§ 4. Сжимающие операторы и метод простых итераций

9. Дано числовое уравнение, т.е. уравнение в одной вещественной неизвестной.

A. Преобразовать уравнение к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов.

B. Методом простых итераций найти приближенное решение с точностью 10^{-5}, используя априорную и апостериорную оценки числа итераций.

Для вычислений использовать математические пакеты.

1. $x\sqrt{3}+arctg(3x-2)=\sin^2 x$
2. $5x+\cos^2 3x+\sqrt{1+x^2}+7=0$
3. $x\sqrt{5}+\sin x=\sqrt{\pi}+\sqrt{3}\cos x$
4. $2x+\dfrac{x}{1+x^2}=4+arcctg(x)$
5. $x\sqrt{2}+\ln(1+x^2)+arctg(4x)+4=0$
6. $\dfrac{5}{2}x+\sqrt{3}\sin x=6+\cos x$
7. $\pi x+arctg(\pi x)+\ln(1+x^2)+8=0$
8. $2x+\cos x+\dfrac{2x}{1+x^2}=0$
9. $x-\dfrac{1}{3}\cos(2x+1)+\dfrac{2x}{2+x^2}=5$
10. $x\sqrt{5}+\sqrt{1+x^2}+4=\sin^2 x$
11. $\dfrac{9}{4}x+\sqrt{3}\sin x+arctg(x)=2\pi+\cos x$
12. $x+arctg(x)+\dfrac{x}{1+x^2}=3$
13. $\dfrac{8}{3}x-\sqrt{3}\cos x-\sin x+arctg(\pi x)=3\pi$
14. $x+\sin\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{1+x^2}=5$
15. $\dfrac{2\pi}{3}x+\sqrt{3}\cos x+\sin x+arctg(x)=0$
16. $2x+\sin x+arctg(x)+\dfrac{x}{1+x^2}=6$
17. $3x+\ln(1+x^2)+\sin x+\cos x=7$
18. $x+arctg(2x+1)=4+\dfrac{1}{3}\cos^2 x$
19. $\dfrac{\pi x}{2}+\ln(1+x^2)=2\pi+arcctg(\pi x)$
20. $3x+\sin x+\sqrt{1+x^2}=0$

Образец решения

$$2x-\cos x+\sin x+arctg(x)=2. \qquad (1)$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов и метод простых итераций, изложенные в §4, §5 конспекта лекций.

А. Преобразуем уравнение к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов.

Порядок и цель преобразований изложены в конспекте лекций, §5, пункт 5.1. Обозначим $\varphi(x)=2x-\cos x+\sin x+arctg(x)-2$. Уравнение (1) имеет вид $\varphi(x)=0$. Вычисляем $\varphi'(x)=2+\sin x+\cos x+\dfrac{1}{1+x^2}$. Поскольку

$$-\sqrt{2}\ \le\ \sin x+\cos x\ \le\ \sqrt{2},\qquad 0\ <\ \frac{1}{1+x^2}\ \le\ 1,$$

то получаем оценку

$$0\ <\ \nu\ \le\ \varphi'(x)\ \le\ \mu,$$
$$\nu=2-\sqrt{2},\quad \mu=3+\sqrt{2}.$$

Преобразуем уравнение $\varphi(x)=0$ к виду $x-\dfrac{1}{\mu}\varphi(x)=x$:

$$x-\frac{1}{3+\sqrt{2}}\left(2x-\cos x+\sin x+arctg(x)-2\right)=x. \qquad (2)$$

Рассмотрим оператор

$$\Phi: R\to R,\ \ \Phi[x]=x-\frac{1}{3+\sqrt{2}}\left(2x-\cos x+\sin x+arctg(x)-2\right).$$

Уравнение (2) имеет вид $\Phi[x]=x$, его решение – неподвижная точка оператора Ф. Оператор Φ является сжимающим с коэффициентом сжатия

$$\alpha=1-\frac{\nu}{\mu}=1-\frac{2-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}.$$

Итак, к уравнению (1), записанному в форме (2), применим принцип сжимающих операторов: уравнение имеет единственное решение и можно использовать метод простых итераций для поиска приближенного решения.

B. Используя метод простых итераций, найдем приближенное решение уравнения (2) с точностью $\varepsilon=10^{-5}$. *Процесс вычислений организуем с помощью априорной и апостериорной оценок числа итераций.*

Схема действия метода простых итераций, использование априорной и апостериорной оценки описаны в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n=\Phi[x_{n-1}]$. В данном случае:

$$x_n=x_{n-1}-\frac{1}{3+\sqrt{2}}\left(2x_{n-1}-\cos x_{n-1}+\sin x_{n-1}+arctg(x_{n-1})-2\right). \qquad (3)$$

Выберем произвольным образом начальное приближение, например $x_0=-6$, и вычисляем первую итерацию $x_1=-2.355772$. Априорную оценку N_{apr} числа итераций находим по формуле

$$N_{apr}=\left[\log_{\alpha}\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0,x_1)}\right]+1.$$

В данном случае

$$\varepsilon=10^{-5},\quad \alpha=1-\frac{\nu}{\mu}=1-\frac{2-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}},$$

$$\rho_R(x_0,x_1)=|x_0-x_1|=3.644228\,.$$

Отсюда $N_{apr}=105$. Следовательно, для вычисления приближенного решения с требуемой точностью $\varepsilon=10^{-5}$ понадобится не более, чем 105 итераций.

Процесс непосредственного вычисления итераций по формуле (3) удобно проводить в одном из математических пакетов с использованием оператора цикла. Цикл должен быть организован с помощью апостериорной оценки. На каждом шаге цикла следует сравнивать значения текущей итерации x_n и предыдущей x_{n-1}:

если $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}|x_n-x_{n-1}|>\varepsilon,$ то вычисления продолжаются;

если $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon,$ то вычисления завершаются.

При этом последняя вычисленная итерация x_n является приближенным решением уравнения (2) с заданной точностью ε. В данном случае понадобилось всего 9 итераций, и получено приближенное решение

$$x_9 = 0.726981.$$

Как видно, априорная оценка числа итераций сильно завышена.
Все численные результаты приведены с округлением до 6 знака после запятой ради экономии места, хотя вычисления проводились с гораздо более высокой точностью.

10. Дана система линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными.

A. Преобразовать систему к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов.

B. Методом простых итераций найти приближенные решения с точностью 10^{-2} и с точностью 10^{-4}, используя априорную и апостериорную оценки числа итераций.

C. Найти точное решение системы и сравнить с приближенными.

Для вычислений использовать математические пакеты.

1. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 77 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 = 62 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 59 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 84 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 102 \\ -6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -47 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 8x_4 = -122 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -24 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 60 \\ 9x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 13 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 35 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 45 \\ 7x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 94 \\ 9x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 27 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 39 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 - 12x_4 = 36 \\ 4x_1 + 13x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 110 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 12x_4 = 100 \\ -32x_1 + x_2 + 10x_3 + 2x_4 = -392 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_2 - 15x_4 = -83 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 22 \\ 2x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 4x_4 = 50 \\ -2x_1 + x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -19 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 + x_4 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -9 \\ -2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - x_4 = -17 \\ 3x_1 + 2x_3 - 3x_4 = -8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66 \\ 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 84 \\ 3x_1 + 8x_2 - 9x_4 = 5 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 65 \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 35 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 27 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_3 + x_4 = 23 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_4 = 39 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 70 \\ 6x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 20 \\ 15x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 645 \\ -8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = -210 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 8x_1 + x_4 = 12 \\ 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -43 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 42 \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 6x_4 = 7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} -8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 79 \\ 9x_1 + 2x_2 - 15x_3 = -27 \\ 4x_1 + 3x_3 - 14x_4 = 303 \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 246 \end{cases}$

20. $\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 32 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 19 \\ -9x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4 = -105 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \end{cases}$

Образец решения

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 + x_4 = -70 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 59 \\ 12x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = -276 \end{cases}$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов и метод простых итераций, изложенные в §4, §5 конспекта лекций.

Запишем систему в матричной форме

$$\mathrm{A}x = b, \qquad (1)$$

где

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 12 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -70 \\ -2 \\ 59 \\ -276 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det(\mathrm{A}) = -2765 \neq 0,$ то система (1) имеет единственное решение.

А. Преобразуем систему (1) к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов.

Порядок и цель преобразований изложены в конспекте лекций, §5, пункт 5.2. Все численные результаты приведены с округлением до 5 знака после запятой ради экономии места, хотя вычисления проводились с гораздо более высокой точностью.

Вычисляем $\lambda(\mathrm{A}^T\mathrm{A}) = 260.27179$ – максимальное собственное число матрицы $\mathrm{A}^T\mathrm{A}$.

Обозначим символом I единичную матрицу:

$$\mathrm{I}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Преобразуем систему (1) к виду

$$\underbrace{\left(\mathrm{I}-\frac{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}{\lambda\left(\mathrm{A}^T\mathrm{A}\right)}\right)}_{C}x+\underbrace{\frac{\mathrm{A}^T b}{\lambda\left(\mathrm{A}^T\mathrm{A}\right)}}_{d}=x \quad \Leftrightarrow \quad Cx+d=x. \tag{2}$$

Рассмотрим пространство R^4 с евклидовой метрикой ρ_2 (см. конспект лекций, §2) и оператор

$$\Phi : R^4 \to R^4, \ \Phi[x]=Cx+d.$$

Уравнение (2) имеет вид $\Phi[x]=x$, его решение – неподвижная точка оператора Φ.

Вычисляем $\lambda(C)=0.97507$ – максимальное собственное число матрицы C. Оператор Φ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\alpha=\lambda(C)$. К системе (1), записанной в форме (2), применим принцип сжимающих операторов. Методом простых итераций можно найти ее приближенное решение с любой заранее заданной точностью.

B. Методом простых итераций найдем приближенные решения системы (2) с точностью $\varepsilon=10^{-2}$ и $\varepsilon=10^{-4}$, используя априорную и апостериорную оценки числа итераций.

Схема действия метода простых итераций, использование априорной и апостериорной оценки описаны в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n=\Phi[x_{n-1}]$:

$$x_n=Cx_{n-1}+d. \tag{3}$$

Априорную оценку N_{apr} числа итераций находим по формуле

$$N_{apr}=\left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho_2\left(x_0,x_1\right)}\right]+1.$$

Процесс непосредственного вычисления итераций по формуле (3) необходимо проводить в одном из математических пакетов с использованием оператора цикла. Цикл должен быть организован с помощью апостериорной оценки. На каждом шаге цикла следует сравнивать значения текущей итерации x_n и предыдущей x_{n-1}:

если $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\rho_2\left(x_n,x_{n-1}\right)>\varepsilon,$ то вычисления продолжаются;

если $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\rho_2\left(x_n,x_{n-1}\right)\le\varepsilon,$ то вычисления завершаются.

При этом последняя вычисленная итерация x_n является приближенным решением уравнения (2) с заданной точностью ε.

В данном случае получились следующие результаты. Взяли произвольным образом начальное приближение

$$x_0=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\0\end{bmatrix}.$$

При $\varepsilon=10^{-2}$ априорная оценка числа итераций $N_{apr}=444.$ Фактически же понадобилось

274 итерации и получили приближенное решение

$$x_{274} = \begin{bmatrix} -21.99468 \\ 0.99329 \\ -5.00516 \\ 12.99990 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

При $\varepsilon = 10^{-4}$ априорная оценка числа итераций $N_{apr} = 626.$ Фактически же понадобилось 457 итераций и получено приближенное решение

$$x_{457} = \begin{bmatrix} -21.99995 \\ 0.99993 \\ -5.00005 \\ 13.00000 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

C. Найдем точное решение системы (1) и сравним его с приближенными.

Точное решение системы (1) можно найти методом Крамера, методом Гаусса или с помощью обратной матрицы:

$$x = \begin{bmatrix} -22 \\ 1 \\ -5 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Сравним точное решение с приближенными (4), (5) в евклидовой метрике ρ_2 пространства R^4:

$$\rho_2(x_{274}, x) = 0.00999 < 10^{-2}, \quad \rho_2(x_{457}, x) = 0.00009 < 10^{-5}.$$

Таким образом, точность приближенных решений (4) и (5) соответствует поставленной задаче.

11. Доказать двумя способами, что оператор $\Phi : C[a;b] \to C[a;b]$ является сжимающим:

A. по определению сжимающего оператора;

B. по достаточному признаку сжимающего оператора.

1. $\Phi[x] = (t+1)\cos\dfrac{x(t)}{5} + \sin\dfrac{t}{2}, \quad [a;b] = [0;\pi]$
2. $\Phi[x] = t\sqrt{1 + x^2(t)} - t^2 + t + 1, \quad [a;b] = \left[0;\dfrac{1}{4}\right]$
3. $\Phi[x] = t^2\cos\dfrac{x(t)}{4\pi} - \dfrac{t}{\pi}, \quad [a;b] = [-\pi;\pi]$
4. $\Phi[x] = \sqrt[4]{1 + |x(t)|} - \sqrt{t+1}, \quad [a;b] = [-1;1]$
5. $\Phi[x] = \dfrac{t^2}{2|x(t)| + 1} - arctg(t), \quad [a;b] = \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$
6. $\Phi[x] = \sqrt[3]{1 + 2|x(t)|} - t, \quad [a;b] = [0;4]$

7. $\Phi[x]=\dfrac{1}{2+2x^2(t)}+t, \quad [a;b]=[-4;4]$

8. $\Phi[x]=\dfrac{\cos^2 x(t)}{3}+\sin^2 t, \quad [a;b]=[-2\pi;2\pi]$

9. $\Phi[x]=\dfrac{t^2-1}{2}arctg|x(t)|+t, \quad [a;b]=[-1;1]$

10. $\Phi[x]=t\sqrt{2+|x(t)|}-t^2, \quad [a;b]=[-2;2]$

11. $\Phi[x]=t\cdot arctg\,|x(t)|-t^2, \quad [a;b]=\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$

12. $\Phi[x]=\dfrac{t^2}{|x(t)|+3}+e^{t+1}, \quad [a;b]=[-2;2]$

13. $\Phi[x]=\dfrac{\cos x(t)}{t+2}+\sin t, \quad [a;b]=[0;3\pi]$

14. $\Phi[x]=\dfrac{1}{2+x^2(t)}-\sqrt{t}, \quad [a;b]=[0;1]$

15. $\Phi[x]=\sin^2\dfrac{x(t)}{\pi}+\cos t, \quad [a;b]=[-4\pi;4\pi]$

16. $\Phi[x]=t\cdot\sqrt[4]{1+|x(t)|}+t^2, \quad [a;b]=[-3;3]$

17. $\Phi[x]=\sin\dfrac{x(t)}{t}-t, \quad [a;b]=[\pi;3\pi]$

18. $\Phi[x]=\dfrac{2t-3}{|x(t)|+t}+\sqrt{t}, \quad [a;b]=[2;3]$

19. $\Phi[x]=\dfrac{3}{4}arctg\,|x(t)|-t+1, \quad [a;b]=[-2;2]$

20. $\Phi[x]=\dfrac{t}{t+|x(t)|}+4t, \quad [a;b]=[3;8]$

Образец решения

$$\Phi[x]=\frac{3-t^2}{2+|x(t)|}-\arcsin t, \quad [a;b]=[-1;1].$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов, изложенную в §4, §5 конспекта лекций. Докажем, что оператор $\Phi: C[-1;1]\to C[-1;1]$ сжимающий.

А. Обратимся непосредственно к определению сжимающего оператора (см. конспект лекций, § 4, пункт 4.1).

$$\rho_{C[-1;1]}(\Phi[x],\Phi[y]) = \max_{t\in[-1;1]}|\Phi[x]-\Phi[y]| =$$

$$= \max_{t\in[-1;1]}\left|\frac{3-t^2}{2+|x(t)|}-\frac{3-t^2}{2+|y(t)|}\right| = \max_{t\in[-1;1]}\frac{(3-t^2)\cdot\big||x(t)|-|y(t)|\big|}{(2+|x(t)|)(2+|y(t)|)} \le$$

$$\le \max_{t\in[-1;1]}(3-t^2)\cdot\max_{t\in[-1;1]}\frac{1}{(2+|x(t)|)(2+|y(t)|)}\cdot\max_{t\in[-1;1]}|x(t)-y(t)| \le \frac{3}{4}\rho_{C[-1;1]}(x,y).$$

В этой цепочке соотношений использовали неравенства $\left|\,|a|-|b|\,\right| \le |a-b|$, $\dfrac{1}{(2+|a|)(2+|b|)} \le \dfrac{1}{4}$.

В итоге, получаем оценку

$$\rho_{C[-1;1]}(\Phi[x],\Phi[y]) \ \le \ \frac{3}{4}\rho_{C[-1;1]}(x,y).$$

Приходим к выводу, что оператор Φ сжимающий с коэффициентом сжатия $\alpha = \dfrac{3}{4}$.

B. Обратимся к достаточному признаку сжимающего оператора в пространстве непрерывных функций (см. конспект лекций, § 5, пункт 5.3).

Обозначим $\Phi[x] = \varphi(t,|x(t)|)$, где $\varphi(t,u) = \dfrac{3-t^2}{2+u} - \arcsin t$. Очевидно, что функция двух переменных $\varphi(t,u)$ непрерывна на множестве $[-1;1]\times[0;+\infty)$, непрерывно дифференцируема по переменной u, причем при всех $(t,u)\in[-1;1]\times[0;+\infty)$ справедлива оценка

$$|\varphi'_u(t,u)| \ = \ \frac{3-t^2}{(2+u)^2} \ \le \ \frac{3}{4} \ < \ 1.$$

Значит, оператор Φ сжимающий с коэффициентом сжатия $\alpha = \dfrac{3}{4}$.

12. Дано нелинейное уравнение в пространстве непрерывных функций $C[a;b]$.

A. Используя принцип сжимающих операторов, доказать, что данное уравнение имеет единственное решение $x(t) \in C[a;b]$.

B. Методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с точностью $\varepsilon = 0.01$, используя априорную оценку числа итераций. В качестве ответа предъявить график приближенного решения.

Для вычислений и построения графика использовать математические пакеты.

1. $x(t) = \dfrac{2}{\exp(1+|x(t)|)} + \cos 2t, \quad [a;b] = [-5;5]$
2. $x(t) - \dfrac{t^2}{|x(t)|+3} = \sin 4t, \quad [a;b] = \left[-\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right]$
3. $\dfrac{t}{2}\sqrt{1+x^2(t)} - x(t) = \cos 10t, \quad [a;b] = [-1;1]$
4. $\dfrac{t^2-1}{2} arctg|x(t)| + t = x(t), \quad [a;b] = \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$
5. $x(t) - \sin^2\dfrac{x(t)}{\pi} = t, \quad [a;b] = [-4\pi;4\pi]$
6. $t^2\cos\dfrac{x(t)}{2\pi} = \sin 7t + x(t), \quad [a;b] = \left[-\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$
7. $\dfrac{4\sin x(t)}{t+5} - t = x(t), \quad [a;b] = [0;7]$

8. $x(t)-\dfrac{2}{x^2(t)+2}=t, \quad [a;b]=[-2;2]$

9. $x(t)+t\cos\dfrac{x(t)}{5}=\cos 4t, \quad [a;b]=[-\pi;\pi]$

10. $\dfrac{3}{4}arctg|x(t)|-x(t)=t+1, \quad [a;b]=[-2;2]$

11. $x(t)-(t+1)\cos\dfrac{x(t)}{6}=\sin 3t, \quad [a;b]=[-\pi;\pi]$

12. $\dfrac{3}{4}\exp(-|x(t)|)+\cos t=x(t), \quad [a;b]=[-5;5]$

13. $t^2\sin\dfrac{x(t)}{5\pi}+\cos 5t=x(t), \quad [a;b]=[-\pi;\pi]$

14. $x(t)+3\sqrt[4]{1+|x(t)|}=\sqrt{t+1}, \quad [a;b]=[-1;15]$

15. $\dfrac{t}{|x(t)|+1}-\sin 15t=x(t), \quad [a;b]=\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$

16. $x(t)-\cos 6t=\dfrac{t^2+1}{2+|x(t)|}, \quad [a;b]=[-1;1]$

17. $\sqrt{t}-x(t)=\dfrac{6}{|x(t)|+3}, \quad [a;b]=[0;8]$

18. $t\cdot arctg|x(t)|+x(t)=t^2, \quad [a;b]=\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$

19. $t\sqrt{2+|x(t)|}=t^2+x(t), \quad [a;b]=[-1;2]$

20. $\dfrac{\cos x(t)}{t+2}+\sin^2 t=x(t), \quad [a;b]=[0;13]$

Образец решения

$$x(t)+t^2=\frac{7}{4}\sqrt{1+|x(t)|}, \quad [a;b]=[-3;3]$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов и метод простых итераций, изложенные в §4, §5 конспекта лекций.

А. Используя принцип сжимающих операторов, докажем, что данное уравнение имеет единственное решение $x(t)\in C[-3;3]$.

Представим уравнение следующим образом:

$$\frac{7}{4}\sqrt{1+|x(t)|}-t^2=x(t). \tag{1}$$

Рассмотрим оператор

$$\Phi: C[-3;3]\to C[-3;3], \quad \Phi[x]=\frac{7}{4}\sqrt{1+|x(t)|}-t^2.$$

Уравнение (1) имеет вид $\Phi[x]=x$, его решение – неподвижная точка оператора Φ.
Докажем, что оператор Φ сжимающий, используя достаточный признак (см. конспект лекций, § 5, пункт 5.3). Обозначим $\Phi[x]=\varphi(t,|x(t)|)$, где $\varphi(t,u)=\dfrac{7}{4}\sqrt{1+u}-t^2$. Очевидно, что

функция двух переменных $\varphi(t,u)$ непрерывна на множестве $[-3;3]\times[0;+\infty)$, непрерывно дифференцируема по переменной u, причем при всех $(t,u)\in[-3;3]\times[0;+\infty)$ справедлива оценка

$$|\varphi'_u(t,u)| \;=\; \frac{7}{8\sqrt{1+u}} \;\le\; \frac{7}{8} \;<\; 1.$$

Отсюда следует, что оператор Φ сжимающий с коэффициентом сжатия $\alpha=\frac{7}{8}$. Согласно принципу сжимающих операторов Φ имеет единственную неподвижную точку $x(t)\in C[-3;3]$, которая и является решением уравнения (1).

B. Методом простых итераций найдем приближенное решение уравнения (1) с точностью $\varepsilon=0.01$ и построим его график. Процесс вычислений организуем с помощью априорной оценки числа итераций.

Схема действия метода простых итераций, использование априорной оценки описаны в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n=\Phi[x_{n-1}]$. В данном случае

$$x_n(t)=\frac{7}{4}\sqrt{1+|x_{n-1}(t)|}-t^2. \tag{2}$$

Выбираем произвольным образом начальное приближение, например $x_0(t)=-t^2$, и вычисляем первую итерацию $x_1(t)=\frac{7}{4}\sqrt{1+t^2}-t^2$. Априорную оценку N_{apr} числа итераций находим по формуле

$$N_{apr}=\left[\log_{\alpha}\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho_{C[-3;3]}(x_0,x_1)}\right]+1.$$

В данном случае

$$\varepsilon=0.01,\quad \alpha=\frac{7}{8},$$

$$\rho_{C[-3;3]}(x_0,x_1) \;=\; \max_{t\in[-3;3]}|x_0(t)-x_1(t)| \;=$$

$$=\;\frac{7}{4}\max_{t\in[-3;3]}\sqrt{1+t^2}\;=\;\frac{7\sqrt{10}}{4}.$$

Отсюда $N_{apr}=63$. Следовательно, для вычисления приближенного решения с заданной точностью $\varepsilon=0.01$ достаточно провести 63 итерации:

$$x_1(t)=\frac{7}{4}\sqrt{1+t^2}-t^2,$$

$$x_2(t)=\frac{7}{4}\sqrt{1+\left|\frac{7}{4}\sqrt{1+t^2}-t^2\right|}-t^2,$$

$$x_3(t)=\frac{7}{4}\sqrt{1+\left|\frac{7}{4}\sqrt{1+\left|\frac{7}{4}\sqrt{1+t^2}-t^2\right|}-t^2\right|}-t^2 \text{ и т.д.}$$

Поскольку аналитическая запись функции $x_{63}(t)$ потребует слишком много места, то в качестве ответа построим ее график (рис. 4).

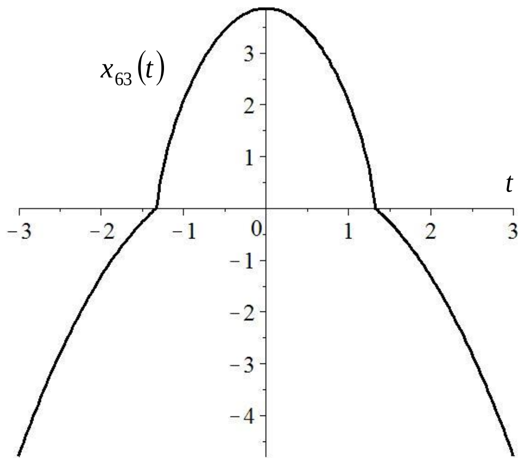

Рис. 4

13. В пространстве $C[0;1]$ дано интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, содержащее числовой параметр $\lambda > 0$.

A. Определить, при каких значениях параметра λ к этому уравнению применим принцип сжимающих операторов.

B. Взять любое подходящее значение λ и методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с указанной точностью ε, используя априорную оценку числа итераций.

C. Найти точное решение этого уравнения и сравнить с приближенным.

Для вычислений использовать математические пакеты.

1. $x(t)=\lambda\int_0^1 (1-ts)x(s)ds+t, \quad \varepsilon=10^{-3}$
2. $x(t)=\lambda\int_0^1 \sin(\pi(t-s))x(s)ds+1, \quad \varepsilon=10^{-4}$
3. $x(t)=\lambda\int_0^1 tsx(s)ds+\frac{5}{6}t, \quad \varepsilon=10^{-5}$
4. $x(t)=\lambda\int_0^1 (t+s)^2 x(s)ds-2t^2, \quad \varepsilon=10^{-3}$
5. $x(t)=\lambda\int_0^1 (t-s)x(s)ds+\frac{t}{2}, \quad \varepsilon=10^{-5}$
6. $x(t)=\lambda\int_0^1 \sin\frac{\pi(t+s)}{2}x(s)ds-1, \quad \varepsilon=10^{-3}$
7. $x(t)=\lambda\int_0^1 e^{t+s}x(s)ds+2, \quad \varepsilon=10^{-3}$
8. $x(t)=\lambda\int_0^1 (2t-s)x(s)ds+\frac{t}{4}, \quad \varepsilon=10^{-4}$
9. $x(t)=\lambda\int_0^1 s\sqrt{t}x(s)ds+\sqrt{t}+1, \quad \varepsilon=10^{-2}$
10. $x(t)=\lambda\int_0^1 t^2s^2x(s)ds+t^3, \quad \varepsilon=10^{-4}$
11. $x(t)=\lambda\int_0^1 ts^2x(s)ds-t^2, \quad \varepsilon=10^{-4}$
12. $x(t)=\lambda\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds+1, \quad \varepsilon=10^{-2}$
13. $x(t)=\lambda\int_0^1 (t+s)x(s)ds+t^2, \quad \varepsilon=10^{-2}$
14. $x(t)=\lambda\int_0^1 (t^2+s^2)x(s)ds-2t, \quad \varepsilon=10^{-4}$
15. $x(t)=\lambda\int_0^1 s(t+1)x(s)ds+t^3, \quad \varepsilon=10^{-3}$
16. $x(t)=\lambda\int_0^1 (\sqrt{t}-s)x(s)ds+\frac{1}{2}, \quad \varepsilon=10^{-2}$

17. $x(t)=\lambda\int\limits_0^1 \left(s^2-t^2\right)x(s)ds-t,\quad \varepsilon=10^{-5}$

18. $x(t)=\lambda\int\limits_0^1 \cos\frac{\pi(t-s)}{2}x(s)ds+1,\quad \varepsilon=10^{-4}$

19. $x(t)=\lambda\int\limits_0^1 st^2x(s)ds+t,\quad \varepsilon=10^{-3}$

20. $x(t)=\lambda\int\limits_0^1 \left(t^2+s\right)x(s)ds+\frac{t^2}{2},\quad \varepsilon=10^{-3}$

Образец решения

$$x(t)=\lambda\int\limits_0^1 \left(t-s^2\right)x(s)ds+t^3+1,\quad \varepsilon=10^{-3} \tag{1}$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов и метод простых итераций, изложенные в §4, §5 конспекта лекций.

А. Найдем значения параметра λ, при которых к уравнению (1) применим принцип сжимающих операторов.

Рассмотрим интегральный оператор

$$\Phi : C[0;1]\to C[0;1],\quad \Phi[x]=\lambda\int\limits_0^1 \left(t-s^2\right)x(s)ds+t^3+1.$$

Функция $K(t,s)=\lambda\left(t-s^2\right)$ – ядро интегрального оператора. Уравнение (1) имеет вид $\Phi[x]=x$, его решение – неподвижная точка оператора Φ. Обратимся к достаточному признаку сжимающего оператора (см. конспект лекций, § 5, пункт 5.4). При условии

$$\alpha=\lambda\max_{t\in[0;1]}\int\limits_0^1 \left|t-s^2\right|ds<1 \tag{2}$$

оператор Φ сжимающий с коэффициентом сжатия α.

Необходимо вычислить $\int\limits_0^1 \left|t-s^2\right|ds.$ Выражение $t-s^2$ при $t,s\in[0;1]$ принимает как положительные, так и отрицательные значения:

$$-1\ \le\ t-s^2\ \le\ 1,$$
$$t-s^2\ge 0 \text{ при } 0\le s\le\sqrt{t},$$
$$t-s^2<0 \text{ при } \sqrt{t}<s\le 1.$$

Тогда $\int\limits_0^1 \left|t-s^2\right|ds\ =\ \int\limits_0^{\sqrt{t}} \left(t-s^2\right)ds+\int\limits_{\sqrt{t}}^1 \left(s^2-t\right)ds\ =\ \frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}.$

Находим максимум

$$\max_{t\in[0;1]}\left(\frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

Осталось выразить параметр λ из условия (2):

$$\alpha=\lambda\frac{2}{3}<1.$$

Таким образом, при $\lambda<\frac{3}{2}$ к уравнению (1) применим принцип сжимающих операторов: уравнение имеет единственное решение и можно использовать метод простых итераций для поиска приближенного решения.

B. Возьмем $\lambda = \frac{1}{2}$ и методом простых итераций найдем приближенное решение уравнения (1) с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, используя априорную оценку числа итераций.

Схема действия метода простых итераций, использование априорной оценки описаны в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. При $\lambda = \frac{1}{2}$ перед нами уравнение

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(t - s^2\right)x(s)ds + t^3 + 1. \qquad (3)$$

Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n = \Phi[x_{n-1}]$. В данном случае

$$x_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(t - s^2\right)x_{n-1}(s)ds + t^3 + 1.$$

Выбираем произвольным образом начальное приближение, например $x_0(t) = 1$, и вычисляем первую итерацию $x_1(t) = t^3 + \frac{1}{2}t + \frac{5}{6}$. Априорную оценку N_{apr} числа итераций находим по формуле

$$N_{apr} = \left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho_{C[0;1]}(x_0, x_1)}\right] + 1.$$

В данном случае

$$\varepsilon = 10^{-3}, \quad \alpha = \lambda\frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\rho_{C[0;1]}(x_0, x_1) = \max_{t\in[0;1]}\left|x_0(t) - x_1(t)\right| = \max_{t\in[0;1]}\left|t^3 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}\right| = \frac{4}{3}.$$

Отсюда $N_{apr} = 7$. Следовательно, для вычисления приближенного решения уравнения (3) с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ достаточно провести 7 итераций:

$$x_1(t) = t^3 + \frac{1}{2}t + \frac{5}{6},$$

$$x_2(t) = t^3 + \frac{2}{3}t + \frac{103}{144},$$

$$x_3(t) = t^3 + \frac{187}{288}t + \frac{617}{864},$$

$$\ldots$$

$$x_7(t) = t^3 + \frac{3848611}{5971968}t + \frac{25679455}{35831808}.$$

C. Найдем точное решение уравнения (3) и сравним его с приближенным.

Как отмечено в конспекте лекций, § 5, пункт 5.4, для интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром есть возможность найти точное решение. Уравнение (3) представим в форме

$$x(t) = t^3 + \frac{t}{2}\int_0^1 x(s)ds + 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 s^2 x(s)ds.$$

Отсюда ясно, что решение имеет вид

$$x(t)=t^3+c_1t+c_2,\quad c_1,c_2\in R, \tag{4}$$

$$c_1=\frac{1}{2}\int_0^1 x(s)ds,\quad c_2=1-\frac{1}{2}\int_0^1 s^2x(s)ds. \tag{5}$$

Чтобы найти значения коэффициентов c_1 и c_2, подставим представление (4) в формулы для коэффициентов (5):

$$c_1=\frac{1}{2}\int_0^1\left(s^3+c_1s+c_2\right)ds,\quad c_2=1-\frac{1}{2}\int_0^1 s^2\left(s^3+c_1s+c_2\right)ds.$$

После вычисления интегралов необходимо решить систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{1}{8}+\dfrac{c_1}{4}+\dfrac{c_2}{2}, \\ c_2=\dfrac{11}{12}-\dfrac{c_1}{8}-\dfrac{c_2}{6}. \end{cases}\quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{29}{45},\, c_2=\frac{43}{60}.$$

Итак, получили точное решение уравнения (3):

$$x(t)=t^3+\frac{29}{45}t+\frac{43}{60}.$$

Сравним его с приближенным решением $x_7(t)$ в метрике пространства $C[0;1]$:

$$\rho_{C[0;1]}(x,x_7)\ =\ \max_{t\in[0;1]}|x(t)-x_7(t)|\ =\ \frac{49}{35831808}\ \approx\ 0.0000014\ <\ 10^{-3}.$$

Таким образом, приближенное решение обладает требуемой точностью.

14. Дана задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

A. Найти точное решение задачи Коши.

B. Преобразовать задачу Коши к интегральному уравнению Вольтерры и методом простых итераций найти несколько первых приближений к точному решению. Проиллюстрировать графически сходимость приближенных решений к точному.

Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

1. $x'=x\cos t-\frac{1}{2}\sin 2t,\quad x(\pi)=-1$
2. $x'-x\sin t=\sin^3 t,\quad x(0)=e$
3. $x'+x=2e^{-t}\cos 4t,\quad x(0)=0$
4. $\frac{x'}{\cos t}-x=\cos^2 t,\quad x(\pi)=-1$
5. $x'=(2+x)\cos t,\quad x(0)=1$
6. $x'+x=t\sin^2 t,\quad x(0)=3$
7. $x'=(x+3\sin t)\cos t,\quad x(0)=3$
8. $x'+x=t\cos t,\quad x(0)=0$
9. $x'=(1+x)\sin t,\quad x(0)=\frac{1}{e}-1$
10. $x'-x\sin t=\sin 2t,\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
11. $x'+x=1+t\cos t,\quad x(-\pi)=1$
12. $x'+2x=e^t\sin t,\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$
13. $x'-x\cos t=\cos^3 t,\quad x(0)=-1$
14. $x'+x=t\sin t,\quad x(0)=-2$
15. $x'+(x+1)\sin t=\sin t\cos^2 t,\quad x(\pi)=-\frac{2}{e}$
16. $x'+\left(x+\sin^2 t\right)\sin t=0,\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$
17. $x'-x\cos t=-\sin 2t,\quad x(0)=3$
18. $x'+2x=t\sin t,\quad x(0)=4$
19. $x'=(x-\sin t)\cos t,\quad x(0)=2$
20. $x'+x=t\cos^2 t,\quad x(0)=0$

Образец решения

$$x' = x\cos t + \sin 2t, \quad x(0) = -1 \tag{1}$$

А. Найдем точное решение задачи Коши (1).

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка может быть решено методом Бернулли или методом вариации произвольной постоянной:

$$x(t) = e^{\sin t} - 2 - 2\sin t.$$

В. Преобразуем задачу Коши (1) к интегральному уравнению Вольтерры и применим к нему метод простых итераций для нахождения приближенных решений.

Порядок и цель преобразований изложены в конспекте лекций, §5, пункт 5.5.
Задача Коши (1) равносильна интегральному уравнению Вольтерры

$$x(t) = -1 + \int_0^t \left(x(s)\cos s + \sin 2s\right)ds.$$

После упрощения получаем уравнение следующего вида:

$$x(t) = \underbrace{\int_0^t \cos s \cdot x(s)ds - \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)}_{\Phi[x]} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi[x] = x.$$

К интегральному уравнению Вольтерры может быть применен метод простых итераций, схема действия которого описана в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n = \Phi[x_{n-1}]$. В данном случае

$$x_n(t) = \int_0^t \cos s \cdot x_{n-1}(s)ds - \frac{1}{2}(1 + \cos 2t).$$

Выберем произвольным образом начальное приближение, например $x_0(t) = t.$ Тогда

$$x_1(t) = -\frac{3}{2} + \cos t + t\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t,$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2} - \frac{7}{4}\sin t + \frac{3}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{12}\sin 3t \quad \text{и т.д..}$$

Формулы следующих итераций слишком громоздки, поэтому в качестве ответа построим графики точного решения и нескольких приближений. На каждом из рисунков 5 – 7 изображены график точного решения x и график одного из приближений x_n (пунктиром): x_5 (рис. 5), x_6 (рис. 6), x_7 (рис. 7).

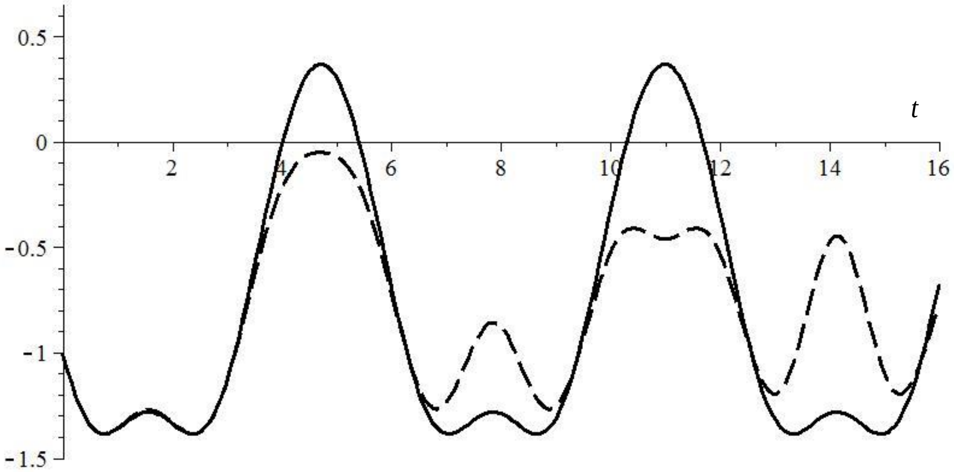

Рис. 5

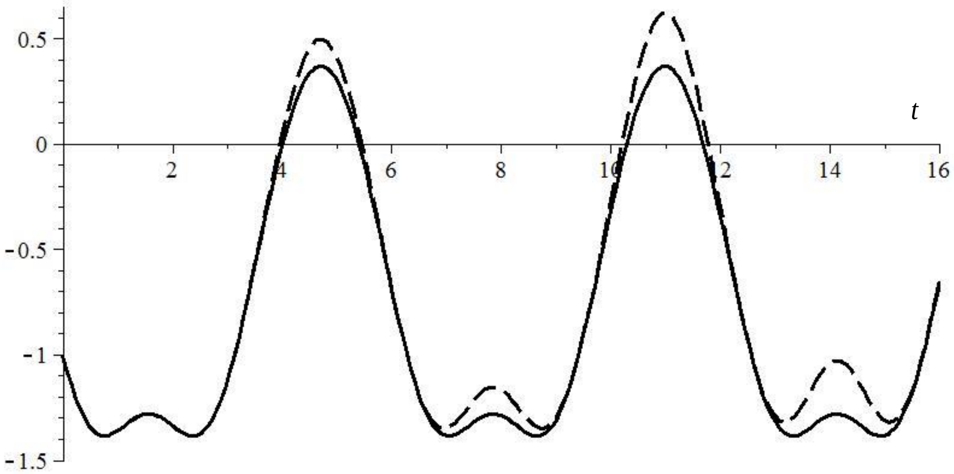

Рис. 6

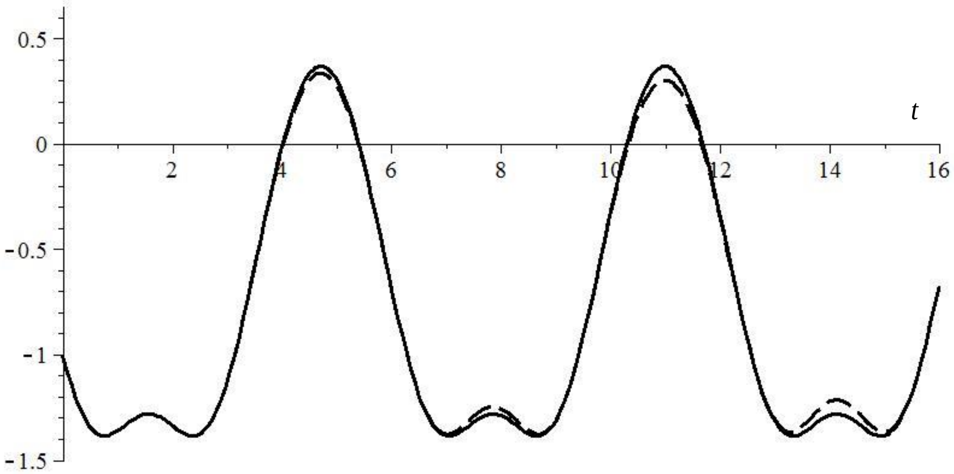

Рис. 7

Промежуток $[0;16]$ для построения графиков и порядки приближений выбраны так, чтобы наиболее наглядно проявилась сходимость приближенных решений к точному решению.