

Общие рекомендации

Студенты первого курса дневного отделения обязаны выполнить четыре типовых расчета: два в первом и два во втором семестре. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе. Каждый типовой расчет следует выполнить в отдельной тетради, чертежи и рисунки необходимо исполнить на миллиметровке, подклеить затем их в тетрадь и снабдить необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач необходимо делать достаточно подробные пояснения. Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет.

К типовому расчету даются краткие методические указания, принимая которые во внимание и пользуясь указанной литературой, студент может приступить к выполнению типового расчета, не дожидаясь, когда необходимый материал будет изложен на лекции.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ "КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ"

Методические указания

Типовой расчет содержит шесть заданий.

1. Выполнение первого задания требует знания канонических уравнений кривых второго порядка и уравнения прямой линии на плоскости. Решим типовую задачу.

Задача 1. Фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Эллипс проходит через точку $M(-2;1,5)$. Составить уравнение этого эллипса.

Решение. Обозначим через a_1 и b_1 полуоси данной гиперболы, через a и b - полуоси искомого эллипса. Имеем $a_1^2 = 9, b_1^2 = 4$, откуда

$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 = 13$. Так как фокусы эллипса совпадают с фокусами данной гиперболы, то и для эллипса $c^2 = c_1^2 = 13$. Уравнение эллипса ищем в виде

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как точка $M(-2;1,5)$ принадлежит эллипсу, то ее

координаты удовлетворяют уравнению эллипса и, кроме того, выполнено соотношение $a^2 - b^2 = 13$. Таким образом, для определения a и b имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{(1,5)^2}{b^2} = 1; \\ a^2 - b^2 = 13. \end{cases}$$

Обозначив $b^2 = t (t > 0)$ и $a^2 = 13 + t$,

получим $\frac{4}{13+t} + \frac{9}{4t} = 1, a^2 = 13 + t$.

Решая, находим $t = b^2 = 3, a^2 = 16$ (рис.1).

Ответ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{3} = 1$.

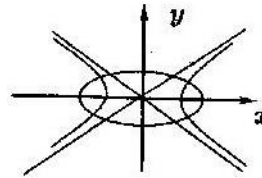


Рис.1

II. Во втором задании требуется привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, выполнив последовательно поворот, а затем параллельный перенос координатных осей.

Задача 2. Дано уравнение кривой второго порядка $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 52x - 64y + 164 = 0$. Выполнив поворот и параллельный перенос координатных осей, получить каноническое уравнение кривой и построить ее в исходной системе координат.

Решение. Выполняем поворот осей по формулам $x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha$; $y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha$. Подставим эти выражения для x и y в исходное уравнение и выделим коэффициент при $x_1 y_1$:

$$\begin{aligned} & 5(x_1^2 \cos^2 \alpha - 2x_1 y_1 \cos \alpha \sin \alpha + y_1^2 \sin^2 \alpha) + 4(x_1^2 \cos \alpha \sin \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)x_1 y_1 - \\ & - y_1^2 \sin \alpha \cos \alpha) + 8(x_1^2 \sin^2 \alpha + 2x_1 y_1 \sin \alpha \cos \alpha + y_1^2 \cos^2 \alpha) - \\ & - 52(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha) - 64(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) + 164 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Приравняв нулю коэффициент при $x_1 y_1$, получаем:

$$-10 \cos \alpha \sin \alpha + 4 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 16 \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

откуда $(\operatorname{tg} \alpha)_1 = 2; (\operatorname{tg} \alpha)_2 = -1/2$.

Зная $\operatorname{tg} \alpha$, можно найти $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ по формулам тригонометрии:

$$\sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Если угол поворота α условиться

считать острым, то в этих формулах надо брать знак плюс, и для $\operatorname{tg} \alpha$ надо

взять также положительное решение. Выберем, например, угол

поворота $\alpha: \operatorname{tg} \alpha = 2$, найдем $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, подставим их в (1).

После вычисления коэффициентов получим уравнение:

$$9x_1^2 + 4y_1^2 - 36\sqrt{5}x_1 + 8\sqrt{5}y_1 + 164 = 0.$$

В полученном уравнении выделим полные квадраты двучленов $x_1 + x_0$ и $y_1 + y_0$:

$$9(x_1 - 2\sqrt{5})^2 + 4(y_1 + \sqrt{5})^2 - 36 = 0.$$

Выполнив параллельный перенос по формулам $x_1 - 2\sqrt{5} = X$, $y_1 + \sqrt{5} = Y$,

получим в системе $XO'Y$ уравнение кривой

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1: \text{ это эллипс с полуосями}$$

2 и 3 соответственно (рис.2).

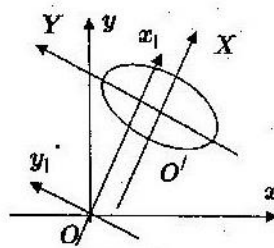


Рис. 2

Расчетные задания

I

1. Написать уравнение эллипса, проходящего через точку пересечения гиперболы $x^2 - y^2 = 2$ с прямой $x + y - 2 = 0$, если известно, что фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы.

2. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ при условии, что ее эксцентриситет $\varepsilon = 1,25$.

3. Написать уравнение такой окружности, чтобы ее диаметром оказался отрезок прямой $x + y = 4$, заключенный между осями координат.

4. Большая ось эллипса втрое больше его малой оси. Составить каноническое уравнение этого эллипса, если он проходит через точку

$$M(3, \sqrt{3}).$$

5. Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку $M(4, 6)$ и имеющего фокусы, которые совпадают с фокусами данной гиперболы.

6. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 8x$ с эллипсом, у которого правый фокус совпадает с фокусом этой параболы, большая полуось равна 4 и фокусы лежат на оси Ox .

7. Фокусы гиперболы лежат в точках $F_1(-\sqrt{7}, 0)$ и $F_2(\sqrt{7}, 0)$. Гипербола проходит через точку $A(2, 0)$. Найти уравнения ее асимптот.

8. Найти параметр p параболы $y^2 = 2px$, если известно, что эта парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ с окружностью $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

9. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 4x$ с прямой, проходящей через фокус этой параболы параллельно ее директрисе.

10. Через правый фокус гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$ проведены прямые, параллельные ее асимптотам. Определить точки пересечения этих прямых с гиперболой.

11. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат, центр которой совпадает с фокусом параболы $y^2 = 8x$.

12. Оси гиперболы совпадают с осями координат. Гипербола проходит через точки пересечения параболы $x^2 = 2y$ с прямой $x - 2y + 6 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.

13. Эллипс проходит через точку пересечения прямой $3x + 2y - 7 = 0$ с параболой $y^2 = 4x$ (взять точку с меньшей абсциссой). Оси эллипса

совпадают с осями координат. Составить уравнение этого эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6.

14. Эксцентриситет гиперболы в 2 раза больше углового коэффициента ее асимптоты. Гипербола проходит через точку $M(3, -1)$, и ее действительная ось лежит на оси Ox , а центр - в начале координат. Найти точки пересечения этой гиперболы с окружностью $x^2 + y^2 = 10$.

15. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а осью симметрии является ось Ox , если известно, что расстояние от ее фокуса до центра окружности $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 25 = 0$ равно 5.

16. Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2 - y^2 = 8$. Эллипс проходит через точки пересечения параболы $y^2 = 12x$ с гиперболой $8x^2 - y^2 = 8$.

17. Вычислить расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ до ее асимптоты. Найти эксцентриситет этой гиперболы.

18. Найти точки пересечения параболы $y^2 = x$ с окружностью, которая проходит через начало координат, имеет центр на оси Ox и радиус, равный 5.

19. Составить уравнение эллипса, если его фокусы совпадают с фокусами гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, а эксцентриситет эллипса равен $3/5$.

20. Окружность имеет центр в левой вершине гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ и радиус, равный вещественной полуоси этой гиперболы. Найти точки пересечения этой окружности с асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

21. Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $e = 3/2$, если известно, что ее фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$.

22. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x + y = 4$, вырезанной параболой $y^2 = 2x$.

23. Найти расстояние от фокуса параболы $y = \frac{1}{8}x^2$ до прямой $3x + 4y + 2 = 0$.

24. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $M(3, 0)$ и $N(-1, 2)$, если известно, что ее центр лежит на прямой $x - y + 2 = 0$.

25. Вычислить расстояние от центра окружности $x^2 + y^2 = 10x$ до асимптот гиперболы $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.

26. Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8, а расстояние между фокусами равно 8.

27. В эллипс $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

28. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5,0)$ и $B(1,4)$, если центр ее лежит на прямой $x + y = 3$.

29. Написать каноническое уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен 0,8, а большая полуось больше малой полуоси на две единицы.

30. Найти каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{40}, 2)$ и имеющей асимптоты $y = \pm \frac{1}{3}x$.

II

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

- 1) $x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
- 2) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
- 3) $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$
- 4) $4xy + 4x - 4y = 0$
- 5) $x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$
- 6) $-2x^2 + 2xy - 2y^2 - 6x + 6y + 3 = 0$
- 7) $4xy + 4x - 4y + 4 = 0$
- 8) $-4xy + 8x + 8y + 1 = 0$
- 9) $-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$
- 10) $-x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$
- 11) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$
- 12) $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 8x + 8y + 1 = 0$
- 13) $-4x^2 + 2xy - 4y^2 + 10x - 10y + 1 = 0$
- 14) $-x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
- 15) $4xy + 4x - 4y - 2 = 0$
- 16) $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 8x + 8y + 1 = 0$
- 17) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 8y + 1 = 0$
- 18) $x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y + 1 = 0$
- 19) $-4xy - 4x + 4y + 6 = 0$
- 20) $-x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$
- 21) $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$
- 22) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 12x - 4y + 1 = 0$
- 23) $4x^2 + 2xy + 4y^2 + 10x + 10y + 1 = 0$
- 24) $4xy + 4x + 4y + 1 = 0$
- 25) $-x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

- 26) $3x^2 - 4xy + 4 = 0$
- 27) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$
- 28) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0$
- 29) $4xy + 3y^2 - 4y - 36 = 0$
- 30) $2xy - 4x - 2y + 3 = 0$