Практическое занятие №7

Тема: Численное решение уравнения Вольтерра 2 рода методом квадратур

Цель – сформировать у магистрантов представление о применении интегральных уравнений в различных областях. Привить умение решать линейные интегральные уравнения Вольтерра 2 рода. Развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию $y(x)$ под знаком интеграла:

$$\int_a^b F(x,t,y(t))dt = G(x,y(x)) \tag{1}$$

Здесь F,G – заданные функции. Если функция в правой части уравнения (1) не зависит от $y(x)$, то говорят об интегральном уравнении 1-го рода, в общем случае – об уравнении 2-го рода.

Область $S=[a,b]\times[a,b]$ изменения переменных x и t в уравнении (1) называется основным квадратом. Функция F считается определенной в S. Промежуток $[a,b]$, на котором ищется функция $y(x)$, называется областью определения уравнения (1). Промежуток $[a,b]$ может быть и бесконечным ($a=-\infty$ и/или $b=+\infty$). Функцию $y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество для всех $x\in[a,b]$, называют решением интегрального уравнения (1) на промежутке $[a,b]$.

Интегральное уравнение (1) называют линейным, если в него неизвестная функция входит линейно.

Линейное интегральное уравнение вида

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x) \tag{2}$$

называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

Уравнение

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x) \tag{3}$$

называют интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода.

В уравнениях (2), (3) функции $f(x), K(x,t)$ являются заданными, $y(x)$ – искомая функция, λ – числовой параметр, $x\in[a,b]$, $t\in[a,b]$. Функция $K(x,t)$ называется ядром интегрального уравнения, $f(x)$ – свободным членом. Если $f\equiv 0$, то уравнения (2), (3) называются однородными, в противном случае – неоднородными.

К интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода приводят задачи гравиразведки полезных ископаемых, задача восстановления размытого изображения. К однородным интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода приводят, например, задачи о собственных колебаниях систем, т. е. колебаниях при отсутствии внешней силы.

Частный случай линейных уравнений вида (2), (3), имеющий важное самостоятельное значение, возникает для ядер, удовлетворяющих условию

$$K(x,t)\equiv 0 \quad t>x.$$

Такие ядра называют ядрами Вольтерры.

При этом уравнения

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x) \quad x \in [a,b] \tag{4}$$

$$\int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x) \quad x \in [a,b] \tag{5}$$

называют уравнениями Вольтерры соответственно 2-го и 1-го рода.

К линейным уравнениям Вольтерры 2-го рода приводит, например, решение начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 2 РОДА МЕТОДОМ КВАДРАТУР

При численном решении интегральных уравнений входящие в них интегралы заменяют конечными суммами, полученными с помощью различных квадратурных формул:

$$\int_a^b q(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i q(x_i) + R. \tag{6}$$

Здесь $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$ - узлы, A_i, $i = 1,2,\ldots,n$ - веса и R- ошибка аппроксимации квадратурной формулы.

Применим метод квадратур к решению уравнения (4). Получим систему

$$y(x_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_{i)}) + R_i, \ i = 1,2,\ldots,n.$$

Положим ошибки аппроксимации малыми. Получим систему линейных алгебраических уравнений

$$y_i - \sum_{j=1}^i A_j K_{ij} y_j = f_i, \ i = 1,2,\ldots,n \tag{7}$$

Здесь $y_i = \tilde{y}(x_i), \ f_i = f(x_i), K_{ij} = K(x_i, x_j)$. $\tilde{y}$ - приближение к искомой функции y.

Систему (7) можно преобразовать к треугольному виду и для нахождения приближенного решения $\tilde{y}$ получим рекуррентную формулу [1]:

$$y_i = (1 - A_i K_{ii})^{-1} \left(f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j \right), \ i = 1,2,\ldots,n \tag{8}$$

Конкретный вид формулы (8) зависит от выбора квадратурной формулы.

Используем эту формулу при решении примера 1.

Пример 1. Получить численное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода $y(x) - \int_a^x \sin(x-t)y(t)dt = \cos(x) + 0.125 \cdot x^2 \cdot \cos(x) - 0.125 \cdot x \cdot \sin(x)$ на интервале $[0,3\pi]$.

Полученное решение сравнить с точным решением: $y(x) = \cos(x) - 0.5 \cdot x \cdot \sin(x)$. В качестве квадратурной формулы использовать формулу трапеций.

Результаты представлены на рис. 1-3.

```
a := 0     b := 3·π     n := 36    K(x,t) := sin(x − t)
f(x) := cos(x) + 0.125·x^2·cos(x) − 0.125·x·sin(x)
Volterra_2_TR(a,b,n,K,f) := | h ← (b − a) ÷ n
                            | for i ∈ 0..n
                            |   | x_i ← a + i·h
                            |   | f1_i ← f(x_i)
                            |   | A_i ← | h ÷ 2  if i = 0 ∨ i = n
                            |   |       | h  otherwise
                            |   | for j ∈ 0..n
                            |   |   | t_j ← a + j·h
                            |   |   | K1_{i,j} ← K(x_i, t_j)
                            | y_0 ← f1_0
                            | for i ∈ 1..n
                            |   | s ← 0
                            |   | for j ∈ 0..i − 1
                            |   |   s ← s + λ·A_j·K1_{i,j}·y_j
                            |   | y_i ← (f1_i + s) ÷ (1 − A_i·K1_{i,i})
                            | V^⟨0⟩ ← x
                            | V^⟨1⟩ ← y
                            | V
```

Рис. 1 Фрагмент документа Mathcad с функцией, возвращающей численное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

```
E := 0.000009
Rez := | for M ∈ 0..1000000
       |   | y1 ← Volterra_2_TR(a,b,n,K,f)
       |   | y2 ← Volterra_2_TR(a,b,2n,K,f)
       |   | for k ∈ 0..n
       |   |   r_k ← max(|y1_{k,1} − y2_{2k,1}|)
       |   | break  if max(r) < E
       |   | n ← 2·n  otherwise
       | (y2)
       | (2n)

Rez = ( {2305,2}    )
      ( 2.304 × 10^3 )
i := 0..Rez_1
y2 := Volterra_2_TR(a,b,Rez_1,K,f)
x_i := y2_{i,0}    yU_i := y2_{i,1}
Y_i := cos(x_i) − 0.5·x_i·sin(x_i)
μ := |Y − yU|      μ = 0.000082
δ := μ ÷ |Y|       δ = 8.154 × 10^−7
```

Рис. 2 Фрагмент документа Mathcad с функцией, уточняющей решение уравнения

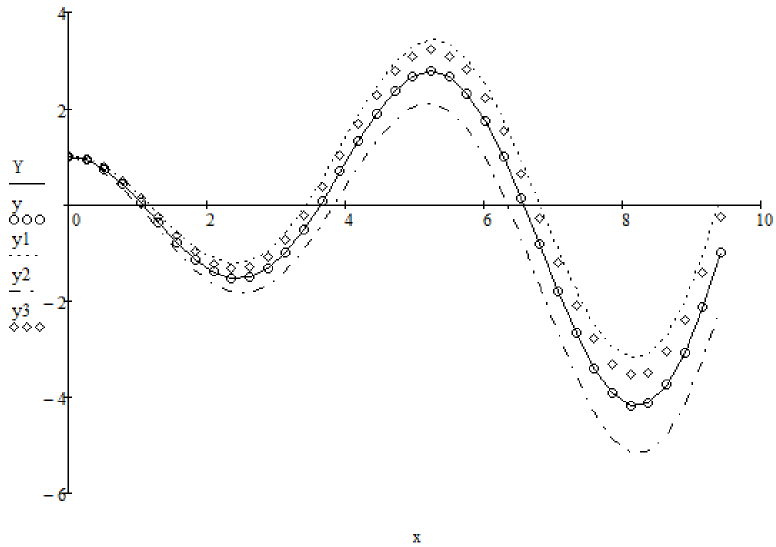

Рис. 3 Графическое решение уравнения. Здесь Y -точное решение;
y – решение с использованием квадратурной формулы трапеций;
y1 - решение с использованием квадратурной формулы левых прямоугольников;
y2 - решение с использованием квадратурной формулы правых прямоугольников;
y3 - решение с использованием квадратурной формулы Симпсона

Решение на интервале искали с шагом $h = \pi / 12 = 0.262$. Лучшее решение получилось при использовании квадратурной формулы трапеций, где относительная ошибка равна $\delta = 0.003214$. Для формул левых прямоугольников, правых прямоугольников и Симпсона получили соответственно значения $\delta = 0.356$, $\delta = 0.276$ и $\delta = 0.228$. Используя метод Рунге сравнения решений на шаге h с решением на шаге $h/2$, уточнили численное решение (рис. 2). По формуле трапеций получили численное решение, практически полностью совпадающее с точным решением. Относительная ошибка $\delta = 8.154 \times 10^{-7}$. Для формул левых прямоугольников, правых прямоугольников и Симпсона получили соответственно значения $\delta = 2.66 \times 10^{-3}$, $\delta = 2.654 \times 10^{-3}$ и $\delta = 0.021$.

Применение квадратурных формул более высоких порядков дает лучший результат, чем применение квадратурных формул низких порядков. Однако имеются особенности в применении квадратурных формул. Формула более высокого порядка может давать худший результат при использовании напрямую. Например, применение формулы Симпсона должно чередоваться для нечетных узлов с каким-либо другим правилом, например с формулой прямоугольников или формулой трапеций, тогда результат получается более высокого порядка точности.

Задание 1.

1. Найдите приближенное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода, используя квадратурные формулы левых прямоугольников, правых прямоугольников, трапеций, Симпсона. Выберите решение с наименьшей относительной ошибкой.

2. Для выбранного решения постройте последовательность непрерывных функций $y_n(x)$, сходящихся к точному решению исходного интегрального уравнения. Поиск в этой последовательности такого элемента $y_n(x)$, начиная с которого выполняется условие $\|y_n(x) - y_{n-1}\| \le \varepsilon$, где ε - заданная заранее точность.

3. Сравните приближенное решение с точным решением в эвклидовой норме. Вычислите значение относительной ошибки решения δ. Постройте графики точного и приближенного решений.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант 1.

$$y(x) - \int_a^x e^{x-t} y(t)dt = \sin(x) \ , \quad x \in [0,1], \quad \varepsilon = 0.001.$$

Точное решение: $y(x) = 0.2 \cdot e^{3x} - 0.2 \cdot \cos(x) + 0.4 \cdot \sin(x)$.

Вариант 2.

$$y(x)-\int_a^x e^{x-t}y(t)dt=e^x\ ,\quad x\in[0,1].\quad \varepsilon=0.005$$

Точное решение: $y(x)=e^{2x}$.

Вариант 3.

$$y(x)+\int_a^x 3^{x-t}y(t)dt=3^x x,\quad x\in[0,1],\quad \varepsilon=0.001$$

Точное решение: $y(x)=3^x(1-e^{-x})$.

Вариант 4.

$$y(x)-\int_a^x \frac{2+\cos(x)}{2+\sin(t)}y(t)dt=e^x\sin(x),\quad x\in[0,1],\quad \varepsilon=0.002$$

Точное решение: $y(x)=e^x\sin(x)+[2+\cos(x)]e^x\ln\left(\frac{3}{2+\cos(x)}\right)$.

Вариант 5.

$$y(x)-\int_a^x[1-(x-t)]e^{2x}y(t)dt=(1-xe^{2x})\cos(1)-e^{2x}\sin(1),$$

$x\in[0,1],\quad \varepsilon=0.001$

Точное решение: $y(x)=e^x[\cos(e^x)-e^x\sin(e^x)]$.

Вариант 6.

$$y(x)-\int_a^x\frac{1+x^2}{1+t^2}y(t)dt=1+x^2,\quad x\in[0,1],\quad \varepsilon=0.002$$

Точное решение: $y(x)=e^x(1+x^2)$

Вариант 7.

$$y(x)-2\int_a^x e^{x^2-t^2}y(t)dt=e^{x^2+2x}\ ,\quad x\in[0,1],\quad \varepsilon=0.01.$$

Точное решение: $y(x)=e^{x^2+2x}(1+2x)$.

Вариант 8.

$$y(x)+\int_a^x e^{x^2-t^2}y(t)dt=1-2x,\quad x\in[0,1],\ .\ \varepsilon=0.01$$

Точное решение: $y(x)=e^{x^2-x}-2x$.

Вариант 9.

$$y(x)+\int_a^x\frac{sh\,t}{ch\,x}y(t)=1,\quad x\in[0,2],\quad \varepsilon=0.001$$

Точное решение: $y(x)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{ch^2x}\right]$.

Вариант 10.

$$y(x)-\int_a^x e^{t-x}\,y(t)=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in[0,1].\quad \varepsilon=0.001$$

Точное решение: $y(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+x\cdot arctg(x)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Вариант 11.

$y(x) - \int_a^x e^{t-x}\, y(t) = 1 - e^{-x}, \quad x \in [0,1]. \quad \varepsilon = 0.0003$
Точное решение: $y(x) = x$.

Вариант 12.

$y(x) - \frac{1}{6}\int_a^x (x-t)^3\, y(t) = 1 \quad x \in [0,5]. \quad \varepsilon = 0.0001$
Точное решение: $y(x) = \frac{1}{2}(ch\, x + \cos\, x)$..

Вариант 13.

$y(x) + \int_a^x \cos(x-t)\, y(t)dt = \sin(x)\left(1 - \frac{x}{2}\right), x \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right], \quad \varepsilon = 0.01$

Точное решение: $y(x) = \sin(x)$

Вариант 14.

$y(x) + \int_a^x \sin(x-t)^2\, y(t)dt = cos(x) - \frac{2\sin(x)}{3} + \frac{\sin(2x)}{3},$
$x \in [0, 2\pi], \quad \varepsilon = 0.005$
Точное решение: $y(x) = \cos(x)$

Вариант 15.

$y(x) + \int_a^x 2^{x-t} y(t)dt = -2^{x-1}(x^2 - 4x + 2), \quad x \in [0,2], \quad \varepsilon = 0.01.$

Точное решение: $y(x) = 2^x(x-1)$.