ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Практическая работа №1

Передаточная функция и уравнения состояния

Цель работы: исследование и применение методов получения уравнений состояния из объекта управления, описанного передаточной функцией.

1. Краткие теоретические сведения

Уравнения состояния линейной скалярной системы имеют следующий общий вид:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ Y(t) = CX(t) + DU(t), \end{cases}$$

где X – вектор-столбец состояния $[n\times 1]$; A – матрица коэффициентов объекта $[n\times n]$; B – матрица входа $[n\times m]$; U – вектор входа (управления) $[m\times 1]$; Y – вектор выхода $[k\times 1]$; C – матрица выхода $[k\times n]$; D – матрица влияния входа непосредственно на выход системы $[k\times m]$.

Уравнениям состояния соответствует структурная схема, показанная на рис. 1.

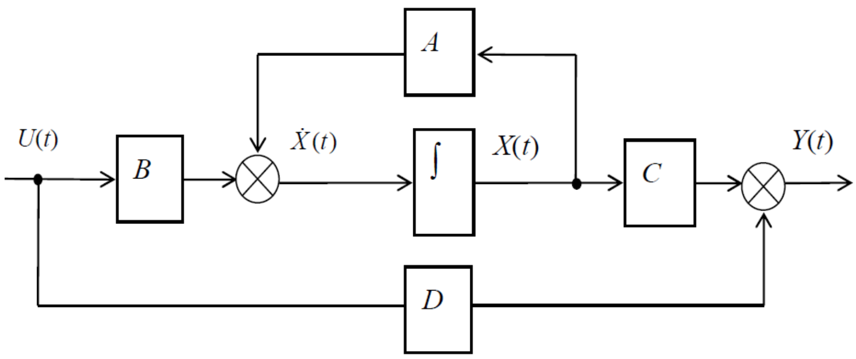

Рис.1 – Структура системы в пространстве состояния

На практике часто рассматриваются скалярные системы (с одним входом и одним выходом). Матрица D обычно нулевая.

Поскольку выбор переменных состояния неоднозначен, одной и той же ПФ могут соответствовать разные модели в пространстве состояний, но при обратном переходе всем этим моделям соответствует одна и та же ПФ.

Рассмотрим два способа получения уравнений состояния скалярной системы.

Первый способ основан на записи передаточной функции (ПФ) системы в виде:

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Y(s)}{X(s)}\frac{X(s)}{U(s)},$$

где $Y(s)$, $U(s)$, $X(s)$ – выход, вход и состояние системы соответственно.

Первой дроби соответствует уравнение выхода, а второй – уравнение состояния.

Второй способ получения матричного описания использует дифференциальное уравнение линейной скалярной системы.

Пусть связь между входом и выходом описывает уравнение:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0\right)y(t)=\left(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0\right)u(t).$$

Тогда в канонической форме управляемости уравнения состояния имеют вид

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=AX(t)+Bu(t),\\ Y(t)=CX(t)+Du(t),\end{cases}$$

где

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\ldots\\ \frac{1}{a_n}\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}b_0-\frac{a_0}{a_n}b_n & b_1-\frac{a_1}{a_n}b_n & b_2-\frac{a_2}{a_n}b_n & \ldots & b_{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_n}b_n\end{bmatrix},\ D=\frac{b_n}{a_n}.$$

2. Примеры

Рассмотрим использование первого способа получения уравнений состояния из передаточной функции.

Пример 1. Имеется ПФ объекта управления:

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2s^2+5s+1}{s^3+5s^2+3s+1}.$$

Уравнение состояния:

$$W(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^3+5s^2+3s+1}.$$

Тогда

$$X(s)\left(s^3+5s^2+3s+1\right)=U(s).$$

Переходя во временную область, можем записать:

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}=-5\frac{d^2x(t)}{dt^2}-3\frac{dx(t)}{dt}-x(t)+u(t).$$

Выбираем переменные состояния:

$$x_1=x,\ x_2=\frac{dx}{dt},\ x_3=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Тогда можно записать

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t).$$

Уравнение выхода:

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=2s^2+5s+1,$$

$$Y(t)=2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+5\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.$$

Выполним проверку решения в системе MatLab, рассмотрев реакцию на единичный скачок исходной системы, заданной передаточной функцией и системы, описанной в пространстве состояний.

```
>> W=tf([2 5 1],[1 5 3 1]);
>> A=[0 1 0;0 0 1;-1 -3 -5];
```

```
>> B=[0; 0; 1];
>> C=[1 5 2];
>> W1=ss(A,B,C,0);
>> [Y1,T]=step(W);
>> [Y2,T]=step(W1);
>> plot(T,Y1,T,Y2)
>> grid;
>> xlabel('t(sec)');
>> ylabel('Y1(t), Y2(t)');
```

На рис. 2 представлены графики переходных процессов, они оказались идентичны.

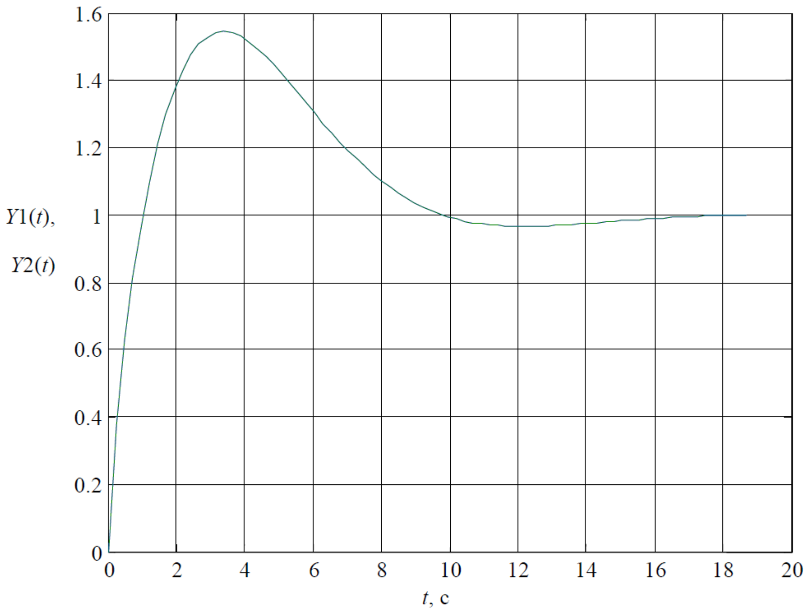

Рис. 2 – Графики переходных процессов

Пример 2. Имеется ПФ объекта управления:

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{7s^3-2s^2+5s+1}{4s^3+5s^2-3s+1}.$$

Требуется получить уравнения состояния.

Решение.

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Y(s)}{X(s)}\frac{X(s)}{U(s)}=\left(7s^3-2s^2+5s+1\right)\frac{1}{4s^3+5s^2-3s+1}.$$

Уравнение состояния:

$$W(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{1}{4s^3+5s^2-3s+1}.$$

Тогда

$$X(s)\left(4s^3+5s^2-3s+1\right)=U(s).$$

Переходя во временную область, можем записать:

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}=-\frac{5}{4}\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{3}{4}\frac{dx(t)}{dt}-\frac{1}{4}x(t)+\frac{1}{4}u(t).$$

Выбираем переменные состояния:

$$x_1=x,\ x_2=\frac{dx}{dt},\ x_3=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Тогда можно записать

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -0.25 & 0.75 & -1.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0.25\end{bmatrix}u(t).$$

Уравнение выхода:

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=7s^3-2s^2+5s+1,$$

$$Y(t)=7\frac{d^3x(t)}{dt^3}-2\frac{d^2x(t)}{dt^2}+5\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+7\dot{x}_3.$$

Используя полученное описание для dx^3/dt, получаем:

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+7\left(\begin{bmatrix}-0.25 & 0.75 & -1.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+0.25u(t)\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}-0.75 & 10.25 & -10.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+1.75u(t).$$

Пример 2 показал, что при равенстве порядков числителя и знаменателя расчет становится несколько громоздким.

Рассмотрим далее пример получения уравнений состояния в канонической форме управляемости по дифференциальному уравнению системы.

Пример 3. Имеется уравнение динамики объекта управления:

$$4\dddot{y}(t)+5\ddot{y}(t)-3\dot{y}(t)+y(t)=7\dddot{u}(t)-2\ddot{u}(t)+5\dot{u}(t)+u(t).$$

Ему соответствует ПФ:

$$W(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{7s^3-2s^2+5s+1}{4s^3+5s^2-3s+1}.$$

Требуется получить уравнения состояния.

Решение.

Здесь, очевидно, имеем:

b_3=7, b_2=–2, b_1=5, b_0=1.

a_3=4, a_2=5, a_1=–3, a_0=1.

Уравнения состояния в канонической форме управляемости приобретают вид:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -0.25 & 0.75 & -1.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0.25\end{bmatrix}u(t).$$

$$y=\begin{bmatrix}-0.75 & 10.25 & -10.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+1.75u(t).$$

Выполним проверку решения в MatLab:

```
>> W=tf([7 -2 5 1],[4 5 -3 1]);
>> A=[0 1 0; 0 0 1; -0.25 0.75 -1.25];
>> B=[0 0 0.25];
>> C=[-0.75 10.25 -10.75];
>> D=1.75;
>> W1=ss(A,B,C,D);
>> [Y1,T]=step(W);
>> [Y2,T]=step(W1);
```

```
>> plot(T,Y1,T,Y2)
>> grid;
>> xlabel('t, c');
>> ylabel('Y1(t), Y2(t)');
```

Представленные на рис. 3 графики переходных процессов для двух вариантов описания системы идентичны.

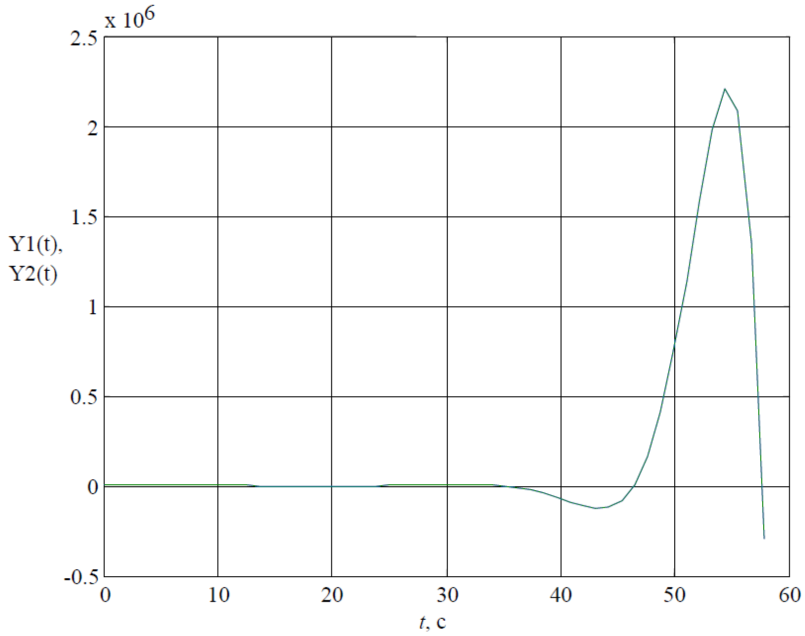

Рис.3 – Сравнение переходных процессов

3. Задания для практической работы

Для заданной передаточной функции из табл. 1 получить двумя способами описание в пространстве состояний (матрицы *A*, *B*, *C*, *D*). Проверить полученное описание моделированием в *MatLab*.

Таблица 1 – Передаточные функции

№	Вариант	№	Вариант
1	$W(s)=\dfrac{0.01s^3+0.2s^2+0.05s+1}{0.3s^3+0.6s^2+0.1s+1}$	11	$W(s)=\dfrac{0.25s^3+2s^2+0.5s+1}{0.1s^3+0.4s^2+0.01s+1}$
2	$W(s)=\dfrac{0.75s^3+1.5s^2+0.1s+1}{0.01s^3+0.064s^2+0.016s+1}$	12	$W(s)=\dfrac{0.3s^3+2s^2+0.5s+1}{0.5s^3+2s^2+0.6s+1}$
3	$W(s)=\dfrac{4s^3+3s^2+0.75s+1}{2s^3+4.64s^2+1.16s+1}$	13	$W(s)=\dfrac{0.3s^3+8.64s^2+2.16s+1}{6s^3+8s^2+2s+1}$
4	$W(s)=\dfrac{0.9s^3+3.64s^2+1.16s+1}{1.5s^3+3s^2+0.7s+1}$	14	$W(s)=\dfrac{0.7s^3+2s^2+0.4s+1}{0.35s^3+0.9s^2+0.3s+1}$
5	$W(s)=\dfrac{3s^3+7s^2+2s+1}{4s^3+6s^2+2s+1}$	15	$W(s)=\dfrac{0.2s^3+0.75s^2+0.1s+1}{2s^3+3s^2+0.75s+1}$
6	$W(s)=\dfrac{2s^3+3s^2+0.75s+1}{0.2s^3+0.75s^2+0.1s+1}$	16	$W(s)=\dfrac{4s^3+6s^2+2s+1}{3s^3+7s^2+2s+1}$
7	$W(s)=\dfrac{0.35s^3+0.9s^2+0.3s+1}{0.7s^3+2s^2+0.4s+1}$	17	$W(s)=\dfrac{1.5s^3+3s^2+0.7s+1}{0.9s^3+3.64s^2+1.16s+1}$
8	$W(s)=\dfrac{6s^3+8s^2+2s+1}{1.5s^3+4s^2+0.5s+1}$	18	$W(s)=\dfrac{2s^3+4.64s^2+1.16s+1}{4s^3+3s^2+0.75s+1}$
9	$W(s)=\dfrac{6s^3+8s^2+2s+1}{0.3s^3+8.64s^2+2.16s+1}$	19	$W(s)=\dfrac{0.01s^3+0.064s^2+0.016s+1}{0.75s^3+1.5s^2+0.1s+1}$
10	$W(s)=\dfrac{0.1s^3+0.4s^2+0.01s+1}{0.25s^3+2s^2+0.5s+1}$	20	$W(s)=\dfrac{0.3s^3+0.6s^2+0.1s+1}{0.01s^3+0.2s^2+0.05s+1}$