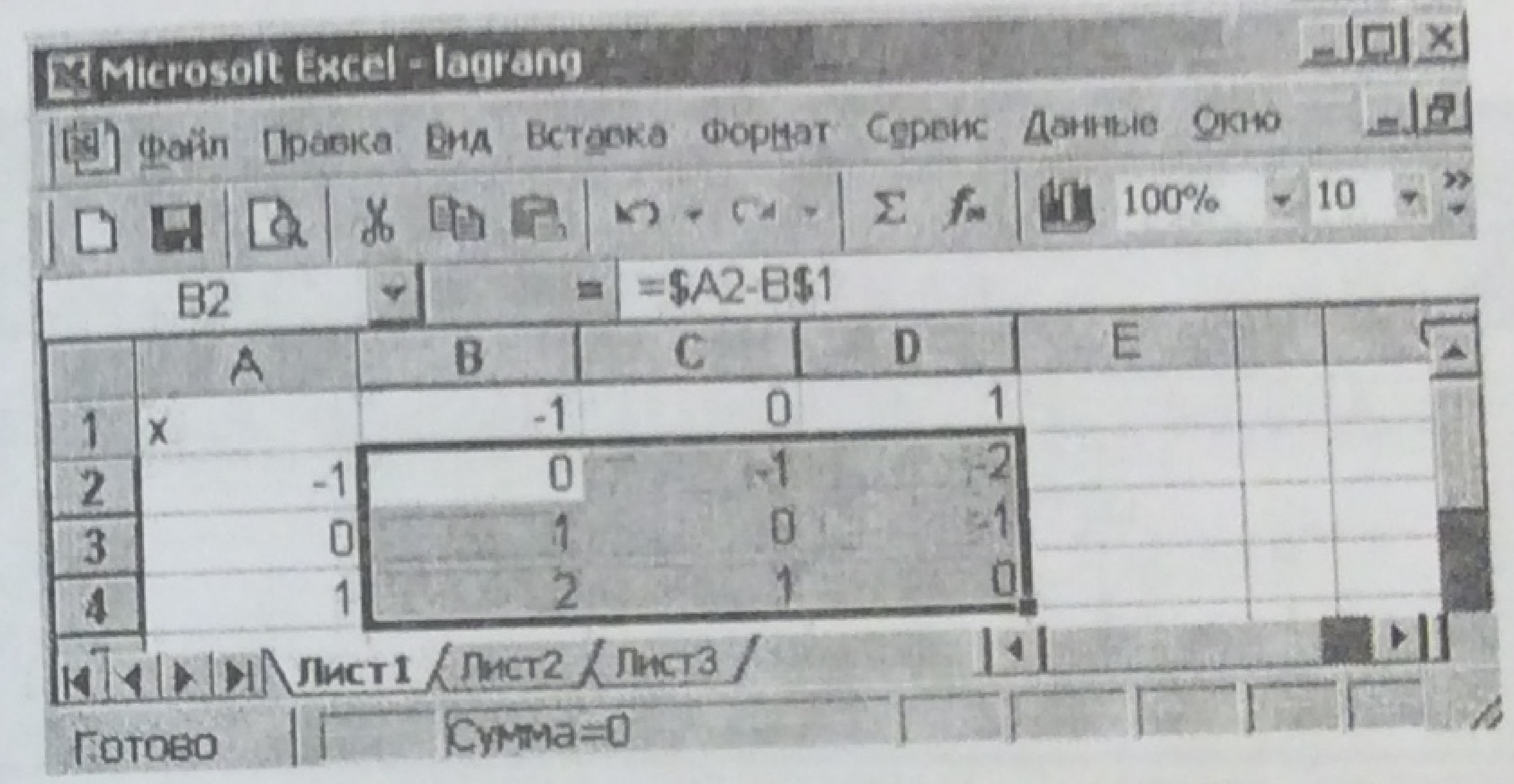


Рис. 1.6. Заполнение таблицы разностями

Нули на главной диагонали получились совершенно неслучайно, т.к. эти формулы в ячейках нужно «прописывать» вручную. В ячейку F1 заносим значение аргумента, для которого определяется искомое значение функции. И для ячеек главной диагонали таблицы изменяем формулу вычисления величин на разность заданного значения аргумента и данных первого столбца таблицы (рис. 1.7).

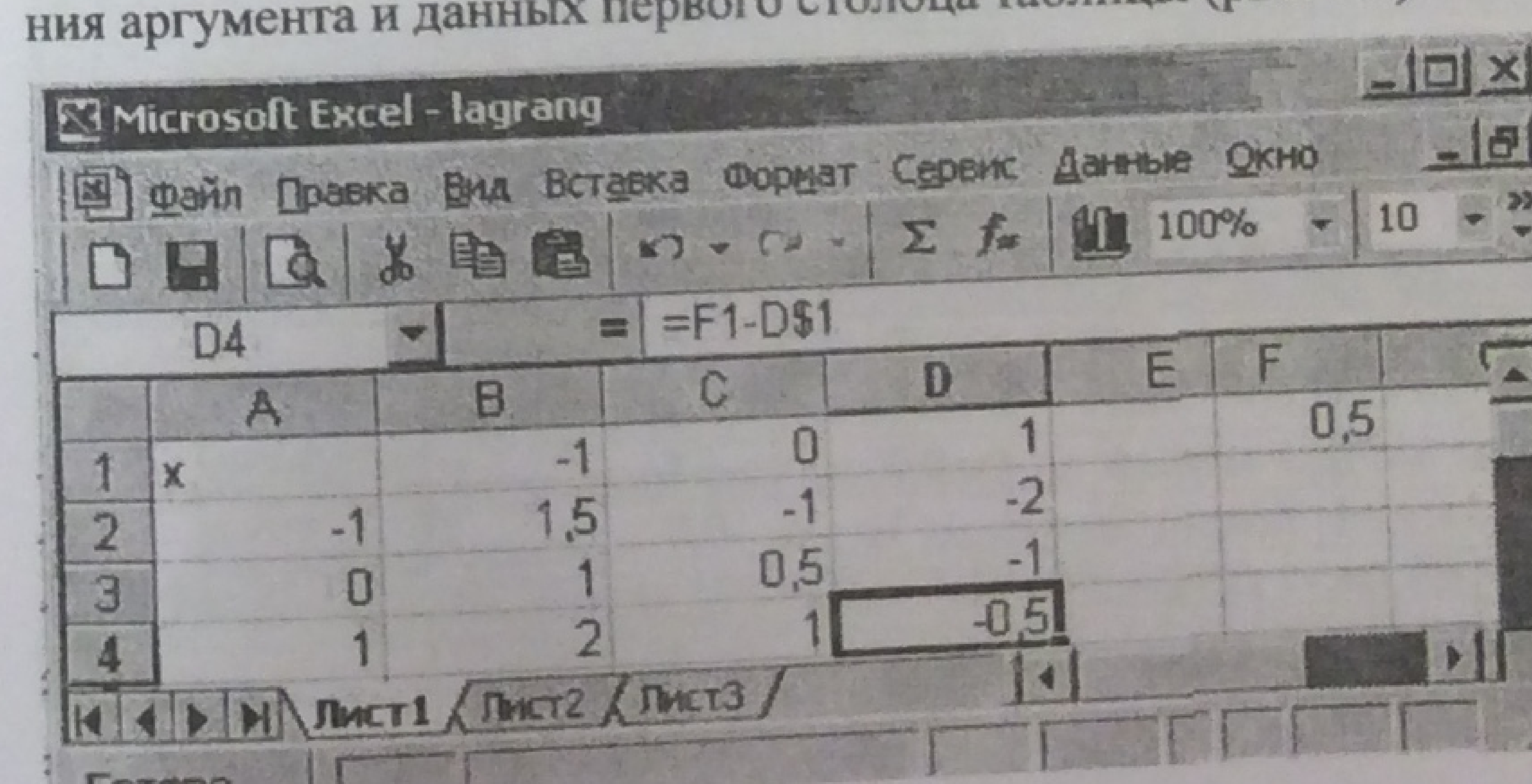
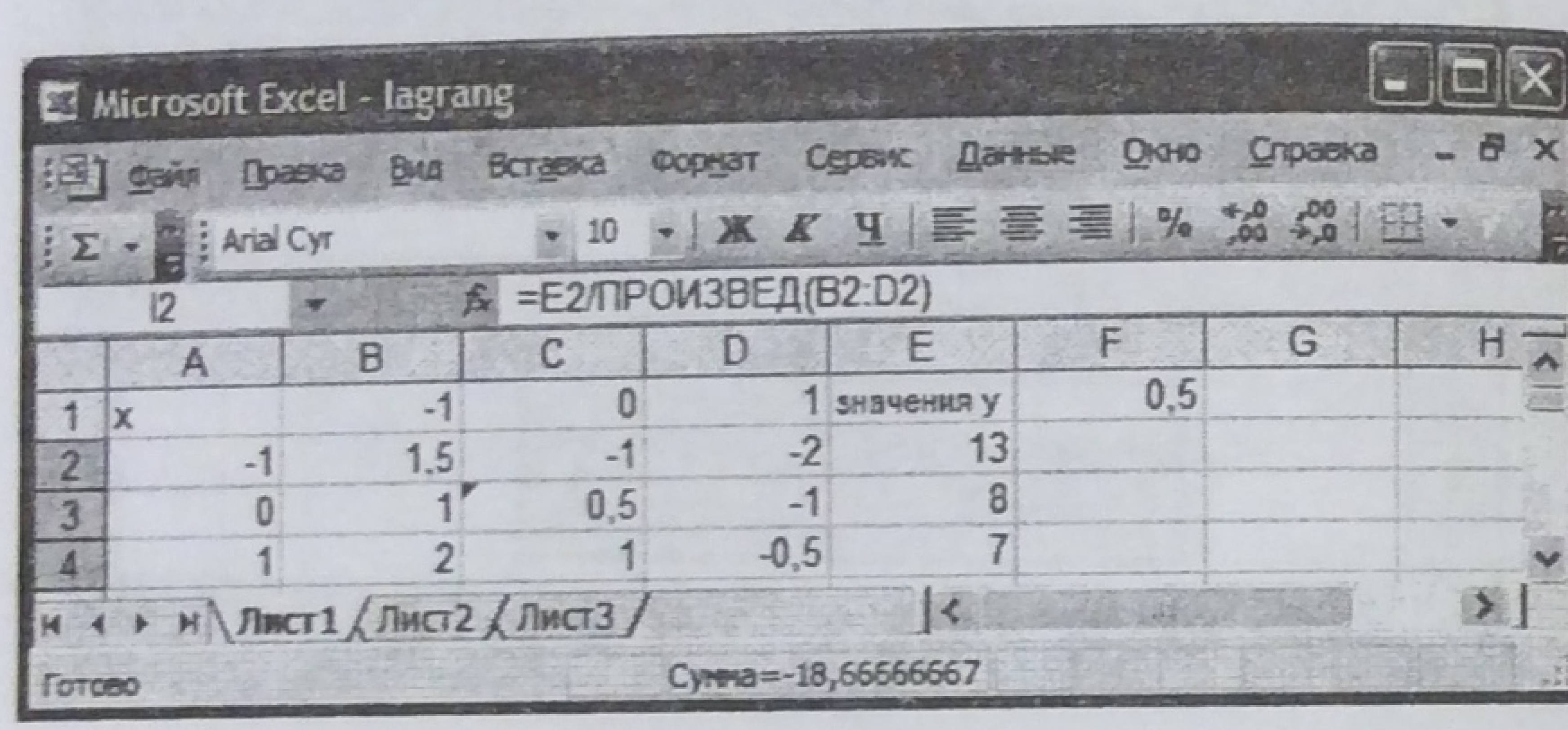


Рис. 1.7. Заполнение значений главной диагонали таблицы

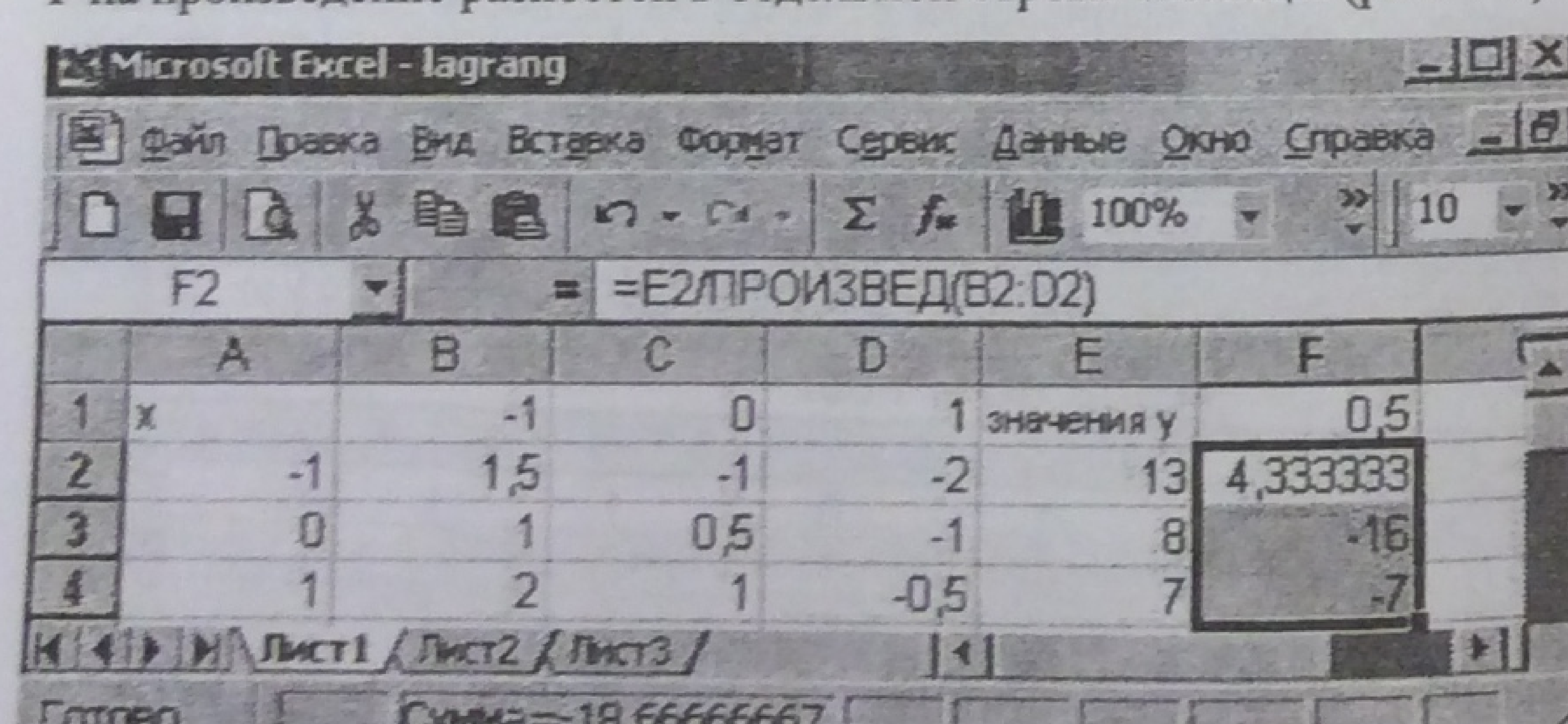
Теперь можно заметить, что числа каждой строки таблицы составляют знаменатели слагаемых суммы в формуле. В столбец таблицы E заносим заданные значения функции (рис. 1.8).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-1	0	1	значения y	0,5		
2	-1	1,5	-1	-2	13			
3	0	1	0,5	-1	8			
4	1	2	1	-0,5	7			

Рис. 1.8. Заполнение значений функции

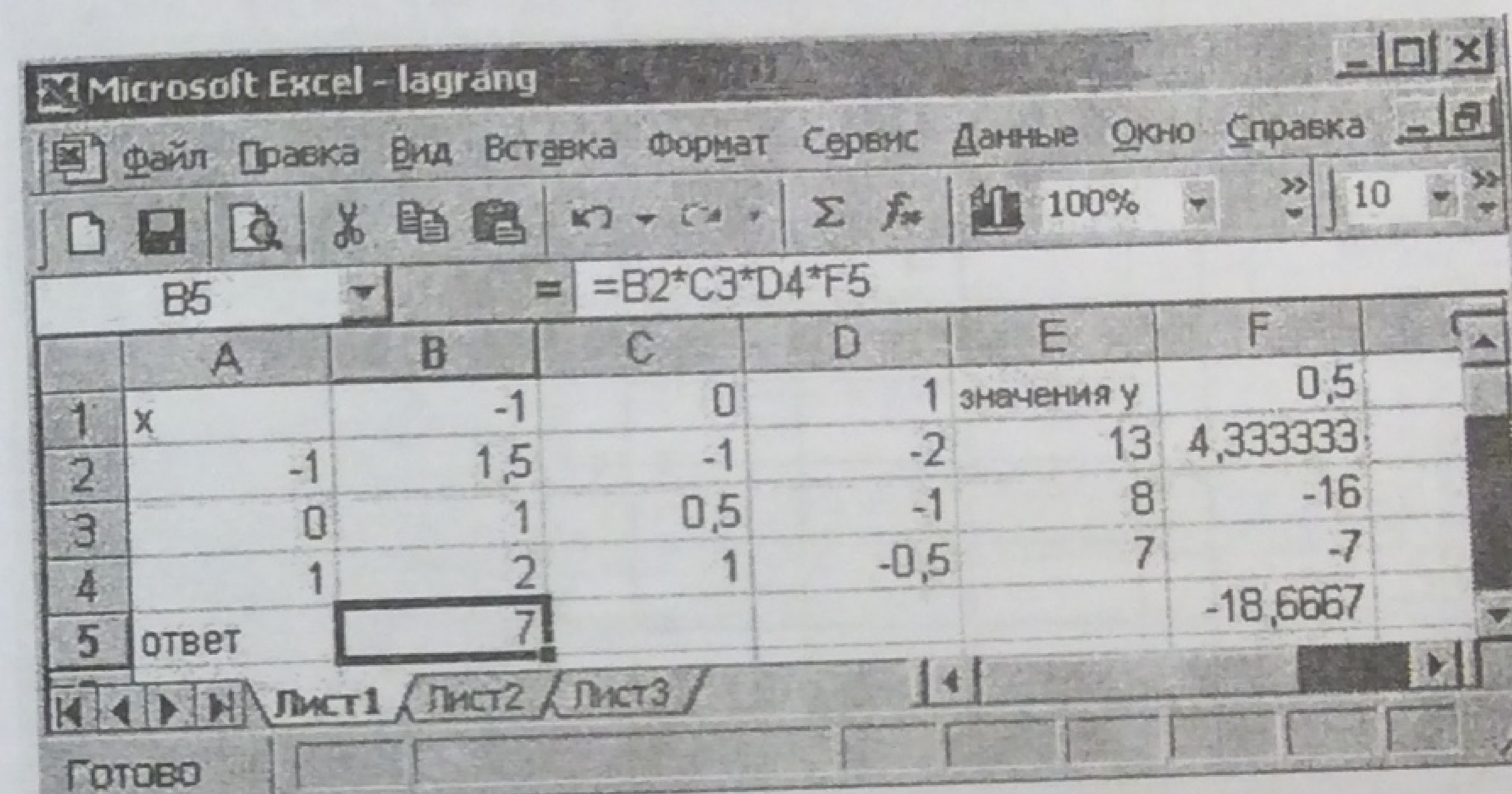
В столбце F можем вычислить слагаемые интерполяционного полинома, как частное деления значения функции, записанного в столбце F на произведение разностей в отдельной строке таблицы (рис. 1.9).



	A	B	C	D	E	F
1	x	-1	0	1	значения y	0,5
2	-1	1,5	-1	-2	13	4,333333
3	0	1	0,5	-1	8	-16
4	1	2	1	-0,5	7	-7

Рис. 1.9. Вычисление слагаемых суммы в интерполяционном полиноме

Для завершения вычисления значения функции нужно произведение диагональных элементов таблицы умножить на сумму числе столбца F (рис. 1.10).



	A	B	C	D	E	F
1	x	-1	0	1	значения y	0,5
2	-1	1,5	-1	-2	13	4,333333
3	0	1	0,5	-1	8	-16
4	1	2	1	-0,5	7	-7
						-18,6667
5	ответ	7				

Рис. 2. 10. Вычисление результата

Теперь можно графически показать расположение исходных точек и вычисленной. Воспользуемся мастером диаграмм. Выделяем столбец со значениями x (A2:A4) нажимаем клавишу Ctrl и выделяем несмежный диапазон, содержащий значения y (E2:E4). Выбираем в диаграмме типа «точечная» опцию «показать положение отдельных точек». На диаграмме отображаются точки. Теперь нужно добавить на график положение вычисленной точки. Значит, на график нужно добавить еще один ряд значений (в нашем случае пару чисел). В раскрывшемся меню после нажатия правой кнопки мыши выбираем команду «Исходные данные» (рис. 1.11).

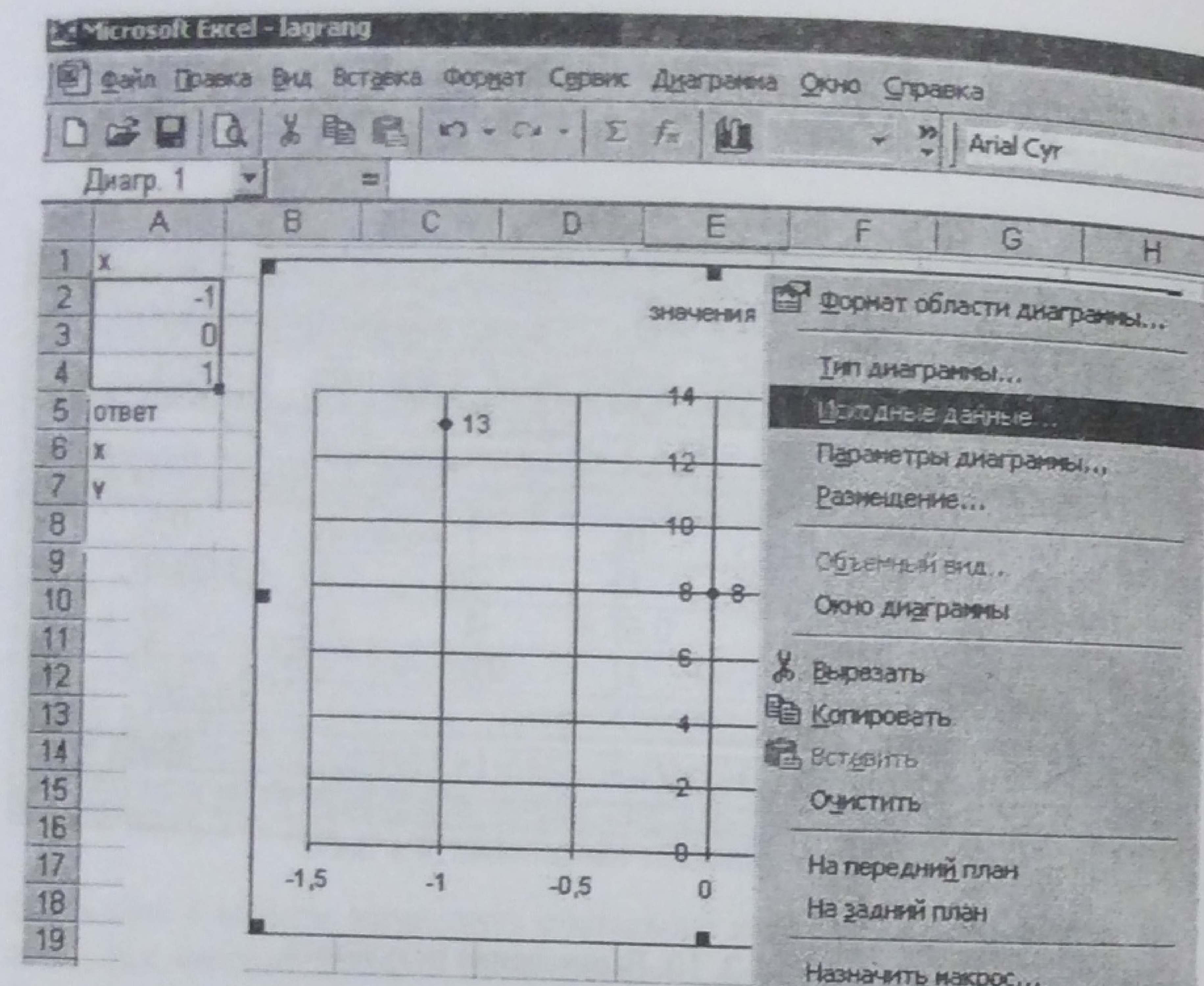


Рис. 1. 11. Выбор пункта «Исходные данные»

В раскрывшемся окне выбираем вкладку «Ряд» и нажимаем кнопку «Добавить» (рис. 1.12).

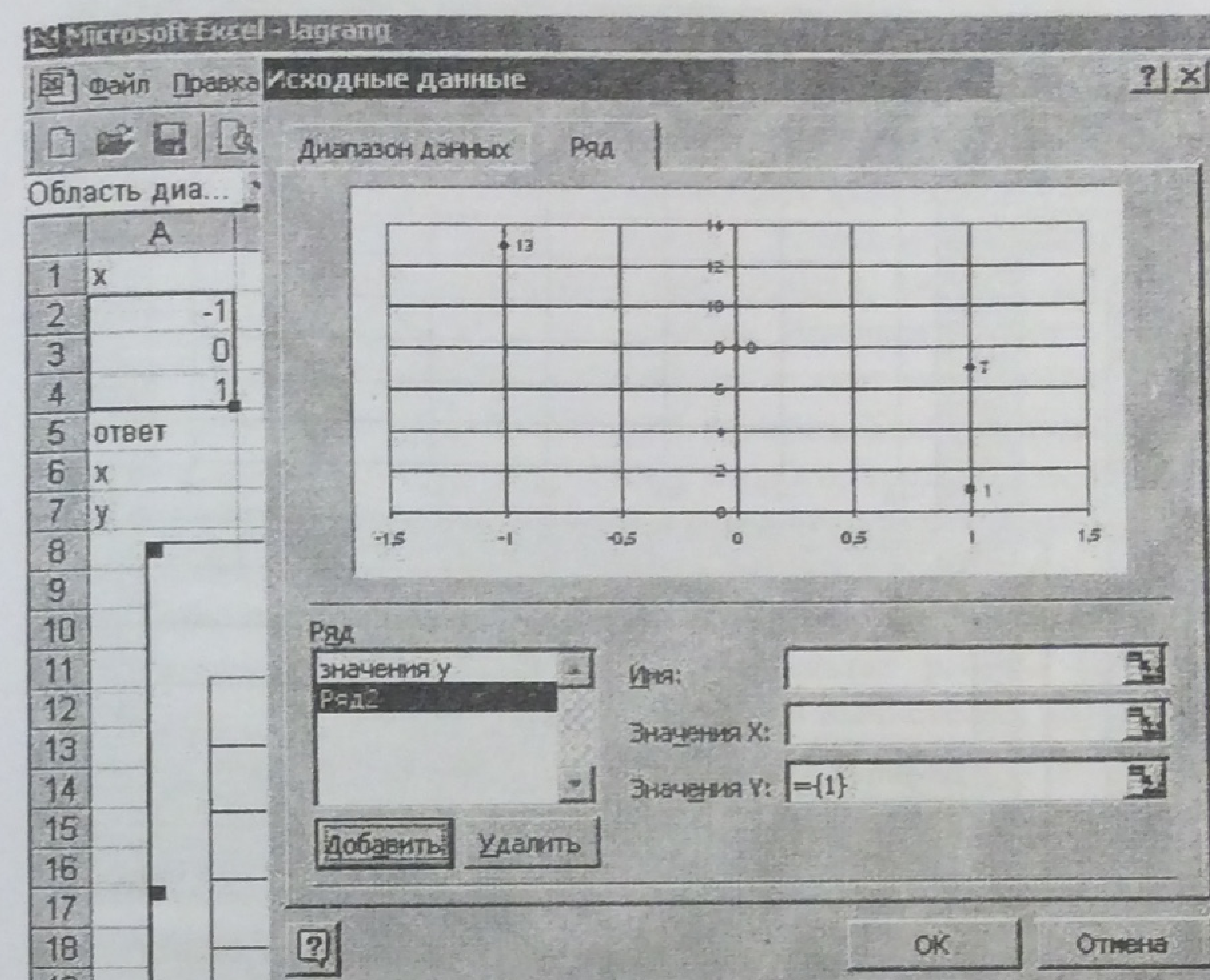


Рис. 1.12. Вкладка «Ряд»

Мышью выделяем диапазон с добавляемыми значениями x и y (рис. 1.13). Нажатие кнопки «ОК» приводит к добавлению в существующий график точки (рис. 1.14).

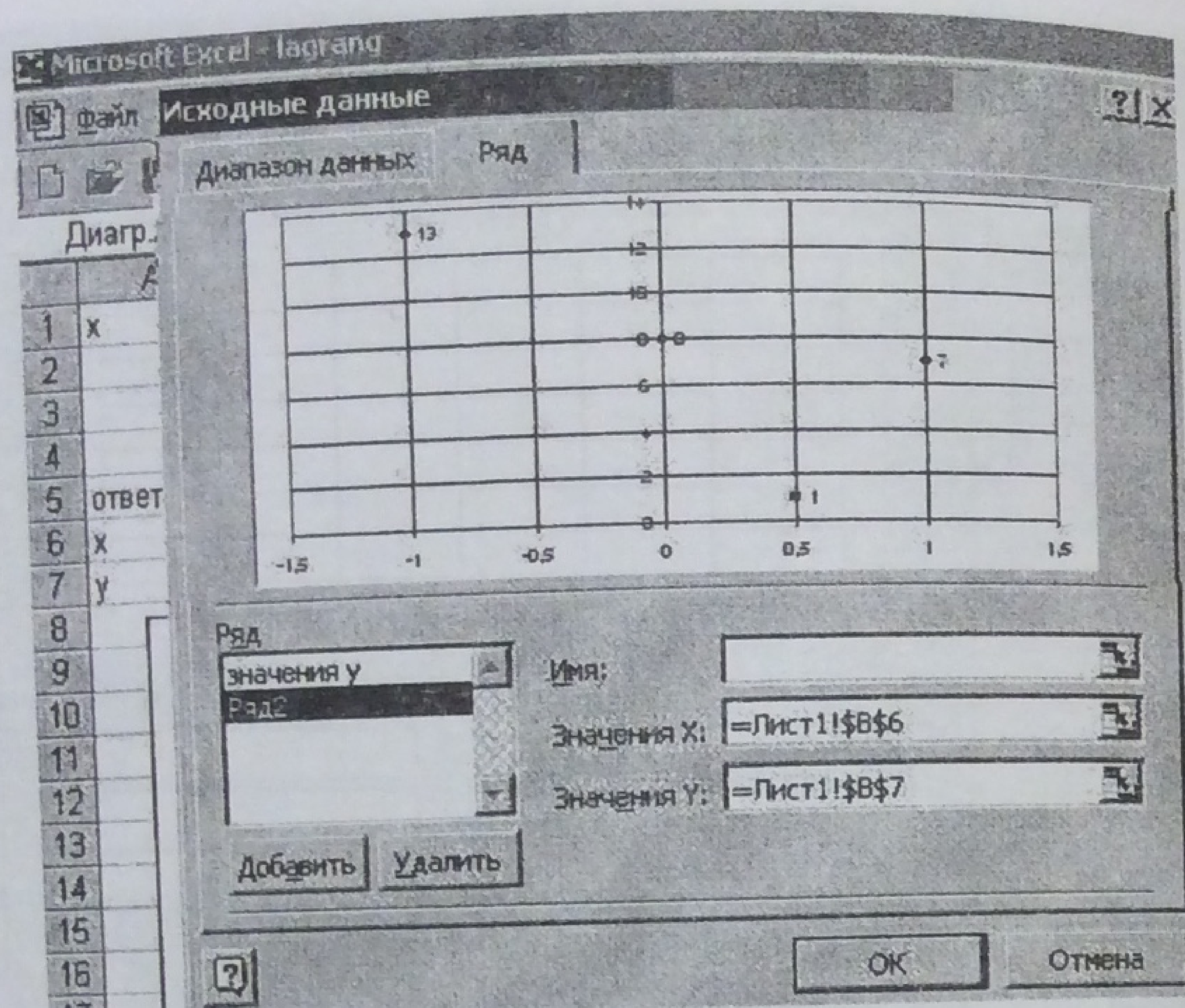


Рис. 1.13. Выделение диапазона с добавляемыми рядами

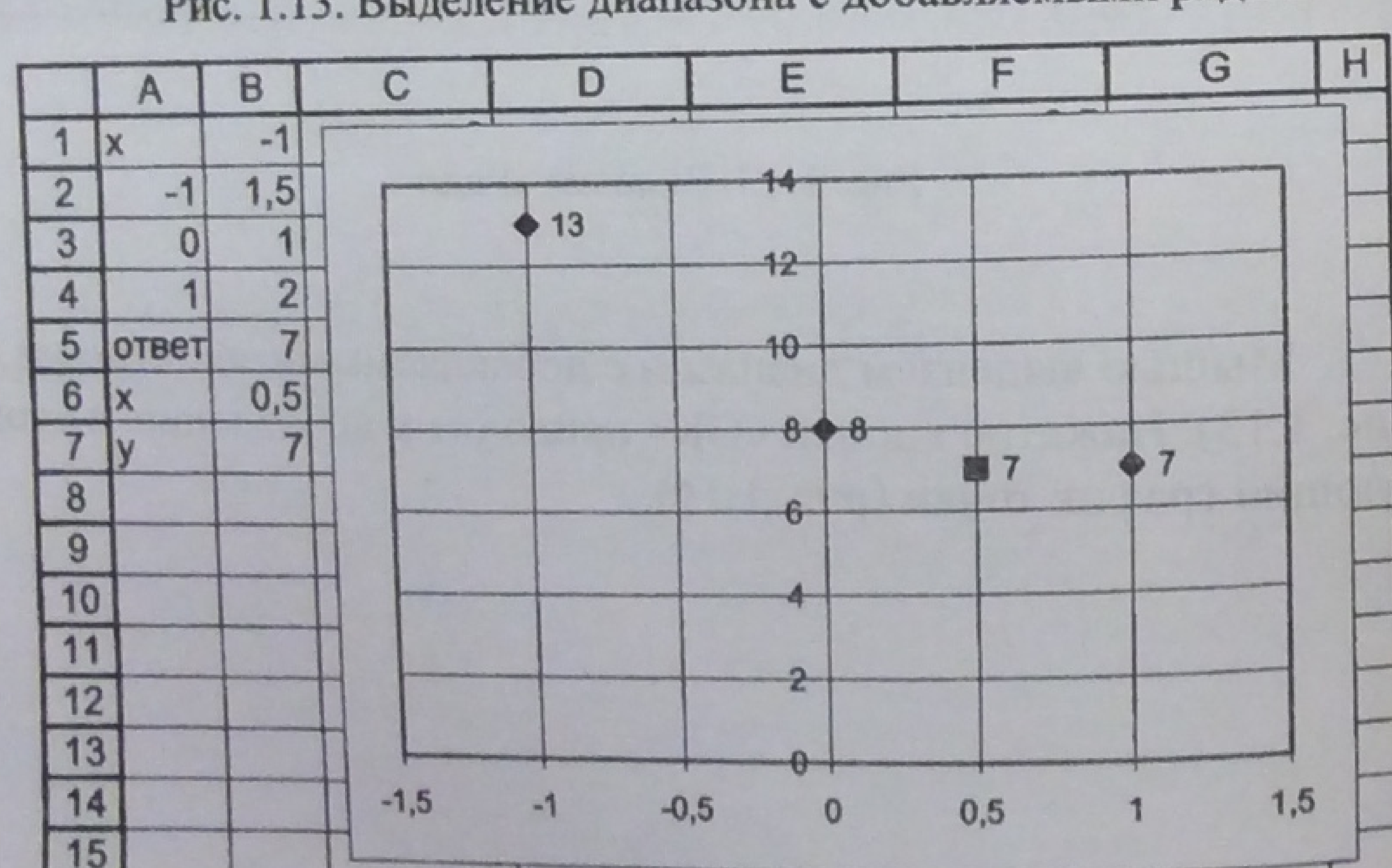


Рис. 1.14. Результат добавления ряда данных в график

Таков возможный путь вычислений по интерполяционной формуле Лагранжа в Microsoft Excel.

Как выполнить эту же задачу в пакете MathCAD? К сожалению, в пакете нет функции вычисления по интерполяционной формуле Лагранжа. В пакете MathCAD имеется формула для вычисления функции линейной интерполяцией – полиномом первой степени, что дает довольно грубое значение. Однако, имеется другой вариант получения более точного значения. Высокая точность интерполяции в пакете MathCAD достигается за счет интерполирования несколькими полиномами невысокой степени. Такие полиномы называются **сплайны**. Они могут быть второго, третьего, четвертого порядков. В системе MathCAD реализована интерполяция кубическими сплайнами с помощью функции ***interp(s,x,y,xx)***, где *x, y* – вектора значений аргумента и функции; *xx* – значение аргумента, при котором определяется функция; *s* - результат работы функции *cspline(x,y)*. Эта функция предназначена для вычисления коэффициентов кубического сплайна, построеннго по векторам *x, y*. Значит, вычисление функции в точке *x* возможно использованием функции *interp(cspline(x,y),x,y,xx)* (рис. 1.15).

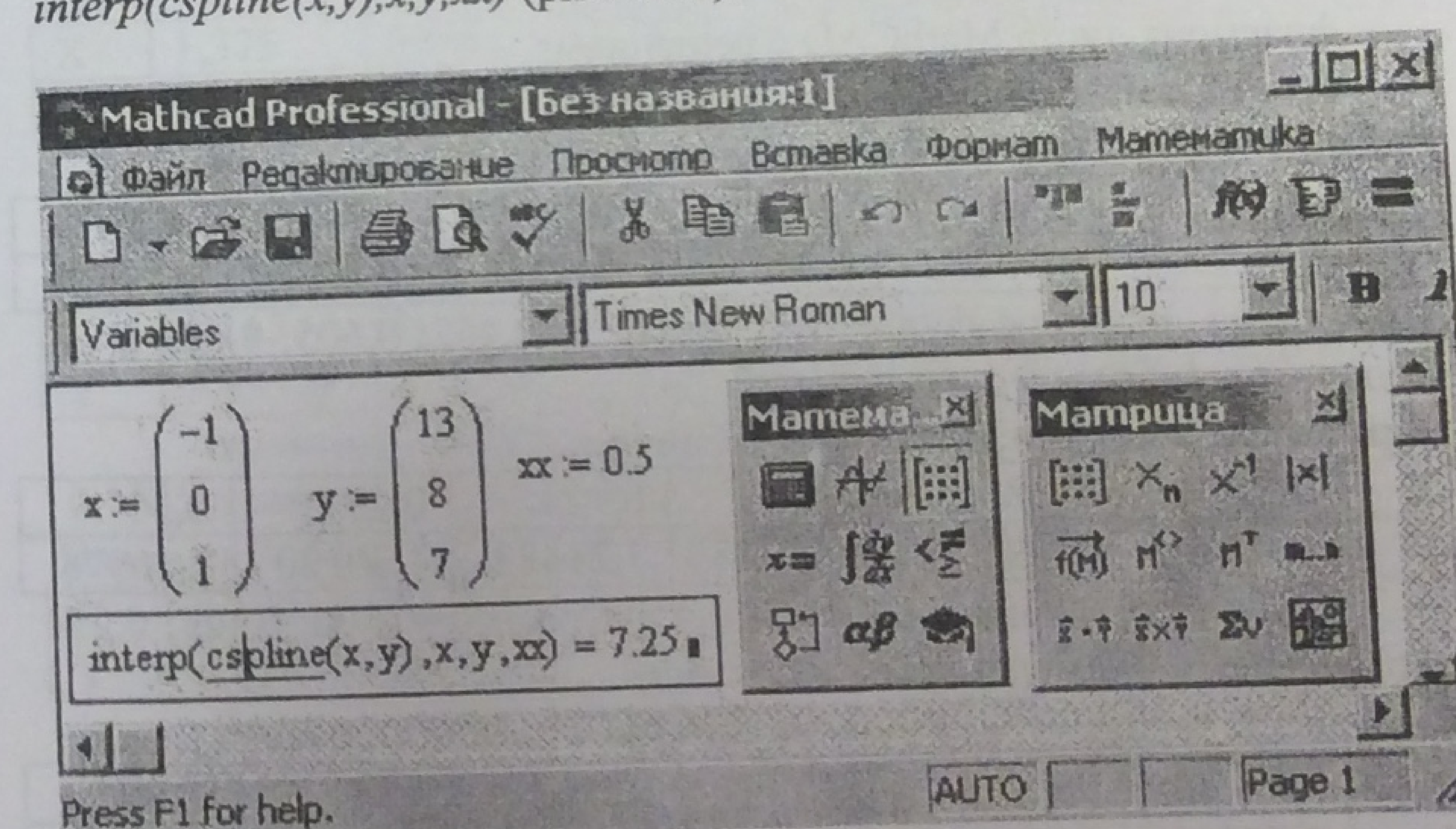


Рис. 1.15. Интерполяция в пакете MathCAD

Как видим, результат, полученный в пакете MathCAD, менее точный, чем при вычислении по интерполяционному полиному Лагранжа.

Интерполяция обеспечивает хорошую точность на небольших отрезках изменения аргумента. Среднеквадратическая аппроксимация позволяет строить приближенные формулы, пригодные для больших промежутков изменения аргумента.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

ЗАДАНИЕ. Функция *y(x)* задана таблично. Вычислить значение функции в заданных точках с помощью интерполяционного полинома Лагранжа.

В отчете по выполнению задания привести:
- формулы, по которым производится расчет;
- таблички Microsoft Excel с решением в режимах отображения чисел и формул с сеткой и заголовками строк и столбцов;
- описание функции, реализующей интерполяционную задачу в MathCAD MathCAD;
- фрагмент листа MathCAD с решением;
- ответ.

Вариант 1. Функция *y(x)* задана таблично

X	0,43	0,48	0,55	0,62	0,70	0,75
Y	1,63597	1,73234	1,87686	2,03345	2,22846	2,35973

Вычислить значение функции в точках *x*=0,462; 0,605; 0,688 и определить наибольшее из значений

Вариант 2. Функция *y(x)* задана таблично

X	0,02	0,08	0,12	0,17	0,23	0,30
Y	1,02316	1,09590	1,14725	1,21483	1,30120	1,40976

Вычислить значение функции в точках *x*=0,106; 0,121; 0,254 и определить наименьшее из значений.

Вариант 3. Функция *y(x)* задана таблично

X	0,35	0,41	0,47	0,51	0,56	0,64
Y	2,73951	2,30080	1,96864	1,78776	1,59502	1,34310

Вычислить значение функции в точках *x*=0,396; 0,485; 0,536 и определить наибольшее из значений.

Вариант 4. Функция *y(x)* задана таблично

X	0,41	0,46	0,52	0,60	0,65	0,72
Y	2,57418	2,32513	2,09336	1,86203	1,74926	1,62098

Вычислить значение функции в точках *x*=0,516; 0,578; 0,682 и определить наименьшее из значений.

Вариант 5. Функция *y(x)* задана таблично

X	0,68	0,73	0,80	0,88	0,93	0,99
Y	0,80866	0,89492	1,02964	1,20966	1,34087	1,52368

Вычислить значение функции в точках *x*=0,712; 0,774; 0,865 и определить наибольшее из значений.

Вариант 6. Функция *y(x)* задана таблично

X	0,11	0,15	0,21	0,29	0,35	0,40
Y	9,05421	6,61659	4,69170	3,35106	2,73951	2,36522

Вычислить значение функции в точках *x*=0,114; 0,225; 0,375 и определить наименьшее из значений.

Вариант 7. Функция *y(x)* задана таблично

X	1,375	1,380	1,385	1,390	1,395	1,400
Y	5,04192	5,17744	5,32016	5,47069	5,62968	5,79788

Вычислить значение функции в точках *x*=1,382; 1,386; 1,396 и определить наибольшее из значений.

Вариант 8. Функция *y(x)* задана таблично

X	0,115	0,120	0,125	0,130	0,135	0,140
Y	8,65729	8,29329	7,95829	7,64893	7,36235	7,09613

Вычислить значение функции в точках *x*=0,1284; 0,1332; 0,1385 и определить наименьшее из значений.

Вариант 9. Функция *y(x)* задана таблично

X	0,150	0,155	0,160	0,165	0,170	0,175
Y	6,61659	6,39989	6,19658	6,00551	5,82558	5,65583

Вычислить значение функции в точках *x*=0,152; 0,162; 0,172 и определить наибольшее из значений.

Вариант 10. Функция *y(x)* задана таблично

X	0,180	0,185	0,190	0,195	0,200	0,205
Y	5,61543	5,46693	5,32634	5,19304	5,06649	4,94619

Вычислить значение функции в точках x=0,188; 0,197; 0,203 и определить наименьшее из значений.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОДЫ ИТЕРАЦИИ, ИТЕРАЦИИ ЗЕЙДЕЛЯ, ПРОГОНКИ

Решением системы линейных алгебраических уравнений являются значения неизвестных, при которых все уравнения системы обращаются в тождество.

Задача решения систем линейных алгебраических уравнений имеет многовековую историю. В рамках изучения курсов высшей математики и информатики уже рассматривались решения систем линейных алгебраических уравнений методами Крамера, с помощью обратной матрицы и Гаусса. Метод Крамера в компьютерных вычислениях применяют редко, так как он требует значительно большего числа арифметических действий, чем метод Гаусса. Известно, что если определитель матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Для решения систем линейных алгебраических методов применяют точные (прямые) методы и методы последовательных приближений (итерационные).

Прямые методы дают решение за конечное число действий, просты и универсальны. Решение реализуют в два шага: систему преобразуют к более простому виду, затем решают упрощенную систему и получают решение.

Итерационные методы привлекают простотой реализации, требуют задания начального приближения, применяются для решения систем специального вида. Скорость сходимости итерационного процесса зависит от свойств матрицы коэффициентов перед неизвестными и выбора начального приближения.

Известны методы решения систем линейных алгебраических уравнений: Гаусса, Жордана, окаймления, ортогонализации, главных элементов, метод квадратного корня, схема Халецкого, метод прогонки, метод итерации, метод итерации Зейделя, и многие другие.

Метод простой итерации

Метод итерации является общим методом решения многих задач. Им можно решать не только нелинейные уравнения, но и системы линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы применяют при решении систем до порядка 10^6. Методом итерации определяется приближенное решение с заданной точностью. Поэтому остановимся на решении систем линейных алгебраических уравнений именно этим методом. Пусть нужно определить решение системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными x_1, x_2, x_3,... x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (2.1)$$

где a_{ij} - коэффициенты перед неизвестными уравнений, x_i - неизвестные величины, b_i - свободные члены уравнений. Если все коэффициенты a_{ii} отличны от нуля и справедливы неравенства $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$,

то метод применять можно.

Перепишем уравнения системы, явно выразив по одной из неизвестных в уравнении через другие:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} \cdot (b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - \ldots - a_{1n} \cdot x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}} \cdot (b_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3 - \ldots - a_{2n} \cdot x_n) \\ \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}} \cdot (b_n - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 - \ldots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1}) \end{cases} \qquad (2.2)$$

Пусть приближенное решение системы равняется x_1^0, x_2^0, x_3^0,... x_n^0 – нулевое приближение. Подставляя эти значения в правую часть уравнений системы (2.2), вычисляем значения первого приближения решения системы:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(0)} - a_{13} \cdot x_3^{(0)} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(0)} - a_{23} \cdot x_3^{(0)} - \ldots - a_{2n} \cdot x_n^{(0)}\right) \\ \ldots \\ x_n^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_n - a_{n1} \cdot x_1^{(0)} - a_{n2} \cdot x_2^{(0)} - \ldots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1}^{(0)}\right) \end{cases} \tag{2.3}$$

Подставляя полученные первые приближения x_1^1, x_2^1, x_3^1,... x_n^1 в правую часть системы (3.4) получаем второе приближение x_1^2, x_2^2, x_3^2,... x_n^2. Действуя также далее, можем вычислять следующие приближения на основе вычисленных предыдущих. Вычисления продолжают до тех пор, пока разность между приближенными значениями не станет меньше по абсолютной величине заданной точности решения, т.е. $\max\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| < \varepsilon$, где ε - заданная точность.

Если условие $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$ не выполняется, то метод не сойдется, то есть невозможно достигнуть решения за любое число итераций.

Задание. *Имеется система* $\begin{cases} 20 \cdot x_1 - x_2 - 3 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4 = 15 \\ 2 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 = 83 \\ x_1 + 5 \cdot x_2 + 32 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 = 18 \\ 3 \cdot x_2 + x_3 + 12 \cdot x_4 = 8 \end{cases}$. *Найти решение системы методом итерации с точностью* 10^{-3}.

Преобразуем уравнения системы к виду (2.3) для того, чтобы производить вычисления по методу итерации:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{20} \cdot \left(15 + x_2^{(0)} + 3 \cdot x_3^{(0)} + 5 \cdot x_4^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{18} \cdot \left(83 - 2 \cdot x_1^{(0)} - 5 \cdot x_4^{(0)}\right) \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{32} \cdot \left(18 - x_1^{(0)} - 5 \cdot x_2^{(0)} - 6 \cdot x_4^{(0)}\right) \\ x_4^{(1)} = \dfrac{1}{12} \cdot \left(8 - 3 \cdot x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) \end{cases} \tag{2.4}$$

В качестве нулевого приближения положим значения всех переменных равными нулю $x_1^0=0$, $x_2^0=0$, $x_3^0=0$, $x_4^0=0$.

Решение производим в табличном процессоре Microsoft Excel. Надписываем столбцы первой строки таблицы Microsoft Excel именами переменных, которые будут определяться в этих столбцах (рис. 2.1). Заносим в ячейки столбцов второй строки значения нулевого приближения (рис. 2.2), принятого равным нулю. Записываем в ячейки столбцов третьей строки формулы для вычисления первого приближения решения через нулевые приближения (2.4) и получаем эти значения (рис. 2.3).

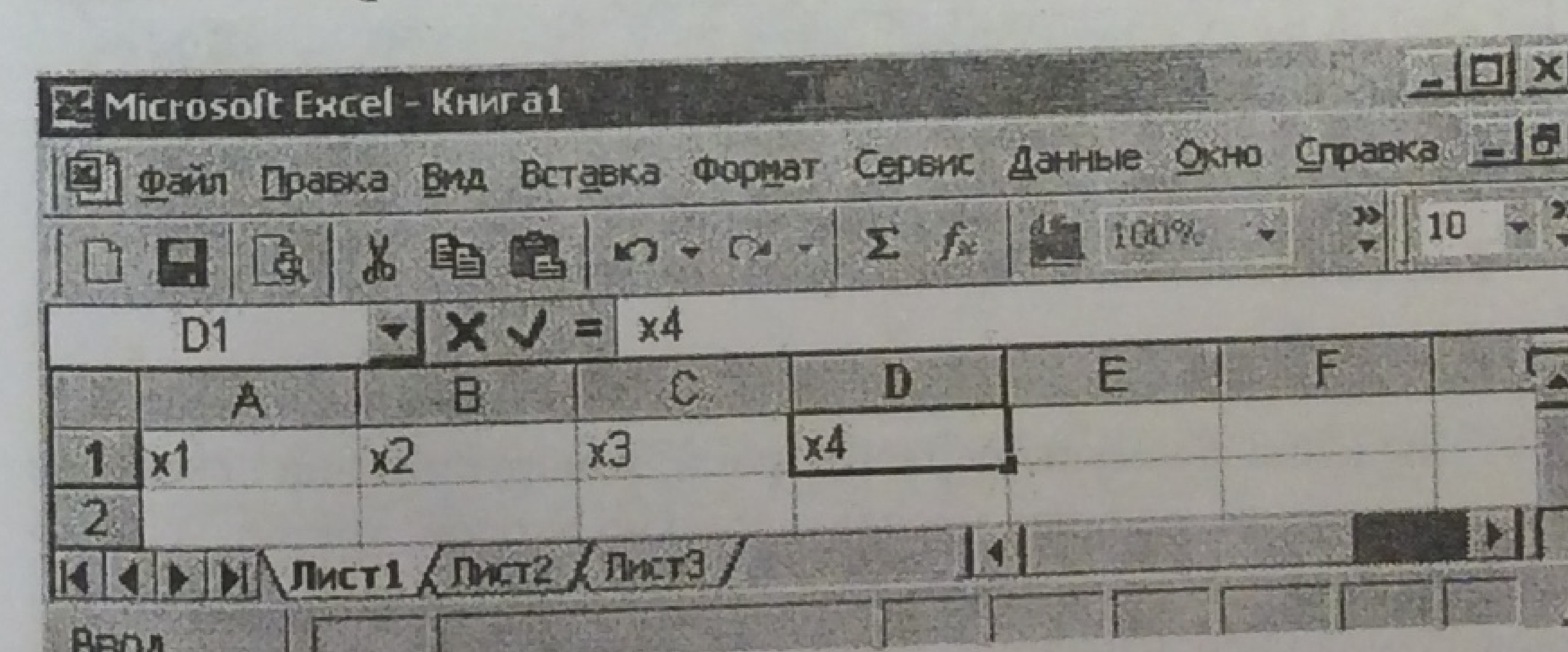


Рис. 2.1. Подпись столбцов таблицы для вычисления неизвестных

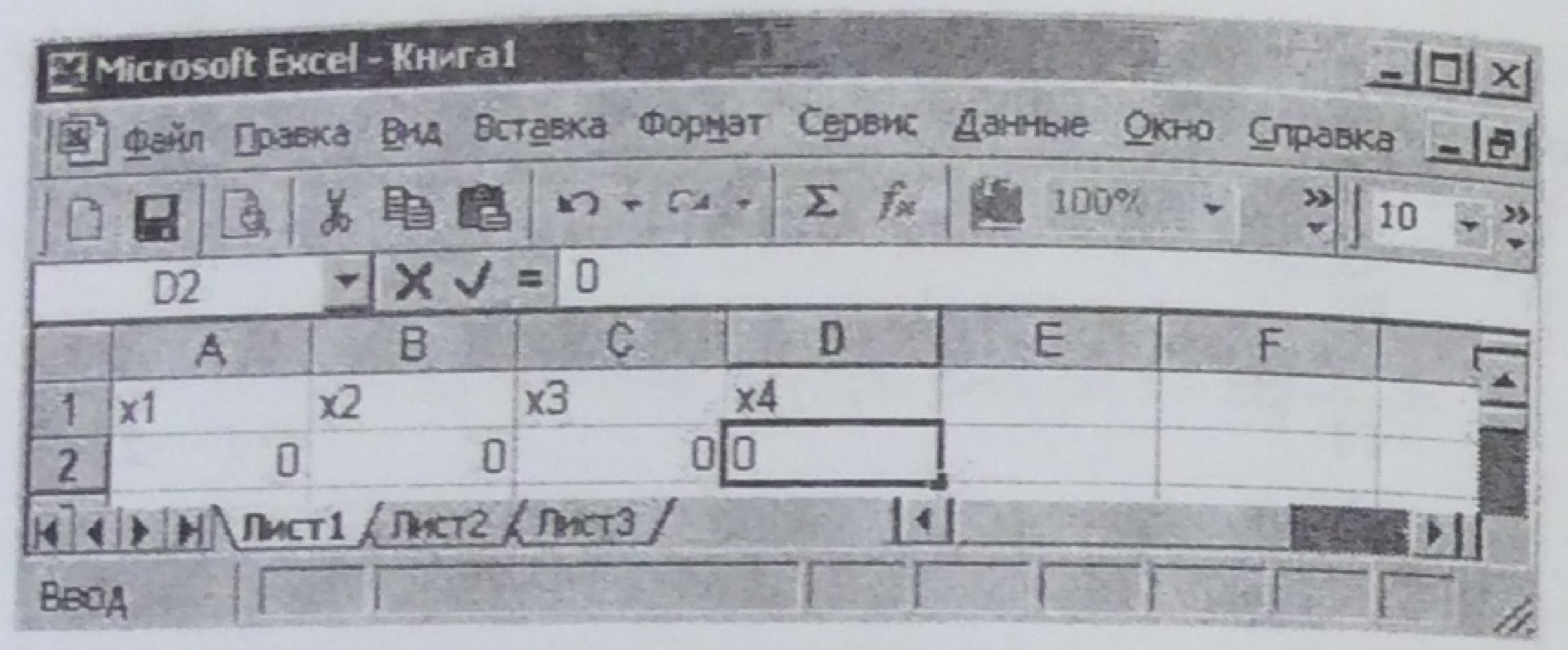


Рис. 2.2. Занесение в ячейки таблицы нулевого приближения

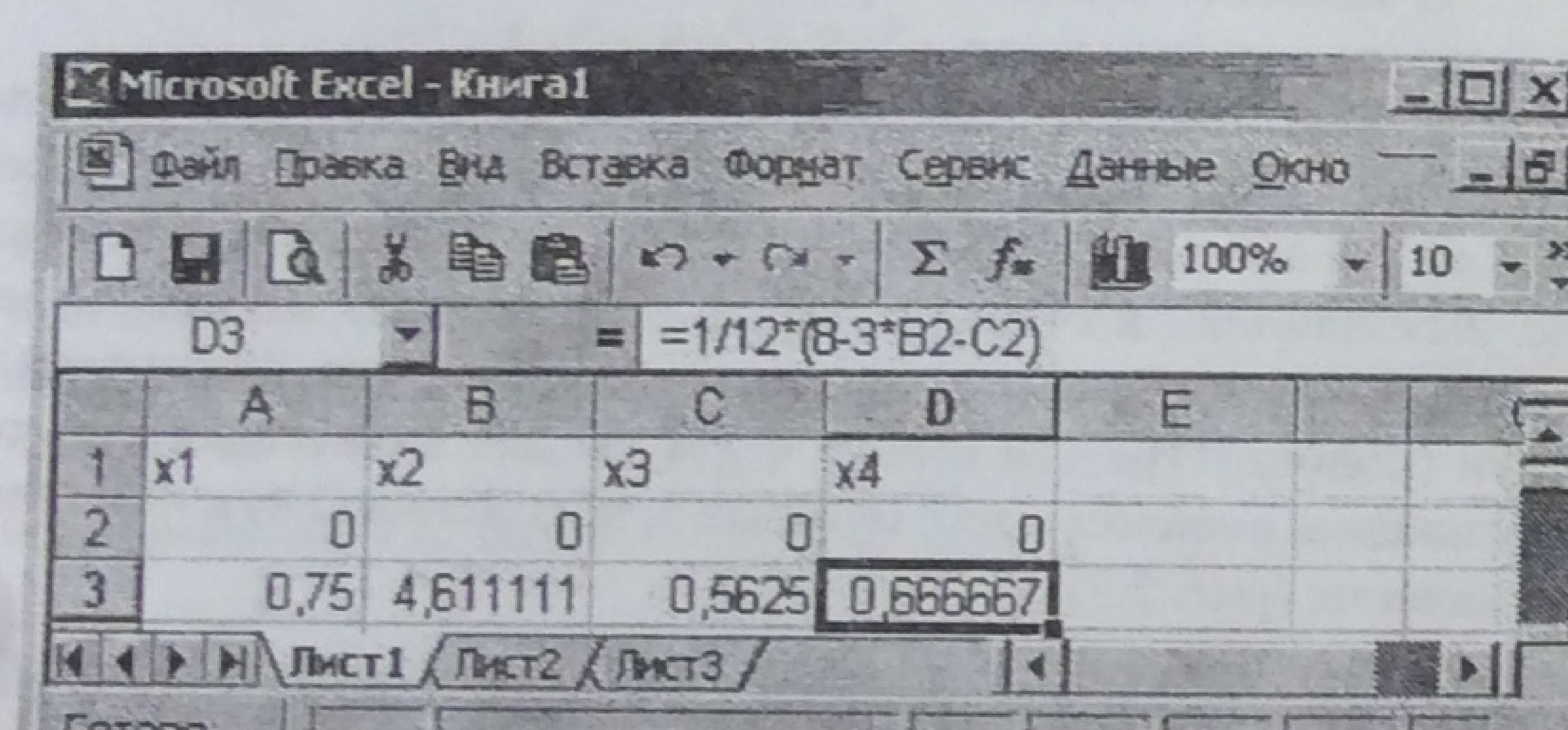


Рис. 2.3. Вычисление первого приближения на основе нулевого

Выделив формулы первой строки, копируем их на некоторое количество строк, получая последовательно второе, третье, … приближения (рис. 2.4). Копирование формул прекращаем когда решения следующей итерации отличаются от решения предыдущей менее, чем заданная точность, в задании 0,001, т.к. три первые цифры полученного решения повторяются у всех переменных решения

(рис. 2.4). Следовательно, решение с заданной точностью получено. На рис. 2.5 приведен фрагмент таблицы с решением в режиме отображения формул.

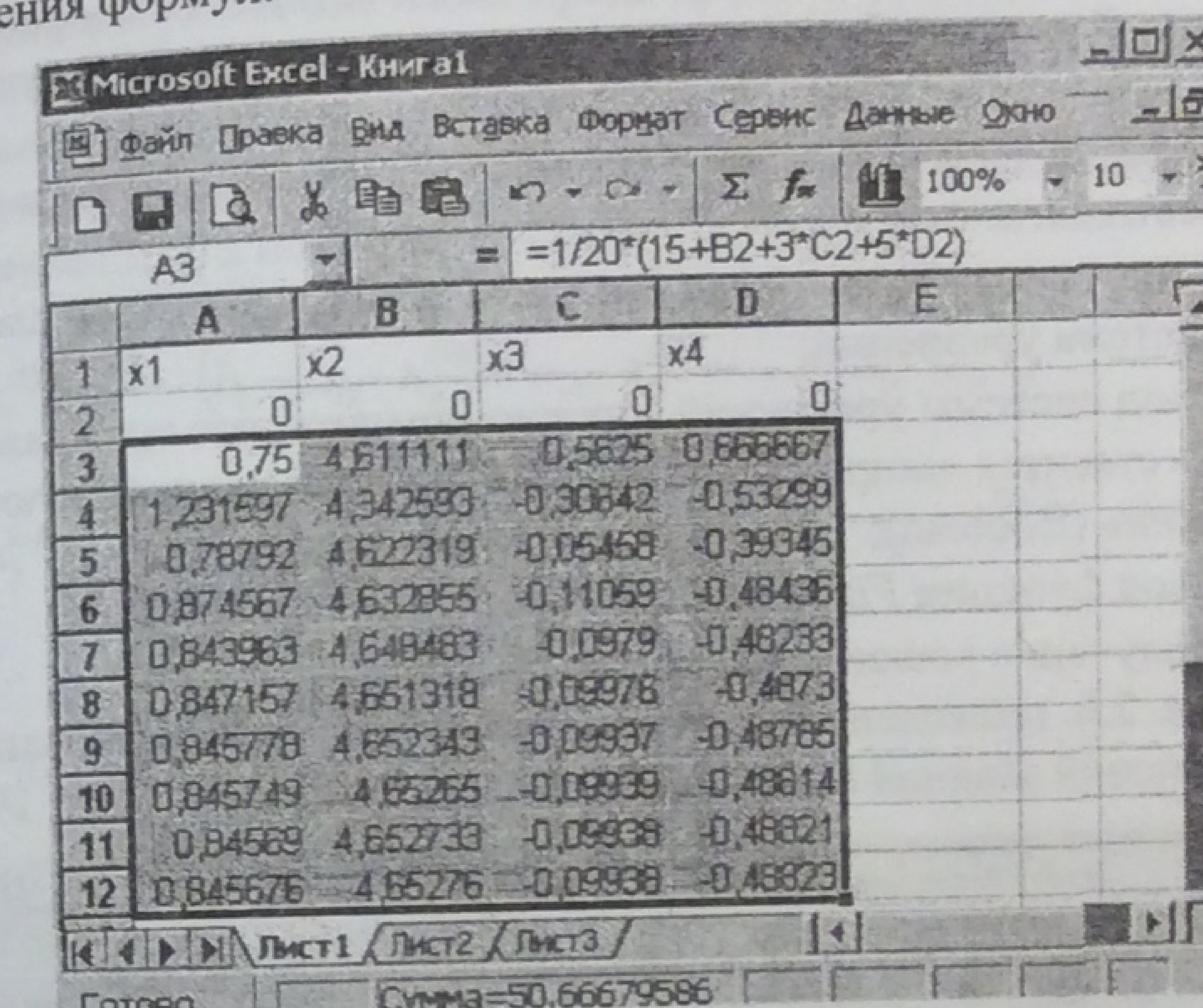


Рис. 2.4. Вычисление итераций копированием формул

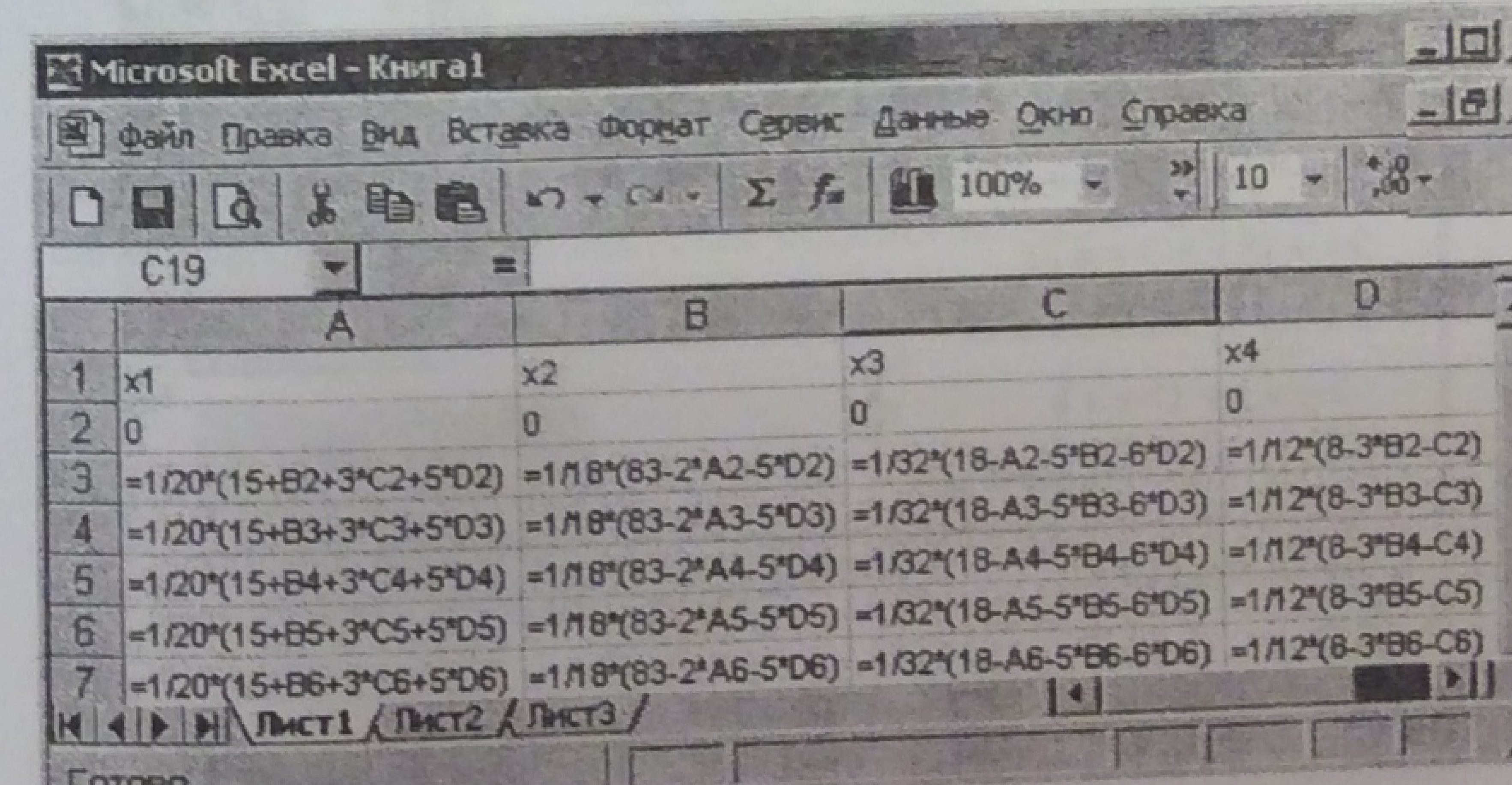


Рис. 2.5. Решение в режиме отображения формул

В пакете MathCAD для решения систем линейных и нелинейных уравнений методом итераций определена функция *Find*. Ее вид: *Find(x,y,z,...)*, где *x, y, z* – искомые неизвестные. Шаги решения систем линейных алгебраических уравнений выглядят следующим образом:

- Задание начальных приближений (нулевых) для всех неизвестных: *x:=x0, y:=y0, z:=z0,...;*
- Ввод слова *Given*, указывающего на то, что далее следует система уравнений;
- Ввод системы уравнений - нужно помнить, что знак равенства ставится «жирный», который берется с палитры «логический» (Boolean);
- Ввод функции *Find(x,y,z,...);*
- Получение решения нажатием клавиши =.

На рис. 2.6. приведено решение системы линейных алгебраических уравнений задания 8 в пакете MathCAD.

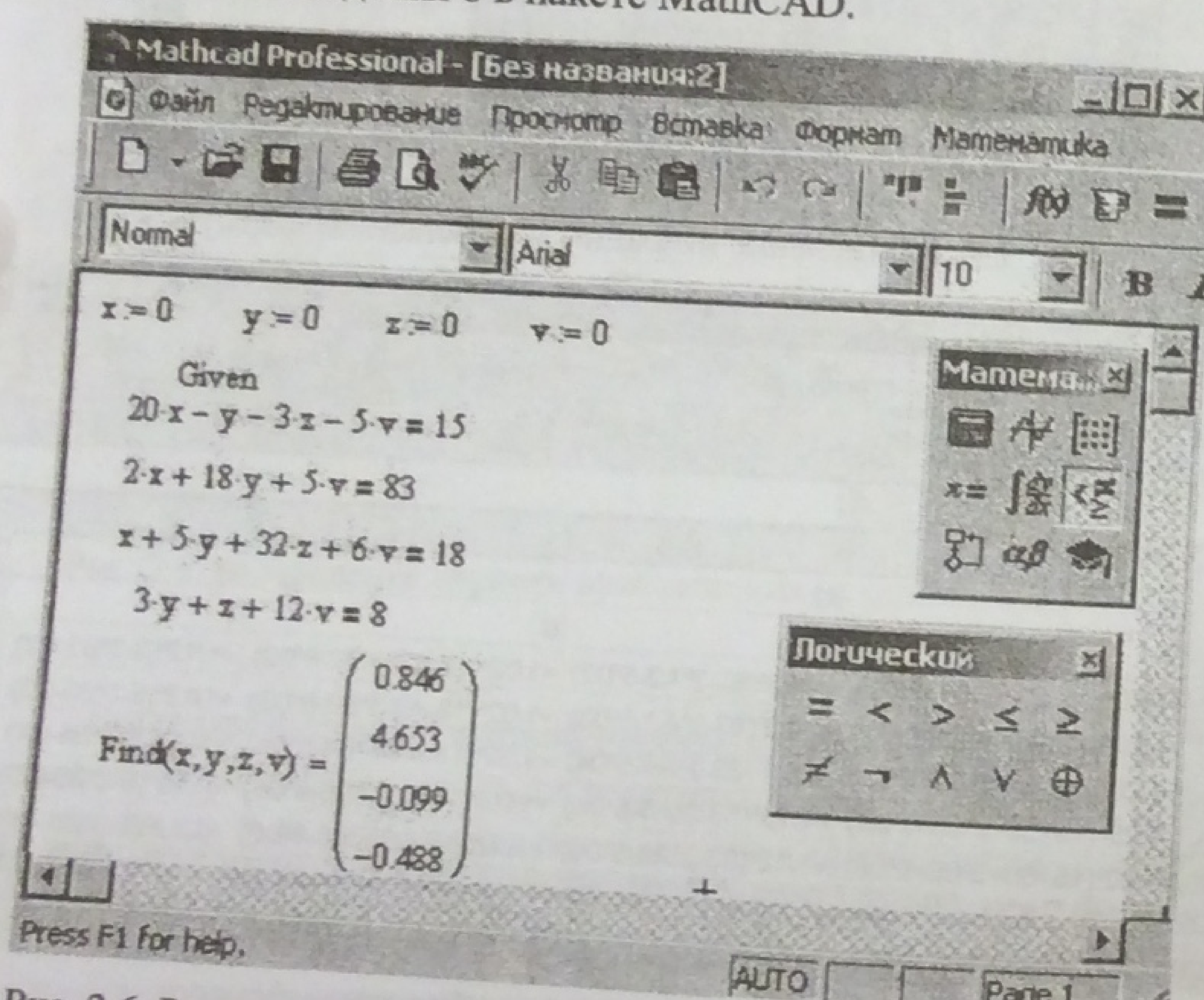


Рис. 2.6. Решение системы линейных уравнений в пакете MathCAD

Метод итерации Зейделя[2]

В методе итераций при вычислении следующего приближения используются значения предыдущего. В методе Зейделя предложено при получении следующего приближения использовать не только значения предыдущего шага итерации, но и уже полученные значения текущей итерации. Т.е. производить вычисления не по формуле (2.3), а по формуле (2.6).

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(0)} - a_{13} \cdot x_3^{(0)} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(1)} - a_{23} \cdot x_3^{(0)} - \ldots - a_{2n} \cdot x_n^{(0)}\right) \\ \ldots \\ x_n^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_n - a_{n1} \cdot x_1^{(1)} - a_{n2} \cdot x_2^{(1)} - \ldots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1}^{(1)}\right) \end{cases} \qquad (4.6)$$

Формулу (2.6) иногда записывают по-другому:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} + \sum_{i=j+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k-1)} + b_i$$

В некоторых случаях итерация Зейделя дает более быструю сходимость, т.е. требуется произвести меньше итераций. На рис. 2.7, 2.8 приведено решение системы задания методом Зейделя.

	A	B	C	D
1	x1	x2	x3	x4
2	0	0	0	0
3	=1/20*(15+B2+3*C2+5*D2)	=1/18*(83-2*A3-5*D2)	=1/32*(18-A3-5*B3-6*D2)	=1/12*(8-3*B3-C3)
4	=1/20*(15+B3+3*C3+5*D3)	=1/18*(83-2*A4-5*D3)	=1/32*(18-A4-5*B4-6*D3)	=1/12*(8-3*B4-C4)
5	=1/20*(15+B4+3*C4+5*D4)	=1/18*(83-2*A5-5*D4)	=1/32*(18-A5-5*B5-6*D4)	=1/12*(8-3*B5-C5)
6	=1/20*(15+B5+3*C5+5*D5)	=1/18*(83-2*A6-5*D5)	=1/32*(18-A6-5*B6-6*D5)	=1/12*(8-3*B6-C6)
7	=1/20*(15+B6+3*C6+5*D6)	=1/18*(83-2*A7-5*D6)	=1/32*(18-A7-5*B7-6*D6)	=1/12*(8-3*B7-C7)

Рис. 2.7. Фрагмент с решением в режиме отображения формул

[2] Филипп Людвиг Зейдель – немецкий математик, астроном, XIX в.

	A	B	C	D
1	x1	x2	x3	x4
2	0	0	0	0
3	0,75	4,52777778	-0,16840278	-0,45124421
4	0,83831742	4,64331035	-0,10460637	-0,48544372
5	0,84511363	4,65205507	-0,09977271	-0,48803271
6	0,84562867	4,65271701	-0,0994068	-0,48822869
7	0,84566766	4,65276712	-0,0993791	-0,48824352
8	0,84567061	4,65277091	-0,099377	-0,48824464
9	0,84567083	4,6527712	-0,09937684	-0,48824473
10	0,84567085	4,65277122	-0,09937683	-0,48824474
11	0,84567085	4,65277122	-0,09937683	-0,48824474
12	0,84567085	4,65277122	-0,09937683	-0,48824474

Рис. 2.8. Решение системы методом Зейделя в режиме отображения чисел

Метод прогонки

В курсе математики изучались точные методы решения систем линейных алгебраических уравнений: Крамера, Гаусса, с помощью обратной матрицы. Метод Гаусса применяют при решении систем до порядка числа уравнений 10^3. Он реализуется в два шага: на первом шаге путем алгебраических преобразований с коэффициентами уравнений (умножением на число, отличное от нуля, и почленным вычитанием одного уравнения из другого) систему коэффициентов перед неизвестными приводят к треугольному виду: в матрице коэффициенты перед неизвестными системы, расположенными ниже главной диагонали, равняются нулю. Второй шаг содержит вычисление неизвестных системы, начиная с последнего, что легко реализуется. В дополнение к этим уже известным методам познакомимся еще с одним точным методом, применяющимся при решении систем линейных алгебраических уравнений. Часто в задачах возникает необходимость решать системы линейных алгебраических уравнений, матрицы коэффициентов которых, являясь слабо

заполненными, т.е. содержащими немного ненулевых элементов, имеют определенную структуру. Среди таких систем выделяют обычно системы с матрицами ленточной структуры. В таких матрицах ненулевые элементы располагаются на главной диагонали, а также под- и над главной диагональю. Ниже для примера приведена система четвертого порядка

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 = b_2 \\ a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + a_{34}\cdot x_4 = b_3 \\ a_{43}\cdot x_3 + a_{44}\cdot x_4 = b_4 \end{cases}. \tag{2.7}$$

Их часто называют системами с трехдиагональными матрицами коэффициентов. Для решения систем с ленточными матрицами коэффициентов известный метод Гаусса модифицируют, вычисления организуют таким образом, чтобы не включать в формулы нулевые элементы. Решение сводится к определению нескольких коэффициентов по рекуррентным соотношениям. Как и в методе Гаусса, вычисления имеют «прямой» и «обратный» ходы. Назначение прямого хода в методе прогонки то же, что в методе Гаусса – сведение матрицы коэффициентов перед неизвестными к треугольному виду. В силу трехдиагональной структуры матрицы отличны от нуля лишь коэффициенты, расположенные на диагонали и под главной диагональю. И при выполнении прямого хода достигается обнуление элементов, расположенных под главной диагональю матрицы, т.е. система (2.7) приводится к виду (2.8)

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 = b_1 \\ a'_{22}\cdot x_2 + a'_{23}\cdot x_3 = b'_2 \\ a'_{33}\cdot x_3 + a'_{34}\cdot x_4 = b'_3 \\ a'_{44}\cdot x_4 = b'_4 \end{cases}. \tag{2.8}$$

При этих преобразованиях в силу того, что отличны от нуля элементы на диагонали выше главной, не возникнет ненулевых элементов в матрице и она примет двухдиагональный вид с ненулевыми коэффициентами на главной диагонали и диагонали над главной. При выполнении обратного хода, как в методе Гаусса, вычисляются решения системы, начиная с последнего уравнения системы.

Рассмотрим подробнее этот процесс на примере системы четырех линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot x_2 = f_1 \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 = f_2 \\ \quad a_3 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + c_3 \cdot x_4 = f_3 \\ \qquad a_4 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 = f_4 \end{cases} \qquad (2.9)$$

Начинаем выполнять прямой ход метода прогонки[3], целью которого является обнуление элементов, расположенных под главной диагональю матрицы A. Как в прямом ходе метода Гаусса, мы достигаем этого умножением всех элементов строки на число и вычитанием ее из нижестоящей строки системы. Первое уравнение системы (2.8) разделим на коэффициент b_1, т.е. получим систему в виде (2.10):

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{c_1}{b_1} \cdot x_2 = \dfrac{f_1}{b_1} \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 = f_2 \\ a_3 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + c_3 \cdot x_4 = f_3 \\ a_4 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 = f_4 \end{cases} \qquad (2.10)$$

Для получения нуля перед неизвестной x_1 во втором уравнении системы умножаем первое уравнение на коэффициент a_2 и вычитаем из второго уравнения системы (2.10) и получим систему (2.11)

[3] Название метода используется в отечественной литературе по вычислительной математике. Был введен в 50-е годы XX в. И.М. Гельфандом и О.В. Локуциевским.

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{c_1}{b_1} \cdot x_2 = \dfrac{f_1}{b_1} \\ \left(b_2 - a_2 \cdot \dfrac{c_1}{b_1}\right) \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 = f_2 - a_2 \cdot \dfrac{f_1}{b_1} \\ a_3 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + c_3 \cdot x_4 = f_3 \\ a_4 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 = f_4 \end{cases} \qquad (2.11)$$

Теперь второе уравнение системы (2.11) делим на коэффициент, стоящий перед неизвестной переменной на главной диагонали x_2:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{c_1}{b_1} \cdot x_2 = \dfrac{f_1}{b_1} \\ x_2 + \dfrac{c_2}{b_2 - a_2 \cdot \dfrac{c_1}{b_1}} \cdot x_3 = \dfrac{f_2 - a_2 \cdot \dfrac{f_1}{b_1}}{b_2 - a_2 \cdot \dfrac{c_1}{b_1}} \\ a_3 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + c_3 \cdot x_4 = f_3 \\ a_4 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 = f_4 \end{cases} \qquad (2.12)$$

Повторяем те же действия с третьим уравнением системы, т.е. умножаем второе уравнение на коэффициент, стоящий перед неизвестным на главной диагонали третьего уравнения x_3, вычитаем его из третьего уравнения, делим на величину коэффициента перед третьим неизвестным, т.е.

$$
\begin{cases}
x_1 + \dfrac{c_1}{b_1} \cdot x_2 = \dfrac{f_1}{b_1} \\[2ex]
x_2 + \dfrac{c_2}{b_2 - a_2 \cdot \dfrac{c_1}{b_1}} \cdot x_3 = \dfrac{f_2 - a_2 \cdot \dfrac{f_1}{b_1}}{b_2 - a_2 \cdot \dfrac{c_1}{b_1}} \\[2ex]
x_3 + \dfrac{c_3}{b_3 - a_3 \cdot \dfrac{c_2}{b_2}} \cdot x_4 = \dfrac{f_3 - a_3 \cdot \dfrac{\left(f_2 - a_2 \cdot \dfrac{f_1}{b_1}\right)}{b_2 - a_2 \cdot \dfrac{c_1}{b_1}}}{b_3 - a_3 \cdot \dfrac{c_2}{b_2}} \\[2ex]
a_4 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 = f_4
\end{cases}
\qquad (2.13)
$$

И, наконец, те же действия повторяем с коэффициентами третьего и четвертого уравнений (2.13)

$$
\begin{cases}
x_1 + \dfrac{c_1}{b_1} \cdot x_2 = \dfrac{f_1}{b_1} \\[2ex]
x_2 + \dfrac{c_2}{b_2 - a_2 \cdot \dfrac{c_1}{b_1}} \cdot x_3 = \dfrac{f_2 - a_2 \cdot \dfrac{f_1}{b_1}}{b_2 - a_2 \cdot \dfrac{c_1}{b_1}} \\[2ex]
x_3 + \dfrac{c_3}{b_3 - a_3 \cdot \dfrac{c_2}{b_2}} \cdot x_4 = \dfrac{f_3 - a_3 \cdot \dfrac{f_2 - a_2 \cdot \dfrac{f_1}{b_1}}{b_2 - a_2 \cdot \dfrac{c_1}{b_1}}}{b_3 - a_3 \cdot \dfrac{c_2}{b_2}} \\[2ex]
x_4 = \dfrac{f_4 - a_4 \cdot \dfrac{f_3 - a_3 \cdot \dfrac{f_2 - a_2 \cdot \dfrac{f_1}{b_1}}{b_2 - a_2 \cdot \dfrac{c_1}{b_1}}}{b_3 - a_3 \cdot \dfrac{c_2}{b_2}}}{b_4 - a_4 \cdot \dfrac{c_3}{b_3}}
\end{cases}
\qquad (2.14).
$$

Таким образом, за четыре шага исходная система (2.10) приведена к двухдиагональному виду, когда отличные от нуля коэффициенты располагаются на главной диагонали и на диагонали над главной (2.14). Для получения решения системы выполняется обратный ход метода прогонки, а именно из последнего уравнения вычисляется величина неизвестного с наибольшим индексом (в рассматриваемом случае x_4), как в обратном ходе метода Гаусса (2.15). Полученное из последнего уравнения системы (2.14) значение неизвестной с максимальным индексом (x_4) подставляется в предыдущее уравнение, что позволяет вычислить неизвестную с предыдущим индексом (x_3). И, продолжая такие действия далее, получаем формулы для вычисления всех неизвестных системы.

$$\begin{cases}
x_1 = \dfrac{f_1}{b_1} - \dfrac{c_1}{b_1}\cdot x_2 \\[2ex]
x_2 = \dfrac{f_2 - a_2\cdot\dfrac{f_1}{b_1}}{b_2 - a_2\cdot\dfrac{c_1}{b_1}} - \dfrac{c_2}{b_2 - a_2\cdot\dfrac{c_1}{b_1}}\cdot x_3 \\[2ex]
x_3 = \dfrac{f_3 - a_3\cdot\dfrac{f_2 - a_2\cdot\dfrac{f_1}{b_1}}{b_2 - a_2\cdot\dfrac{c_1}{b_1}}}{b_3 - a_3\cdot\dfrac{c_2}{b_2}} - \dfrac{c_3}{b_3 - a_3\cdot\dfrac{c_2}{b_2}}\cdot x_4 \\[2ex]
x_4 = \dfrac{f_4 - a_4\cdot\dfrac{f_3 - a_3\cdot\dfrac{f_2 - a_2\cdot\dfrac{f_1}{b_1}}{b_2 - a_2\cdot\dfrac{c_1}{b_1}}}{b_3 - a_3\cdot\dfrac{c_2}{b_2}}}{b_4 - a_4\cdot\dfrac{c_3}{b_3}}
\end{cases} \qquad (2.15)$$

Можно заметить, что даже для четырех неизвестных формулы выглядят очень громоздко. Однако, анализируя выполненное решение, можем отметить, что для коэффициентов, стоящих перед элементами выше главной диагонали, и в столбце свободных членов можно увидеть общность формул для их вычисления независимо от числа уравнений. Для сокращения записи удобно воспользоваться рекуррентными соотношениями. Запишем матрицу, полученную в результате прямого хода (2.15), в виде:

$$\begin{cases}
x_1 + s_1\cdot x_2 = g_1 \\
x_2 + s_2\cdot x_3 = g_2 \\
x_3 + s_3\cdot x_4 = g_3 \\
x_4 = g_4
\end{cases} \qquad (2.16)$$

Здесь введены обозначения

$$s_1 = \frac{c_1}{b_1},\ s_i = \frac{c_i}{b_i - a_i\cdot s_{i-1}},\ g_1 = \frac{f_1}{b_1},\ g_i = \frac{f_i - a_i\cdot g_{i-1}}{b_i - a_i\cdot s_{i-1}}\ i=2,3,4. \qquad (2.17)$$

Используя эти обозначения, можем записать также рекуррентные соотношения для вычисления решения системы (обратный ход метода прогонки) (2.18)

$$x_4 = g_4,\ x_i = g_i - s_i\cdot x_{i+1}\ i=3,2,1.$$

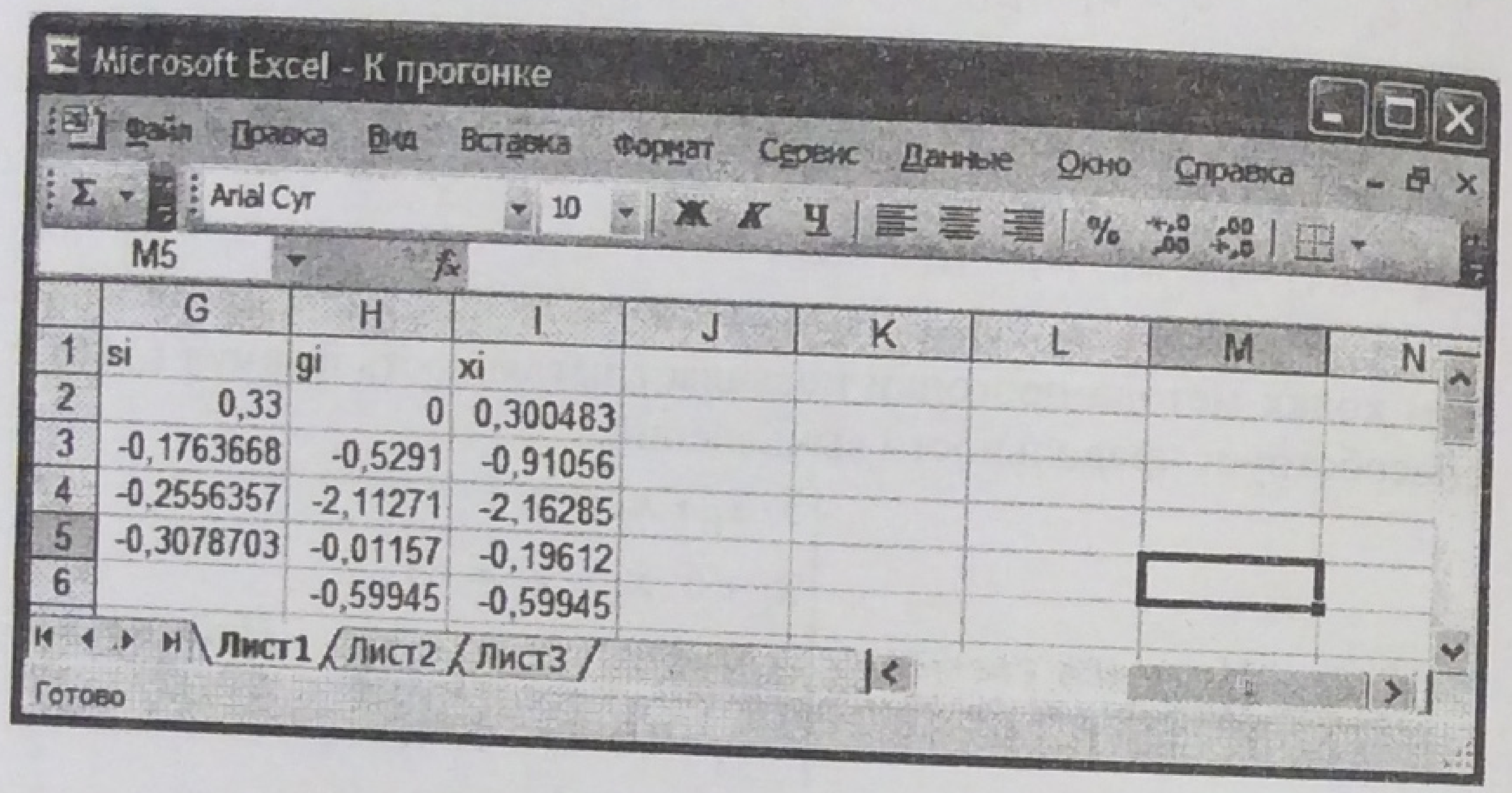
Применение рекуррентных соотношений в прямом и обратном ходах метода прогонки повышает наглядность формул (2.15) и способствует правильности вычислений.

Задание. *Имеется система* $\begin{cases} 3\cdot x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 6\cdot x_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - 8\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = 16 \\ -x_3 + 10\cdot x_4 - 3\cdot x_5 = 2 \\ -x_4 + 7\cdot x_5 = -4 \end{cases}$ *. Найти решение системы методами прогонки и итерации.*

Решение. Выполняем решение методом прогонки. Заданную систему линейных алгебраических приводим к виду (2.16), когда коэффициент в первом уравнении перед первой неизвестной равняется единице. Для этого разделим первое уравнение системы на коэффициент при первой неизвестной переменной и получим систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}33\cdot x_2 = 0 \\ x_1 + 6\cdot x_2 - x_3 = -3 \\ x_2 - 8\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = 16 \\ -x_3 + 10\cdot x_4 - 3\cdot x_5 = 2 \\ -x_4 + 7\cdot x_5 = -4 \end{cases}$$

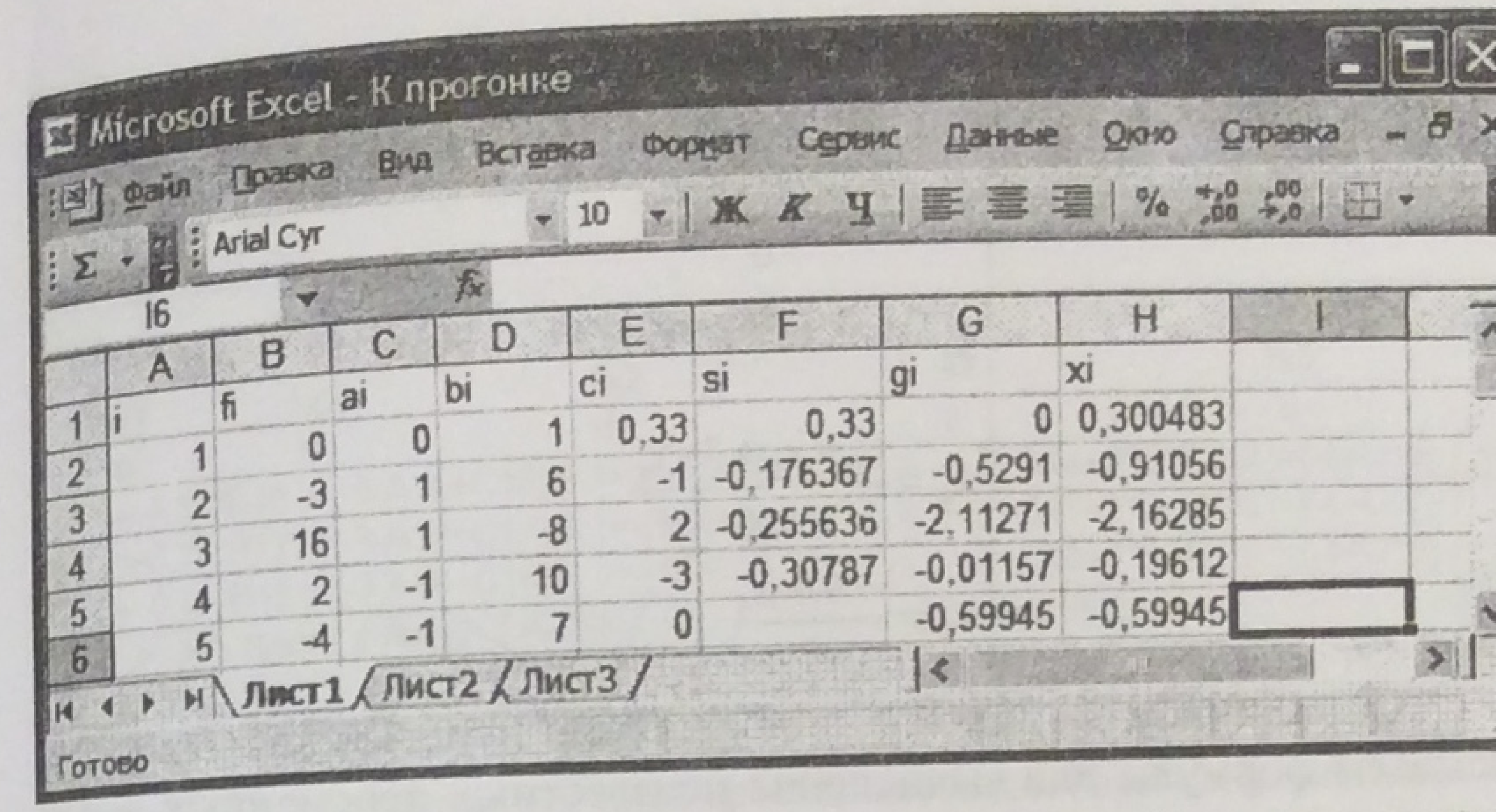
Будем проводить вычисления в табличном процессоре Microsoft Excel. Заполним таблицу для выполнения вычислений следующим образом. В первой строке надпишем столбцы именами переменных, которые будут находиться в этих столбцах: I – номер неизвестной, f_i -значения столбца свободных членов уравнения; a_i, b_i, c_i – значения коэффициентов уравнений; s_i, g_i, x_i – столбцы, в которых будут проводиться вычисления. В соответствующие ячейки таблицы заносятся известные значения (рис. 2.9).



	G	H	I	J	K	L	M	N
1	si	gi	xi					
2	0,33	0	0,300483					
3	-0,1763668	-0,5291	-0,91056					
4	-0,2556357	-2,11271	-2,16285					
5	-0,3078703	-0,01157	-0,19612					
6		-0,59945	-0,59945					

Рис. 2.9. Первый этап поиска решения методом прогонки

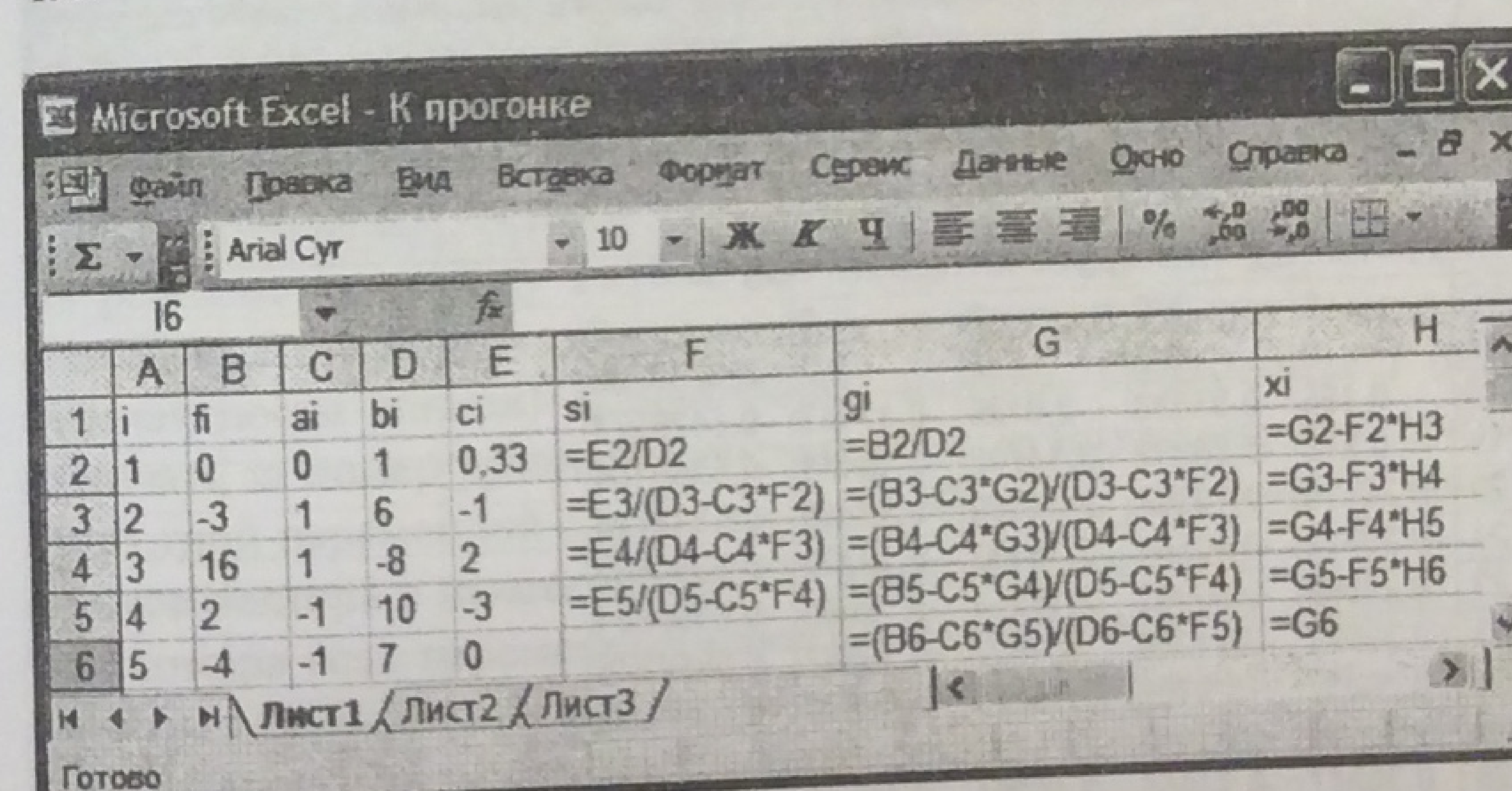
В столбцах F, G таблицы Microsoft Excel выполняем вычисления прямого хода по формулам (2.16). Как обычно формулы набираются во второй строке вычислений и далее копируются для всех уравнений системы. В столбце H выполняем вычисления обратного хода по формулам (2.16). Причем начинаем вычисления с последнего значения системы, далее пишем формулу для определения предпоследнего значения и копируем ее, ведя за маленький черный крестик в правом нижнем углу ячейки с формулой снизу вверх. Результат вычислений показан на рис. 2.10.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	i	fi	ai	bi	ci	si	gi	xi	
2	1	0	0	1	0,33	0,33	0	0,300483	
3	2	-3	1	6	-1	-0,176367	-0,5291	-0,91056	
4	3	16	1	-8	2	-0,255636	-2,11271	-2,16285	
5	4	2	-1	10	-3	-0,30787	-0,01157	-0,19612	
6	5	-4	-1	7	0		-0,59945	-0,59945	

Рис. 2.10. Вычисления методом прогонки (режим отображения чисел)

На рис. 2.11 приведены формулы, по которым выполнен расчет.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	fi	ai	bi	ci	si	gi	xi
2	1	0	0	1	0,33	=E2/D2	=B2/D2	=G2-F2*H3
3	2	-3	1	6	-1	=E3/(D3-C3*F2)	=(B3-C3*G2)/(D3-C3*F2)	=G3-F3*H4
4	3	16	1	-8	2	=E4/(D4-C4*F3)	=(B4-C4*G3)/(D4-C4*F3)	=G4-F4*H5
5	4	2	-1	10	-3	=E5/(D5-C5*F4)	=(B5-C5*G4)/(D5-C5*F4)	=G5-F5*H6
6	5	-4	-1	7	0		=(B6-C6*G5)/(D6-C6*F5)	=G6

Рис. 2.11. Вычисления методом прогонки (режим отображения формул)

Получим решение этой системы методом итераций. Для этого преобразуем уравнения системы, как равенства для вычисления неизвестных:

$$
\begin{cases}
x_1 = -0{,}33 \cdot x_2 \\
x_2 = \dfrac{-3 - x_1 + x_3}{6} \\
x_3 = -\dfrac{16 - x_2 - 2 \cdot x_4}{8} \\
x_4 = \dfrac{2 + x_3 + 3 \cdot x_5}{10} \\
x_5 = \dfrac{-4 + x_4}{7}
\end{cases}
$$

Принимаем за нулевое приближение нулевые значения, записываем формулы для вычисления неизвестных переменных через другие неизвестные и копируем формулы до тех пор, пока значения не станут неизменными в рамках заданной точности (рис. 2.12, 2.13).

	A	B	C	D	E	F	G	H
15	x1	x2	x3	x4	x5			
16	0	0	0	0	0			
17	0	-0,5	-2	0,2	-0,5714286			
18	0,165	-0,83333	-2,0125	-0,17143	-0,5428571			
19	0,275	-0,86292	-2,14702	-0,16411	-0,5959184			
20	0,28476	-0,90367	-2,14889	-0,19348	-0,5948724			
21	0,29821	-0,90561	-2,16133	-0,19335	-0,5990683			
22	0,29885	-0,90992	-2,16154	-0,19585	-0,5990501			
23	0,30027	-0,91006	-2,1627	-0,19587	-0,5994076			
24	0,30032	-0,9105	-2,16273	-0,19609	-0,5994098			
25	0,30046	-0,91051	-2,16284	-0,1961	-0,5994418			
26	0,30047	-0,91055	-2,16284	-0,19612	-0,5994422			
27	0,30048	-0,91055	-2,16285	-0,19612	-0,5994452			
28	0,30048	-0,91055	-2,16285	-0,19612	-0,5994452			

Рис. 2.12. Решение методом простой итерации (режим отображения чисел)

	A	B	C	D	E
15	x1	x2	x3	x4	x5
16	0	0	0	0	0
17	=-0,33*B16	=(-3-A16+C16)/6	=-(16-B16-2*D16)/8	=(2+C16+3*E16)/10	=(-4+D16)/7
18	=-0,33*B17	=(-3-A17+C17)/6	=-(16-B17-2*D17)/8	=(2+C17+3*E17)/10	=(-4+D17)/7
19	=-0,33*B18	=(-3-A18+C18)/6	=-(16-B18-2*D18)/8	=(2+C18+3*E18)/10	=(-4+D18)/7

Рис. 2.13. Решение методом простой итерации (фрагмент таблицы в режиме отображения формул)

Как известно, функция пакета MathCAD *given – find* позволяет решать системы методом итерации. Решение системы выполняется с использованием этой функции (рис. 2.14).

Решение системы методом прогонки в пакете MathCAD будет несколько более громоздким, так как в пакете отсутствует функция, реализующая этот метод, есть функция ***lsolve***, которая вычисляет решение по методу Гаусса. По ходу вычислений определяются значения коэффициентов для разных уравнений. Имеет смысл (для компактности записи) использовать вектора. Переменная *i* будет отвечать за номер уравнения системы, т.е. за коэффициенты при неизвестной переменной с этим номером. Однако, размерность компонентов вектора в пакете MathCAD изменяется от нуля, следовательно, номера всех переменных сдвигаем (уменьшаем) на единицу. Затем пишем зависимости для вычисления коэффициентов прямого хода. Далее записываются зависимости для получения неизвестных – обратный ход метода. Все решение приведено на рис. 2.15.

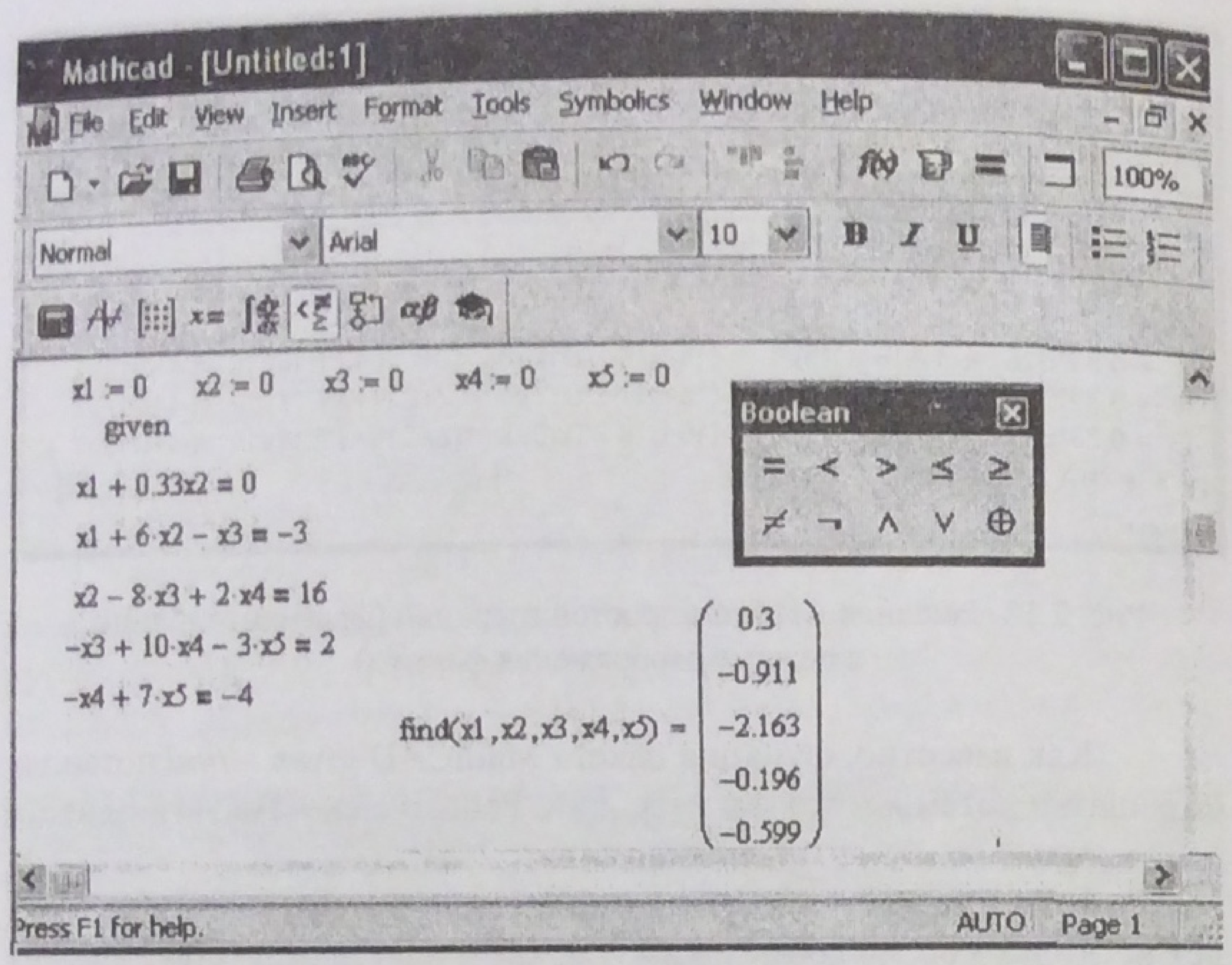


Рис. 2.14. Решение в пакете MathCAD методом итерации

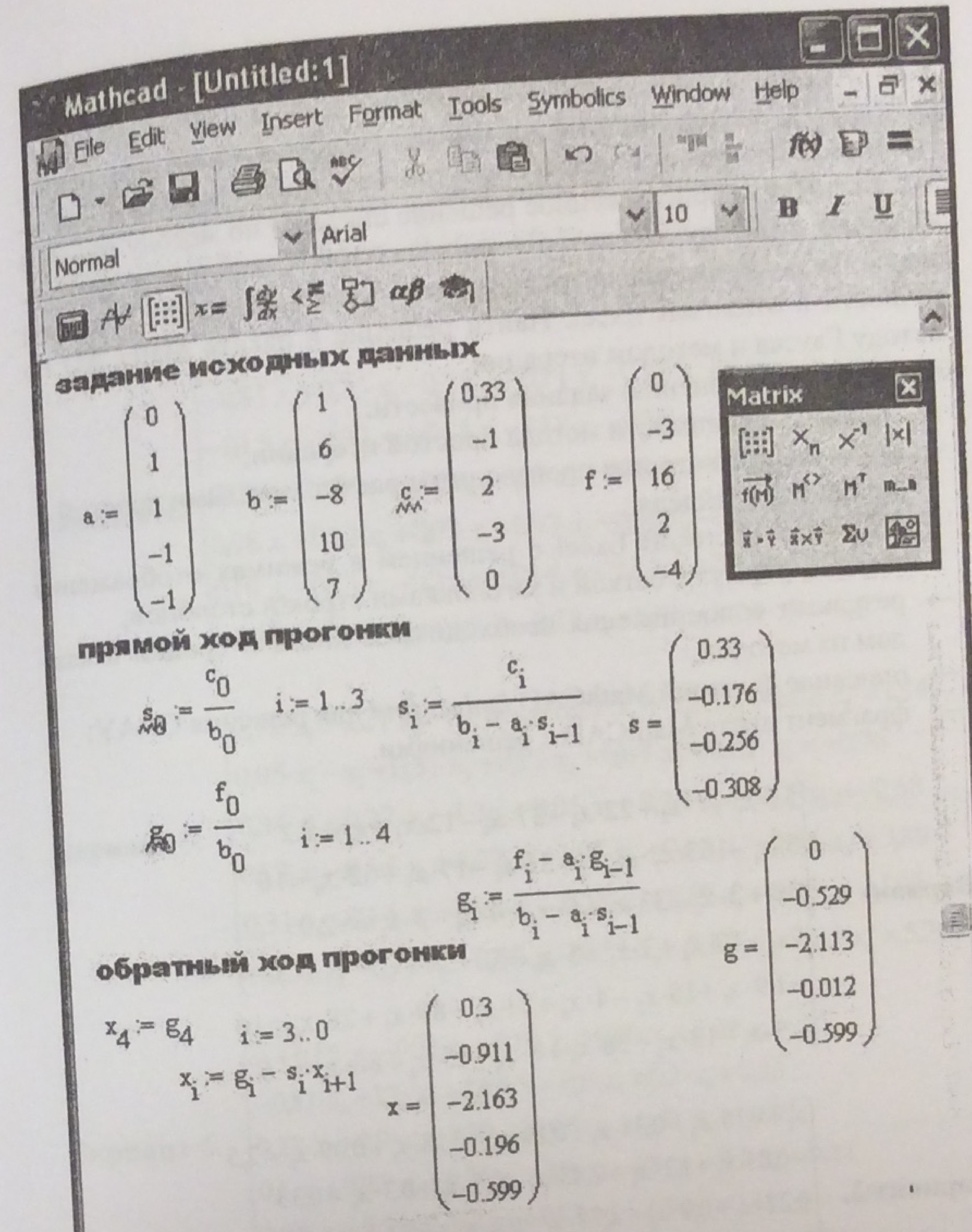


Рис. 2.15. Метод прогонки в пакете MathCAD

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

ЗАДАНИЕ. Задана система линейных алгебраических уравнений. Проверить сходимость метода простой итерации для данной системы. Вычислить приближенное решение системы по методу простой итерации и методу Зейделя с точностью 10^{-4}. Сопоставить необходимое число итераций, потребовавшееся для достижения заданной точности в Microsoft Excel. Найти решение в пакете MathCAD по методу Гаусса и методом итерации.

В отчете по выполнению задания привести:

— проверку сходимости метода простой итерации;
— формулы, по которым производится расчет методами простой итерации и Зейделя;
— таблички Microsoft Excel с решением в режимах отображения чисел и формул с сеткой и заголовками строк и столбцов;
— результат сопоставления необходимого числа итераций в каждом из методов;
— описание функций MathCAD *lsolve, find* для решения СЛАУ;
— фрагмент листа MathCAD с решениями.

Вариант 1.

$$\begin{cases} 57\cdot x_1-7\cdot x_2+22\cdot x_3-37\cdot x_4-12\cdot x_5+x_6=2.2\\ 5\cdot x_1-163\cdot x_2-3\cdot x_3+31\cdot x_4-17\cdot x_5+62\cdot x_6=10\\ 3x_1+2\cdot x_2-33\cdot x_3+6\cdot x_4-4\cdot x_5-3\cdot x_6=-2.9\\ 2x_3-19\cdot x_4+3\cdot x_5+5\cdot x_6=5\\ -1.9\cdot x_1+15\cdot x_2-4\cdot x_3+21\cdot x_4+89\cdot x_5+28\cdot x_6=16\\ -5\cdot x_1-18\cdot x_2+38\cdot x_3+8\cdot x_4-13\cdot x_5+88\cdot x_6=-6.7 \end{cases}$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} x_1+0{,}15\cdot x_2-0{,}31\cdot x_3+0{,}19\cdot x_4+0{,}18\cdot x_5+0.09\cdot x_6=2{,}5\\ -0{,}81\cdot x_2+1{,}2\cdot x_2+2.83\cdot x_3-0{,}6\cdot x_5+0.3\cdot x_6=0{,}33\\ 0{,}22\cdot x_1+0{,}9\cdot x_2-2{,}79\cdot x_3-0{,}6\cdot x_5+0.31\cdot x_6=-0{,}98\\ 0{,}1\cdot x_1+0{,}02\cdot x_2+0{,}31\cdot x_3-3{,}9\cdot x_4-0{,}8\cdot x_5-0.5\cdot x_6=0{,}22\\ 0{,}06\cdot x_1-0{,}5\cdot x_2-0.2\cdot x_3+0.97\cdot x_4-2{,}7\cdot x_5+0.44\cdot x_6=-1{,}61\\ -0{,}5\cdot x_1+0{,}3\cdot x_2+1.1\cdot x_3-1.7\cdot x_4+0{,}3\cdot x_5-6.9\cdot x_6=1{,}91 \end{cases}$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} 0{,}87\cdot x_1-0{,}21\cdot x_2+0{,}22\cdot x_3-0{,}37\cdot x_4-0{,}21\cdot x_5+0.31\cdot x_6=0{,}43\\ 0{,}25\cdot x_1-1{,}63\cdot x_2-0{,}03\cdot x_3+0{,}31\cdot x_4-0{,}07\cdot x_5+0.62\cdot x_6=-1{,}1\\ 0{,}33\cdot x_1-0{,}22\cdot x_2-3{,}38\cdot x_3+0{,}65\cdot x_4-0{,}94\cdot x_5-0.33\cdot x_6=0{,}48\\ 0{,}19\cdot x_1+0{,}07\cdot x_3-1{,}09\cdot x_4+0{,}32\cdot x_5-0.55\cdot x_6=-1{,}67\\ 0{,}31\cdot x_1-0{,}15\cdot x_2-0{,}42\cdot x_3+0{,}21\cdot x_4+1{,}89\cdot x_5+0.28\cdot x_6=-0{,}36\\ -0{,}25\cdot x_1-0{,}18\cdot x_2+0{,}38\cdot x_3+0{,}58\cdot x_4-0{,}13\cdot x_5+2.88\cdot x_6=3{,}23 \end{cases}$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} -0{,}81\cdot x_1+0{,}25\cdot x_2-0{,}21\cdot x_3-0{,}11\cdot x_4+0.12\cdot x_5+0.13\cdot x_6=-0{,}16\\ -0{,}15\cdot x_1-0{,}92\cdot x_2+0{,}13\cdot x_3-0{,}18\cdot x_4-0.25\cdot x_5+0.28\cdot x_6=3{,}33\\ 0{,}12\cdot x_1-1{,}18\cdot x_3+0{,}16\cdot x_4-0{,}19\cdot x_5+0.08\cdot x_6=-7{,}85\\ 0{,}08\cdot x_1+0{,}12\cdot x_2+0{,}03\cdot x_3+0{,}97\cdot x_4-0{,}08\cdot x_5-0.11\cdot x_6=1{,}97\\ 0{,}19\cdot x_1-0{,}13\cdot x_2-0{,}29\cdot x_3+0{,}14\cdot x_4-2{,}84\cdot x_5+0.31\cdot x_6=0{,}97\\ -0{,}31\cdot x_1+0{,}21\cdot x_2+0{,}19\cdot x_3-0{,}27\cdot x_4+0{,}31\cdot x_5-6{,}4\cdot x_6=-1{,}7 \end{cases}$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 0{,}79\cdot x_1+0{,}21\cdot x_2-0{,}06\cdot x_3-0{,}27\cdot x_4+0{,}27\cdot x_5-0.08\cdot x_6=1{,}84\\ 0{,}05\cdot x_1-x_2+0{,}31\cdot x_3+0{,}12\cdot x_4-0{,}07\cdot x_5+0.22\cdot x_6=-0{,}76\\ 0{,}34\cdot x_1-0{,}27\cdot x_2-1.3x_3+0{,}05\cdot x_4-0{,}24\cdot x_5+0.33\cdot x_6=-2{,}68\\ 0{,}12\cdot x_1-0{,}34\cdot x_2+0{,}07\cdot x_3+1{,}06\cdot x_4+0{,}02\cdot x_5-0.55\cdot x_6=3{,}89\\ 0{,}31\cdot x_1-0{,}14\cdot x_2+0{,}22\cdot x_3-0{,}21\cdot x_4+1{,}29\cdot x_5+0.22\cdot x_6=1{,}96\\ -0{,}51\cdot x_1-0{,}11\cdot x_2+0{,}48\cdot x_3+0{,}51\cdot x_4-0.34\cdot x_5+2.83\cdot x_6=5{,}26 \end{cases}$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} x_1+0{,}15\cdot x_2-0{,}31\cdot x_3+0{,}19\cdot x_4+0{,}18\cdot x_5+0.09\cdot x_6=2{,}5\\ -0{,}81\cdot x_2+1{,}2\cdot x_2+2.83\cdot x_3-0{,}6\cdot x_5+0.3\cdot x_6=0{,}33\\ 0{,}22\cdot x_1+0{,}9\cdot x_2-2{,}79\cdot x_3-0{,}6\cdot x_5+0.31\cdot x_6=-0{,}98\\ 0{,}1\cdot x_1+0{,}02\cdot x_2+0{,}31\cdot x_3-3{,}9\cdot x_4-0{,}8\cdot x_5-0.5\cdot x_6=0{,}22\\ 0{,}06\cdot x_1-0{,}5\cdot x_2-0.2\cdot x_3+0.97\cdot x_4-2{,}7\cdot x_5+0.44\cdot x_6=-1{,}61\\ -0{,}5\cdot x_1+0{,}3\cdot x_2+1.1\cdot x_3-1.7\cdot x_4+0{,}3\cdot x_5-6.9\cdot x_6=1{,}91 \end{cases}$$

Варнант 7.
$$\begin{cases}0{,}71\cdot x_1-0{,}25\cdot x_2 00{,}11\cdot x_3-0{,}12\cdot x_4+0{,}12\cdot x_5+0.19\cdot x_6=-0{,}67\\ -0{,}11\cdot x_1-0{,}92\cdot x_2-0{,}13\cdot x_3-0{,}28\cdot x_4-0{,}26\cdot x_5+0.28\cdot x_6=0{,}88\\ 0{,}12\cdot x_1+0{,}29\cdot x_2+2{,}18\cdot x_3+0{,}06\cdot x_4-0{,}16\cdot x_5+0.03\cdot x_6=0{,}18\\ 0{,}06\cdot x_1+0{,}12\cdot x_2+0{,}03\cdot x_3-0{,}94\cdot x_4-0{,}08\cdot x_5-0.15\cdot x_6=-1{,}44\\ 0{,}16\cdot x_1-0{,}15\cdot x_2+0{,}24\cdot x_3+0{,}18\cdot x_4-2{,}47\cdot x_5+0{,}34\cdot x_6=-1{,}14\\ -0{,}35\cdot x_1+0{,}31\cdot x_2+0{,}09\cdot x_3-0.71\cdot x_4+0{,}31\cdot x_5-7{,}14\cdot x_6=5{,}81\end{cases}$$

Варнант 8.
$$\begin{cases}20\cdot x_1-1.5x_2-3\cdot x_3+5\cdot x_4-3\cdot x_5+2.9x_6=2.5\\ 2\cdot x_1+19\cdot x_2+3\cdot x_3+5\cdot x_4-2\cdot x_5+7.8\cdot x_6=-1.5\\ x_1+5\cdot x_2+38\cdot x_3+2\cdot x_4-6\cdot x_5+3.3\cdot x_6=9.8\\ 3\cdot x_2+x_3+12\cdot x_4+8\cdot x_5-2\cdot x_6=10\\ -x_1+5\cdot x_2-2\cdot x_3+4.8\cdot x_4+27\cdot x_5+4\cdot x_6=-6\\ -2x_1+4\cdot x_2+x_3-2.7\cdot x_4+3\cdot x_5-29\cdot x_6=17\end{cases}$$

Вариант 9.
$$\begin{cases}40\cdot x_1-1.5\cdot x_2-4\cdot x_3+5\cdot x_4+6.9\cdot x_6=2.5\\ 5\cdot x_1+69\cdot x_2+9\cdot x_3-10\cdot x_4-2\cdot x_5+5.8\cdot x_6=1.5\\ 2\cdot x_1+9\cdot x_2+28\cdot x_3-6\cdot x_5+3.3x_6=9.8\\ x_2+3\cdot x_3+14\cdot x_4-9\cdot x_5-2\cdot x_6=-10\\ 6\cdot x_1-5\cdot x_2-2x_3+8\cdot x_4+27\cdot x_5+4\cdot x_6=-6\\ -5\cdot x_1+3\cdot x_2-12.7\cdot x_3-12.7\cdot x_4+3\cdot x_5-69\cdot x_6=1.7\end{cases}$$

Вариант 10.
$$\begin{cases}16\cdot x_1-2\cdot x_2-8\cdot x_4+3\cdot x_5+2x_6=-2\\ 5\cdot x_1+38\cdot x_2-1.3x_3+5\cdot x_4-3\cdot x_5+1.8\cdot x_6=5.3\\ 5\cdot x_1-x_2+49\cdot x_3-3\cdot x_4-2x_5+6\cdot x_6=0.8\\ -2\cdot x_1+6x_2+26\cdot x_4+x_5+5\cdot x_6=-11\\ x_1-x_2+3\cdot x_3+2.5\cdot x_4-29\cdot x_5+7.6\cdot x_6=6\\ -2x_1+6\cdot x_2+6.7\cdot x_3-3\cdot x_4+8\cdot x_5-19\cdot x_6=10\end{cases}$$

ЗАДАНИЕ. Задана система линейных алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов трехдиагонального вида. Найти решение в пакетах MathCAD и Microsoft Excel методом прогонки. Вычислить (если возможно) приближенное решение системы по методу простой итерации.

В отчете по выполнению задания привести:

- — формулы, по которым производится расчет;
- — таблички Microsoft Excel с решением в режимах отображения чисел и формул с сеткой и заголовками строк и столбцов;
- — функции MathCAD *lsolve, find* для решения СЛАУ;
- — фрагмент листа MathCAD с решениями.

Вариант 1.
$$\begin{cases}3\cdot x_1-0.9\cdot x_2=5\\ 1.6\cdot x_1-7.6\cdot x_2-1.3\cdot x_3=9\\ -0.5\cdot x_2+8\cdot x_3-3\cdot x_4=-5\\ 0.3\cdot x_3-9\cdot x_4+1.5\cdot x_5=-0.8\\ -3\cdot x_4-5.5\cdot x_5-2\cdot x_6=6.8\\ 1.6\cdot x_5-10\cdot x_6+2.5\cdot x_7=1.3\\ -1.4\cdot x_6+5\cdot x_7=8\end{cases}$$

Вариант 2.
$$\begin{cases}8.6\cdot x_1-2.7\cdot x_2=9.2\\ -2\cdot x_1+7\cdot x_2-2.3\cdot x_3=2.8\\ 3.2\cdot x_2+9\cdot x_3-2.8\cdot x_4=9.4\\ -2\cdot x_3-8\cdot x_4+x_5=-12.8\\ -2.5\cdot x_4+6\cdot x_5-2.1\cdot x_6=12.2\\ -0.5\cdot x_5+7.3\cdot x_6-2.7\cdot x_6=2.6\\ -3.8\cdot x_6+6.9\cdot x_7=-1\end{cases}$$

Вариант 3. $\begin{cases} -9.6\cdot x_1+4.7\cdot x_2=-9.8 \\ -2.1\cdot x_1-8.4\cdot x_2+2.3\cdot x_3=10 \\ 1.2\cdot x_2-9.7\cdot x_3-2.1\cdot x_4=0 \\ 0.9\cdot x_3-9.5\cdot x_4-3.7\cdot x_5=-18.3 \\ 1.7\cdot x_4+19.7\cdot x_5+4.9\cdot x_6=16.2 \\ -2.5\cdot x_5+9.\cdot x_6+0.6\cdot x_7=1.5 \\ -1.8\cdot x_6+6.5\cdot x_7=4.7 \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} -14\cdot x_1+x_2=-2 \\ 2\cdot x_1-28\cdot x_2-4\cdot x_3=19 \\ -3\cdot x_2+25\cdot x_3+8\cdot x_4=20 \\ -2\cdot x_3-8\cdot x_4+x_5=0 \\ -3\cdot x_4+24\cdot x_5-2\cdot x_6=-13 \\ -2\cdot x_5-9\cdot x_6+x_7=2 \\ x_6-6\cdot x_7=15 \end{cases}$

Вариант 5. $\begin{cases} 10\cdot x_1+2\cdot x_2=-16 \\ 2\cdot x_1-9\cdot x_2+2\cdot x_3=10 \\ 2\cdot x_2+8\cdot x_3-2\cdot x_4=4 \\ x_3-14\cdot x_4+2\cdot x_5=-3 \\ 2\cdot x_4+9\cdot x_5-5\cdot x_6=2.3 \\ -3\cdot x_5+18\cdot x_6+5\cdot x_7=0.3 \\ -5\cdot x_6+11\cdot x_7=-2 \end{cases}$

Вариант 6. $\begin{cases} 3\cdot x_1-4.9\cdot x_2=-5 \\ 1.1\cdot x_1-5.6\cdot x_2-2.3\cdot x_3=-4 \\ -1.5\cdot x_2+8\cdot x_3+x_4=-2 \\ 2.3\cdot x_3-12\cdot x_4+1.5\cdot x_5=0.8 \\ 2\cdot x_4-5.5\cdot x_5+1.8\cdot x_6=-1.8 \\ -0.8\cdot x_5+2.7\cdot x_6+0.1\cdot x_7=0.8 \\ -6.1\cdot x_6+9.9\cdot x_7=0 \end{cases}$

Вариант 7. $\begin{cases} 3\cdot x_1-2\cdot x_2=6 \\ 3\cdot x_1+5\cdot x_2-2\cdot x_3=-1 \\ -x_2+5\cdot x_3-x_4=2 \\ x_3-3\cdot x_4+2\cdot x_5=0 \\ 2\cdot x_4-8\cdot x_5+x_6=3 \\ 3\cdot x_5+9\cdot x_6-2x_7=4 \\ 3\cdot x_6+8x_7=13 \end{cases}$

Вариант 8. $\begin{cases} -18\cdot x_1-2.7\cdot x_2=5.2 \\ -2\cdot x_1-9\cdot x_2-2.3\cdot x_3=2.8 \\ -3.2\cdot x_2+9\cdot x_3+2.8\cdot x_4=-1 \\ -2\cdot x_3-8\cdot x_4-x_5=6.8 \\ -2.5\cdot x_4+10\cdot x_5-1.5\cdot x_6=2.2 \\ x_5-6\cdot x_6+0.1\cdot x_7=-5 \\ 3\cdot x_6-9\cdot x_7=4.2 \end{cases}$

Вариант 9.
$$\begin{cases} 9.1 \cdot x_1 + 2.7 \cdot x_2 = 3.2 \\ -2.1 \cdot x_1 - 9.4 \cdot x_2 + 2.4 \cdot x_3 = -12.7 \\ -1.9 \cdot x_2 + 9.7 \cdot x_3 + 2.5 \cdot x_4 = 7.9 \\ 2.9 x_3 + 9.5 \cdot x_4 - 2.7 \cdot x_5 = 8.9 \\ -1.7 \cdot x_4 + 10.7 \cdot x_5 + 4.1 \cdot x_6 = -16.9 \\ 0.5 \cdot x_5 + 6.3 \cdot x_6 - 0.7 \cdot x_7 = -9 \\ -2.8 \cdot x_6 + 5.5 \cdot x_7 = 2.6 \end{cases}$$

Вариант 10.
$$\begin{cases} 16 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 = 38 \\ -2 \cdot x_1 - 18 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 0 \\ -3 \cdot x_2 + 21 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 = 22 \\ -2 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4 + x_5 = 19 \\ -3 \cdot x_4 + 14 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6 = 3 \\ 3 \cdot x_5 - 7 \cdot x_6 - x_7 = 0 \\ x_6 + 4 \cdot x_7 = -2 \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бронштейн И.Н., Семиндяев Н.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов
2. *Быкова О.Г.* Информатика. Приближенные методы вычислений: Методические указания к практическим и лабораторным работам. СПб, СПГГИ.- 2009.- 53 с.
3. *Быкова О.Г.* Работа в пакете Mathcad. СПб, СПГГИ.- 2009.- 71 с.
4. *Быкова О.Г.* Табличный процессор Microsoft Excel. СПб, Национальный минерально-сырьевой университет «Горный».- 2013.- 65 с.
5. *Быкова О.Г.* Задачник по методам вычислений для инженеров. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012, 84 с.

6. *Вержбицкий В.М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения).- М.: Высшая школа, 2000, 266 с.
7. *Волков Е.А.* Численные методы: Учебное пособие. 4-е изд., стер.- СПб.: Издательство «Лань», 2007, 256 с.
8. *Григулецкий В.Г.* Высшая математика для экономистов: уч. пособие для вузов/Серия «Высшее образование» /В.Г. Григулецкий, З.В. Ященко.- Ростов на Дону: Феникс, 2004, 640 с.
9. *Демидович Н.П.*. Численные методы анализа. Изд.3-е, переработанное/ Н.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова.- М.: Наука, 1967, 368 с.
10. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978, 512 с.
11. Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика и применение ЭВМ» сост. Беляев В.В. и др..- Л.- 1987.- 160 с.
12. *Пирумов У.Г.* Численные методы: теория и практика: учеб. пособие для бакалавров. 5-е изд. Перераб. и доп..- М.: Издательство Юрайт, 2012, 421 с.
13. *Половко А.М.*. MathCAD для студента/ А.М. Половко, И.В Ганичев. СПб.: БХВ-Петербург, 2006, 336 с.

СОДЕРЖАНИЕ