

3. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Соотношение неопределенностей для координаты и проекции импульса p_x на ось x

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

где Δx и Δp_x – неопределенность координаты и проекции импульса частицы соответственно; \hbar – постоянная Планка, $\hbar = h/2\pi$.

Соотношение неопределенностей для энергии E и времени t имеет вид

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Пример 1. Масса движущегося электрона в 3 раза больше его массы покоя. Чему равна минимальная неопределенность координаты электрона?

Решение. Учитывая, что $p = mv$, где m – масса, v – скорость частицы, получим из соотношения неопределенности для координаты и проекции импульса $\Delta x \geq \hbar / (m \Delta v_x)$. Поскольку неопределенность скорости Δv_x , как и сама скорость, не может превышать скорость света c в вакууме, то $\Delta x_{\min} = \hbar / mc$. Согласно условию $m = 3m_0$. Тогда $\Delta x_{\min} = \hbar / 3m_0 c = 1,28 \cdot 10^{-13}$ м.

Пример 2. Среднее время жизни возбужденных состояний атома 10 нс. Вычислить естественную ширину спектральной линии ($\lambda = 0,7$ мкм), соответствующую переходу между возбужденными уровнями атома.

Решение. При переходе электрона из одного стационарного состояния в другое излучается (или поглощается) энергия $hc/\lambda = E_n - E_k$, где E_n и E_k – энергии соответственно n и k состояний атома. Отсюда следует, что неопределенность $\Delta \lambda$ длины волны излучения связана с неопределенностью энергии уровней ΔE_n и ΔE_k атома соотношением $hc \Delta \lambda / \lambda^2 = \Delta E_n + \Delta E_k$. Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, где Δt – неопределенность момента времени перехода атома из одного стационарного состояния в другое. Поскольку Δt не превышает среднего времени жизни возбужденного состояния атома τ , то минимальная неопределенность энергии возбужденных уровней $\Delta E_{\min} = \hbar / \tau$. Минимальная неопределенность длины волны излучения (естественная ширина спектральной линии)

$$\Delta \lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_k} \right).$$

Если одно из состояний, например k , между которыми совершается переход, является основным, то $\Delta \lambda_{\min} = \lambda^2 / (2\pi c \tau_n)$, так как для основного состояния $\tau_k = \infty$. Для возбужденных состояний с одинаковым временем жизни $\tau_n = \tau_k = \tau$ имеем $\Delta \lambda_{\min} = \lambda^2 / (\pi c \tau)$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta \lambda_{\min} = 5,2 \cdot 10^{-14}$ м.

Задачи.

1. Среднее расстояние электрона от ядра в невозбужденном атоме водорода 52,9 пм. Вычислить минимальную неопределенность скорости электрона.
2. Используя соотношение неопределенностей, показать, что в ядре не могут находиться электроны. Линейные размеры ядра принять равными $5,8 \cdot 10^{-15}$ м.
3. Чему равна неопределенность координаты покоящегося электрона?
4. Вычислить неопределенность координаты покоящегося протона.
5. Кинетическая энергия протона равна его энергии покоя. Чему равна при этом минимальная неопределенность координаты протона?
6. Масса движущегося электрона в 2 раза больше его массы покоя. Вычислить минимальную неопределенность координаты электрона.
7. Чему равна минимальная неопределенность координаты фотона, соответствующего видимому излучению с длиной волны 0,55 мкм.
8. Среднее время жизни эта-мезона $2,4 \cdot 10^{-19}$ с, а его энергия покоя 549 МэВ. Вычислить минимальную неопределенность массы частицы.
9. Среднее время жизни возбужденного состояния атома 12 нс. Вычислить минимальную неопределенность длины волны $\lambda = 0,12$ мкм излучения при переходе атома в основное состояние.

10. Естественная ширина спектральной линии с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм, соответствующей переходу атома в основное состояние, равна $0,01$ пм. Определить среднее время жизни возбужденного состояния атома.

11. Ширина следа электрона с кинетической энергией $1,5$ кэВ на фотопластинке, полученного с помощью камеры Вильсона, $\Delta x = 1$ мкм. Можно ли по данному следу обнаружить отклонение в движении электрона от законов классической механики?

12. Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 1$ кВ. Известно, что неопределенность скорости составляет $0,1\%$ от ее числового значения. Определить неопределенность координаты электрона. Являются ли электроны в данных условиях квантовой или классической частицей?

13. Установить отношение неопределенностей скорости электрона, если его координата установлена с точностью до 10^{-5} м, и пылинки массой $m = 10^{-12}$ кг, если ее координата установлена с той же точностью.

14. Электронный пучок ускоряется разностью потенциалов $U = 200$ В. Определить, можно ли одновременно измерить траекторию электрона с точностью до 100 пм (с точностью порядка диаметра атома) и его скорость с точностью до 10% .

15. Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допускаемая неопределенность скорости составляет 10% от ее числового значения, найти неопределенность координаты электрона. Применимо ли в данном случае для электрона понятие траектории?

16. Используя соотношение неопределенностей в форме $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, оценить минимально возможную полную энергию электрона в атоме водорода. Неопределенность координаты принять равной радиусу атома.

17. Какова размытость энергетического уровня в атоме водорода для основного и возбужденного (время его жизни 10^{-8} с) состояний?

18. Длина волны излучаемого атомом фотона $\lambda = 0,6$ мкм. Принимая время жизни возбужденного состояния $\Delta t = 10^{-8}$ с, определить отношение естественной ширины энергетического уровня, на который был возбужден электрон, к энергии, излученной атомом.

19. Считая, что электрон находится внутри атома диаметром $0,3$ нм, вычислить неопределенность энергии данного электрона в электрон-вольтах.

20. При движении вдоль оси x скорость частицы оказывается определенной с точностью $\Delta v_x = 1$ см/с. Оценить неопределенность координаты Δx для электрона, для броуновской частицы массой $m = 10^{-13}$ г и для дробинки массой $m = 0,1$ г.

21. Электрон с кинетической энергией $E = 4$ эВ локализован в области размером $L = 1$ мкм. Оценить относительную неопределенность его скорости.

22. С какими наименьшими ошибками можно определить скорость электрона, протона и шарика массой 1 мг, если координаты частиц и центра шарика установлены с неопределенностью 1 мкм.

23. Свободный электрон в момент времени $t = 0$ локализован в области $\Delta x_0 = 0,1$ нм. Оценить ширину области локализации этого электрона спустя 1 с.

24. След пучка электронов на экране электронно-лучевой трубки имеет диаметр $d = 0,5$ мм. Расстояние от электронной пушки до экрана $L = 20$ см, ускоряющее напряжение $U = 10$ кВ. Какова неопределенность координаты электрона на экране?

25. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером $L = 0,20$ нм.