

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**Санкт-Петербургский государственный университет  
промышленных технологий и дизайна**

Кафедра инженерного материаловедения и метрологии

## **ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

Методические указания к выполнению контрольной работы  
для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки

18.03.01 – Химическая технология

Составитель  
В.В. Васильева

Санкт-Петербург  
2022

Методические указания содержат рекомендации по выполнению контрольной работы по дисциплине «Прикладная механика». Приведены общие методические указания к выполнению контрольной работы, условия задач, теоретические положения по соответствующим задачам темам дисциплины и даны примеры решения этих задач, представлен список рекомендуемой литературы.

Методические указания разработаны для студентов заочной формы обучения, по направлению подготовки 18.03.01 «Химическая технология»

## ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Курс «Прикладная механика» включает в себя знания нескольких смежных дисциплин. Одна из них – это Сопротивление материалов, в котором рассматриваются классические подходы к изучению напряженно-деформированного состояния конструкционных материалов.

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости, устойчивости отдельных элементов конструкций. Инженеру любой специальности часто приходится производить расчеты на прочность. При проведении расчетов на прочность необходимо стремиться к сочетанию надежности работы конструкции с ее дешевизной, т. е. добиваться наибольшей прочности при наименьшем расходе материала.

Краткий курс сопротивления материалов для студентов заочной формы обучения включает в себя только основные виды напряжённо-деформированного состояния элементов конструкций. В связи с этим, студенту предлагается решить четыре задачи только по следующим темам дисциплины:

1. Осевое растяжение (сжатие).
2. Кручение.
3. Прямой поперечный изгиб.

Прежде чем приступать к решению задач контрольной работы, необходимо проработать тему, по которой решается задача. Следует изучить теоретические основы данной темы, понять вывод формул, которыми в дальнейшем предстоит пользоваться при решении задачи.

Обращаться к пособиям по решению задач можно только после проработки теоретического материала.

Студент обязан выполнять задания контрольной работы в соответствии с номером своего студенческого билета. Предпоследняя цифра номера соответствует **номеру строки** в таблице данных, а последняя цифра номера – **номеру схемы** для каждой задачи. Например: номер студенческого билета 256963, тогда номер строки с данными будет 6, а номер схемы к задаче – 3.

При выполнении задач данные берутся из таблиц, номера которых указаны в условиях задач.

Контрольная работа, выполненная не по шифру, оценивается неудовлетворительно.

К сессии студент допускается только с зачтенными контрольными работами.

## **Порядок оформления работ**

1. Все задачи, входящие в контрольную работу, должны быть выполнены в одном файле.
2. В заголовке контрольной работы должны быть записаны четко: номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя, отчество студента (полностью), название института и направления, номер студенческого билета.
3. Заданные по условию задачи схемы должны быть представлены чётко в масштабе.
4. Данные для решения задач берутся в соответствии с шифром.
5. Решения задач давать с пояснениями и промежуточными расчетами.
6. Необходимо указывать размерность всех величин в системе СИ и подчеркивать окончательные результаты.
7. После получения с проверки контрольной работы, студент должен исправить в ней отмеченные ошибки и выполнить все данные ему указания. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

## Литература

1. Агапов В.П. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебник/ Агапов В.П.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.— 336 с. гриф УМО — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/26864>.— ЭБС «IPRbooks»

2. Астанин А.А. Техническая механика. Книга 2. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Астанин А.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: Машиностроение, 2012.— 160 с. гриф УМО— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/18544>. — ЭБС «IPRbooks»

3. Сопротивление материалов (4-е издание) [Электронный ресурс]: учебник/ Г.Д. Межецкий [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Дашков и К, 2013.— 431 с. гриф УМО — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/24812>.— ЭБС «IPRbooks»

4. Атапин, В. Г. Сопротивление материалов. Краткий теоретический курс : учебное пособие / В. Г. Атапин. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2011. — 204 с. — ISBN 978-5-7782-1593-1. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45436.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

5. Черноусов, Н. Н. Практикум по сопротивлению материалов. Часть 1. Простые виды нагружения (растяжение, изгиб, кручение) : учебное пособие / Н. Н. Черноусов, Р. Н. Черноусов. — Липецк : Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2014. — 131 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/55135.html> — Режим доступа: для авторизир. пользователей

### б) дополнительная учебная литература

6. Цобкалло Е. С. Сопротивление материалов [Учебное пособие. Ч.1]/ Цобкалло Е. С., Петрова Л. Н., Дарвиш Д. М. СПб.: СПГУТД, 2009. - 84 с. <http://publish.sutd.ru> (практические задания)

7. Петрова Л. Н. Сопротивление материалов. Пособие по решению задач. Ч.2. [Учебное пособие.] / Петрова Л. Н., Цобкалло Е. С., Васильева В. В. И др. - СПб. : СПГУТД, -2010.- 68с. <http://publish.sutd.ru> (практические задания)

8. Сопротивление материалов: учеб. пособие для решения задач по курсу сопротивления материалов для студентов заочной и дневной форм обучения / Е. С. Цобкалло, Л. Н. Петрова, Д. М. Дарвиш ; Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна. — СПб. : СПГУТД, 2009. — 88 с.

[http://publish.sutd.ru/tp\\_ext\\_inf\\_publish.php?id=356](http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=356)

9. Осевое растяжение (сжатие). Геометрические характеристики плоских сечений. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ для студентов всех форм обучения / Цобкалло Е. С., Петрова Л. Н., Большухин О. П. - СПб. : СПГУТД, 2009. –21 с.

[http://publish.sutd.ru/tp\\_ext\\_inf\\_publish.php?id=353](http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=353)

10. Цобкалло Е. С. Сопротивление материалов. Механика материалов и конструкций. Изгиб [Электронный ресурс]: учебное пособие / Цобкалло Е. С., Москалюк О. А. — СПб.: СПбГУПТД, 2017.— 77 с.— Режим доступа: [http://publish.sutd.ru/tp\\_ext\\_inf\\_publish.php?id=2017640](http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=2017640), по паролю.

11. Сопротивление материалов. Механика материалов и конструкций. Самостоятельная работа [Электронный ресурс]: методические указания / Сост. Цобкалло Е. С. — СПб.: СПбГУПТД, 2017.— 26 с.— Режим доступа: [http://publish.sutd.ru/tp\\_ext\\_inf\\_publish.php?id=2017641](http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=2017641), по паролю.

## 1. Общие положения

Сопротивление материалов – наука о механической надежности элементов конструкции (материала).

Механическая надежность обеспечивается прочностью, жесткостью и устойчивостью элементов.

- *Прочность* – способность элемента (материала) сопротивляться нагрузкам без разрушения

- *Жесткость* – способность элемента (материала) сопротивляться деформациям без разрушения

- *Устойчивость* – способность длинного гибкого элемента сохранять первоначальное прямолинейное состояние под воздействием сжимающей нагрузки, совпадающей с продольной осью элемента

При расчетах элементов на прочность, жесткость и устойчивость необходимо составить *схему (план) сил*, т.е. в выбранной системе координат представить все внешние нагрузки, действующие на рассчитываемую конструкцию (элемент конструкции).

### 1.1. Классификация внешних нагрузок

Внешние нагрузки бывают:

- **Активные**

- сосредоточенная сила  $P$ , [кН]

- распределенная нагрузка  $q$ , [кН/м]

- пара сил (момент),  $M$  [кН·м]

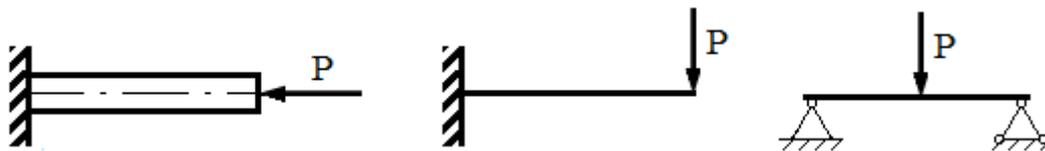
- **Реактивные**

- продольная реакция,  $H$  [кН]

- поперечная реакция,  $R$  [кН]

- момент заделки,  $M_{\text{зад}}$  [кН·м]

#### 1.1.1. Сосредоточенная сила $P$ , т.е. сила, приложенная в точке



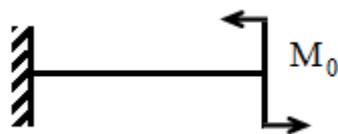
**1.1.2.** Распределенная нагрузка, т.е. нагрузка, действующая на участке определённой длины. Количественно такой вид нагрузки характеризуется интенсивностью распределённой нагрузки  $q$  (кН/м) т.е. усилием, приходящимся на единицу длины элемента (в случае равномерно распределённой нагрузки). В ряде случаев (при составлении уравнений

статики) равномерно распределенную нагрузку удобно заменить равнодействующей силой  $G$ , приложенной в точке  $C$ , где  $G=ql$  (кН)

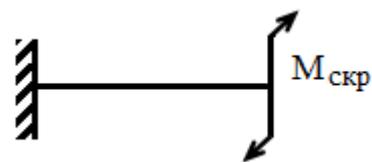


### 1.1.3. Пара сил (момент)

изгибающий момент



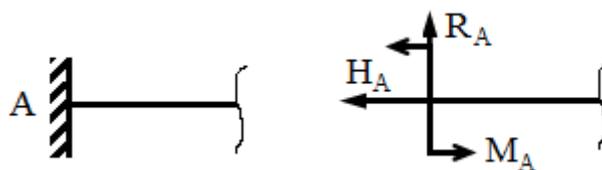
скручивающий момент



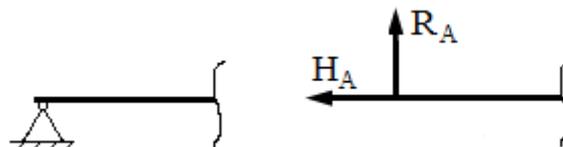
## 1.2. Способы закрепления элементов конструкции

Элементы конструкции могут закрепляться различными способами, но любое крепление ограничивает *степень свободы подвижности*, которых у движущегося элемента на плоскости может быть три. Рассмотрим варианты ограничения степени свободы подвижности.

**1.2.1. Жесткая опора (защемление, жесткая заделка). Ограничение трех степеней свободы.**



**1.2.2. Неподвижная шарнирная опора. Ограничение двух степеней свободы.**



**1.2.3. Подвижная шарнирная опора (каток). Ограничение одной степени свободы.**



Величину и направление реактивных усилий (реакций опор) определяют с помощью уравнений статики (уравнений равновесия). Для составления уравнений статики необходимо выбрать систему координат и спроектировать все внешние (активные и реактивные) усилия. Центр координат обычно помещают в крайнюю левую точку на силовой схеме. Необходимо отметить, что для плоских схем можно составить не более трех следующих линейно-независимых уравнений статического равновесия:

1. Сумма проекций всех сил, приложенных к системе, на ось  $X$  равна 0.  $\Sigma X=0$ .
2. Сумма проекций всех сил, приложенных к системе, на ось  $Y$  равна 0.  $\Sigma Y=0$ .
3. Сумма моментов относительно любой точки плоскости от всех силовых факторов, приложенных к системе, равна 0.  $\Sigma M=0$ .

Данные уравнения следует составлять с учётом направления усилий, что выражается в знаках (+ или –) перед каждым слагаемым уравнений.

### 1.3. Способ приложения нагрузок

При решении задач по сопротивлению материалов, связанных с вопросами прочности или жесткости, расчеты производят с помощью силовых схем. Силовая схема представляет собой ось элемента с приведенными к ней внешними усилиями (активными и реактивными). Ось элемента будем называть геометрическое место центров тяжести нормальных (поперечных) сечений стержня (балки, вала). Введем также понятия центральных и главных осей поперечного сечения стержня (балки, вала). Каждое нормальное сечение имеет центр тяжести. Через этот центр тяжести сечения можно провести бесконечное количество осей. Оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения, называются **центральными**.

Рассмотрим произвольное поперечное сечение, имеющее одну ось симметрии (рис. 1.1). Центр тяжести этого сечения обозначим точкой  $C$ .

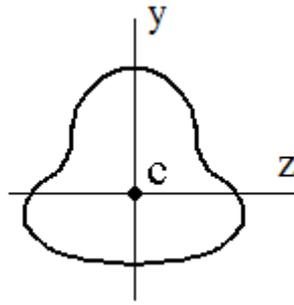


Рис. 1.1

В этом сечении из бесконечного множества центральных осей только лишь ось «у» окажется осью симметрии. Ось симметрии называется **главной осью**.

Ось симметрии, проходящая через центр тяжести сечения, называется **главной центральной осью сечения**. Если сечение не имеет оси симметрии, то положение главных центральных осей может быть определено (см. раздел «Геометрические характеристики плоских сечений» пособия [6, 9]).

Центральная ось «z», перпендикулярная указанной оси симметрии «у», также будет являться главной осью. Поперечные сечения, имеющие сложную форму, получили название *сложного* или *составного* сечения. В ряде случаев любое составное сечение можно представить в виде сочетания простейших геометрических фигур (прямоугольник, треугольник, круг), либо в виде сочетания прокатных профилей, либо сочетания тех и других. Существует целый ряд геометрических характеристик для плоских сечений любой формы. Самой простой геометрической характеристикой плоского сечения является его площадь. При решении задач по сопротивлению материалов встречаются более сложные характеристики плоских сечений, которые включают в себя не только размеры сечения, но и удаленность точек данного сечения от центра тяжести или главных осей сечения. Для знакомства с этими вопросами необходимо проработать раздел «Геометрические характеристики плоских сечений». Геометрические характеристики для прокатных профилей можно посмотреть в любой справочной литературе или учебниках (задачаниках) по сопротивлению материалов. Геометрические характеристики прокатных профилей сведены в таблицы, называемые *сортаментом*.

Расположение внешних силовых факторов (нагрузок) по отношению к продольной оси рассматриваемого элемента и главным осям сечения определяет следующие виды нагружено-деформированного состояния:

Простые виды нагружено-деформированного состояния (простое сопротивление):

- Осевое растяжение (сжатие).

- Сдвиг. Кручение.
- Плоский поперечный изгиб

Сложные виды нагружено-деформированного состояния (сложное сопротивление):

- Пространственный изгиб (частный случай – косоугольный изгиб).
- Совместное действие изгиба с осевым растяжением (сжатием).
- Совместное действие изгиба с кручением.
- Внецентренное растяжение (сжатие).

Нагрузки также классифицируются по продолжительности их приложения.

Приложение внешней нагрузки к элементу за отрезок времени, соизмеримый наблюдателем (т.е. с момента соприкосновения груза с элементом до полного его действия проходит время, которое наблюдатель успевает зафиксировать) – классифицируется как *статическое нагружение*.

Приложение внешней нагрузки мгновенно (т.е. нагрузка прикладывается за очень короткий отрезок времени – классифицируется как *динамическое нагружение*).

Существуют также понятия как *постоянно* действующая (например, вес Александрийской колонны на Дворцовой площади) и *временно* действующая (поезд, идущий по мосту) нагрузки.

#### **1. 4. Механические свойства конструкционных материалов**

Этот раздел требует теоретической проработки для того чтобы ответить на ряд важнейших вопросов сопротивления материалов. Например, при каком значении нагрузки в материале наступит опасная ситуация? Какая нагрузка является опасной? Ответ на эти и другие вопросы можно получить, проработав тему «Механические свойства конструкционных материалов». Следует ознакомиться с поведением пластичных и хрупких материалов под нагрузкой на примере диаграмм растяжения, поскольку большинство механических характеристик материалов, как прочностных, так и деформационных, можно рассчитать при помощи диаграммы растяжения. Например, необходимо обратить внимание на такие важные физико-механические характеристики материала, как модуль нормальной упругости  $E$  [МПа], допускаемое напряжение  $[\sigma]$  [МПа], продольные деформации – абсолютную  $\Delta l$  [м] и относительную  $\varepsilon$  [%]; поперечные деформации – абсолютную  $\Delta d$  [м] и относительную  $\psi$  [%].

**ПРИМЕЧАНИЕ:** в курсе сопротивления материалов студентами рассматриваются классические строительно-конструкционные материалы, такие как металлы и сплавы, дерево, камень, бетон и другие.

Испытания на растяжение или сжатие проводятся на специальных разрывных машинах, которые записывают диаграмму растяжения, выражающую зависимость удлинения образца  $\Delta l$  (мм) от действующей внешней нагрузки  $P$ , т. е.  $\Delta l = f(P)$  (рис. 1.2).

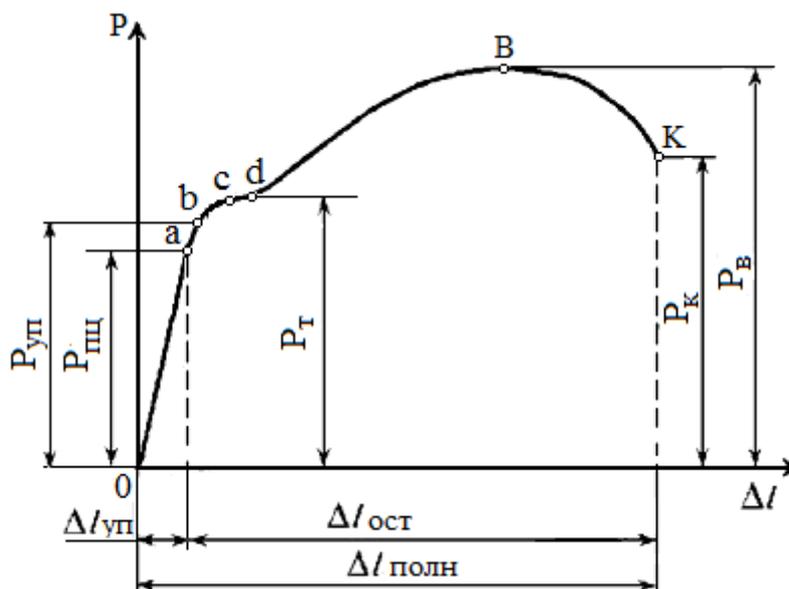


Рис. 1.2 Кривая растяжения углеродистой конструкционной стали

Проанализируем процессы, которые происходят в материале образца при увеличении нагрузки.

Участок Oa на диаграмме соответствует упругой деформации материала, когда соблюдается закон Гука. Напряжение, соответствующее упругой предельной деформации в точке a, называется *пределом пропорциональности*.

**Предел пропорциональности ( $\sigma_{пц}$ )** – максимальное напряжение, до которого сохраняется линейная зависимость между деформацией и напряжением:

$$\sigma_{пц} = \frac{P_{пц}}{F_0} \quad (1.1)$$

где  $P_{пц}$  – величина внешней нагрузки, соответствующей нагрузке в т. а на диаграмме растяжения;

$F_0$  – исходная площадь поперечного сечения образца.

Предел пропорциональности – очень важная прочностная характеристика материала, с ее помощью определяются допусаемые напряжения, рассчитываемые по формуле (1.2).

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пц}}{k} \quad (1.2)$$

где  $k$  – коэффициент запаса.

Для пластичных материалов коэффициент  $k = 2,5-3$ , для хрупких – от 3 до 4.

При напряжениях выше предела пропорциональности происходит равномерная пластическая деформация (удлинение или сужение сечения). В точке  $b$  как в наиболее слабом месте начинает образовываться шейка – резкое местное уменьшение поперечного сечения образца.

На участке диаграммы растяжения между точками  $c$  и  $d$  мы видим существенное увеличение удлинения при совсем незначительном увеличении внешней нагрузки – происходит дальнейшая деформация образовавшейся шейки. Образование шейки характерно для пластичных материалов, которые имеют диаграмму растяжения с максимумом.

В зависимости от природы материала используют физический или условный предел текучести.

**Физический предел текучести ( $\sigma_T$ )** – это напряжение, при котором происходит увеличение деформации при постоянной нагрузке (наличие горизонтальной площадки на диаграмме растяжения  $cd$ ). Используется для очень пластичных материалов.

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0} \quad (1.3)$$

где  $P_T$  – величина внешней нагрузки, соответствующей горизонтальной площадке на диаграмме растяжения  $cd$ .

Но основная часть металлов и сплавов не имеет площадки текучести, для них определяют условный предел текучести.

**Условный предел текучести ( $\sigma_{0,2}$ )** – это напряжение, вызывающее остаточную деформацию  $\Delta l = 0,2 \%$ :

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0} \quad (1.4)$$

Физический или условный предел текучести является важной расчетной характеристикой материала. Действующие в конструкции напряжения должны быть ниже предела текучести.

Равномерная по всему объему пластическая деформация продолжается до значения предела прочности.

Точка  $B$  соответствует максимальной нагрузке, которую может выдержать материал, по ней определяется предел прочности материала, который характеризует прочность, как сопротивление значительной равномерной пластической деформации.

**Предел прочности ( $\sigma_B$ )** – напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, которую выдерживает образец до разрушения (временное сопротивление разрыву):

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (1.5)$$

где  $P_b$  – величина внешней нагрузки, соответствующей нагрузке в т. В на диаграмме растяжения.

В точке К происходит разрушение материала.

При испытании на растяжение определяются и деформационные характеристики.

К характеристикам пластичности следует отнести, прежде всего, **относительное удлинение**  $\varepsilon$  – отношение (в процентах) приращения расчетной длины образца, остающегося после разрыва, к его начальной расчетной длине:

$$\varepsilon = \frac{l_x - l_0}{l_0} 100 \%, \quad (1.6)$$

где  $l_0$  и  $l_x$  – начальная и конечная длина образца;

и **относительное сужение**  $\psi$  – отношение (в процентах) наибольшего уменьшения площади поперечного сечения образца к начальной площади его поперечного сечения  $F_0$ :

$$\psi = \frac{F_0 - F_x}{F_0} 100\%, \quad (1.7)$$

где  $F_0$  – начальная площадь поперечного сечения образца;

$F_x$  – площадь поперечного сечения в шейке после разрыва.

## 2. План рассмотрения нагружено-деформированных состояний

Здесь следует заметить, что все расчеты конструкций в сопротивлении материалов (определение деформаций, напряжений) производятся через внутренние силовые факторы, возникающие в сечениях элементов конструкций вследствие приложения внешних нагрузок. Определяются внутренние силовые факторы методом сечений. Для определения опасного сечения или участка строят графики (эпюры) изменения внутренних силовых факторов по длине рассматриваемого элемента.

Рассмотрим понятия силового участка и метода сечений.

### 2.1. Понятие силового участка

**Силовой участок** определяется как часть длины элемента конструкции, расположенный между соседними силовыми факторами или занимаемый распределенной нагрузкой.

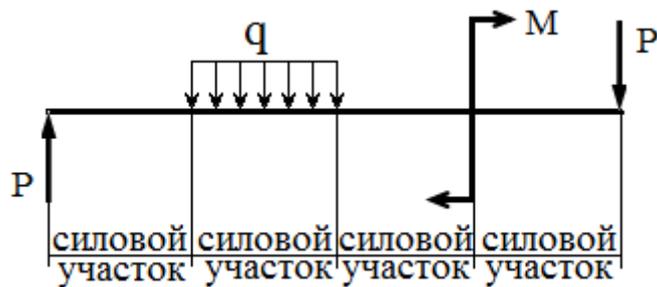


Рис. 2.1

## 2.2. Правило определения внутренних силовых факторов (метод сечений)

Внешние нагрузки в элементе вызывают внутренние усилия. Для определения этих усилий необходимо «заглянуть» в сечение элемента. Для этого необходимо мысленно разрезать элемент. Этот метод получил название **метод сечений**, который заключается в следующем:

- мысленно разрезаем элемент на каждом силовом участке;
- отбрасываем одну из частей (левую или правую, верхнюю или нижнюю);
- отброшенную часть элемента заменяем внутренними реакциями, т.е. внутренними силовыми факторами. Внутренние силовые факторы возникают строго в соответствии с внешними нагрузками. От действия продольной нагрузки возникает продольное внутреннее усилие, от поперечной нагрузки – внутренняя поперечная сила и изгибающий момент. От сосредоточенного момента – внутренний момент (изгибающий или крутящий);
- определяем значения внутренних силовых факторов, как алгебраическую сумму всех соответствующих внешних силовых факторов, действующих на оставшуюся (не отброшенную) часть элемента.

Решение задач осуществляется по общему плану:

- 1) составляется план сил (силовая схема);
- 2) составляются уравнения статического равновесия. Определяются реактивные внешние силы (в случае статически определимых задач);
- 3) элемент разбивается на силовые участки.
- 4) методом сечений определяются внутренние силовые факторы по каждому участку.
- 5) строятся эпюры внутренних силовых факторов по каждому участку.

Исходя из условия прочности, отвечают на поставленный в задаче вопрос: проверяют прочность конструкции, подбирают сечения элементов конструкции, определяют грузоподъемность конструкции.

Далее в параграфе 3 (осевое растяжение – сжатие) на примере стержня, нагруженного продольными силами  $P_1$  и  $P_2$ , рассматривается решение задачи по указанному плану. В этом же параграфе приводится пример решения задач №1, 2.

### 3. Осевое растяжение (сжатие)

Осевым растяжением (сжатием) будем называть такой вид нагружено-деформированного состояния, при котором линия действия сил, приложенных к стержню, совпадает с его продольной осью  $x$ . Рассмотрим элемент произвольного сечения, к которому приложены усилия, совпадающие с продольной осью, при этом  $P_1 > P_2$  (рис.3.1).

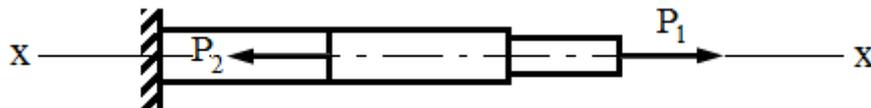


Рис.3.1

#### 3.1. Определение внутреннего продольного усилия

Под воздействием продольных внешних сил (активных и реактивных), совпадающих с продольной осью элемента  $x$ , в поперечных сечениях элемента возникает *внутреннее продольное усилие*, которое обозначим  $N$ .

Для определения внутреннего продольного усилия  $N$  применим *метод сечений* (см. § 2) в следующей последовательности:

- 1) Построим силовую схему (рис.3.2) (план сил)

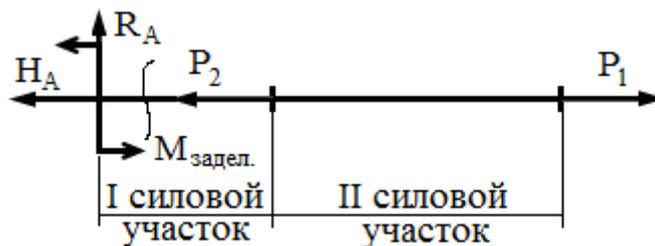


Рис.3.2

Исходя из силовой схемы, составляем уравнения статики (3.1) (см. раздел 1.2) и определяем величины реактивных усилий  $H_A$ ,  $R_A$  и  $M_A$ :

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0; -N_A - P_2 + P_1 = 0 \\ \Sigma Y &= 0; R_A = 0 \\ \Sigma M_A &= 0; M_{\text{задел}} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$N_A = P_1 - P_2$$

Реактивные усилия  $R_A$  и  $M_{\text{задел}}$  равны нулю, так как отсутствуют соответствующие активные силовые факторы (поперечная сила и момент).

Таким образом, определены все реактивные усилия.

Задачи, в которых неизвестные реактивные усилия можно определить с помощью только уравнений статики, называются **статически определяемыми**.

2) Определим количество силовых участков на схеме (рис. 3.2.). На силовой схеме имеются два силовых участка.

3) Мысленно проведем сечение на первом силовом участке плоскостью, нормальной к оси стержня, и отбросим левую часть. Отброшенную часть заменим вектором продольного внутреннего усилия  $N_1(x)$  для уравнивания оставшейся части (рис. 3.3). Направление вектора  $N$  для статически-определимых задач показываем «от сечения», считая его растянутым. Подобным образом рассматривается второй участок и определяется  $N_2(x)$  (рис. 3.4).

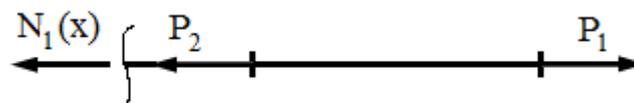


Рис.3.3

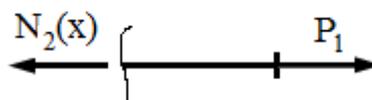


Рис. 3.4

**Внутреннее продольное усилие** – это есть алгебраическая сумма всех внешних (активных и реактивных) продольных сил, расположенных на оставленной части стержня.

4) Составим уравнения статического равновесия для каждого силового участка.

$$\Sigma X = 0; -N_1(x) - P_2 + P_1 = 0, \quad (3.2)$$

откуда  $N_1(x) = P_1 - P_2$

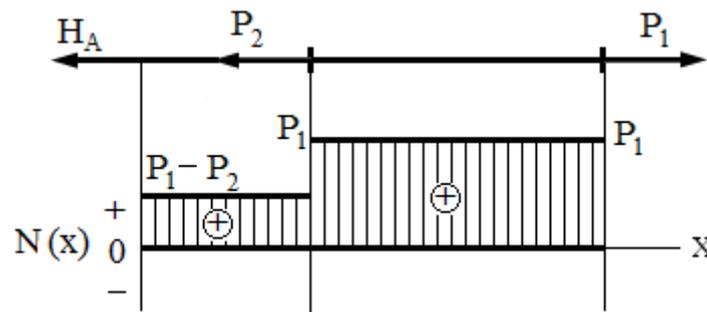
Для второго силового участка:

$$\Sigma X = 0; -N_2(x) + P_1 = 0 \quad (3.3)$$

откуда  $N_2(x) = P_1$

### 3.2. Построение эпюры внутреннего продольного усилия

Построим эпюру распределения внутреннего продольного усилия по длине всего элемента *рис. 3.5*. Для этого построим на каждом силовом участке график зависимости  $N(x)$  по уравнениям (3.2) и (3.3).



*Рис.3.5* Эпюра распределения внутреннего продольного усилия по длине элемента

Целью построения эпюр является определение опасного участка (сечения) элемента. В нашем примере опасным будет участок II, т. к. на этом участке значение внутреннего усилия  $N$  наибольшее. Рассматриваемая эпюра и для I и для II силовых участков лежит в положительной области. Знак “+” на эпюре говорит о том, что все участки стержня испытывают деформацию растяжения. Как видно из *рис. 3.5*, поперечный размер элемента не оказывает влияния на величину внутреннего усилия  $N$ .

### 3.3. Проверка прочности, подбор сечения элемента конструкции

Конечной целью рассмотрения нагруженного состояния будет являться либо проверка прочности, либо подбор сечения элемента конструкции. Прочность любого элемента конструкции, как и конструкции в целом, связана с определением напряжения  $\sigma_{\max}$  в опасном сечении и сравнении этой величины с допускаемым напряжением  $[\sigma]$  (см. § 1.4). Это условие получило название *условие прочности*. Так при осевом

растяжении (сжатии) условие прочности записывается следующим образом:

$$|\sigma_{max}| = \frac{|N_{max}|}{F} \leq [\sigma] \quad (3.4)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения.

В нашем примере  $N_{max} = P_1$  (рис. 3.5),  $\sigma_{max} = \frac{P_1}{F}$ .

Значение допускаемого напряжения  $[\sigma]$  зависит только от свойств материала конструкции, определяется экспериментально для каждого материала и указывается в справочной литературе.

Для проверки прочности элемента необходимо сравнить рассчитанное по формуле 3.4  $\sigma_{max}$  с  $[\sigma]$ . Если неравенство выполняется, то приложенные к элементу внешние нагрузки удовлетворяют условию прочности.

Для подбора сечения элемента конструкции из условия прочности, записанного для конкретного случая, рассчитывают площадь поперечного сечения по формуле 3.5.

$$F \geq \frac{|N_{max}|}{[\sigma]} \quad (3.5)$$

## 4. Кручение

### 4.1 Внешние и внутренние силовые факторы, метод сечений

С кручением на практике приходится встречаться главным образом при проектировании и расчёте валов. Вал – стержень круглого поперечного сечения.

Нагружено-деформированное состояние – кручение создаётся в результате приложения пар сил  $M_1$  и  $M_2$  в плоскостях, нормальных к оси вала (стержня) (рис. 4.1). Пусть  $|M_2| > |M_1|$ .

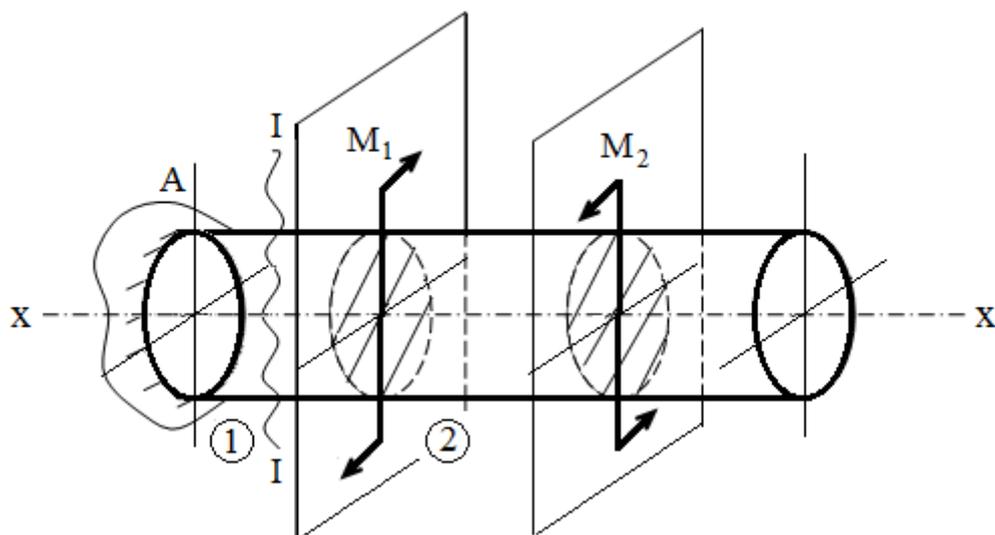


Рис. 4.1.

$M_1$  и  $M_2$  – скручивающие моменты (пары сил) – это внешние силовые факторы (кН·м)

Схематично рис.4.1 можно представить в упрощенном виде (рис.4.2).

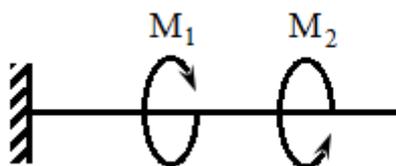


Рис. 4.2

К валу (стержню) может быть приложено сколько угодно таких скручивающих моментов. Для элемента, испытывающего кручение, можно составить только одно уравнение статического равновесия:

$$\sum M(x)_i = 0 \quad (4.1)$$

где  $i$  – число скручивающих моментов, действующих на вал.

При составлении расчетной схемы (плана сил) – в сечении А – следует показать реактивный момент  $M_{зад}$ . Величина этого момента находится из уравнения равновесия (4.1).

Далее необходимо перейти от внешних скручивающих моментов к внутренним силовым факторам и их определению.

Внутренним силовым фактором, действующим в нормальных сечениях вала (стержня), является крутящий момент  $M_{кр}$  (кН·м). Величина этого момента в любом нормальном сечении определяется

методом сечений. Закон изменения  $M_{кр}$  постоянен для всех сечений каждого из участков. По длине вал разбивается на участки, границами участков служат сечения, в которых приложены внешние скручивающие моменты. Рассматриваемый стержень состоит из двух участков – 1 и 2 (рис. 4.1). Крутящий момент  $M_{кр}$  в поперечном сечении вала (стержня) равен алгебраической сумме внешних (скручивающих) моментов, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Определим методом сечений  $M_{кр}$  в сечении I-I стержня (рис. 4.1). Рассекая стержень сечением I-I и отбросив левую часть, рассмотрим его правую часть (рис. 4.3).

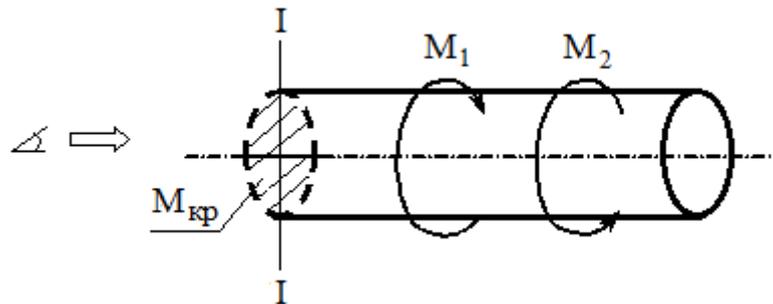


Рис. 4.3.

В сечении I-I будет действовать внутренний крутящий момент  $M_{кр1}$ , величина которого равна алгебраической сумме скручивающих внешних моментов  $M_1$  и  $M_2$ , действующих по правую сторону от сечения I-I.

$$M_{кр1} = \Sigma M_{скр} \quad (4.2)$$

Если смотреть на сечение I-I, то внешние скручивающие моменты, направленные по часовой стрелке, будут записываться в уравнении (4.1) со знаком «+», а направленные против часовой стрелки – со знаком «-».

Так в примере (рис. 4.3), с учетом сказанного, выражение (4.3) примет вид

$$M_{кр1} = -M_1 + M_2 \quad (4.3)$$

По аналогии крутящий момент  $M_{кр2}$  на участке 2 (рис. 4.3) будет равен

$$M_{кр1} = M_2 \quad (4.4)$$

Для выявления опасного участка необходимо построить эпюру крутящих моментов (рис. 4.4).

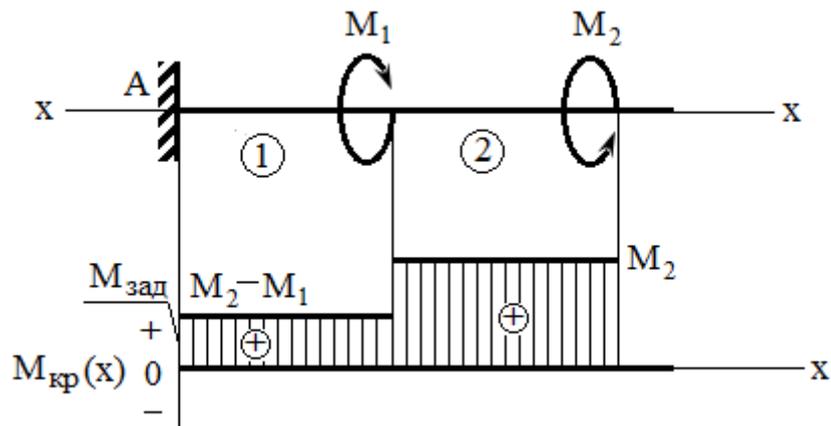


Рис. 4.4. Эпюра крутящих моментов

Следует обратить внимание на то, что в данном примере, при определении внутреннего крутящего момента  $M_{кр}$  и на участке 1, и на участке 2 рассматривалась правая от сечения часть стержня, т. е. отбрасывалась левая часть с заделкой. При таком подходе можно было не вычислять момент в заделке  $M_{зад}$ . Величина реактивного момента  $M_{зад}$  получается в этом случае при построении эпюры крутящих моментов «автоматически» как значение внутреннего крутящего момента в сечении А.

Из рис. 4.4 следует, что опасным является участок 2, т. е.  $|M_{кр2}| = |M_{max}| = |M_2|$ .

Скачки на эпюре наблюдаются в тех сечениях на заданной схеме, в которых приложены скручивающие моменты  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_{зад}$ . Величина этих скачков равна величине моментов  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_{зад}$ . Направления скачков на эпюре так же определяется направлением этих моментов.

## 4.2 Напряжения и условие прочности при кручении

Рассмотрим отрезок стержня бесконечно малой длины  $dx$ , испытывающего кручение под действием внешнего скручивающего момента  $M_{скр}$  (рис. 4.5).

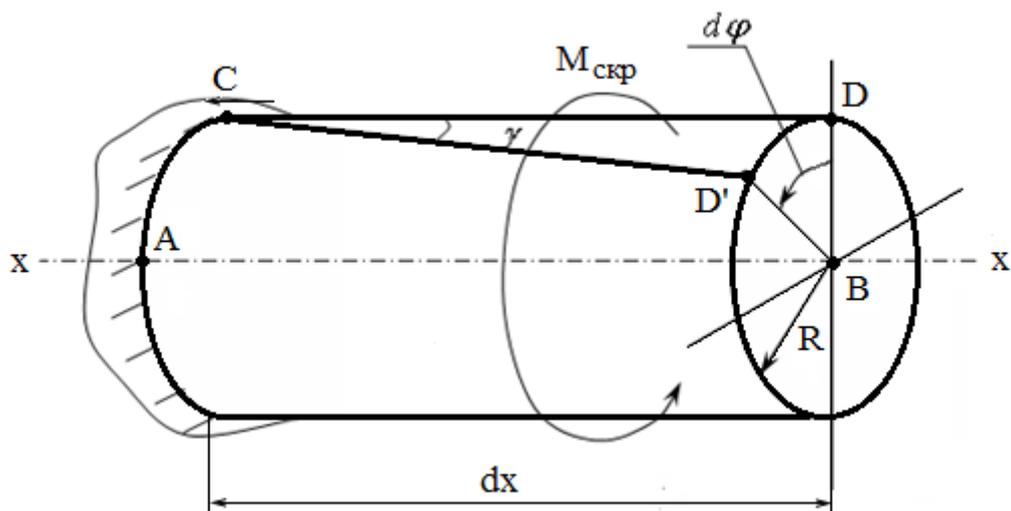


Рис. 4.5

Вырезанный на поверхности этого стержня элемент  $1234$  находится в состоянии чистого сдвига (рис. 4.б).

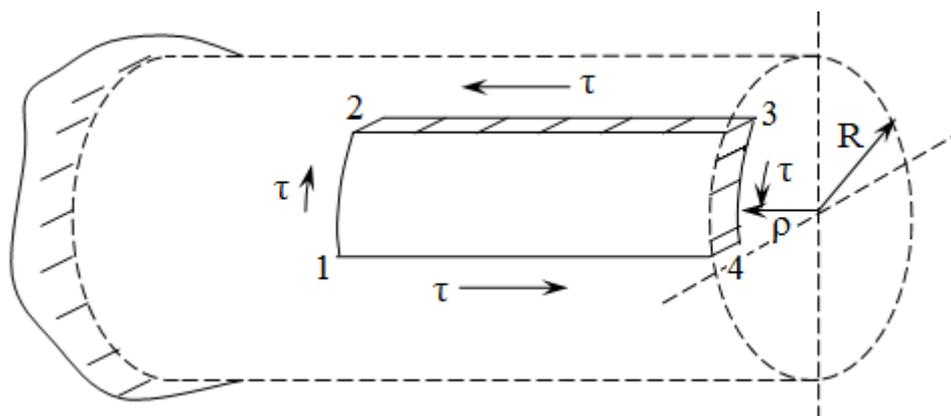


Рис. 4.б.

По взаимно перпендикулярным граням этого элемента действуют только касательные напряжения  $\tau$ .

$$\tau = \frac{|M_{\text{кр}}|}{J_{\rho}} \cdot \rho \quad (4.5)$$

где  $|M_{\text{кр}}|$ , кН·м – внутренний крутящий момент;

$J_{\rho}$ , м<sup>4</sup> – полярный момент инерции сечения;

$\rho$ , м – расстояние от точки, в которой рассчитывается  $\tau$ , до полюса (центра тяжести круглого сечения вала).

Для наиболее удаленных от полюса точек, т. е. при  $\rho = R$ , величина  $\tau$  – наибольшая ( $\tau_{\max}$ ) и может быть вычислена по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{кр}|}{J_p} \cdot R \quad (4.6)$$

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{кр}|}{W_p}, \quad (4.7)$$

где  $W_p$  – осевой момент сопротивления сечения;

$$W_p = \frac{J_p}{R}. \quad (4.8)$$

Для опасных сечений, в которых  $|M_{кр}| = |M_{кр}|_{\max}$ , имеем

$$\tau = \frac{|M_{кр}|_{\max}}{W_p} \leq [\tau] \quad (4.9)$$

где  $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

Выражение (4.9) называется условием прочности при кручении.

### 4.3 Деформации и условие жесткости при кручении

Вернемся к рассмотрению отрезка стержня АВ (рис. 4.5). Сечение А неподвижно. Сечение В повернется по отношению к сечению А на угол  $d\varphi$ , а образующая  $CD$  – займет положение  $CD'$ , т.е. сдвинется на угол  $\gamma$ . Таким образом, деформация при кручении характеризуется либо углом сдвига образца  $\gamma$ , либо абсолютным углом закручивания  $d\varphi$ .

Для определения абсолютного угла закручивания на участке стержня длиной  $l$  используется следующая формула:

$$\Delta\varphi = \frac{|M_{кр}| \cdot l}{G \cdot J_p} \quad (4.10)$$

где  $\Delta\varphi$  град – абсолютный угол закручивания;

$|M_{кр}|$ , кН·м – внутренний крутящий момент;

$l$ , м – длина участка элемента, на котором вычисляется угол закручивания;

$G$ , МПа – модуль упругости II-го рода;

$J_p$ , м<sup>4</sup> – полярный момент инерции сечения.

Относительный угол закручивания, град/м

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{l} \quad (4.11)$$

или

$$\theta = \frac{|M_{кр}|}{G \cdot J_p} \quad (4.12)$$

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta = \frac{|M_{кр}|_{max}}{G \cdot J_p} \leq [\theta] \quad (4.13)$$

где  $[\theta]$  – допускаемый угол закручивания.

На практике часто приходится решать задачи по подбору диаметра вала, испытывающего кручение. Диаметр вала должен отвечать и условию прочности, и условию жесткости. Подбор диаметра вала осуществляется с использованием формул (4.9) и (4.13).

Подберем диаметр вала, отвечающий условию прочности,  $d_{пр}$

Из условия прочности (4.9):

$$W_p \geq \frac{|M_{кр}|_{max}}{[\tau]} \quad (4.14)$$

$$\frac{\pi \cdot d_{пр}^3}{16} \geq \frac{|M_{кр}|_{max}}{[\tau]} \quad (4.15)$$

$$d_{пр} \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_{кр}|_{max}}{\pi[\tau]}} \quad (4.16)$$

Подберем диаметр вала, отвечающий условию жесткости,  $d_{жс}$

Из условия жесткости (4.13)

$$J_p \geq \frac{|M_{кр}|_{max}}{G \cdot [\theta]} \quad (4.17)$$

$$\frac{\pi \cdot d_{ж}^4}{32} \geq \frac{|M_{кр}|_{max}}{G \cdot [\theta]} \quad (4.18)$$

$$d_{ж} \geq \sqrt[4]{\frac{32|M_{кр}|_{max}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \quad (4.19)$$

Из двух значений  $d_{np}$  и  $d_{жс}$ , выбираем наибольшее значение.

## 5. Плоский поперечный изгиб

### 5.1 Внешние и внутренние силовые факторы, метод сечений

Элементы конструкции, воспринимающие изгибающие нагрузки, называются балками.

#### 5.1.1. Активные внешние силовые факторы

- Сосредоточенная сила  $P$  (сечение  $C$ , рис. 5.1, рис 5.2). Единицы измерения - единицы силы (Н, кг, т, ... и т. д.);
- Распределённая нагрузка (участок АВ рис. 5.1, частный случай равномерно распределённой нагрузки). Характеризуется интенсивностью  $q$ , т. е. характеризуется нагрузкой, приходящейся на единицу длины. Единицы измерения - единицы силы / единицы длины (Н/м, кг/см, т/м, ... и т. д.);

Сосредоточенный момент (пара сил)  $M_0$ , (сечение А рис. 5.1, рис. 5.2). Единицы измерения – единицы силы · единицы длины (Н·м, кг·см, т·м, ... и т. д.).

Под действием активных внешних нагрузок ( $P$ ,  $M_0$ ,  $q$ ), приложенных к балкам, балки будут изгибаться, при этом изгиб будет называться плоским поперечным, если будут соблюдены следующие условия:

- все внешние нагрузки, приложенные к балке, расположены в одной плоскости;
- эта плоскость проходит через одну из главных осей инерции всех нормальных сечений балки.

#### 5.1.2 Реактивные внешние силовые факторы

Балки могут закрепляться с помощью опор трёх типов:

- шарнирно-подвижной (опора В, рис. 5.1);
- шарнирно-неподвижной (опора А, рис. 5.1);
- жесткой заделки ( опора В, рис. 5.2).

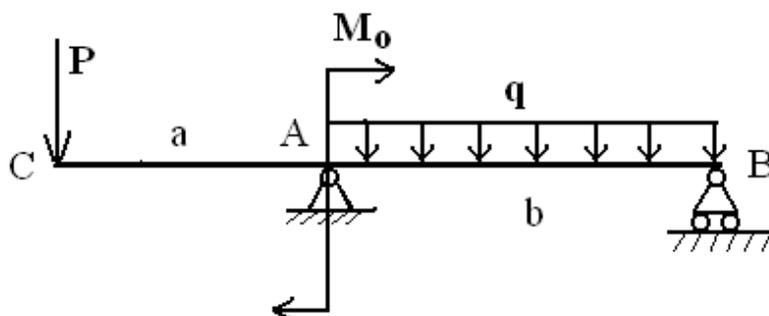


Рис.5.1.

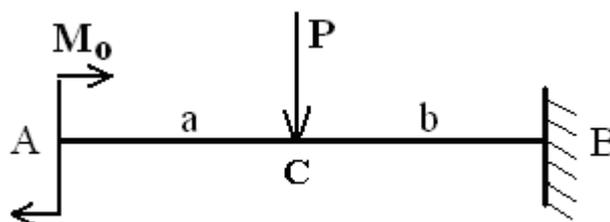


Рис. 5.2.

### 5.1.3 Внутренние силовые факторы. Дифференциальные зависимости между $Q(x)$ и $M(x)$ .

Под воздействием внешних силовых факторов в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия – *внутреннее поперечное усилие*  $Q(x)$  и *внутренний изгибающий момент*  $M(x)$ . Внутренние силовые факторы определяют с помощью метода сечений (см. раздел 2).

*Внутреннее поперечное усилие*  $Q(x)$  есть алгебраическая сумма всех внешних поперечных сил (активных и реактивных), действующих на оставленной части балки.

*Внутренний изгибающий момент*  $M(x)$  есть алгебраическая сумма всех моментов, возникающих в сечении от внешних усилий (активных и реактивных), действующих на оставленной части балки.

При составлении функций  $Q(x)$  и  $M(x)$  для расчета внутренних усилий используется **правило знаков**, приведённое ниже (рис. 5.3).

Для внутреннего поперечного усилия  $Q(x)$ :

- при рассмотрении сечения слева внешняя сила, направленная вверх, считается положительной, вниз – отрицательной.

- при рассмотрении сечения справа внешняя сила, направленная вверх, считается отрицательной, вниз – положительной.

Для внутреннего изгибающего момента  $M(x)$ :

- внешний момент считается положительным, если его действие на балку вызывает растяжение нижних волокон, а сжатие верхних волокон;

- внешний момент считается отрицательным, если его действие на балку вызывает растяжение верхних волокон, а сжатие нижних волокон.

При рассмотрении сечения и слева, и справа правило знаков для внутреннего изгибающего момента  $M(x)$  одинаково.

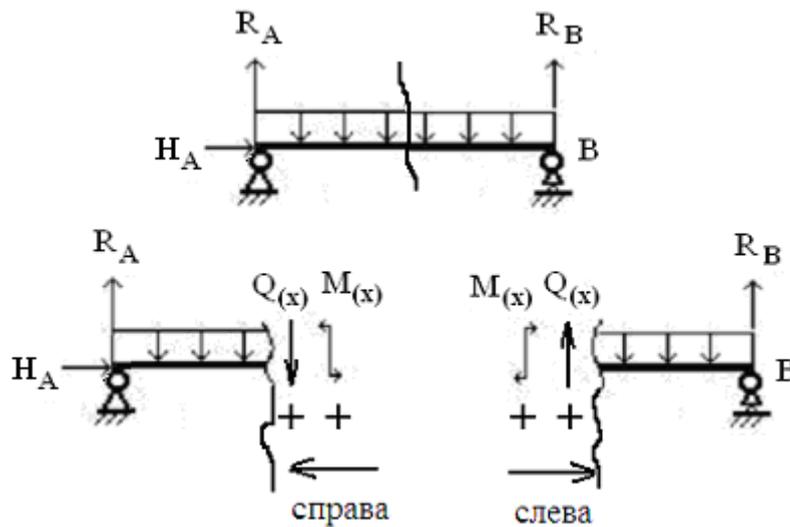


Рис. 5.3 Иллюстрация правила знаков при изгибе

Чтобы проще запомнить это правило, можно пользоваться следующей схемой (рис.5.4):

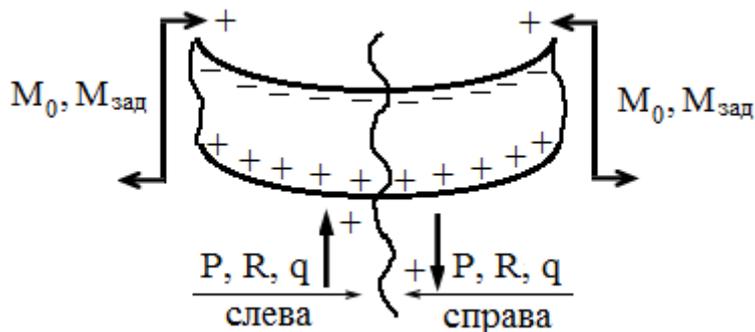


Рис. 5.4

Дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами  $Q(x)$ ,  $M(x)$  и интенсивностью распределённой нагрузки  $q$  имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ(x)}{dx} &= q \\ \frac{dM(x)}{dx} &= Q(x) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} dQ(x) &= q \cdot dx \\ dM(x) &= Q(x) \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q(x) &= \int_{x_1}^{x_2} q dx \\ \Delta M(x) &= \int_{x_2}^{x_1} Q(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} q dx &= S_q \\ \int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx &= S_Q \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Здесь  $S_q$  – площадь участка балки, нагруженного внешней распределенной нагрузкой  $q$ . Величина  $S_q$  определяет приращение ординаты  $Q(x)$  на интервале от  $x_1$  до  $x_2$ , т. е.  $\Delta Q(x)$ .

$S_Q$  – площадь эпюры  $Q(x)$  на интервале от  $x_1$  до  $x_2$ . Величина  $S_Q$  определяет приращение ординаты  $M(x)$  на этом интервале, т. е.  $\Delta M(x)$ .

Формулы (5.3) и (5.4) позволяют строить эпюры  $Q(x)$  и  $M(x)$  по площадям.

## 5.2 Нормальные и касательные напряжения при изгибе. Условие прочности.

Поперечная сила  $Q(x)$  вызывает в точках поперечного сечения балки касательное напряжение  $\tau$ , а изгибающий момент  $M(x)$  – нормальные напряжения  $\sigma$ .

Нормальные напряжения при плоском поперечном изгибе определяются следующим образом:

$$\sigma = \frac{|M(x)|}{J_z} \cdot y \quad (5.5)$$

где  $|M(x)|$  – изгибающий момент, действующий в рассматриваемом сечении, определяется из эпюры  $M(x)$ ;

$J_z$  – осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси  $z$  ;

$y$  – расстояние от точки, в которой определяем  $\sigma$ , до нейтральной оси.

Нейтральная ось – ось  $z$ .

Из формулы (5.5) следует, что самые опасные точки сечения будут находиться на расстоянии  $y_{max}$  от нейтральной оси  $z$ ; в этом случае формула (5.5) может быть написана так:

$$\sigma_{max} = \frac{|M(x)|}{J_z} \cdot y_{max} \quad (5.6)$$

$$\frac{J_z}{y_{max}} = W_z \quad (5.7)$$

где  $W_z$ ,  $m^3$  – геометрическая характеристика сечения, называется осевым моментом сопротивления.

Для опасных точек сечения (наиболее удаленных от нейтральной оси  $z$ ) формула (5.5) принимает вид:

$$\sigma_{max} = \frac{|M(x)|}{W_z} \quad (5.8)$$

В опасном сечении балки, где на эпюре внутреннего изгибающего момента наблюдается максимальное значение, т.е.  $|M(x)|_{max}$ , будут находиться точки, имеющие наибольшее значение нормальных напряжений  $\sigma_{max}$ :

$$\sigma_{max} = \frac{|M(x)|_{max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (5.9)$$

Выражение (5.9) называется *условием прочности* при плоском поперечном изгибе.

Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{|Q(x)| \cdot S_z^{отс}}{J_z \cdot b(y)} \quad (5.10)$$

где  $|Q(x)|$  – поперечная сила, действующая в рассматриваемом сечении; берем с эпюры  $Q(x)$ ;

$J_z$  – осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси  $z$ ;

$S_z^{отс}$  – статический момент площади отсеченной части сечения на уровне точки, в которой определяем  $\tau$ ;

$b(y)$ , (м) – ширина сечения на уровне точки, в которой определяем  $\tau$ .

### 5.3 Главные напряжения при плоском поперечном изгибе

Рассмотрим отрезок балки, испытывающей плоский поперечный изгиб, выделенный двумя сечениями I-I и II-II на бесконечно малом расстоянии  $dx$  (рис 5.5).

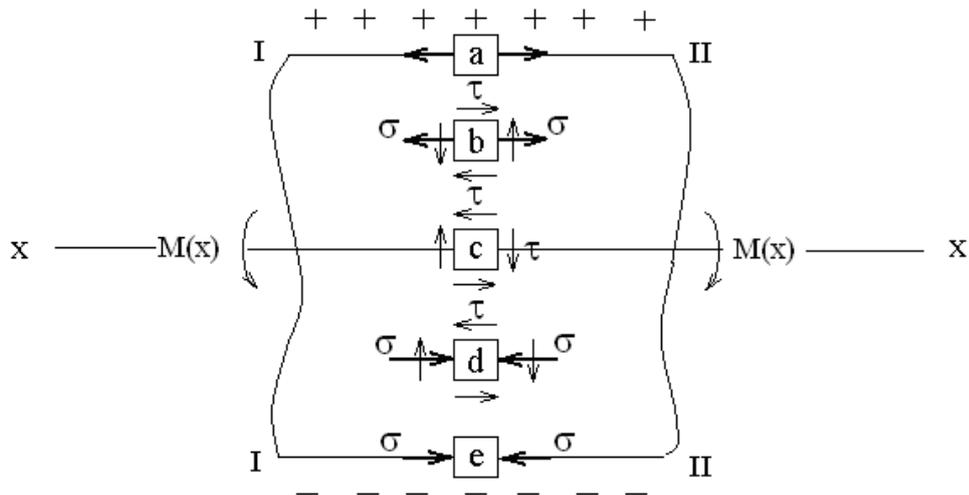


Рис 5.5

Изгибающий момент  $M(x)$  в поперечных сечениях этого отрезка балки – отрицательный, т.е. верхние волокна растянуты, нижние – сжаты. В окрестностях точек  $a, b, c, d, e$ , взятых на различном расстоянии от оси  $X$  балки, мысленно вырежем элементарные кубики с бесконечно малым размером ребра, боковые стенки которых совпадают с нормальным

сечением балки. Из рис 5.5 следует, что материал балки в этих точках находится в плоском напряженном состоянии, а присутствие касательных напряжений  $\tau$  на гранях элементов указывает на то, что эти площадки не главные, значит значения нормальных напряжений, действующие в них, не являются главными. Главные площадки в окрестностях этих точек будут повернуты по отношению к этим площадкам на  $\angle\alpha$ . Нахождение этих площадок и действующих в них главных напряжений определяем по формуле (19), полученной при решении обратной задачи плоского напряженного состояния (см. раздел теория напряженного состояния пособия [8]).

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \quad (5.11)$$

#### 5.4 Деформации и условие жесткости при плоском поперечном изгибе

Приложение внешних силовых факторов к балке приводит к искривлению ее оси. Ось балки является геометрическим местом точек, соответствующим центрам тяжести нормальных сечений. При искривлении оси центры тяжести сечений, а это значит и сами сечения балки, будут перемещаться. Ввиду малости значений этих перемещений можно допустить, что их смещение происходит по вертикали.

На рис. 5.6 показана изогнутая ось балки, защемленной одним концом, под действием внешней силы  $P$ . Обозначим вертикальные перемещения центров тяжести сечений  $f(x)$ . Кроме вертикальных перемещений имеют место и угловые перемещения сечений, которые обозначим  $V(x)$ .

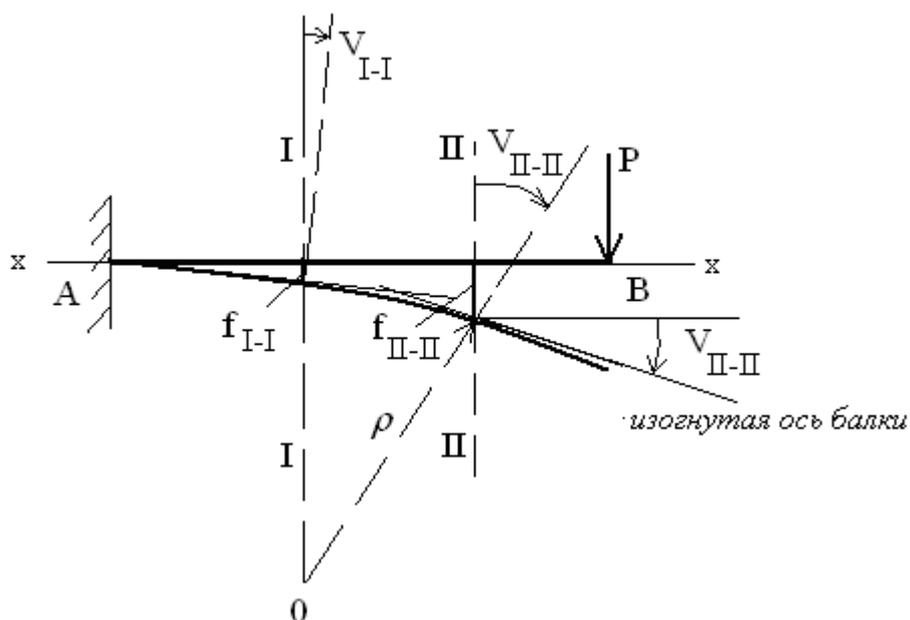


Рис 5.6 Линейные и угловые перемещения балки. Положение изогнутой оси

Произвольно взятое сечение I-I балки имеет вертикальное перемещение  $f_{I-I}$  и угловое перемещение  $V_{I-I}$ . Правило знаков: вертикальное перемещение сечения вниз от оси X будем считать отрицательным, вверх – положительным. Поворот сечения по часовой стрелке – отрицательным, против часовой стрелке – положительным. В нашем примере  $f_{I-I} (-); V_{I-I} (-)$ .

Для построения изогнутой оси балки необходимо численно определить перемещения нескольких сечений, после чего графически в масштабе можно построить изогнутую ось балки и график угловых перемещений. Целью такого построения является определение максимального прогиба балки и наибольшего значения угла поворота.

Существует несколько методов определения перемещений балки. Одним из них является метод начальных параметров. Сущность метода заключается в составлении функций  $f(x)$  и  $V(x)$ , описывающих очертание изогнутой оси балки и кривой углов поворота. В этих функциях X обозначаем текущую координату любого сечения балки, т. е. расстояние выбранного сечения от начала координат. В методе начальных параметров начало координат всегда помещают в крайнее левое сечение балки. Для балки, изображенной на рис. 5.6, начало координат необходимо поместить в сечение А.

На *рис.5.6* показан центр кривизны (0) и  $\rho$  – радиус кривизны.

Кривизна балки K может также выразить деформацию балки:

$$K = \frac{1}{\rho} \quad (5.12)$$

$$K = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (5.13)$$

С другой стороны,

$$K = \frac{M(x)}{E \cdot J_z} \quad (5.14)$$

т. е. кривизна зависит от силовых факторов, входящих в функцию  $M(x)$ , и от деформационной жесткости балки при изгибе –  $EJ_z$ .

Приравнивая правые части выражений (5.13) и (5.14), получим:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot J_z} \quad (5.15)$$

Выражение (5.15) носит название дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Это уравнение связывает вертикальные перемещения

сечений балки (вторую производную) с силовыми факторами, приложенными к балке и входящими в функцию  $M(x)$ .

Проинтегрировав обе части выражения (5.15), получим:

$$\frac{df(x)}{dx} = V(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \int_L M(x) dx + V_0 \quad (5.16)$$

Проинтегрировав обе части выражения (5.16), получим:

$$f(x) = f_0 + V_0 x + \frac{1}{E \cdot J_z} \int_L V(x) dx \quad (5.17)$$

Здесь:  $V_0$  и  $f_0$  – постоянные интегрирования. Их физический смысл:  $f_0$  – вертикальное перемещение крайнего левого сечения балки;  $V_0$  – угол поворота крайнего левого сечения балки.  $V_0$  и  $f_0$  называются начальными параметрами, определяются из начальных условий задачи (Н.У.).

Таким образом, составив функцию изгибающих моментов для всей балки  $M(x)$  и дважды проинтегрировав это выражение (5.15), получаем функцию углов поворота  $V(x)$  и функцию вертикальных перемещений сечений  $f(x)$ .

Графическое изображение функции  $f(x)$ , построенное в масштабе, дает очертание изогнутой оси балки под действием на нее внешней нагрузки. Из графика определяем величину максимального прогиба и сравниваем ее с предельно допустимой величиной, т. е.

$$f_{max} \leq [f] \quad (5.18)$$

Выражение (5.18) называется условием жесткости балки при изгибе.  $[f]$  – предельно допустимая величина прогиба балки при плоском поперечном изгибе, измеряется в единицах длины (мм, см, м).

Разберем применение метода начальных параметров для определения угловых и линейных перемещений балки, изображенной на *рис. 5.6*. За начало координат при использовании метода начальных параметров принимают крайнее левое сечение балки, и все участки балки рассматривают по направлению слева направо.

1. Составляем план сил (*рис. 5.7*)

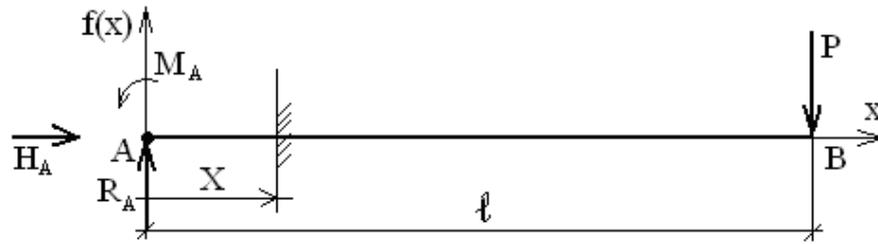


Рис. 5.7 План сил.

2. Из уравнений статического равновесия определяем силы реакции опор в заделке А:

$$H_A = 0; R_A = P; M_A = P \cdot l \quad (5.19)$$

3. Начало координат помещаем в (·) А.

4. Составляем функцию изгибающих моментов  $M(x)$  (на балке один участок), идя слева направо

$$M(x) = R_A x - M_A x^0 \quad (5.20)$$

5. Интегрируем выражение (5.20):

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{E \cdot J_z} \left[ \frac{R_A x^2}{2} - M_A x \right] \quad (5.21)$$

6. Интегрируем выражение (5.21):

$$f(x) = f_0 + V_0 x + \frac{1}{E \cdot J_z} \left[ \frac{R_A x^3}{6} - \frac{M_A x^2}{2} \right] \quad (5.22)$$

**ПРИМЕЧАНИЕ:** в рассматриваемой задаче силовые факторы  $R_A$  и  $M_A$  действуют непосредственно в начале координат, поэтому в выражениях (5.20-5.22)  $x$  – расстояние от точки А до рассматриваемого произвольного сечения. В случае, если внешний силовой фактор удалён от начало координат (например, на расстояние «а») в соответствующем этому силовому фактору слагаемом в уравнении необходимо вместо  $x$  подставлять  $(x-a)$ , т. е. необходимо указывать расстояние от точки приложения силового фактора до рассматриваемого сечения.

7. Для того чтобы пользоваться функциями (5.21) и (5.22), необходимо определить начальные параметры  $V_0$  и  $f_0$ . Записываем условия закрепления балки, т. е. начальные условия (Н.У.):

В нашей задаче:

$$\left. \begin{array}{l} 1) f_{x=0} = 0 \\ 2) V_{x=0} = 0 \end{array} \right\} \quad (5.23)$$

Выражения (5.23) указывают на то, что сечение А, находящееся в заделке не перемещается, т. е.

$$\left. \begin{aligned} f_{x=0} = f_0 = 0 \\ V_{x=0} = V_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

*Примечание.* В других задачах для определения начальных параметров могут быть использованы условия равенство нулю перемещений в других местах закрепления балки, например, на опорах линейное перемещение сечений также равно нулю.

8. Определяем вертикальное перемещение и угол поворота сечения В, находящегося на конце балки:

Из (5.22):

$$f_B = f_{x=l} = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[ \frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^3}{2} \right] = -\frac{Pl^3}{3E \cdot J_z} \quad (5.25)$$

Из (5.21):

$$V_B = V_{x=l} = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[ \frac{Pl^2}{2} - Pl^2 \right] = -\frac{Pl^2}{2E \cdot J_z} \quad (5.26)$$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

### Тема 1. Осевое растяжение (сжатие)

В этой теме рассмотрены простые случаи воздействия сил на стержень и содержится ряд вопросов (механические свойства материалов, выбор допускаемых напряжений, статически неопределимые задачи), встречающихся в других разделах курса.

Необходимо обратить внимание на то, что механические характеристики материала (предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести, предел прочности) находят путем деления соответствующей нагрузки на первоначальную площадь поперечного сечения. В связи с этим получают условные напряжения, а не истинные; для вычисления последних надо делить нагрузки на действительную площадь поперечного сечения, которая изменяется при опыте. Зная истинные напряжения, можно построить так называемую истинную диаграмму растяжения, которая точнее характеризует свойства материала, чем условная диаграмма. Пользуясь формулами, основанными на законе Гука, надо всегда помнить, что этот закон справедлив только до предела пропорциональности. Нельзя, например, напряжение для мягкой стали при  $\varepsilon = 0,1$  вычислять по формуле  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , так как тогда получается, что  $\sigma = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,1 = 20\ 000$  МПа, в то время как при 400 МПа материал уже разрушается.

### ЗАДАЧА 1

Стальной стержень ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа) находится под действием продольной силы  $P$  и собственного веса ( $\gamma = 78$  кН/м<sup>3</sup>). Найти перемещение сечения I – I (рис. 1). Данные указаны в таблице 1.

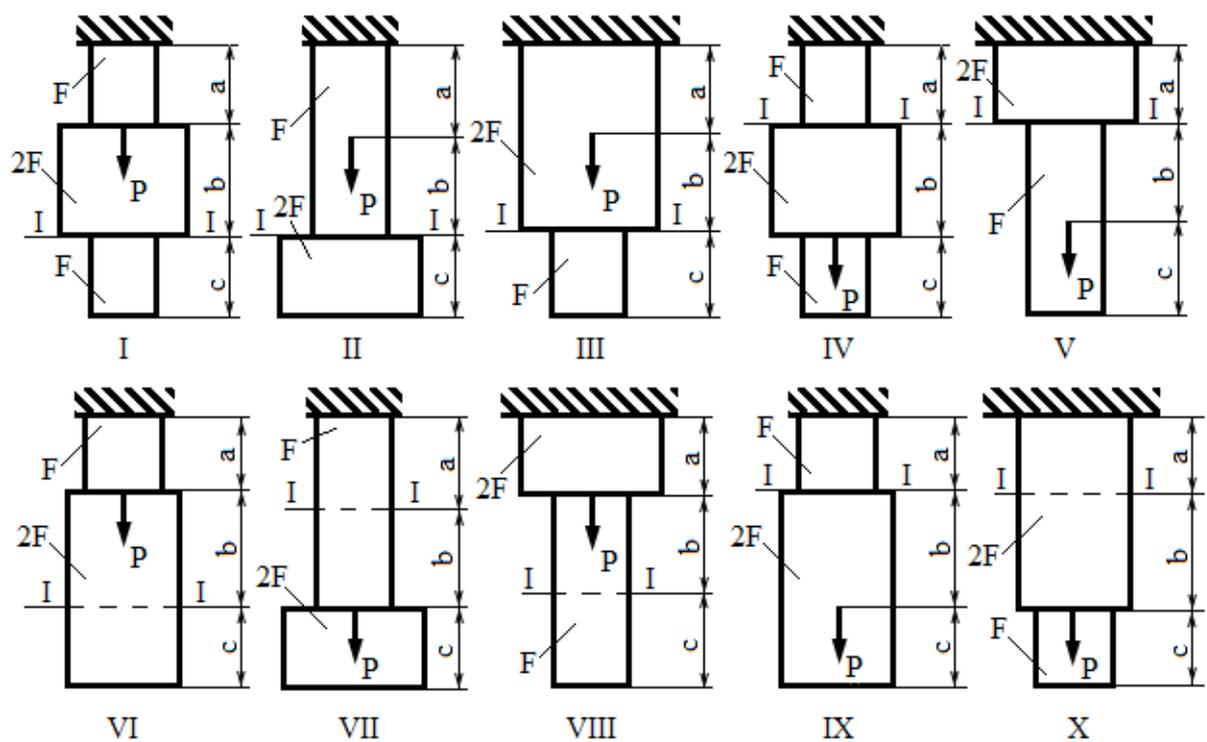


Рис. 1

Таблица 1

Номер строки	P, Н	F, см <sup>2</sup>	a	b	c
			м		
1	1100	11	2,1	3,0	1,1
2	1200	12	2,2	2,9	1,2
3	1300	13	2,3	2,8	1,3
4	1400	14	2,4	2,7	1,4
5	1500	15	2,5	2,6	1,5
6	1600	16	2,6	2,5	1,6
7	1700	17	2,7	2,4	1,7
8	1800	18	2,8	2,3	1,8
9	1900	19	2,9	2,2	1,9
0	2000	20	3,0	2,1	2,0

### Пример решения ЗАДАЧИ 1.

Стальной стержень ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа) находится под действием продольной силы  $P$  и собственного веса ( $\gamma = 78$  кН/м<sup>3</sup>). Найти перемещение сечения I – I (рис. 2).

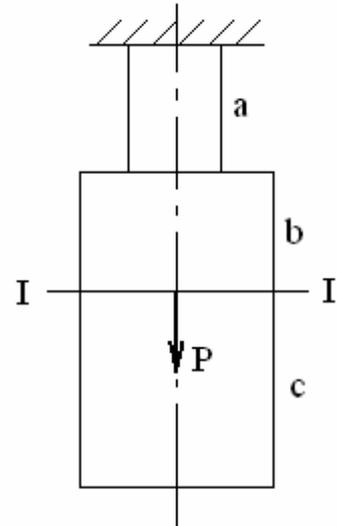


Рис. 2 – Заданная схема

Дано:  $P = 1000$  Н

$$\gamma = 78 \text{ кН/м}^3 = 78 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$$

$$F_a = 10 \text{ см}^2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$F_b = F_c = 12 \text{ см}^2 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$a = 2 \text{ м}$$

$$b = 1,5 \text{ м}$$

$$c = 3 \text{ м}$$

Требуется: определить перемещение сечения I-I –  $\delta_{I-I}$

### РЕШЕНИЕ

1. Общие формулы.

Под действием внешней силы  $P$  и веса всех участков стержня сечение 1-1 переместится вниз вследствие растяжения участков «а» и «b», т.е.:

$$\delta_{I-I} = \Delta l_a + \Delta l_b \quad (1)$$

где  $\Delta l_a$  – абсолютная деформация участка «а»;  $\Delta l_b$  – абсолютная деформация участка «b».

Деформации участков «а» и «b» определяем по формуле:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (2)$$

В формуле (2) (Закон Гука)  $N$  – внутреннее усилие в сечении рассматриваемого участка. Как указывалось выше, величина  $N$  определяется методом сечения.

2. Составление плана сил.

От заданной схемы (рис. 2) переходим к составлению плана сил,  $R$  – сила реакции со стороны опоры (заделки) (рис.3).

3. Определение неизвестной силы  $R$

Для этого составим уравнение статического равновесия

$$\sum Y = 0; \quad R - P - Q_a - Q_b - Q_c = 0 \quad (3)$$

$$R = P + Q_a + Q_b + Q_c \quad (4)$$

В уравнении (4):

$Q_a$  – вес участка «а»:

$$Q_a = F_a \cdot a \cdot \gamma = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 78 \cdot 10^3 = 156H ;$$

$Q_b$  – вес участка «б»:

$$Q_b = F_b \cdot b \cdot \gamma = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 \cdot 78 \cdot 10^3 = 140H ;$$

$Q_c$  – вес участка «с»:

$$Q_c = F_c \cdot c \cdot \gamma = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 78 \cdot 10^3 = 281H .$$

4. Определение внутренней продольной силы на участке «а».

Методом сечения определим внутреннюю продольную силу  $N_{(x)a}$  в поперечном сечении участка «а», выбранном на расстоянии  $x$  от заделки (рис.4):

Для уравновешенной системы (рис.4) составим уравнение статического равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad R - N_{(x)a} - Q_{(x)a} = 0 \quad (5)$$

где  $Q_{(x)a}$  – вес отрезка стержня длиной  $x$  участка «а»:

$$Q_{(x)a} = F_a \cdot x \cdot \gamma = 10 \cdot 10^{-4} \cdot x \cdot 78 \cdot 10^3 = 78 \cdot x \quad \kappa H \quad (6)$$

$$\text{Из (5): } N_{(x)a} = R - Q_{(x)a} = 1577 - 78 \cdot x \quad (7)$$

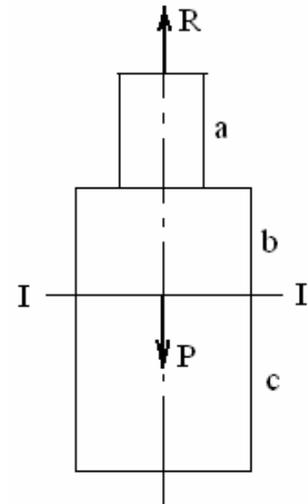


Рис. 3 План сил

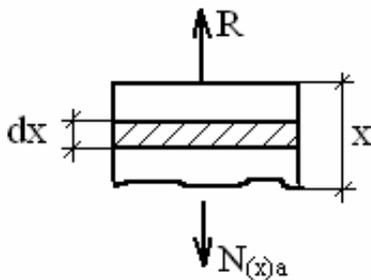


Рис. 4

5. Определение деформации участка «а».

Величина  $N_{(x)a}$  – является функцией от  $x$ , деформацию участка «а» удобно рассмотреть через деформацию элемента  $dx$  бесконечно малой длины (рис.4). Относительное удлинение этого участка  $dx$  будет такое же, как и относительное удлинение всего участка «а», т.е.:

$$\varepsilon_{dx} = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (8)$$

где  $\Delta dx$  – абсолютное удлинение участка  $dx$ .

Из формулы закона Гука

$$\sigma = E\varepsilon \quad (9)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (10)$$

получаем:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma}{E} \quad (11)$$

$$\text{Но } \sigma = \frac{N}{F} \quad (12)$$

Подставив (12) в (11), получаем:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N_{(x)a}}{E \cdot F_a} \quad (13)$$

Абсолютное удлинение участка  $dx$ :

$$\Delta dx = \frac{N_{(x)a} dx}{E \cdot F_a} \quad (14)$$

Полную деформацию участка «а» получим, интегрируя выражение (14):

$$\begin{aligned} \Delta l_a &= \frac{1}{E \cdot F_a} \int_0^a N_{(x)a} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot F_a} \int_0^a (1577 - 78 \cdot x) dx = \frac{1}{E \cdot F_a} \left( 1577 \cdot x - \frac{78 \cdot x^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{E \cdot F_a} \left( 1577 \cdot a - \frac{78 \cdot a^2}{2} \right) = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \left( 1577 \cdot 2 - \frac{78 \cdot 2^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^8} (3154 - 156) = \frac{2998}{2 \cdot 10^8} = 1499 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 0,015 \text{ мм} \end{aligned} \quad (15)$$

## 6. Определение внутренней продольной силы на участке «b»

Определим внутреннюю продольную силу  $N_{(x)b}$  в поперечном сечении участка «b» (рис. 5)

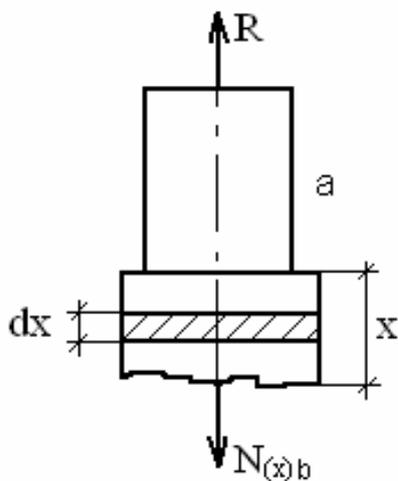


Рис. 5

Для уравновешенной системы (рис. 5) составим уравнение статического равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad R - N_{(x)b} - Q_a - Q_{(x)b} = 0 \quad (16)$$

где  $Q_a$  – вес участка «а» стержня.

$$Q_a = 156H$$

$Q_{(x)b}$  – вес стержня длиной  $x$  участка «b»;

$$Q_{(x)b} = F_b \cdot x \cdot \gamma = 12 \cdot 10^{-4} \cdot x \cdot 78 \cdot 10^3 = 93,6 \cdot x \text{ кН};$$

$$\text{из (16): } N_{(x)b} = R - Q_a - Q_{(x)b} = 1577 - 156 - 93,6 \cdot x \quad (17)$$

### 7. Определение деформации участка «b».

Деформацию участка стержня «b», так же как и участка стержня «a», определим через относительную деформацию бесконечно малой длины заштрихованного элемента, выделенного на участке «b».

$$\Delta dx = \frac{N_{(x)b} \cdot dx}{E \cdot F_b} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Delta l_b &= \frac{1}{E \cdot F_b} \int_0^b (1421 - 93,6 \cdot x) dx = \frac{1}{E \cdot F_b} \left( 1421 \cdot x - \frac{93,6 \cdot x^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{E \cdot F_b} \left( 1421 \cdot b - \frac{93,6 \cdot b^2}{2} \right) = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} \left( 1421 \cdot 1,5 - \frac{93,6 \cdot 1,5^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{24 \cdot 10^7} (2131,5 - 105,3) = \frac{2026,2}{24 \cdot 10^7} = 84,4 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,0084 \text{ мм} \end{aligned} \quad (19)$$

### 8. Определение перемещения сечения I-I – $\delta_{I-I}$

$$\delta_{I-I} = \Delta l_a + \Delta l_b = 0,0150 + 0,0084 = 0,023 \text{ мм}$$

**Ответ:** перемещение сечения I-I –  $\delta_{I-I}$  равно 0,023 мм

## ЗАДАЧА 2

К стальному валу приложены три известных момента:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  (рис. 1). Требуется:

- 1) установить, при каком значении момента  $X$  угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю;
  - 2) для нейтрального значения  $X$  построить эпюру крутящих моментов;
  - 3) при заданном значении  $[\tau]$  определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего равного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
  - 4) построить эпюру углов закручивания;
  - 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м).
- Данные взять из табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Номер строки	Расстояния, м			Моменты, Н·м			[ $\tau$ ], МПа
	a	b	c	$M_1$	$M_2$	$M_3$	
1	1,1	1,1	1,1	1100	1100	1100	35
2	1,2	1,2	1,2	1200	1200	1200	40
3	1,3	1,3	1,3	1300	1300	1300	45
4	1,4	1,4	1,4	1400	1400	1400	50
5	1,5	1,5	1,5	1500	1500	1500	55
6	1,6	1,6	1,6	1600	600	1600	60
7	1,7	1,7	1,7	1700	700	1700	65
8	1,8	1,8	1,8	1800	800	1800	70
9	1,9	1,9	1,9	1900	900	1900	75
0	2,0	2,0	2,0	2000	1000	2000	80

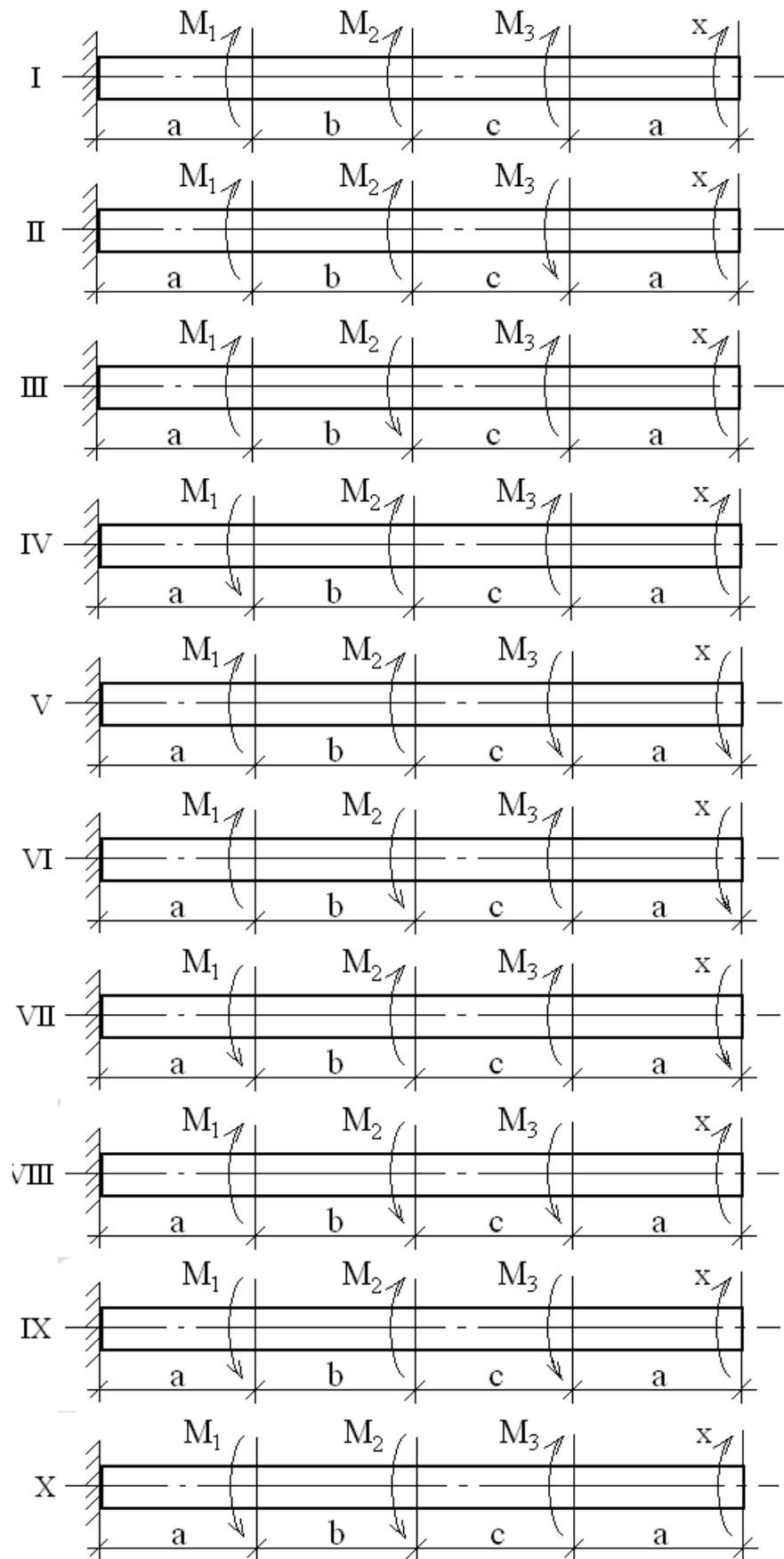
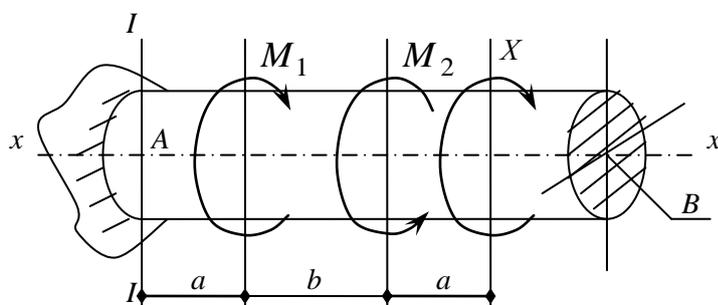


Рис. 1

## Пример решения ЗАДАЧИ 2

К стальному валу приложены два известных момента:  $M_1$ ,  $M_2$  (рис. 2). Требуется:

- 1) установить, при каком значении момента  $X$  угол поворота правого конечного сечения вала равен нулю;
- 2) для найденного значения  $X$  построить эпюру крутящих моментов;
- 3) при заданном значении  $[\tau]$  определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего равного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
- 4) построить эпюру углов закручивания;
- 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м).



Дано:  $M_1 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$

$M_2 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$

$a = 1 \text{ м}$

$b = 2 \text{ м}$

$\Delta\varphi_B = 0$

$G_{ст} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

$[\tau] = 40 \text{ МПа}$

Рис.2 Заданная схема

Найти: диаметр вала  $d_{пр}$  из условия прочности, построить эпюру углов закручивания, найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м).

Решение:

1. Составляется план сил (рис. 3)

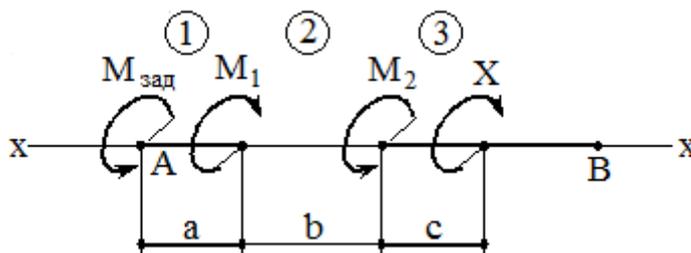


Рис. 3.

2. Записывается уравнение статического равновесия для рис. 3

$$\sum M(x) = 0 \quad (1)$$

$$M_{зад} - M_1 + M_2 - X = 0 \quad (2)$$

В выражении (2) имеем две неизвестные:  $M_{зад}$  и  $X$ , т. е. в одно уравнение равновесия входят два неизвестных внешних силовых фактора – это статически-неопределенная задача.

### 3. Определение неизвестных внешних силовых факторов.

Необходимо составить второе условие, связывающее неизвестные силовые факторы, используя условие:  $\Delta\varphi_B = 0$ .

Разобьем стержень на участки – их три: 1, 2, 3

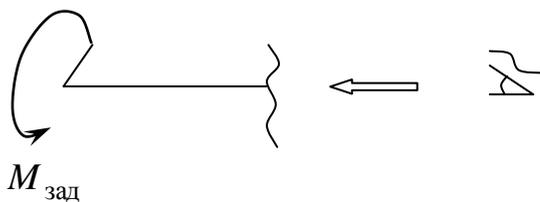
Составим уравнение (3) для определения угла поворота сечения  $B$

$$\frac{M_{кр1} \cdot a}{G \cdot J_p} + \frac{M_{кр2} \cdot b}{G \cdot J_p} + \frac{M_{кр3} \cdot a}{G \cdot J_p} = 0 \quad (3)$$

Здесь  $M_{кр1}$ ,  $M_{кр2}$ ,  $M_{кр3}$  – внутренние крутящие моменты, действующие в сечениях стержня каждого из трех участков.

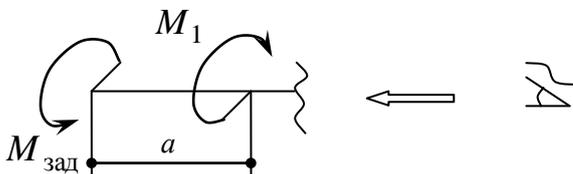
Выразим значения этих моментов через внешние скручивающие моменты с помощью метода сечений. Стрелками и значком (глаз) показаны направления взгляда в сечения.

Участок 1:



$$M_{кр1} = -M_{зад} .$$

Участок 2:



$$M_{кр2} = M_1 - M_{зад} .$$

Участок 3:



$$M_{кр3} = -X$$

Подставим значения  $M_{кр1}$ ,  $M_{кр2}$ ,  $M_{кр3}$  через внешние скручивающие моменты в уравнение (3)

$$-M_{зад} \cdot a + (M_1 - M_{зад})b + (-X)a = 0 \quad (4)$$

Решим совместно уравнения (2) и (4). Из уравнения (2) следует

$$X = M_{зад} - M_1 + M_2 \quad (5)$$

Подставим значение  $X$  из уравнения (5) в уравнение (4)

$$-M_{зад} \cdot a + M_1 \cdot b - M_{зад} \cdot b - M_{зад} \cdot a + M_1 \cdot a - M_2 \cdot a = 0$$

$$-M_{зад}(2a + b) + M_1(b + a) - M_2 \cdot a = 0$$

$$-M_{зад} \cdot 4 + M_1 \cdot 3 - M_2 \cdot 1 = 0$$

$$M_{зад} = \frac{M_1 \cdot 3 - M_2 \cdot 1}{4} = \frac{4,5 - 2}{4} = 0,62 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Из выражения (2) определим  $X$

$$X = M_{зад} - M_1 + M_2 = 0,62 - 1,5 + 2,0 = 1,12 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

4. Построение эпюры крутящих моментов (рис. 4)

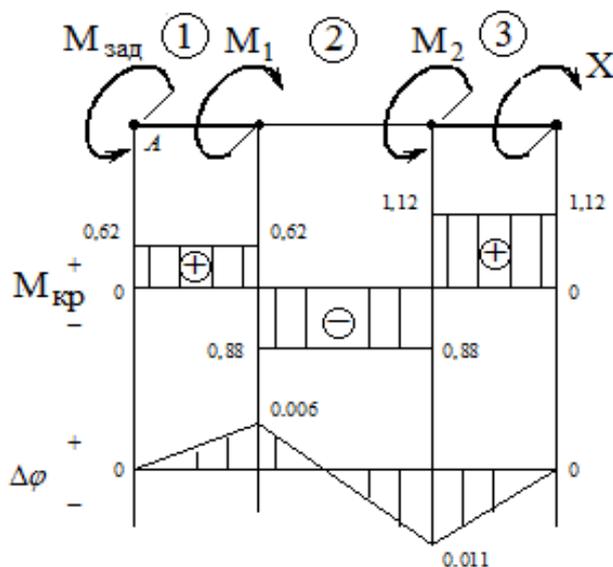


Рис. 4

5. Определение опасного участка и значения  $|M_{\max}|$ .  
Из эпюры следует, что опасным является участок 3.

$$|M_{кр3}| = |M_{кр}|_{\max} = 1,12 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

6. Определение диаметра вала из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{кр}|_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$$

$$W_p \geq \frac{|M_{кр}|_{\max}}{[\tau]} \geq \frac{1,12 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{40 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}} \geq 0,028 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \geq 28 \text{ см}^3$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 28 \text{ см}^3 \Rightarrow d_{np} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 28}{3,14}} \geq \sqrt[3]{142,68} \geq \approx 5,22 \text{ см} \geq 52,2 \text{ мм}$$

Выбираем диаметр вала, округляя, как указано в задании,  $d_6 = 60 \text{ мм}$ .

7. Построение эпюры углов закручивания.

Рассчитаем значения углов закручивания по каждому участку вала

по формуле  $\Delta\varphi = \frac{|M_{кр}| \cdot l}{G \cdot J_p}$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127,17 \text{ см}^4 = 127,17 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

$$G \cdot J_p = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 127,17 \cdot 10^{-8} = 12717 \cdot 8 = 101736 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

Участок 1

$$\Delta\varphi_1 = \frac{M_{кр1} \cdot a}{G \cdot J_p} = \frac{0,62 \cdot 10^3 \cdot 1}{101736} = 0,006 \text{ рад.}$$

Участок 2

$$\Delta\varphi_2 = \frac{M_{кр2} \cdot b}{G \cdot J_p} = -\frac{0,88 \cdot 10^3 \cdot 2}{101736} = -0,017 \text{ рад.}$$

Участок 3

$$\Delta\varphi_3 = \frac{M_{кр3} \cdot a}{G \cdot J_p} = \frac{1,12 \cdot 10^3 \cdot 1}{101736} = 0,011 \text{ рад.}$$

Строим эпюру углов закручивания (рис. 4).

### Тема 3. Изгиб прямых брусьев

Эта тема является самой большой и самой сложной темой курса сопротивления материалов; ее следует изучать постепенно, обращая особое внимание на решение задач. Сначала надо усвоить весьма важные понятия изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$  и научиться свободно строить эпюры  $M$  и  $Q$ .

Необходимо помнить, что поперечная сила в данном сечении равна алгебраической сумме проекций сил, расположенных только по одну сторону от рассматриваемого сечения, на перпендикуляр к оси балки, а изгибающий момент в данном сечении равен алгебраической сумме моментов сил, расположенных только с одной стороны, относительно центральной оси поперечного сечения. В связи с этим рекомендуется – при вычислениях, например, изгибающего момента в сечении балки как момента левых сил – закрывать чем-либо (рукой, книгой, листом бумаги) часть балки, расположенную правее рассматриваемого сечения, чтобы открытыми оставались только одни левые силы. Следует при этом иметь в виду, что можно рассматривать как одни левые, так и одни правые силы, в зависимости от того, с какой стороны проще получить выражения  $Q$  и  $M$ .

Правильность построения эпюр  $Q(x)$  и  $M(x)$  можно проверить, зная дифференциальную зависимость между распределенной нагрузкой  $q$ ,  $Q(x)$

$$\text{и } M(x): \frac{\partial Q}{\partial x} = q; \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q(x).$$

Необходимо обратить внимание на неравномерность распределения нормальных напряжений по высоте балки и на то, что прочность балки зависит от момента сопротивления  $W$ . Надо ясно представлять, каким путем увеличить момент сопротивления без увеличения расхода материала.

Рекомендуется сравнить между собой эпюры  $\sigma$  и  $\tau$ , построенные для балки прямоугольного поперечного сечения. Наибольшее и наименьшее нормальные напряжения (главные напряжения) находят по формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).$$

### ЗАДАЧА 3

Для заданных двух систем балок (рис. 1) требуется написать выражения  $Q$  и  $M$  для каждого участка в общем виде, построить эпюры  $Q$  и  $M$ , найти максимальное  $M$  и подобрать:

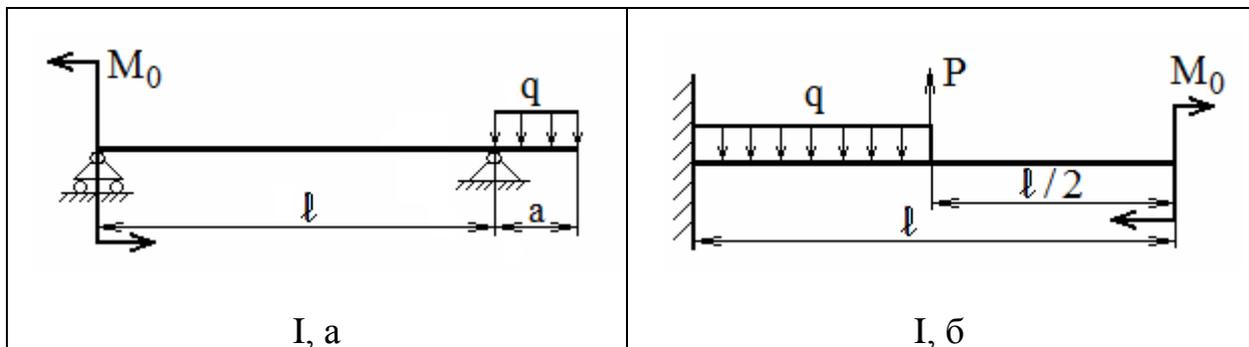
1) для схемы *a* деревянную балку круглого поперечного сечения при  $[\sigma] = 80$  МПа;

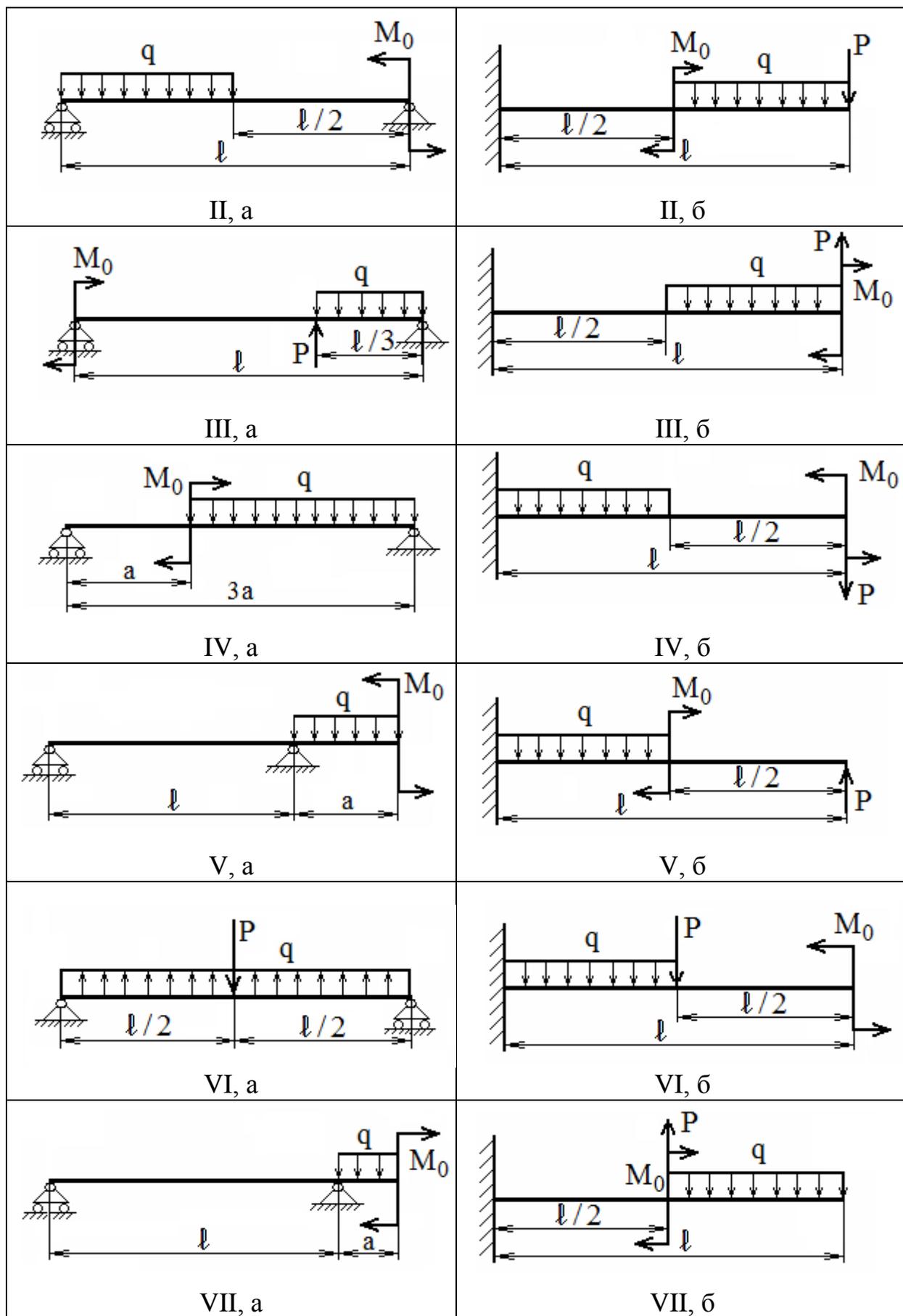
2) для схемы *б* стальную балку двутаврового поперечного сечения при  $[\sigma] = 160$  МПа.

Данные взять из табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Номер строки	$l$	$a$	$M$ , кН·м	$P$ , кН	$q$ , кН/м
	$m$				
1	2	1	20	10	30
2	4	2	30	20	40
3	2	1	40	30	50
4	4	2	50	40	10
5	2	1	10	50	20
6	4	2	20	10	30
7	2	1	30	20	40
8	4	2	40	30	50
9	2	1	50	40	10
0	4	2	10	50	20





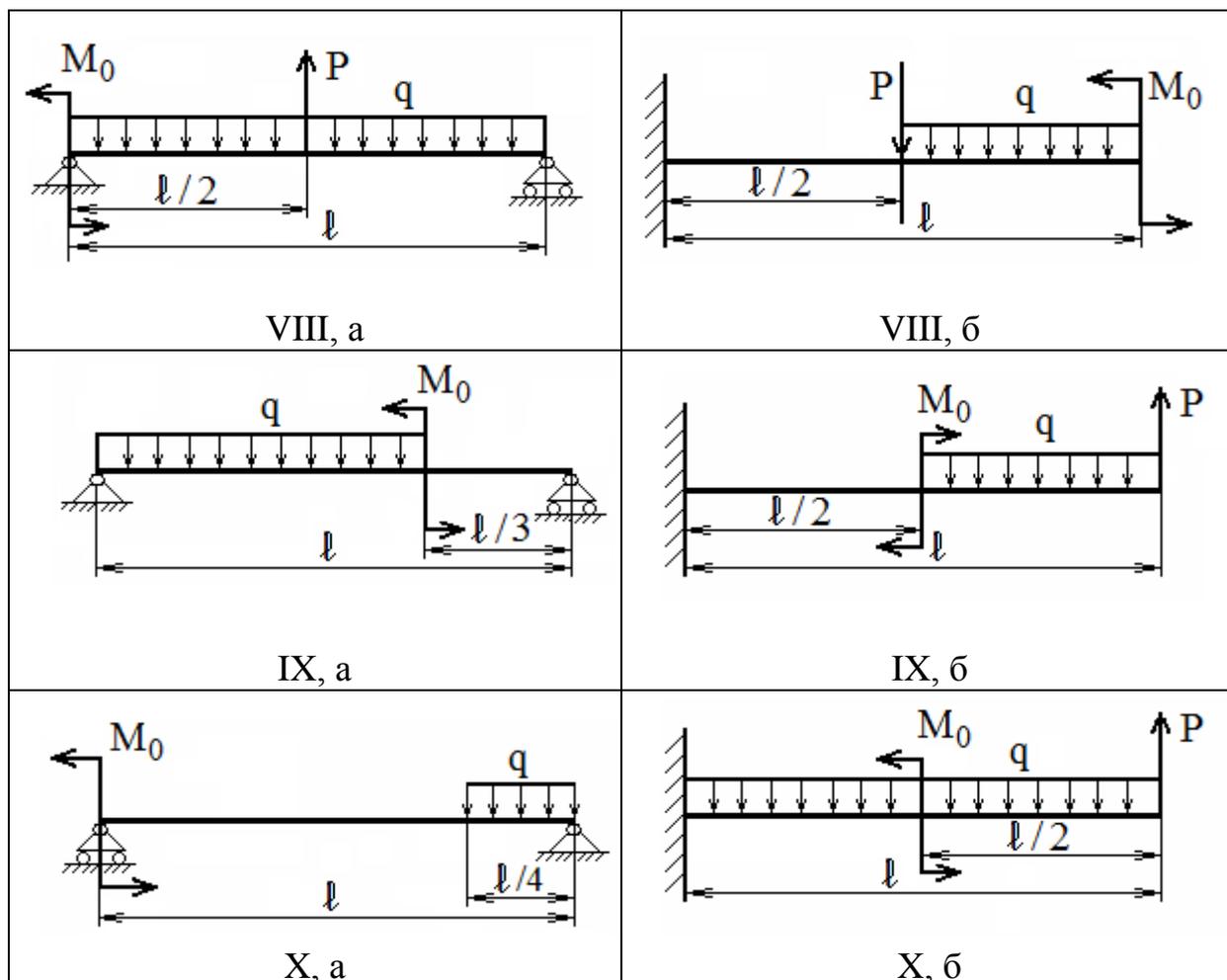


Рис. 1

### Пример решения ЗАДАЧИ 3.

Для балки двутаврового сечения, закрепленной на двух шарнирных опорах А и В, (рис. 2) требуется:

- написать выражения  $Q_{(x)}$  и  $M_{(x)}$  для каждого участка;
- построить эпюры  $Q_{(x)}$  и  $M_{(x)}$ ;
- найти максимальный изгибающий момент  $|M_{(x)}|^{\max}$ ;
- подобрать стальную балку двутаврового поперечного сечения.

**Дано:**  $P = 20$  кН;  $M_0 = 30$  кНм;  $q = 10$  кН/м;  $a = 2$  м;  $l = 4$  м;  $[\sigma] = 160$  МПа

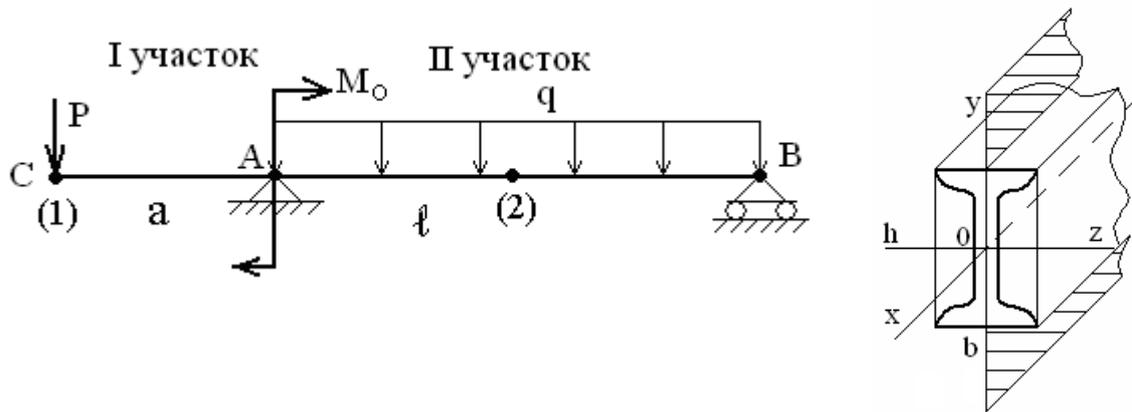


Рис. 2

Оси  $Y$  и  $Z$  – центральные оси сечения (рис. 2). Для двутаврового сечения эти оси являются главными центральными осями (признак симметрии оси).

По определению внешняя нагрузка для создания плоского поперечного изгиба должна лежать либо в плоскости  $XOY$ , либо в плоскости  $ZOX$ . В нашем примере – в плоскости  $XOY$ . Осью  $X$  будем обозначать ось балки (это геометрическое место центров тяжести нормальных сечений балки).

### РЕШЕНИЕ

1. Составление плана сил (рис. 3)

Мысленно убираем опоры  $A$  и  $B$ , заменяем их связями  $H_A$ ,  $R_A$  и  $R_B$ .

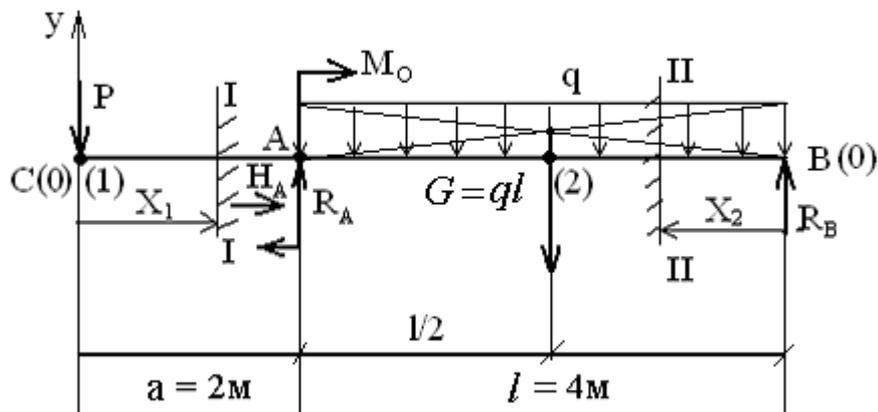


Рис.3 План сил

Под действием приложенных силовых факторов (активных внешних нагрузок и реактивных сил) балка находится в равновесии.

2. Составление уравнений статического равновесия:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum X = 0; H_A = 0 \\ 2) \sum Y = 0; -P + R_A - q \cdot 4 + R_B = 0 \\ 3) \sum M(A) = 0; P \cdot 2 - M_0 - q \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\text{из (3): } R_B = \frac{-2P + M_0 + 8q}{4} = \frac{-40 + 30 + 80}{4} = \frac{70}{4} = 17,5 \text{ кН}$$

$$\text{из (2): } R_A = P + 4q - R_B = 20 + 40 - 17,5 = 42,5 \text{ кН}$$

#### ПРИМЕЧАНИЕ:

- при составлении уравнений моментов пользуются следующим правилом знаков: поворот силового фактора вокруг выбранной точки плоскости «по часовой стрелке»  $\curvearrowright \ominus$ ; «против часовой стрелки»  $\curvearrowleft \oplus$ .

- необходимо обратить внимание на размерность силовых факторов, так,  $q$  (кН/м) – интенсивность нагрузки на длине ее действия  $l$ . Равнодействующая этой нагрузки  $G=ql$  (кН) приложена в центральной точке прямоугольника (рис.2). Плечо действия этой силы  $G$  до  $(\cdot)A$  равно  $l/2$ , т.е. 2м.

- при составлении уравнения моментов относительно какой-либо точки надо помнить, что момент силы, линия действия которой проходит через эту точку, равен нулю, так как плечо этой силы равно 0. Это не относится к сосредоточенному моменту  $M_0$ , т. к. плечо «заложено» в самом моменте. В нашем примере см. уравнение статики (3).

- После определения опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  необходимо сделать проверку, например, составить следующее уравнение:

$$\sum M(B) = 0 \quad P(a+l) - R_A l - M_0 + \frac{ql^2}{2} = 0 \quad (2)$$

Подставить найденные значения силы  $R_A$  и убедиться, что найденное значение удовлетворяет уравнению (2).

### 3. Определение внутренних силовых факторов.

Разбиваем балку на участки: в нашем примере два участка: СА и АВ. Применяем метод сечений для нахождения внутренних силовых факторов.

### 1-ый участок (СА).

В пределах длины этого участка выбираем произвольное нормальное сечение I-I (*рис.2*), мысленно рассекаем балку по этому сечению, получаем две части – левую и правую от сечения. Мысленно отбрасываем правую часть и заменяем действие отброшенной части пока неизвестными внутренними силовыми факторами  $Q(x)$  и  $M(x)$ . Внутренняя поперечная сила  $Q(x)$  определяется как алгебраическая сумма всех внешних сил, действующих на оставшуюся (не отброшенную часть балки).  $M(x)$  определяется как алгебраическая сумма моментов от всех силовых факторов, действующих на оставшуюся (не отброшенную часть балки), относительно этого сечения.

Определяем пределы изменения  $X_1$ , текущей координаты рассматриваемого сечения. Начало координат помещаем в  $(\cdot)$  С – начало первого участка. Индекс (1) указывает на то, что сечение принадлежит 1-му участку.

$$0 \leq x \leq a$$

Далее записываем выражения для определения внутренних силовых факторов на 1 участке:

$$\left. \begin{aligned} Q(x_1) &= -P = const = -20 \text{ кН} \\ M(x_1) &= -Px_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

На первом участке внутренняя поперечная сила не зависит от расстояния сечения от выбранного начала координат, есть величина постоянная в пределах этого участка ( -20 кН). Внутренний изгибающий момент на 1 участке изменяется по линейному закону.

### 2-ой участок (АВ).

В пределах длины этого участка выбираем произвольное нормальное сечение II-II (*рис.2*), мысленно рассекаем балку по этому сечению, получаем две части- левую и правую от сечения и заменяем действие отброшенной части пока неизвестными внутренними факторами  $Q(x)$  и  $M(x)$ .

Определяем пределы изменения текущей координаты  $X_2$  сечения II-II, поместив теперь начало координат в  $(\cdot)$  В – начало второго участка.

$$0 \leq x_2 \leq l$$

Записываем выражения для определения внутренних силовых факторов на II участке:

$$\left. \begin{aligned} Q(x_2) &= -R_B + qx_2 \\ M(x_2) &= R_B x_2 - \frac{qx_2^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

На втором участке изменение внутренней поперечной силы описывается линейной функцией. Внутренний изгибающий момент на этом участке изменяется по параболическому закону.

*ПРИМЕЧАНИЕ:* при составлении функций  $Q(x)$  и  $M(x)$  необходимо руководствоваться правилом знаков для поперечных сил  $Q(x)$  и изгибающих моментов  $M(x)$ . Для удобства запоминания можно пользоваться схемой, приведенной на рис. 4.

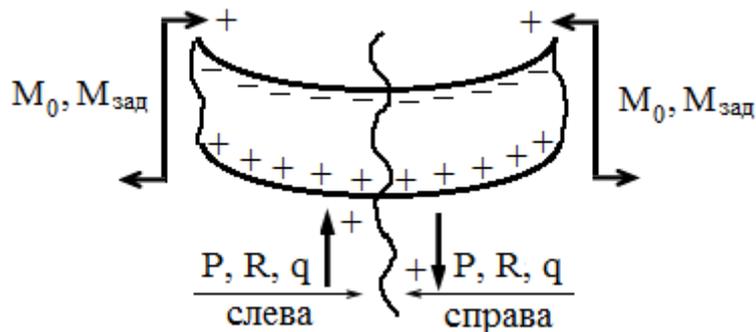


Рис. 4

#### 4. Построение эпюр $Q(x)$ и $M(x)$ .

Эпюры  $Q(x)$  и  $M(x)$  – это графическое изображение записанных выше функций (3) и (4). Порядок построения эпюр  $Q(x)$ ,  $M(x)$ :

- вычерчиваем балку в масштабе (рис.4);
- наносим горизонтальные линии О-О, так называемые базовые линии эпюр, определяющие координаты сечений балки;
- по вертикальной оси выбираем масштаб для нанесения значений поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  (масштабы могут не совпадать).
- В выбранных координатах  $Q(x)$  и  $M(x)$  указываем положительные и отрицательные области значений  $Q$  и  $M$ . На эпюре  $M(x)$  *положительные* значения моментов будем откладывать ниже нулевой линии, *отрицательные* – выше. Такое правило знаков удобно для рассмотрения в дальнейшем положения изогнутой оси балки. Для эпюры  $Q(x)$  принимаем традиционное расположение положительной и отрицательной областей.

- Строим графически функции  $Q(x)$  и  $M(x)$  по участкам, задаваясь различными значениями аргумента  $X$  в пределах каждого участка.

При проверке правильности построения эпюр  $Q(x)$  и  $M(x)$  следует использовать дифференциальную зависимость между интенсивностью распределённой нагрузки  $q$  и внутренними силовыми факторами  $Q(x)$  и  $M(x)$  (см. зависимости 5.3 и 5.4 в §5.1.3).

#### 1-ый участок (CA).

На заданной схеме участок CA свободен от распределённой нагрузки  $q$ , т. е.  $q = 0$ , т.е. приращение ординаты  $\Delta Q(x)$  на первом участке равно нулю, т.е. функция  $Q(x)$  на этом участке – прямая (см. эпюру  $Q(x)$  рис.5а).

В свою очередь приращение ординаты  $M(x)$  на первом участке  $\Delta M(x)$ , равно площади эпюры  $Q(x)$  на этом участке, т. е. - 40 кНм (см. эпюру  $M(x)$  (рис.5б)).

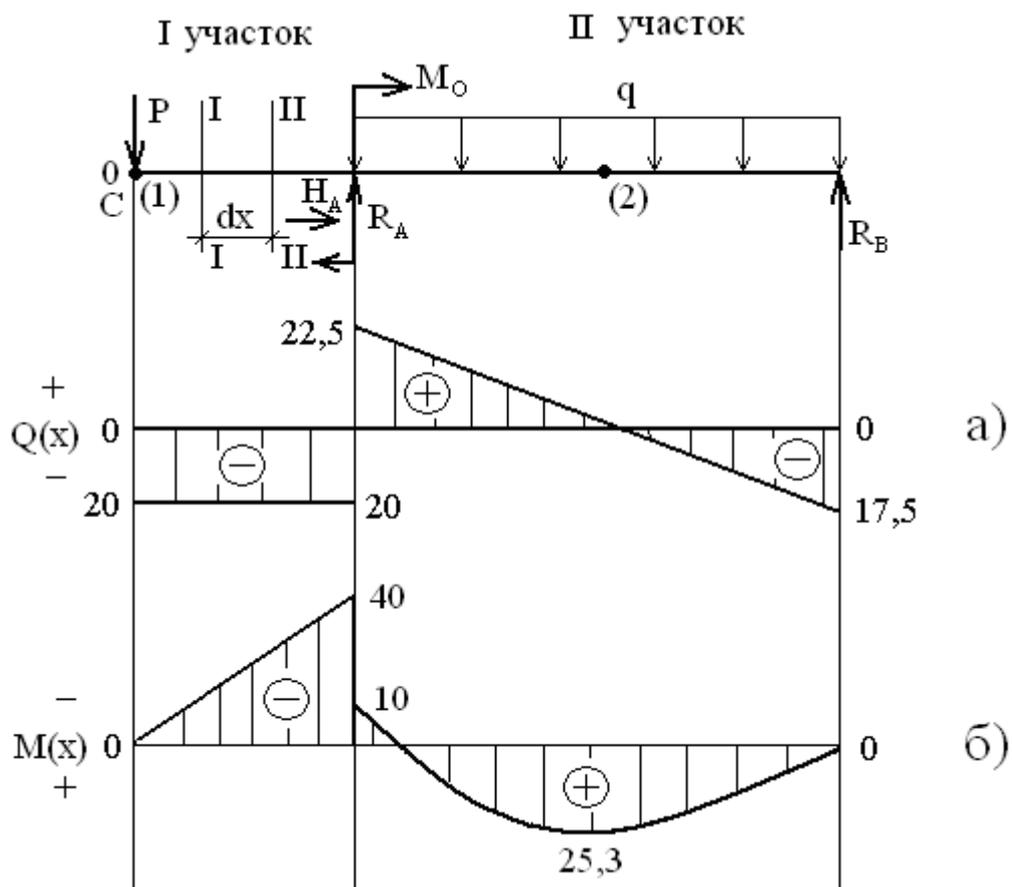


Рис. 5

## 2-ый участок (AB).

На заданной схеме участок АВ загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q = \text{const} = 10 \text{ кН/м}$ . Производная от функции  $Q(x)$  есть  $q$ , т.е. функция  $Q(x_3)$  на этом участке представляет собой линейную функцию – наклонную прямую.

Свяжем характер изменения функции  $M(x)$  с функцией  $Q(x)$  на интервале АВ.  $Q(x)$  – линейная функция есть производная функции  $M(x)$ . Следовательно, функция, описывающая изменение моментов – функция второго порядка (парабола) с вершиной (экстремумом) в точке пересечения функции  $Q(x)$  с осью  $X$ , т. е. при  $Q(x_3) = 0$ .

Чтобы найти координату точки экстремума  $X_3$ , необходимо записать (из 4) выражение  $Q(X_3) = 0$  и вычислить  $X_3$ :

$$-R_B + qx_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{R_B}{q} = \frac{17,5}{10} = 1,75 \text{ (м)} \quad (5)$$

Подставив значение  $X_3 = 1,75$  в выражение  $M(x)$  (4), получаем значение экстремальной точки параболы ( $M_3 = 25,3 \text{ кНм}$ ).

Для проверки правильности построения эпюр также полезно руководствоваться следующими «признаками правильности построения эпюр»:

- если на балке в каких-то сечениях действует сосредоточенная сила ( $P$ ), то на эпюре сил  $Q(x)$  в этом сечении наблюдается *скачок*; величина скачка будет равна величине этой силы, направление скачка также соответствует направлению сосредоточенной силы.

- если на балке в каких-то сечениях действует сосредоточенный изгибающий момент ( $M_{\text{заделки}}, M_0$ ), то на эпюре моментов  $M(x)$  в этом сечении он отразится скачком; величина скачка будет равна величине приложенного момента, направление скачка также соответствует направлению этого момента.

- с учетом дифференциальной зависимости между  $q$ ,  $Q(x)$ ,  $M(x)$ :
  - если на каком-то участке балки действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ , то на этом участке эпюры  $Q(x)$  наблюдается наклонная прямая, а на эпюре  $M(x)$  – парабола.

- если на эпюре  $Q(x)$  наклонная прямая пересекает нулевую линию, т. е. проходит через 0 ( $Q(x) = 0$ ) – на эпюре  $M(x)$  в этом сечении – экстремум.

- если на каком-то участке балки отсутствует распределенная нагрузка, то на эпюре  $Q(x)$  наблюдается горизонтальная прямая, т.е.  $Q(x) = \text{const}$ , а на эпюре  $M(x)$  – наклонная прямая.

## 5. Определение опасных сечений балки

Из построенных эпюр (рис. 5 а, б) определяем опасные сечения балки.

В задаче опасным сечением балки является сечение А, так как в этом сечении наблюдается наибольшее по абсолютной величине значение и внутреннего изгибающего момента  $M_A$ , и внутренней поперечной силы  $Q_A$ :

$$|M_A|_{max} = 40 \text{ кН}$$

$$|Q_A|_{max} = 22,5 \text{ кН}$$

*ПРИМЕЧАНИЕ:* в данном примере в одном и том же сечении  $|Q_{max}|$  и  $|M_{max}|$  совпадают. Не обязательно  $Q_{max}$  и  $M_{max}$  будут наблюдаться в одном сечении.

## 6. Подбор двутаврового сечения балки (номера двутавра - №I)

При подборе сечения балки в большинстве случаев пользуются условием прочности по нормальным напряжениям (5.9) § 5.2, т. к. в редких случаях  $\tau_{max}$  будут иметь опасные значения, близкие к  $[\tau]$ . Поэтому записываем условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{|M(x)|^{max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

Из условия прочности вычислим значение осевого момента сопротивления  $W_z$  при условии, что для материала балки – стали  $[\sigma]_{стали} = 160 \text{ МПа}$ :

$$W_z \geq \frac{|M(x)|^{max}}{[\sigma]} \tag{6}$$

$$W_z \geq \frac{40 \text{ кНм}}{160 \text{ МПа}} \geq \frac{40 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{160 \cdot 10^6 \text{ Па}} \geq 0,250 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \geq 250 \text{ см}^3 \tag{7}$$

Из таблицы сортамента (ГОСТ 8239-53) находим ближайшее большее значение осевого момента сопротивления  $W_z$  для балок двутаврового сечения.

$W_z = 251 \text{ см}^3$  – это значение соответствует двутавру № 22а.

*ПРИМЕЧАНИЕ:* в случае, если необходимо подобрать сечение деревянной балки круглого поперечного сечения, то необходимо использовать следующие соотношения:

$$W_\rho \geq \frac{|M(x)|^{max}}{[\sigma]}, \text{ при этом } W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}. \text{ Тогда } d \geq \sqrt[3]{\frac{16|M(x)|^{max}}{\pi[\sigma]}}.$$