§ 6. Ортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве

21. Дана ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве со скалярным произведением. Найти расстояние между элементами x и y.

1. $x = e_2 + \dfrac{e_3 + 2e_4}{3} + e_7, \quad y = \dfrac{2}{3}(e_4 - e_3) - e_9$
2. $x = e_7 - e_9 + 5e_2, \quad y = -2e_9 + \dfrac{1}{2}(e_2 - e_{12})$
3. $x = -e_2 + 7e_{10}, \quad y = 4(e_{10} - e_5) - (e_2 + e_3)$
4. $x = \dfrac{3e_5 + 3e_6 - e_7 - e_8}{2}, \quad y = \dfrac{e_4 + e_6}{3}$
5. $x = e_1 + \dfrac{1}{2}e_2 - \dfrac{1}{3}e_3 + \dfrac{1}{4}e_4, \quad y = \dfrac{1}{2}(e_2 - e_4)$
6. $x = e_8 - e_7 + e_6, \quad y = \dfrac{e_6 + 2e_2 + 4e_4}{2}$
7. $x = e_3 - \dfrac{1}{3}e_2 + e_5, \quad y = e_5 + \dfrac{2}{3}(e_2 - e_4)$
8. $x = \dfrac{e_1 + e_4}{2} - \dfrac{e_5 + e_8}{4}, \quad y = e_1 + \dfrac{e_8}{4}$
9. $x = \dfrac{e_5 + e_6}{3} - e_7, \quad y = \dfrac{e_6}{3} + \dfrac{4e_5}{3}$
10. $x = 2(e_{21} + e_{13} - e_{76}), \quad y = 3(e_{13} + e_{33}) - e_{21}$
11. $x = e_{22} - e_4 + \dfrac{e_1}{2} + e_{54}, \quad y = \dfrac{5}{2}(e_1 - e_6) + e_{54}$
12. $x = \dfrac{1}{2}e_2 - \dfrac{1}{3}e_3 + \dfrac{1}{5}e_5, \quad y = \dfrac{3}{2}(e_2 - e_4) - \dfrac{4}{5}e_5$
13. $x = 0.5e_7 - 4e_5 + 1.5e_2, \quad y = 6e_9 - 2.5(e_2 - e_7)$
14. $x = -2e_1 + e_2 + e_5, \quad y = 0.5(e_1 - e_2) + e_5 + e_{15}$
15. $x = \dfrac{e_2 - e_3 - e_4}{2} + \dfrac{e_6}{3}, \quad y = \dfrac{e_6 - e_4}{2}$
16. $x = -2.5e_6 - 5\left(\dfrac{e_{23}}{2} + \dfrac{e_{24}}{4}\right), \quad y = -2e_6 - 1.25e_{24}$
17. $x = 2(e_{41} + e_{16} - e_{34}), \quad y = 3(e_{56} - e_{65}) - e_{41}$
18. $x = e_1 + \dfrac{1}{2}e_2 - e_{10}, \quad y = -\dfrac{3}{2}(e_2 - e_4) + 2e_1$
19. $x = \left(\dfrac{e_2}{2} + \dfrac{e_5}{3}\right) - \left(\dfrac{e_1}{4} + \dfrac{e_{12}}{2}\right), \quad y = \dfrac{2e_2 - e_1}{4}$
20. $x = \dfrac{e_3}{3} + \dfrac{e_2}{2} - \dfrac{e_4}{4}, \quad y = \dfrac{2e_7}{3} + \dfrac{5e_2}{2}$

Образец решения

$$x = 2(e_{12} + e_1) - e_3, \quad y = \frac{5e_1}{4} + 2e_{12}$$

Решение опирается на определение ортонормированной системы, сформулированное в конспекте лекций, §9, пункт 9.1, и на свойства скалярного произведения, описанные в §8, пункт 8.1.
В пространстве со скалярным произведением расстояние между элементами x и y вычисляется по формуле $\|x-y\|=\sqrt{(x-y,x-y)}$. В данном случае $x-y=\frac{3}{4}e_1-e_3$.

Вычислим квадрат расстояния, используя линейность скалярного произведения и определение ортонормированной системы:

$$\|x-y\|^2=\left(\frac{3}{4}e_1-e_3,\frac{3}{4}e_1-e_3\right)=\frac{9}{16}\underbrace{(e_1,e_1)}_{=1}-\frac{3}{4}\underbrace{(e_3,e_1)}_{=0}-\frac{3}{4}\underbrace{(e_1,e_3)}_{=0}+\underbrace{(e_3,e_3)}_{=1}=\frac{25}{16}.$$

Таким образом, расстояние между элементами x и y равно $\frac{5}{4}$.

22. Дана ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве со скалярным произведением. Найти угол между векторами x и y.

1. $x=e_7-\left(\frac{e_{23}}{2}+\frac{e_{24}}{3}\right),\quad y=0.5(e_2-3e_{24})+e_7$
2. $x=2(e_1-e_3-e_5-e_7),\quad y=3(e_3-e_5-e_7-e_9)$
3. $x=\frac{5e_{36}}{4}-\frac{7e_9}{2},\quad y=e_7+3e_6-4e_{18}-e_9$
4. $x=-2e_{16}+4\left(e_3+\frac{e_5}{2}\right)-e_1,\quad y=\frac{e_1}{2}+e_2-3e_{16}$
5. $x=\frac{e_3}{3}+\frac{e_2}{2}-\frac{e_6}{6}+\frac{e_4}{4},\quad y=\frac{2e_6}{3}-\frac{e_1+e_3}{4}$
6. $x=5e_7-4e_5+9e_2,\quad y=6e_9-2.5(e_2-2e_{12})$
7. $x=e_1+e_2-e_{10},\quad y=\frac{4}{3}(e_1-e_{10})+e_2$
8. $x=\frac{1}{2}e_3+\frac{3}{2}e_4-e_5,\quad y=\frac{1}{2}e_3+e_4+e_5-\frac{1}{2}e_6$
9. $x=e_2-2e_5+e_7,\quad y=\frac{5}{3}(e_5+e_6)-(e_9+e_{12})$
10. $x=-0.25e_{18}+1.25e_7-e_9,\quad y=-2e_9+0.5(e_{21}-e_2)$
11. $x=\frac{e_1+4e_3-e_6}{5},\quad y=4(e_1-e_5)-5(e_2+e_3)$
12. $x=2(e_2-e_{13}),\quad y=3(e_4-e_2-e_1)+2e_3$
13. $x=\frac{e_1}{3}+\frac{2e_8}{5}-\frac{e_7}{2},\quad y=\frac{e_9-5e_8+e_7}{2}$
14. $x=e_2-2e_5+e_7,\quad y=\frac{5}{3}(e_5+e_6)-(e_9+e_{12})$
15. $x=18\left(\frac{e_4}{9}+\frac{5e_1}{6}-\frac{e_{67}}{2}\right),\quad y=5\left(e_1-\frac{3e_{67}}{5}\right)$

16. $x = 6e_3 - 5e_2$, $y = 4(e_{10} + e_{15} - e_1) + \frac{1}{2}(e_4 + 3e_8)$

17. $x = e_6 - \left(\frac{e_2}{2} + e_3\right)$, $y = -2e_6 - e_8 - 2e_3$

18. $x = e_5 + 8e_6 - e_2 - e_7$, $y = 3e_5 + e_8 - 2(e_2 + e_7)$

19. $x = \frac{5}{2}e_3 - \frac{e_6 + e_7 + e_8}{3}$, $y = \frac{e_6 - e_7}{3}$

20. $x = 2(e_{41} + e_{16} - e_{63})$, $y = 3(e_{56} - e_{65}) - 8e_{41}$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на определение ортонормированной системы, сформулированное в конспекте лекций, §9, пункт 9.1, определение косинуса угла между векторами и свойства скалярного произведения, которые приведены в §8, пункт 8.1.

23. Проверить, являются ли функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ ортогональными в пространствах $L^2(a;b)$ и $L^2(c;d)$.

1. $x(t) = \sqrt{1 - t^2}$, $y(t) = 4t^2 + 4t - 1$, $(a;b) = (-1;1)$, $(c;d) = (-1;0)$

2. $x(t) = \cos 4t - \cos t$, $y(t) = 4\cos 3t + 1$, $(a;b) = (0;3\pi)$, $(c;d) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

3. $x(t) = \frac{2t^2 - 1}{\sqrt[4]{1 - t^2}}$, $y(t) = \frac{3t + 1}{\sqrt[4]{1 - t^2}}$, $(a;b) = (0;1)$, $(c;d) = (-1;1)$

4. $x(t) = \cos^2 t$, $y(t) = \sin 3t + \cos 3t$, $(a;b) = (-\pi;\pi)$, $(c;d) = (0;\pi)$

5. $x(t) = \frac{t^3 - 9t^2 + 18t - 6}{e^t}$, $y(t) = 1$, $(a;b) = (0;+\infty)$, $(c;d) = (-1;1)$

6. $x(t) = \sqrt{1 - t^2}$, $y(t) = 8t^2 - 2$, $(a;b) = (0;1)$, $(c;d) = (-1;1)$

7. $x(t) = (4t^2 - 1)\sqrt{1 + t}$, $y(t) = (t + 1)\sqrt{1 - t}$, $(a;b) = (0;1)$, $(c;d) = (-1;1)$

8. $x(t) = 63t^5 - 70t^3 + 15t$, $y(t) = t^3 - t^2$, $(a;b) = (-1;1)$, $(c;d) = (0;2)$

9. $x(t) = \sin \pi t + \cos \pi t$, $y(t) = \sin^2 \pi t + 1$, $(a;b) = (0;2)$, $(c;d) = (-1;1)$

10. $x(t) = \sin^4 t + \cos^4 t$, $y(t) = \sin t$, $(a;b) = (0;2\pi)$, $(c;d) = (0;\pi)$

11. $x(t) = \frac{t^2 - 4t + 2}{\sqrt{e^t}}$, $y(t) = \frac{t}{\sqrt{e^t}}$, $(a;b) = (-1;1)$, $(c;d) = (0;+\infty)$

12. $x(t) = \frac{8t^4 - 8t^2 + 1}{\sqrt[4]{1 - t^2}}$, $y(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - t^2}}$, $(a;b) = (-1;1)$, $(c;d) = \left(0;\frac{1}{2}\right)$

13. $x(t) = 1 + 4\sin 2\pi t$, $y(t) = \sin \pi t - \cos \pi t$, $(a;b) = (0;1)$, $(c;d) = (-1;1)$

14. $x(t) = \frac{(t - 2)^2}{\sqrt{e^t}}$, $y(t) = \frac{1 - t}{\sqrt{e^t}}$, $(a;b) = (1;+\infty)$, $(c;d) = (0;+\infty)$

15. $x(t) = \frac{1 - 2t^2}{\sqrt[4]{1 + t}}$, $y(t) = \frac{\sqrt{1 - t}}{\sqrt[4]{1 + t}}$, $(a;b) = (-1;1)$, $(c;d) = (-1;0)$

16. $x(t)=35t^4-30t^2+3,\quad y(t)=t^2+t,\quad (a;b)=(-1;1),\quad (c;d)=(0;1)$

17. $x(t)=\dfrac{4t^2-2}{\sqrt[4]{1-t^2}},\quad y(t)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-t^2}},\quad (a;b)=\left(0;\dfrac{1}{2}\right),\quad (c;d)=(-1;1)$

18. $x(t)=\sin 2t+3\cos t,\quad y(t)=\cos 5t,\quad (a;b)=(0;\pi),\quad (c;d)=(-\pi;\pi)$

19. $x(t)=5t^3-3t,\quad y(t)=3t^2-1,\quad (a;b)=(0;1),\quad (c;d)=(-1;1)$

20. $x(t)=(3t-2)\sqrt{1-t},\quad y(t)=(1-4t^2)\sqrt{1+t},\quad (a;b)=(-1;1),\quad (c;d)=(0;1)$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать определение ортогональности, сформулированное в конспекте лекций, §9, пункт 9.1, и формулу для вычисления скалярного произведения в пространстве $L^2(a;b)$, которая приведена в §8, пункт 8.2.

24. Провести процесс ортогонализации конечной системы $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ в пространстве $L^{2,\xi}(a;b)$, где скалярное произведение оснащено весом $\xi=\xi(t)$.

Для вычислений использовать математические пакеты.

1. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=\dfrac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$
2. $L^{2,\xi}(-\infty;\infty),\quad \xi(t)=\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$
3. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=\sqrt{(1-t^2)^3}$
4. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=\dfrac{\sqrt{1-t}}{\sqrt[3]{1+t}}$
5. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=\sqrt{1-t^2}$
6. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=(1-t^2)\sqrt{1+t}$
7. $L^{2,\xi}(0;+\infty),\quad \xi(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{te^t}}$
8. $L^{2,\xi}(0;+\infty),\quad \xi(t)=t^3e^{-t}$
9. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$
10. $L^{2,\xi}(0;+\infty),\quad \xi(t)=e^{-t}$
11. $L^{2,\xi}(-\infty;\infty),\quad \xi(t)=\exp(-t^2)$
12. $L^{2,\xi}(0;+\infty),\quad \xi(t)=\sqrt{t}e^{-t}$
13. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
14. $L^{2,\xi}(0;+\infty),\quad \xi(t)=te^{-t}$
15. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-t^2}}$
16. $L^{2,\xi}(0;+\infty),\quad \xi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{te^t}}$
17. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=(1-t^2)^2$
18. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-t^2}}$
19. $L^{2,\xi}(0;+\infty),\quad \xi(t)=t^2e^{-t}$
20. $L^{2,\xi}(-1;1),\quad \xi(t)=\sqrt[3]{\dfrac{1+t}{1-t}}$

Указание к решению

Для решения этой задачи следует реализовать процесс ортогонализации Грама – Шмидта, описанный в §9 конспекта лекций: в пункте 9.1 процесс представлен в общем виде в доказательстве теоремы об ортогонализации, в пункте 9.2 содержится пример ортогонализации системы одночленов в пространстве $L^2(-1;1)$.

25. Для данной системы $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, состоящей из бесконечных числовых последовательностей, выяснить, является ли она ортонормированным базисом в пространстве l^2 и если нет, то можно ли ее преобразовать в ортонормированный базис.

1. a) $\begin{cases} (1 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \ldots) \\ (0 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \ldots) \\ \qquad\qquad \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 3 \quad 3 \quad 0 \quad \ldots) \\ \qquad\qquad \ldots \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} (1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots) \\ \qquad\quad \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2 \quad -5 \quad 13 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (-4 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (1 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad -5 \quad 13 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad \ldots) \\ \qquad\qquad \ldots \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} (1/2 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad -1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad -1/2 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad -1/2 \quad \ldots) \\ \qquad\qquad \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots) \\ (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots) \\ \qquad\qquad \ldots \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} (1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 2 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 2 & 3 & 0 & \ldots) \\ & & \ldots & & \end{cases}$ b) $\begin{cases} (5 & -4 & -12 & 0 & 0 & \ldots) \\ (-2 & 2 & 4 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 5 & -4 & -12 & \ldots) \\ (0 & 0 & -2 & 2 & 4 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$

5. a) $\begin{cases} (1 & 2 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 2 & 3 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 3 & 4 & \ldots) \\ & & \ldots & & \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2 & -1 & -1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (3 & -2 & -1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 2 & -1 & -1 & 0 & \ldots) \\ (0 & 3 & -2 & -1 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 2 & -1 & -1 & \ldots) \\ (0 & 0 & 3 & -2 & -1 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$ b) $\begin{cases} (5 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 2 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & \ldots) \\ & & & \ldots & & & \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} (1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots) \\ (1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$ b) $\begin{cases} (3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & \ldots) \\ & & & \ldots & & & \end{cases}$

8. a) $\begin{cases} (-1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (-2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots) \\ & & & \ldots & & & \end{cases}$ b) $\begin{cases} (5 & -4 & -12 & 0 & 0 & \ldots) \\ (-2 & 2 & 4 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 5 & -4 & -12 & 0 & \ldots) \\ (0 & -2 & 2 & 4 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 5 & -4 & -12 & \ldots) \\ (0 & 0 & -2 & 2 & 4 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$

9. a) $\begin{cases} (6 & 4 & 0 & 0 & \ldots) \\ (2 & -3 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 6 & 4 & \ldots) \\ (0 & 0 & 2 & -3 & \ldots) \\ & & \ldots & & \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$

10. a) $\begin{cases} (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$ b) $\begin{cases} (4 & -6 & -2 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (2 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (-1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 4 & -6 & -2 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -5 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & -1 & 5 & 4 & \ldots) \\ & & & \ldots & & & \end{cases}$

11. a) $\begin{cases} (1 & -1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 1 & -1 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & -1 & \ldots) \\ & & \ldots & & \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 3 & 2 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 3 & 3 & 2 & 0 & \ldots) \\ (1 & 3 & 3 & 3 & 2 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$

12. a) $\begin{cases} (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots) \\ & & & \ldots & & & \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (3 & 4 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 3 & 4 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 5 & 6 & 0 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$

13. a) $\begin{cases} (3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & \ldots) \\ & & & \ldots & & & \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 & 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$

14. a) $\begin{cases} (2 & 3 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (2 & 3 & 4 & 0 & 0 & \ldots) \\ (2 & 3 & 4 & 5 & 0 & \ldots) \\ & & \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\sin\frac{\pi}{5} & \cos\frac{\pi}{5} & 0 & 0 & \ldots) \\ (\cos\frac{\pi}{5} & -\sin\frac{\pi}{5} & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & \sin\frac{\pi}{5} & \cos\frac{\pi}{5} & \ldots) \\ (0 & 0 & \cos\frac{\pi}{5} & -\sin\frac{\pi}{5} & \ldots) \\ & & \ldots \end{cases}$

15. a) $\begin{cases} (1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & \ldots) \\ & & & & \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 4 & 6 & 8 & 5 & 0 & \ldots) \\ (1 & 4 & 6 & 8 & 10 & 6 & \ldots) \\ & & & \ldots \end{cases}$

16. a) $\begin{cases} (1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \ldots) \\ & & & \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} (-2 & -1 & 10 & 0 & 0 & \ldots) \\ (3 & 1 & -14 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & -2 & -1 & 10 & \ldots) \\ (0 & 0 & 3 & 1 & -14 & \ldots) \\ & & \ldots \end{cases}$

17. a) $\begin{cases} (5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & \ldots) \\ & & & \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots) \\ & & & \ldots \end{cases}$

18. a) $\begin{cases} (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots) \\ & & \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 9 & 10 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 11 & 12 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 14 & \ldots) \\ & & & \ldots \end{cases}$

19. a) $\begin{cases} (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & \ldots) \\ & & & \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \ldots) \\ & & & \ldots \end{cases}$

20. a) $\begin{cases} (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots) \\ & & \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2 & -1 & -1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (3 & -2 & -1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 2 & -1 & -1 & \ldots) \\ (0 & 0 & 3 & -2 & -1 & \ldots) \\ & & \ldots \end{cases}$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на определения ортогонального базиса и ортонормированного базиса, сформулированные в конспекте лекций, §10, пункт 10.1. Там же приведен алгоритм анализа системы на предмет возможности преобразовать ее в ортогональный базис. Кроме того, могут понадобиться определения линейно независимой системы (конспект лекций, §6, пункт 6.2) и ортогональной, ортонормированной системы (конспект лекций, §9, пункт 9.1).

Образец №1 решения для задания а)

$$\begin{cases} (1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \ldots) \\ (1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \ldots) \\ (0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & \ldots) \\ & & \ldots \end{cases}$$

Система имеет блочный вид: строки разбиты по парам, в каждой паре есть ненулевой блок на том месте, где в остальных строках стоят нули. Легко понять, что все строки попарно ортогональны, имеют единичную норму, поэтому система $\{e^{(k)}\}$ ортонормированная.

Проверим полноту системы $\{e^{(k)}\}$ в пространстве l^2. Попробуем построить последовательность $h=(h_1,h_2,h_3,\ldots)$, которая была бы ортогональна всем $e^{(k)}$:

$$h \perp e^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad \left(h, e^{(k)}\right)=0.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \left(h,e^{(1)}\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{h_1}{\sqrt{2}}+\frac{h_2}{\sqrt{2}}=0 \\ \left(h,e^{(2)}\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{h_1}{\sqrt{2}}-\frac{h_2}{\sqrt{2}}=0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad h_1=h_2=0,$$

$$\left.\begin{aligned} \left(h,e^{(3)}\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{h_3}{\sqrt{2}}+\frac{h_4}{\sqrt{2}}=0 \\ \left(h,e^{(4)}\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{h_3}{\sqrt{2}}-\frac{h_4}{\sqrt{2}}=0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad h_3=h_4=0 \ \text{ и т.д..}$$

Таким образом, из того, что h ортогональна всем $e^{(k)}$, следует $h=0$. Система $\{e^{(k)}\}$ полная.

Вывод: система $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в пространстве l^2.

Образец №2 решения для задания а)

$$\begin{cases} (1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (2 & 3 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 4 & 5 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 6 & 7 & \ldots) \\ & & \ldots & & \end{cases}$$

Система не ортонормированная и не ортогональная. Например, $\left(e^{(1)},e^{(2)}\right)=2,\ \left\|e^{(2)}\right\|=\sqrt{13}.$

Система ступенчатая: в каждой следующей строке есть ненулевая координата, которая равна нулю в предыдущей строке. По этой причине система линейно независимая.

Проверим, является ли данная система $\{e^{(k)}\}$ полной в пространстве l^2. Попробуем построить последовательность $h=(h_1,h_2,h_3,\ldots)$, которая была бы ортогональна всем $e^{(k)}$:

$$h\perp e^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad \left(h,e^{(k)}\right)=0.$$

Тогда

$$\left(h,e^{(1)}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad h_1=0,$$

$$\left(h,e^{(2)}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2h_1+3h_2=0 \quad \Rightarrow \quad h_2=0,$$

$$\left(h,e^{(3)}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4h_2+5h_3=0 \quad \Rightarrow \quad h_3=0 \text{ и т.д..}$$

Таким образом, из того, что h ортогональна всем $e^{(k)}$, следует $h=0$. Система $\{e^{(k)}\}$ полная.

Вывод: Система $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ не является ортонормированным базисом, однако она линейно независимая и полная, поэтому ее можно преобразовать в ортонормированный базис с помощью процесса ортогонализации и нормировки.

Образец №3 решения для задания а)

$$\begin{cases} (1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \ldots) \\ & & & \ldots & & & \end{cases}$$

Данная система ортогональная. Скалярное произведение двух соседних последовательностей равно нулю:

$$\left(e^{(2k-1)},e^{(2k)}\right)=1\cdot1+1\cdot(-1)+0\cdot1+0\cdot0+\ldots=0.$$

а остальные пары последовательностей ортогональны, поскольку не имеют одноименных ненулевых координат.

Система не ортонормированная:

$$\left\|e^{(2k-1)}\right\|=\sqrt{2},\quad \left\|e^{(2k)}\right\|=\sqrt{3}.$$

Чтобы сделать систему ортонормированной, необходимо провести нормировку: поделить каждую последовательность на ее норму.

Проверим, является ли система $\{e^{(k)}\}$ полной в пространстве l^2. Попробуем построить последовательность $h=(h_1,h_2,h_3,...)$, которая была бы ортогональна всем $e^{(k)}$:

$$h \perp e^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad (h,e^{(k)})=0.$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{l}(h,e^{(1)})=0 \quad \Leftrightarrow \quad h_1+h_2=0 \\ (h,e^{(2)})=0 \quad \Leftrightarrow \quad h_1-h_2+h_3=0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad h_1=a,\, h_2=-a,\, h_3=-2a,\ a\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(h,e^{(3)})=0 \quad \Leftrightarrow \quad h_4+h_5=0 \\ (h,e^{(4)})=0 \quad \Leftrightarrow \quad h_4-h_5+h_6=0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad h_4=b,\, h_5=-b,\, h_6=-2b,\ b\in R \text{ и т.д..}$$

Последовательность $h=(1,-1,-2,0,0,0,0,\ldots)$ очевидно ортогональна всем $e^{(k)}$, при этом она ненулевая и принадлежит пространству l^2. Следовательно, система $\{e^{(k)}\}$ не полная.

Вывод: система $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональная, но неполная, поэтому она не является ортогональным (ортонормированным) базисом и она не достаточна для построения такого базиса.

Образец решения для задания b)

$$\begin{cases}(1 & -1 & -2 & 0 & 0 & ...) \\ (2 & -3 & -2 & 0 & 0 & ...) \\ (0 & 1 & -1 & -2 & 0 & ...) \\ (0 & 2 & -3 & -2 & 0 & ...) \\ (0 & 0 & 1 & -1 & -2 & ...) \\ (0 & 0 & 2 & -3 & -2 & ...) \\ & & \ldots & & & \end{cases}$$

Эта система не является ни ортонормированной, ни ортогональной. Например,

$$(e^{(1)},e^{(2)})=9, \quad \|e^{(1)}\|=\sqrt{6}.$$

Проверим, является ли система $\{e^{(k)}\}$ линейно независимой. Очевидно, что последовательности $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ линейно независимы, так как они не пропорциональны. Последовательность $e^{(3)}$ тоже не имеет линейной зависимости от $e^{(1)},e^{(2)}$, так как $e^{(1)}_4=e^{(2)}_4=0,\ e^{(3)}_4\neq 0.$ Рассмотрим первые четыре последовательности из системы $\{e^{(k)}\}$ и матрицу, образованную их ненулевыми элементами. С помощью линейных преобразований над строками приведем ее к верхнетреугольному виду:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 0\\ 2 & -3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & -3 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & -3 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что строка $e^{(4)}$ может быть получена как линейная комбинация строк $e^{(1)},e^{(2)},e^{(3)}$. Значит, система $\{e^{(k)}\}$ линейно зависима. Чтобы сделать систему линейно независимой, нужно удалить из нее каждую четвертую последовательность. Итак, после линейных преобразований и удаления лишних строк из $\{e^{(k)}\}$ получаем систему $\{\tilde{e}^{(k)}\}$:

$$
\begin{cases}
(1 & -2 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\
(0 & 1 & -2 & 0 & 0 & \ldots) \\
(0 & 0 & 1 & -2 & 0 & \ldots) \\
(0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \ldots) \\
 & & \ldots & & &
\end{cases}
$$

Проверим, является ли система $\{\tilde{e}^{(k)}\}$ полной в пространстве l^2. Попробуем подобрать последовательность $h = (h_1, h_2, h_3, \ldots)$, которая была бы ортогональна всем $\tilde{e}^{(k)}$:

$$h \perp \tilde{e}^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad (h, \tilde{e}^{(k)}) = 0 .$$

Тогда

$$h \perp \tilde{e}^{(1)} \quad \Leftrightarrow \quad (h, \tilde{e}^{(1)}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_1 - 2h_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_2 = \frac{h_1}{2},$$

$$h \perp \tilde{e}^{(2)} \quad \Leftrightarrow \quad (h, \tilde{e}^{(2)}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_2 - 2h_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_3 = \frac{h_3}{2},$$

$$h \perp \tilde{e}^{(3)} \quad \Leftrightarrow \quad (h, \tilde{e}^{(3)}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_3 - 2h_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_4 = \frac{h_3}{2} \quad \text{и т.д..}$$

Положим $h_1 = 1$, получаем последовательность $h = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$. Она принадлежит пространству l^2, она ненулевая и она ортогональна всем $\tilde{e}^{(k)}$. Значит, система $\{\tilde{e}^{(k)}\}$ не полная, поэтому исходная система $\{e^{(k)}\}$ тоже не является полной в пространстве l^2.

Вывод: система $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ не полная, поэтому она не является ортонормированным базисом и не достаточна для построения такого базиса в пространстве l^2.