

Лабораторная работа № 7

Тема: «Многошаговые методы решения задачи Коши»

Цель - сформировать у магистрантов представление о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при заданном начальном условии $y_0 = y(x_0)$ методами Адамса-Башфорта и Адамса - Моултона, развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

Из лабораторной работы № 6 видно, что снижение погрешности решения задачи Коши может быть обеспечено использованием одношаговых методов высоких порядков точности. При этом в пределах каждого шага интегрирования приходится вводить промежуточные точки и увеличивать и объем вычислений.

Снизить вычислительные затраты без ухудшения погрешности можно, если на очередном шаге уточняющую информацию получать не за счет дополнительных точек, а из предыдущих шагов. Действительно, если в расчете использовать не только последнюю из известных точек решения, а еще и ряд предыдущих, можно более точно предсказать дальнейший ход кривой. Методы, реализующие эту идею, получили название *многошаговых*.

1. Метод Адамса-Башфорта четвертого порядка

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2). Как обычно, численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения $y(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Чаще всего $x_i = x_0 + ih$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Точки x_i - узлы сетки, а величина h - шаг ($h > 0$).

В методе Адамса-Башфорта четвертого порядка величины y_{i+1} вычисляют по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})). \quad (9)$$

Этот метод относится к группе многошаговых методов, в которых для нахождения точки (x_{i+1}, y_{i+1}) требуется информация о нескольких предыдущих точках. Формула Адамса-Башфорта принадлежит к классу четырехшаговых методов, поскольку в (9) используется информация о четырех предыдущих точках. Важной характеристикой метода является порядок точности. Для метода Адамса-Башфорта (9) он равен 4, т. е. погрешность метода на одном шаге равна $O(h^5)$.

Сравним методы Рунге-Кутты четвертого порядка и Адамса-Башфорта четвертого порядка. Для обоих методов порядок погрешности (но не сама погрешность!) одинаков и составляет величину $O(h^5)$. Однако способы достижения такой достаточно высокой точности различны. В методе Адамса-Башфорта (и других многошаговых методах) она достигается за счет использования информации о предыдущих точках. В методе Рунге-Кутты (и других одношаговых методах) недостающую информацию о поведении правых частей системы получают в результате вычислений в специальном образом выбранных дополнительных точках.

Таким образом, многошаговые методы более экономичны, чем одношаговые (не требуют дополнительных вычислений). В этом состоит достоинство многошаговых методов. Однако эти методы обладают общим недостатком – с их помощью нельзя начать решать задачу, так как требуется информация о ряде предыдущих точек, которой мы не располагаем. Выход из положения состоит в использовании какого либо одношагового метода того же порядка точности до тех пор, пока не будет получено достаточно значений для работы многошагового метода. Мы будем использовать для этой цели метод Рунге-Кутты четвертого порядка. К недостаткам многошаговых методов относится трудность смены шага, так как расчетные формулы не учитывают эту возможность. Данная проблема решена в многозначных методах, использующих иную экстраполяцию решения.

Метод Адамса-Башфорта легко перенести на нормальные системы дифференциальных уравнений вида

$$y'_k(x) = f_k(x, y_1, \dots, y_n), \quad 1 \leq k \leq n,$$

которые для краткости удобнее записывать в векторной форме

$$Y' = F(x, Y), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Для получения расчетных формул метода Адамса-Башфорта достаточно в формулах (9) заменить y и $f(x, y)$ соответственно на Y и $F(x, Y)$.

Методику решения нормальных систем дифференциальных уравнений легко перенести на решение одного дифференциального уравнения более высокого порядка, чем первый, поскольку любое дифференциальное уравнение порядка n

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y)$$

путем замены

$$y_1(x) = y(x);$$

$$y_2(x) = y'(x);$$

.....

$$y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$

может быть представлено в виде системы дифференциальных уравнений

$$y_1'(x) = y_2(x);$$

$$y_2'(x) = y_3(x);$$

.....

$$y_n'(x) = f(x, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y)$$

Заметим, что в приведенных уравнениях содержатся производные только первого порядка.

Пример 4. Методом Адамса-Башфорта на отрезке $[0,6]$ с точностью $eps = 0,0001$ решить задачу Коши для дифференциального уравнения третьего порядка

$$y'''(x) + x^2 \cdot y'(x) + x \cdot y(x) = e^x \cdot \cos(x),$$

$$y(0) = -8, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 3.$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 9-

11.

$$\begin{array}{ll} x0 := 0 & xk := 6 \\ n := 60 & eps := 0.0001 \end{array} \quad y0 := \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f(x, y) := \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ e^x \cos(x) - x^2 \cdot y1 - x^2 \cdot y0 \end{pmatrix}$$

Рис. 9. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 4 методом Адамса-Башфорта (задание исходных данных)

```

AdamsBashfort(x0,xk,n,y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ←  $\frac{xk - x0}{n}$ 
  for i ∈ 0..2
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h·f(xi,yi)
    k2i ← h·f(xi +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k1_i}{2}$ )
    k3i ← h·f(xi +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k2_i}{2}$ )
    k4i ← h·f(xi + h, yi + k3i)
    yi+1 ← yi +  $\frac{1}{6} \cdot (k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i)$ 
  for i ∈ 3..n-1
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h·f(xi,yi)
    k2i ← h·f(xi-1,yi-1)
    k3i ← h·f(xi-2,yi-2)
    k4i ← h·f(xi-3,yi-3)
    yi+1 ← yi +  $\frac{1}{24} \cdot (55 \cdot k1_i - 59 \cdot k2_i + 37 \cdot k3_i - 9 \cdot k4_i)$ 
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

```

Рис. 10. Фрагмент рабочего документа MATHCAD- решение примера 4 с функцией, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Адамса-Башфорта

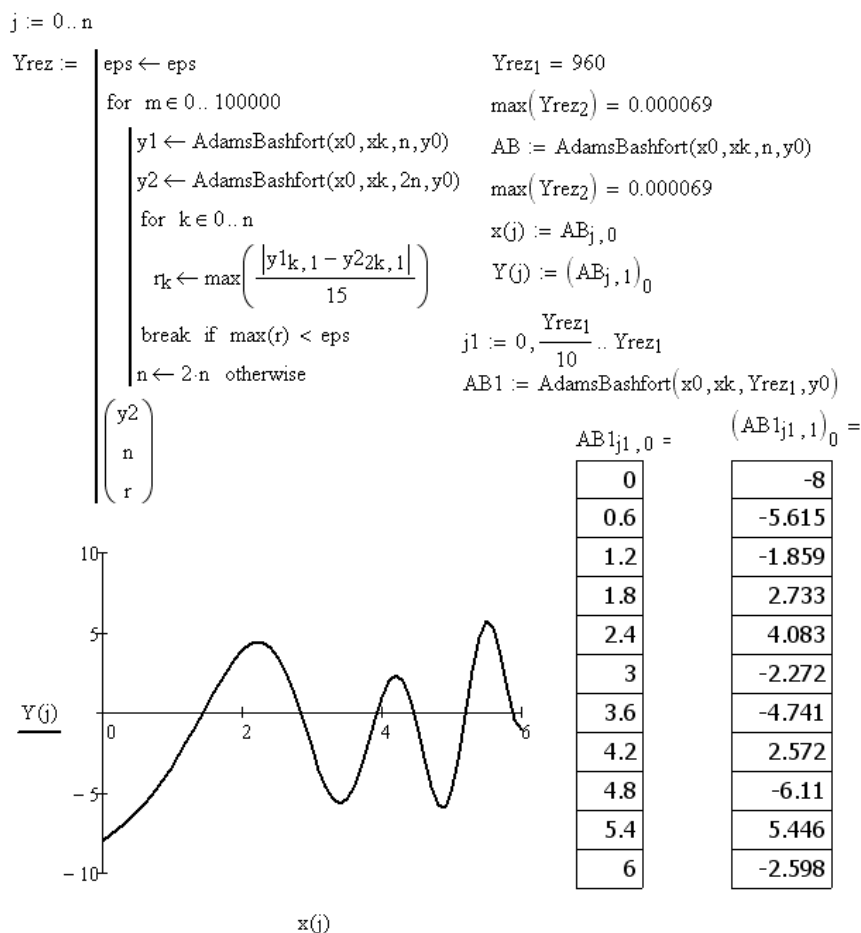


Рис. 11. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 4 (график решения с функцией, уточняющей решение с заданной точностью)

Задание 4. Методом Адамса-Башфорта для $x \in [x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,000001$ решить задачу Коши для дифференциального уравнения третьего порядка. Построить график решения. Варианты заданий представлены ниже.

Вариант 1.

$$y'''(x) + \cos(x) \cdot y''(x) + x \cdot \cos^2(x) \cdot y'(x) + 2 \cdot y(x) = x^2 \cdot \sin(x),$$

$$y(x_0) = -8, \quad y'(x_0) = 3, \quad y''(x_0) = 3, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 9.$$

Вариант 2.

$$y'''(x) + 2 \cdot x \cdot y''(x) + tg(x) \cdot y'(x) + (x+1) \cdot \ln(|x+1|) \cdot y(x) = e^{\sin(x)},$$

$$y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 2, \quad y''(x_0) = -3, \quad x_0 = -1,5, \quad x_k = 1,5.$$

Вариант 3.

$$y'''(x) - x^2 \cdot \sin(x^2) \cdot y''(x) + \frac{1}{x} \cdot y'(x) + \sqrt{x^4 + 3 \cdot x + 4} \cdot y(x) =$$

$$= \cos(x^2 + 3),$$

$$y(x_0) = -3, \quad y'(x_0) = -2, \quad y''(x_0) = 2, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 4.$$

Вариант 4.

$$y'''(x) + \sqrt{x^2 + 1} \cdot y''(x) + [\cos(x) + x \cdot \sin(x)] \cdot y'(x) + xe^{-x} \cdot y(x) = 4, \quad \text{Вариант 5.}$$

$$y(x_0) = 2, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = 5, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 12.$$

$$y'''(x) + \ln(x^2 + 4) \cdot y''(x) + \cos(x^2 + 6) \cdot y'(x) + \frac{x^2 - 3}{x + 2} \cdot y(x) = 0,$$

$$y(x_0) = 5, \quad y'(x_0) = -1, \quad y''(x_0) = -5, \quad x_0 = -1, 2, \quad x_k = 1, 2.$$

Вариант 6.

$$y'''(x) + 2 \cdot y''(x) + e^x \cdot y'(x) + \operatorname{arctg}(x^2 + 4) \cdot y(x) = \cos\left(\frac{x}{x + 2}\right),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = -2, \quad x_0 = -\pi, \quad x_k = \pi.$$

Вариант 7.

$$y'''(x) + \ln(x^2 + 3) \cdot y''(x) + x^3 \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + (2 \cdot x^2 + 1) \cdot y(x) =$$

$$= ch\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y(x_0) = -3, \quad y'(x_0) = 3, \quad y''(x_0) = 4, \quad x_0 = 3, \quad x_k = 8.$$

Вариант 8.

$$y'''(x) + sh\left(\frac{x^2 + 3}{x + 3}\right) \cdot y''(x) + \lg(x^2 + 2) \cdot y'(x) + x^3 \cdot y(x) =$$

$$= x^2 \cdot \cos(x^2),$$

$$y(x_0) = -10, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = 2, \quad x_0 = -2, \quad x_k = 2, 9.$$

Вариант 9.

$$y'''(x) + x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot y''(x) + 2x \cdot y'(x) + \sqrt{x^4 + 1} \cdot y(x) = 2x^3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{Вариант 10.}$$

$$y(x_0) = -3, \quad y'(x_0) = -4, \quad y''(x_0) = -3, \quad x_0 = -2, \quad x_k = 4.$$

$$y'''(x) + 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot y'(x) + e^{x+1} \cdot y(x) = x^4 \cdot \cos(2 \cdot x)$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = 1, \quad x_0 = -1, 2, \quad x_k = 1, 4.$$

Вариант 11.

$$y'''(x) + \operatorname{tg}(x^2 - 1) \cdot y''(x) + x^2 \cdot \sin(x^2 - 1) \cdot y'(x) +$$

$$+ \sin\left(\frac{x + 2}{2}\right) \cdot y(x) = \sqrt[3]{x^4 - 2 \cdot x + 1},$$

$$y(x_0) = -1, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = -0,5, \quad x_0 = -1, \quad x_k = \frac{\pi}{2}.$$

Вариант 12.

$$y'''(x) + x^4 \cdot \ln(x) \cdot y''(x) + 2 \cdot x^2 \cdot \sin(x) \cdot y'(x) + \\ + \ln(x^5 + 2 \cdot x^3 + 4) \cdot y(x) = e^{\cos(x)}$$

$$y(x_0) = -3, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = 2, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 3,5.$$

Вариант 13.

$$y'''(x) + e^{\sin(x)} \cdot y''(x) + (2 \cdot x^3 + 1) \cdot y'(x) + \operatorname{arctg}(x^2 + 1) \cdot y(x) = \\ = \sin(x^2 + 1),$$

$$y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 2, \quad y''(x_0) = 3, \quad x_0 = -4, \quad x_k = 4.$$

Вариант 14.

$$y'''(x) + \sin(x^2) \cdot y''(x) + x^2 \sin(x) \cdot y'(x) + x \cos(x^2) \cdot y(x) = \cos(x^2),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = 2, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 3,8.$$

Вариант 15.

$$y'''(x) + \operatorname{arsch}(x) \cdot y''(x) + \operatorname{tg}(x^2 + 4) \cdot y'(x) + \sqrt{x^2 + 4} \cdot y(x) = \\ = x^2 \cdot \sin(x),$$

$$y(x_0) = 2, \quad y'(x_0) = -2, \quad y''(x_0) = -5, \quad x_0 = -0,5, \quad x_k = 0,5.$$

Вариант 16.

$$y'''(x) + \ln(x^3 - 2) \cdot y''(x) + 2 \cdot x \cdot y'(x) + 6 \cdot x^3 \cdot y(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x+1}\right),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 2, \quad y''(x_0) = 1, \quad x_0 = 4,5, \quad x_k = 6.$$

Вариант 17.

$$y'''(x) + \sqrt{x^3 - 2} \cdot y''(x) + y'(x) + \frac{\cos(x^3 - 1)}{x^2 + 4} \cdot y(x) = \operatorname{arsh}(x + 1),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = -10, \quad y''(x_0) = -2, \quad x_0 = 2, \quad x_k = 8.$$

Вариант 18.

$$y'''(x) + x^3 \cdot e^{-3x} \cdot y''(x) + 4 \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot y'(x) = x^2 \cdot \sin(2 \cdot x)$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = 1, \quad x_0 = -1,2, \quad x_k = 2,6.$$

Вариант 19.

$$y'''(x) + \ln(x^2 + 1) \cdot y''(x) + 3 \cdot x \cdot y(x) = x^4 \cdot \cos(x) + x^2 \cdot \sin(x)$$

$$y(x_0) = -1, \quad y'(x_0) = -1, \quad y''(x_0) = -1, \quad x_0 = -3, \quad x_k = 6.$$

Вариант 20.

$$y'''(x) + x^3 \cdot \ln(|x + 1|) \cdot y''(x) + \operatorname{tg}(x) \cdot y'(x) + \operatorname{arcctg}(x) \cdot y(x) = \\ = x^2 \cdot e^{\cos(x+1)},$$

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1, \quad y''(x_0) = 0, \quad x_0 = -1,5, \quad x_k = 1,5.$$

2. Метод Адамса - Моултона четвертого порядка

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2). Как обычно, численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n решения уравнения $y(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Чаще всего $x_i = x_0 + ih$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Точки x_i - узлы сетки, а величина h - шаг ($h > 0$).

В методе Адамса-Моултона четвертого порядка величины y_{i+1} вычисляют по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (9f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})). \quad (10)$$

Этот метод относится к группе многошаговых методов, в которых для нахождения точки (x_{i+1}, y_{i+1}) требуется информация о нескольких предыдущих точках.

Сравним теперь метод Адамса-Моултона с методом Адамса-Башфорта. Эти методы относятся к группе многошаговых. Для обоих методов порядок погрешности одинаков и составляет величину $O(h^5)$. Установим, в чем же состоит разница между методами Адамса-Башфорта и Адамса-Моултона. В методе Адамса-Башфорта вычисление y_{i+1} проводится по формуле (9). Подлежащая определению величина y_{i+1} входит только в левую часть формулы (9). В методе Адамса-Моултона величина y_{i+1} входит не только в левую, но и правую часть формулы (10). Таким образом, в формуле (10) величина y_{i+1} определяется неявно, поэтому для вычисления величины $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ нужно знать значение y_{i+1} , которое само пока неизвестно. Таким образом, формула (10) представляет собой уравнение для величины y_{i+1} , которое следует решать каким-либо (вообще говоря, численным) методом. Вот почему методы Адамса-Моултона называют *неявными* многошаговыми методами; напротив, методы Адамса-Башфорта относятся к группе *явных* многошаговых методов.

На практике, как правило, неявный метод Адамса-Моултона используют совместно с явным методом Адамса-Башфорта по следующей схеме:

вычисляем методом Рунге-Кутты «стартовые» значения $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}$ в точках $x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}$ и делаем прогноз для величин y_{i+1} с помощью явного метода Адамса-Башфорта

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{24} (55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})). \quad (11)$$

затем корректируем величину y_{i+1} по формуле

$$y_{i+1}^{(m+1)} = y_i + \frac{h}{24} (9f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(m)}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})). \quad (12)$$

Теперь можно организовать итерационный процесс для уточнения величины y_{i+1} . Если $y_{i+1}^{(k)}$ - значение после k итераций, то $(k+1)$ -е уточненное значение величины y_{i+1} можно вычислять по формуле

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{24} (9f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})).$$

Итерации можно прекратить, когда две последовательные итерации дают практически одинаковые результаты, т. е. при выполнении условия $|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| < \varepsilon$, где ε - заданная малая величина.

Может показаться, что неявные многошаговые методы должны уступать явным по быстродействию, поскольку в неявных методах приходится решать уравнение для определения величины y_{i+1} , а в явных методах она определяется сразу. Это действительно так, если сравнивать быстродействие на одном шаге. При интегрировании на промежутке, как правило, неявные методы позволяют проводить вычисления с крупным шагом, так что можно добиться значительной экономии числа шагов. В целом же неявный метод существенную экономию машинного времени по сравнению с явным методом того же порядка точности.

Метод Адамса-Моултона легко переносится на нормальные системы дифференциальных уравнений вида

$$y'_k(x) = f_k(x, y_1, \dots, y_n), \quad 1 \leq k \leq n,$$

которые для краткости удобнее записывать в векторной форме

$$Y' = F(x, Y), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Для получения расчетных формул метода Адамса-Моултона достаточно в формулах (10) заменить y и $f(x, y)$ соответственно на Y и $F(x, Y)$.

Решим пример 3 методом Адамса-Моултона. Результаты представлены на рис. 12-14.

$$x0 := 0 \quad xk := 2 \quad eps := 0.00000001 \quad n := 10 \quad f(x, y) := \begin{bmatrix} -y_1 + \sin(x \cdot y_2) \\ (y_0)^2 \\ -y_2 - y_0 \end{bmatrix} \quad y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 12. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 3 из лаб. раб. № 6 методом Адамса-Моултона (задание исходных данных)

```

AdamsMoulton(x0, xk, n, y0) :=
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  h ←  $\frac{xk - x0}{n}$ 
  for i ∈ 0..2
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h · f(xi, yi)
    k2i ← h · f(xi +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k_{1i}}{2}$ )
    k3i ← h · f(xi +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k_{2i}}{2}$ )
    k4i ← h · f(xi + h, yi + k3i)
    yi+1 ← yi +  $\frac{1}{6} \cdot (k_{1i} + 2 \cdot k_{2i} + 2 \cdot k_{3i} + k_{4i})$ 
  for i ∈ 3..n-1
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h · f(xi, yi)
    k2i ← h · f(xi-1, yi-1)
    k3i ← h · f(xi-2, yi-2)
    k4i ← h · f(xi-3, yi-3)
    yi+1 ← yi +  $\frac{1}{24} \cdot (55 \cdot k_{1i} - 59 \cdot k_{2i} + 37 \cdot k_{3i} - 9 \cdot k_{4i})$ 
  for i ∈ 0..n-1
    y1i ← yi
  for i ∈ 2..n-1
    for m ∈ 0..10
      xi+1 ← xi + h
      k1i ← h · f(xi+1, yi+1)
      k2i ← h · f(xi, yi)
      k3i ← h · f(xi-1, yi-1)
      k4i ← h · f(xi-2, yi-2)
      y1i+1 ← yi +  $\frac{1}{24} \cdot (9 \cdot k_{1i} + 19 \cdot k_{2i} - 5 \cdot k_{3i} + k_{4i})$ 
      break if |y1i+1 - yi+1| < eps
      otherwise
        yi+1 ← y1i+1
        m ← m + 1
  Y(0) ← x
  Y(1) ← y1
  Y

```

Рис. 13. Фрагмент рабочего документа MATHCAD- решение примера 3 из лаб. раб. № 6 с функцией, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Адамса-Моултона

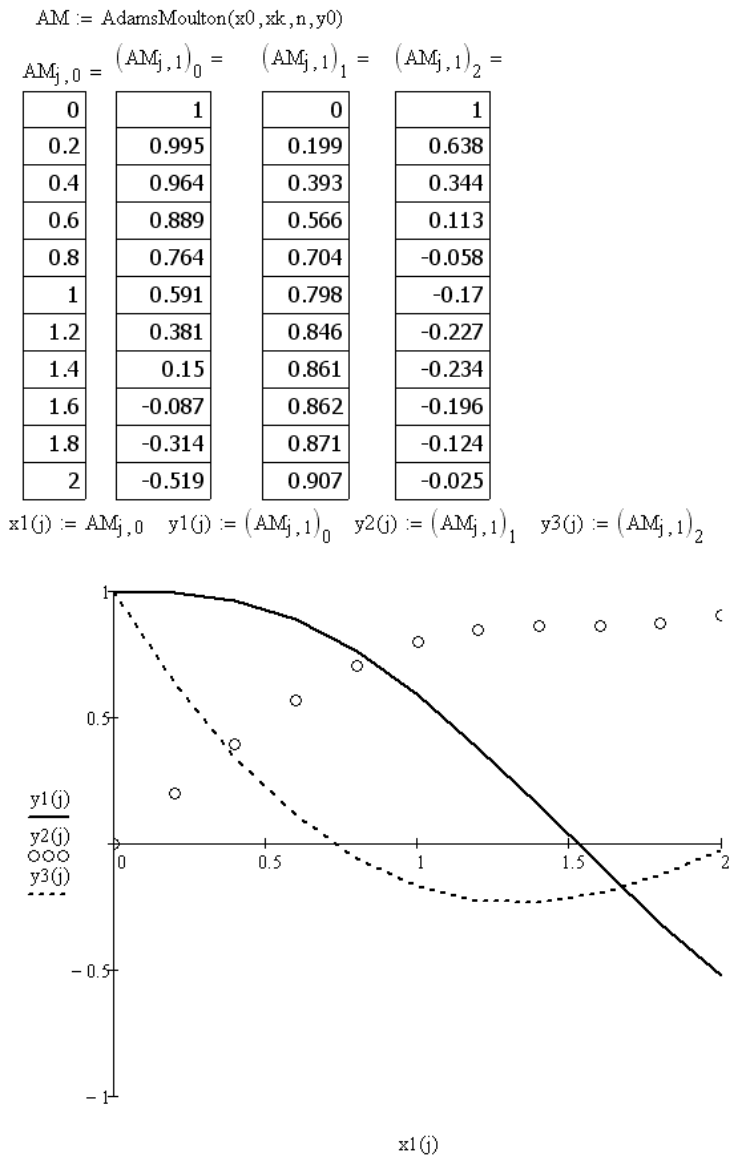


Рис. 14. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – числовое и графическое решение примера 3 из лаб. раб. № 6 методом Адамса - Моултона

Как видим результаты вычислений методом Адамса-Моултона совпали с решением методом Рунге-Кутты. Однако, для достижения заданной точности методом Адамса-Моултона достаточно было выбрать в четыре раза больший шаг, чем по методу Рунге-Кутты, что приводит к экономии вычислений и уменьшению ошибки округления.

Задание 5. Методом Адамса-Моултона на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,000001$ решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3), \end{cases} \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}, \\ y_3(x_0) = y_{30} \end{cases}$$

Построить график решения. Исходные данные взять из таблицы 3 лаб. раб. № 6. Сравнить полученное решение с решением по методу Рунге-Кутты (см. задание 3 из лаб. раб. № 6).