Лабораторная работа «Интерполяция»

Цель работы

Цель лабораторной работы - научиться применять формулы для приближенного вычисления значения функции в заданной точке.

Теоретическая часть

Основные понятия

Интерполяция — это способ приближенного или точного нахождения какой-либо величины по известным отдельным значениям этой же или других величин, связанных с ней.

Интерполяция использует значения некоторой функции, заданные в ряде точек, чтобы предсказать значения функции между ними.

Наиболее часто при решении практических задач используется интерполяция алгебраическими многочленами $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, что объясняется следующими причинами:

- любую функцию, имеющую n производных, можно разложить в степенной ряд;
- при полиномиальной интерполяции задача сводится к наиболее простому случаю – решению систем линейных уравнений;
- многие функции с достаточной для практики точностью могут быть представлены алгебраическими многочленами.

Пусть функция задана в виде таблицы, в которой указаны ее значения y_0, y_1, y_2, …, y_n соответственно при аргументах x_0, x_1, x_2, …, x_n, называемых узлами интерполяции. Тогда неизвестные a_0, a_1, a_2, …, a_n могут быть определены из следующей системы алгебраических уравнений:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n. \qquad (1)$$

$$x_0 \quad x_0^2 \ldots\ldots\ldots x_0^n$$

$$x_1 \quad x_1^2 \ldots\ldots\ldots x_1^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n \quad x_n^2 \ldots\ldots\ldots x_n^n \qquad (2)$$

Главный определитель этой системы (2) не равен нулю, если узлы интерполяции $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ различны. Это является признаком того, что система (1) имеет решение и притом единственное. А это означает, что существует единственный полином степени n, являющийся интерполяционным, т.е. удовлетворяющий условию:

$y(x_i) = y_i$ (где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Геометрически это означает, что через $n+1$ точку, расположенную на плоскости (x, y), можно провести единственную кривую, проходящую через все точки и представляющую собой многочлен n-ой степени. Например, если число точек равно 2, то через эти точки можно провести единственную прямую $y = a_0 + a_1 x$; если число точек равно 3, то через эти точки можно провести единственную параболу, представляющую собой многочлен второй степени: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Интерполяционный многочлен может быть получен без решения системы уравнений (1). Существуют различные формулы, позволяющие получить интерполяционный многочлен, не требующие решения системы уравнений [1].

В лабораторной работе рассмотрены некоторые методы получения интерполяционного многочлена, а именно:

1. Формулы Маклорена и Тейлора.
2. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
3. Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона.
4. Первая интерполяционная формула Гаусса.

Формулы Тейлора и Маклорена

Всякая функция *f(x)* имеющая внутри некоторого промежутка, содержащая точки x и a внутри себя, непрерывные производные до *(n+1)* порядка включительно, при всех значениях ***x*** внутри этого промежутка может быть разложена по степеням разности *(x-a)* в виде

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + к, \qquad (3)$$

где

x – переменная;

a - любое число;

n – степень;

$к$ - остаточный член формулы, имеет вид

$$к = (x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!},$$

где

ε - некоторое среднее значение, лежащее между a и x.

Это выражение (3) называется формулой Тейлора для многочлена $f(x)$ в окрестности точки a.

Формула Маклорена является частным случаем формулы Тейлора при $x_0=0$, принимает вид [2]

$$f(x) = f(0) = x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \cdots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \text{к}, \qquad (4)$$

Далее приведены формулы для различных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{C}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n) n!^2 4^n} x^n,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{C}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{C}$$

$$(1+x)^k = 1 + \frac{k}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Формула Лагранжа имеет вид:

$$y_n(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} +$$
$$\cdots y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}. \qquad (5)$$

Здесь:

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ - узлы интерполяции;

$y_0, y_1, \ldots, y_n$ – значения функции в этих узлах.

Покажем, что формула (5) является интерполяционным полиномом.

Пусть $x = x_0$, тогда все члены, кроме первого, обращаются в ноль, а числитель и знаменатель в первом члене сокращаются, в результате чего $y_n(x_0) = y_0$. При $x = x_1$ второй член выражения (5) равен y_1, а все остальные обращаются в ноль и т.д. таким образом, справедливыми являются следующие равенства: $y_n(x_0) = y_0, y_n(x_1) = y_1, \ldots, y_n(x_n) = y_n$.

Равенства означают, что формула (5) является интерполяционной. Из этой формулы также очевидно, что многочлен, полученный по формуле Лагранжа, будет степени не выше n [1].

Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ для равноотстоящих значений независимой переменной: $x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, n},$ где h - шаг интерполяции. Требуется подобрать полином $P_n(x)$ степени не выше n принимающий в точках x_i значения

$$P_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n} \tag{6}$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \tag{7}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i.$$

Условия (6) эквивалентны тому, что $\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0$ при $m = \overline{0,n}$.

Интерполяционный полином Ньютона имеет вид:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)^{[2]} + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)^{[n]} \quad (8)$$

Легко видеть, что полином (8) полностью удовлетворяет требованиям поставленной задачи. Действительно, во-первых, степень полинома $P_n(x)$ не выше n, во-вторых,

$$P_n(x_0) = y_0 \text{ и } P_n(x_k) = y_k, k = \overline{0,m}.$$

Заметим, что при $h \to 0$ формула (8) превращается в ряд Тейлора для функции y:

$$P_n(x) = y(x_0) + y^1(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{y^{(n)}(k_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Для практического использования интерполяционную формулу Ньютона (8) обычно записывают в несколько преобразованном виде. Для этого введём новую переменную q по формуле $q = \frac{x - x_0}{h}$; тогда получим:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (9)$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$ представляет собой число шагов, необходимых для достижения точки x, исходя из точки x_0. Это и есть окончательный вид интерполяционной формулы Ньютона.

Формулу (9) выгодно использовать для интерполирования функции $y = f(x)$ в окрестности начального значения x-x_0, где q мало по абсолютной величине.

Если дана неограниченная таблица значений функции y, то число n в интерполяционной формуле (9) может быть любым. Практически в этом случае число n выбирают так, чтобы разность $\Delta^n y_i$ была постоянной с заданной степенью точности. За начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента x.

Если таблица значений функции конечна, то число n ограничено, а именно: n не может быть больше числа значений функции y, уменьшенного на единицу.

Заметим, что при применении первой интерполяционной формулы Ньютона удобно пользоваться горизонтальной таблицей разностей, так как тогда нужные значения разностей функции находятся в соответствующей горизонтальной строке таблицы.

Вторая интерполяционная формула Ньютона

Первая интерполяционная формула Ньютона практически неудобна для интерполирования функции вблизи конца таблицы. В этом случае обычно применяют вторую интерполяционную формулу Ньютона.

Отметим, что если $x < x_0$ и x близко к x_0, то имеет смысл применять первую интерполяционную формулу Ньютона, если же $x > x_n$ и x близко к x_n, то в этом случае удобнее пользоваться второй интерполяционной формулой Ньютона. Иначе говоря, первая интерполяционная формула Ньютона используется обычно для *интерполирования вперед*, а вторая интерполяционная формула Ньютона – для *интерполирования назад*.

Вторая интерполяционная формула Ньютона имеет вид

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \cdots$$

$$+ \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{10}$$

Первая интерполяционная формула Гаусса

Пусть функция $y(x)$, представленная в виде таблицы, имеет $2n+1$ равностоящих узлов интерполирования:

$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$,

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const \qquad (i = -n, -(n-1), \dots, n-1)$,

h - постоянный шаг.

Для функции $y = f(x)$ известны ее значения в этих узлах

$$y_i = f(x_i) \qquad (i = 0, \pm 1, \dots \pm n).$$

Требуется построить полином $P(x)$ степени не выше $2n$ такой, что

$$P(x_i) = y_i \quad \text{при } i = 0, \pm 1, \dots \pm n.$$

Будем искать этот полином в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + a_4(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots$$

$$+a_{2n-1}\left(x - x_{-(n-1)}\right) \dots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) +$$

$$+a_{2n}\left(x - x_{-(n-1)}\right) \dots (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Вводя обобщенные степени, получим:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_{-1})^3 + a_4(x - x_{-1})^4 + \cdots$$
$$+ a_{2n-1}\left(x - x_{-(n-1)}\right)^{2n-1} + a_{2n}\left(x - x_{-(n-1)}\right)^{2n}. \qquad (11)$$

Учитывая, что $\Delta^k P(x_i) = \Delta^k y_i$ для всех соответствующих значений i и k получим

$a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)! h^{2n}}$, далее введя переменную $q = \frac{x - x_0}{h}$ и сделав соответствующую замену в формуле (11), получим первую интерполяционную формулу Гаусса:

$$P(x) = y_0 + \Delta y_0 + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^3}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)^4}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \cdots$$
$$+ \frac{(q+n-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)^{2n}}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}, \qquad (12)$$

где $x = x_0 + qh$ и $q^m = q(q-1) \dots [q-(m-1)]$,

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \dots$

$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i.$

Задания для лабораторной работы

1. Вычислить интерполяцию с помощью формул Тейлора и Маклорена для функций, представленных в таблице 1.
2. Построить с помощью интерполяционной формулы Лагранжа интерполяционный полином для функции $y = L(x)$, заданной в таблице 2.
3. Построить первую и вторую интерполяционные формулы Ньютона для сеточной функции у = P_n(x), заданной в таблице 2.
4. Построить первую интерполяционную формулу Гаусса для сеточной функции $y = P(x)$, заданной в таблице 3.

Таблица 1.

Варианты для вычисления интерполяции с помощью формул Тейлора и Маклорена

№	функция	С точностью
1	$\sqrt{e}$	0,0001
2	cos20°	0,0001
3	sin14°	0,0001
4	ln2	0,0001
5	cos9°	0,0001
6	$\sqrt{2}$	0,00001
7	$\sqrt[3]{27}$	0,00001
8	sin7°	0,0001
9	ln5	0,0001

Таблица 2.

Значения аргументов и функций для различных вариантов

№ варианта	Значения аргументов и функций				
		X_0	X_1	X_2	X_3
1	x_i	2	4	6	8
	y_i	1,1	1,5	1,7	1,9
2	x_i	0,1	0,4	0,7	1,0
	y_i	0,02	0,04	0,07	0,09
3	x_i	6	9	12	15
	y_i	1	2,5	4	5,5
4	x_i	5	7	9	11
	y_i	3,3	3,5	3,7	3,9
5	x_i	9,2	9,4	9,6	9,8
	y_i	1	2,5	6	7,5
6	x_i	13	15	17	19
	y_i	7	8	10	12
7	x_i	0,5	1,0	1,5	2,0
	y_i	0,1	0,16	0,25	0,4
8	x_i	2	5	8	11
	y_i	0,8	1,0	1,4	1,8
9	x_i	11	13	15	17
	y_i	4	9	10	10,5
10	x_i	0,2	0,4	0,6	0,8
	y_i	0,015	0,03	0,045	0,08

Таблица 3.

Значения аргументов и функций для построения первой интерполяционной формулы Гаусса

№ варианта	Значения аргументов и функций					
		X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
1	x_i	2	4	6	8	10
	y_i	1,1	1,5	1,3	1,4	1,0
2	x_i	0,1	0,4	0,7	1,0	1,3
	y_i	0,02	0,04	0,03	0,035	0,01
3	x_i	6	9	12	15	18
	y_i	1	2,5	1,5	2,0	0,5
4	x_i	5	7	9	11	13
	y_i	3,3	3,5	3,4	3,45	3,1
5	x_i	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0
	y_i	1	2,5	1,5	2,0	0,5
6	x_i	13	15	17	19	21
	y_i	7	8	7,5	7,8	6,5
7	x_i	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
	y_i	0,1	0,16	0,12	0,14	0,08
8	x_i	2	5	8	11	14
	y_i	0,8	1,0	0,9	0,95	0,2
9	x_i	11	13	15	17	19
	y_i	4	9	7	8	2
10	x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
	y_i	0,015	0,03	0,02	0,025	0,005

Порядок выполнения работы

1. Изучить формулы интерполяции.
2. Записать формулы таблично заданной функции.
3. Вычислить численное значение полинома в заданных точках, используя Excel или любую другую программу.
4. Сравнить методы, используемых для обработки экспериментальных данных.
5. Сделать выводы по работе.
6. Составить отчет.

Пример выполнения

Формула Тейлора и Маклорена

Формула Маклорена является частным случаем формулы Тейлора при x_0=0, принимает вид

$$f(x) = f(0) = x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \cdots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + R_n(x),$$

<u>Пример:</u> Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до 0.0001.

Для вычисления функции $\sqrt{e}$, запишем ряд Тейлора:

$$f(x) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + \wedge$$

Для достижения заданной точности достаточно взять четыре первых слагаемых:

$$f(x) = +1 + 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}0208 + 0{,}0026 = 1{,}6484$$

<u>Пример:</u> Вычислить ln 2 с точностью до 0.0001

Для вычисления запишем ряд Тейлора:

$$f(x) = -2*\left(\frac{1}{2*1-1}\right)*\left(\frac{1-2}{1+2}\right)^{2*1-1} - 2*\left(\frac{1}{2*2-1}\right)*\left(\frac{1-2}{1+2}\right)^{2*2-1} - 2$$

Для достижения заданной точности достаточно взять четыре первых слагаемых:

$$f(x) = 0.6666 + 0.02469 + 0.001646 + 0.00013064 = 0.6931$$

По формуле разложения функция cos имеет вид:

$Cos20^0 = cos\frac{\pi}{9} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^6}{6!} + \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^8}{8!} + \Lambda$

Для достижения заданной точности достаточно взять четыре первых слагаемых:

$Cos20^0$=1-0,060905+0,000613-0,00000251=0,93999

Интерполяционный многочлен Логранжа

Для построения интерполяционного полинома Логранжа $y = L(x)$, берем исходные данные из таблицы 2.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	2	4	6	8
y_i	1,1	1,5	1,7	1,9

Для построения полинома для данной функции используется формула :

$$l(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left(\frac{x-x_0}{x_i-x_0}\right)*\left(\frac{x-x_1}{x_i-x_1}\right)\dots\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)**\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\dots\left(\frac{x-x_n}{x_i-x_n}\right)$$

Тогда интерполяционный полином Лагранжи будет иметь вид:

$$L(x) = \frac{(x-4)(x-6)(x-8)}{(2-4)(2-6)(2-8)} * 1,1 +$$

$$+\frac{(x-2)(x-6)(x-8)}{(4-2)(4-6)(4-8)} * 1,5 +$$

$$+\frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(6-2)(6-4)(6-8)}*1{,}7+$$

$$+\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(8-2)(8-4)(8-6)}*1{,}9=\ \frac{(x^3-18x^2+104x-192)}{-48}*1{,}1+$$

$$+\frac{(x^3-16x^2+76x-96)}{16}*1{,}5+$$

$$+\frac{(x^3-14x^2+56x-64)}{-16}*1{,}7+\frac{(x^3-12x^2+44x-48)}{48}*1{,}9=$$

$$=-0.0416667\,x^3+0.75\,x^2-4.23333\,x+9.1$$

Первая интерполяционная формула Ньютона

Построить первую и вторую интерполяционные формулы Ньютона для сеточной функции y = P_n(x), заданной в таблице 2, с принятым шагом 2.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	2	4	6	8
y	1,1	1,5	1,7	1,9

Составим таблицу 4 конечных разностей функции.

Для вычисления Δy, Δ^2y , Δ^3y необходимо $\Delta y=y_1-y_2$; $\Delta^2 y=\Delta y_1-\Delta y_2$; $\Delta^3 y=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_2$

Таблица 4

№ п\п	x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y
1	2	1,1	0,4	-0,2	0,2
2	4	1,5	0,2	0	
3	6	1,7	0,2		
4	8	1,9			

По формуле составим полином, приняв x_0=2, y_0=1,1, n=3

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Тогда:

$$P_n(x) = 1{,}1 + 0{,}4q - \frac{0{,}2q(q-1)}{2!} + \frac{0.2(q(q-1)(q-2)}{3!}$$
$$= 1.1 + 0.4q - 0.1(q-1) + 0.033(q(q-1)(q-2)$$

где $q = \frac{x-1}{2} = 0{,}5(x-1)$

Вторая интерполяционная формула Ньютона

Задание: Приняв шаг *2*, построить интерполяционный полином.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	2	4	6	8
y	1,1	1,5	1,7	1,9

Взяв значения y из таблицы 4 , по формуле составим полином, приняв x_0=8, y_0=1,9, n=3

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Тогда:

$$P_n(x) = 1{,}9 + 0{,}2q + \frac{0q(q-1)}{2!} + \frac{0.2(q(q-1)(q-2)}{3!}$$
$$= 1.1 + 0.2q + 0.033(q(q-1)(q-2)$$

где $q = \frac{x-1}{2} = 0{,}5(x-1)$

Первая интерполяционная формула Гаусса

Первая интерполяционная формула Гаусса имеет вид:

$G_n(x) =$

$$= y_0 + \Delta y_0 + \frac{q^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots$$

$$+ \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \qquad (6)$$

где $q = \frac{(x-x_0)}{h}$;

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$ (*i* = -*n*, -(*n*-*1*),…,*n*-*1*) = *const* - шаг таблицы, является величиной постоянной.

$x = x_0 + qh$

$q^{[m]} = q(q-1) \ldots [q-(m-1)]$

$\Delta^2 y_{-1}$ - центральные разности между значениями функции $P_n(x)$.

Для построения сеточной функции $y = P(x)$, возьмем сходные данные из таблицы 3.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	1,1	1,5	1,3	1,4	1,0

Составим таблицу для данной функции, содержащую центральные разности

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
$x_{-2} = 2$	$y_{-2} = 1,1$				
		$\Delta y_{-2} = 0,4$			
$x_{-1} = 4$	$y_{-1} = 1,5$		$\Delta^2 y_{-2} = -0,6$		
		$\Delta y_{-1} = -0,2$		$\Delta^3 y_{-2} = 1,0$	
$x_0 = 6$	$y_0 = 1,3$		$\Delta^2 y_{-1} = 0,4$		$\Delta^4 y_{-2} = -2,2$
		$\Delta y_0 = 0,2$		$\Delta^3 y_{-1} = -1,2$	
$x_1 = 8$	$y_1 = 1,4$		$\Delta^2 y_0 = -0,8$		

		Δy_1 = -0,4			
x_2 = 10	y_2 = 1,0				

Определим вспомогательную переменную $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-6}{2} = 2(x-6)$.

Построим полином:

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$

$$+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} =$$

$$= 1{,}3 + 0{,}2q + \frac{q^2 - q}{2}\cdot 0{,}4 + \frac{(q^2-1)q}{6}\cdot(-1{,}2) + \frac{(q^2-1)(q^2-2q)}{24}\cdot(-2{,}2) =$$

$$= 1{,}3 + 0{,}2q + 0{,}2q^2 - 0{,}2q - 0{,}2(q^3 - q) - 0{,}09(q^4 - q^2 - 2q^3 + 2q) =$$

$$= -0{,}09q^4 - 0.02q^3 + 0.29q^2 + 0.02q + 1.3 = -0.09 * 2(x-6)^4 -$$

$$-0.02 * 2(x-6)^3 + 0.29 * 2(x-6)^2 +$$

$$+0.02 * 2(x-6) + 1.3 =$$

$$= -0{,}18x^4 + 4{,}28x^3 - 37{,}56x^2 + 148{,}36x - 203{,}28$$

Ответ: интерполяционный полином для данной функции, построенный с помощью первой интерполяционной формулы Гаусса имеет вид:

$G_4(x) = -0{,}18x^4 + 4{,}28x^3 - 37{,}56x^2 + 148{,}36x - 203{,}28$

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Задание.
4. Расчетная часть.
5. Вывод.

Контрольные вопросы

1. Что обозначает термин интерполяция?
2. Какие существуют методы интерполяции?
3. Напишите частный случай формулы Тейлора.
4. Что называется интерполяционным многочленом Лагранжа?
5. Напишите первую интерполяционную формулу Ньютона.
6. Какую интерполяционную формулу Ньютона необходимо применять в начале таблично заданной функции, какую – в конце?
7. Напишите вторую интерполяционную формулу Ньютона.
8. Интерполяционная формула Гаусса. Когда она применяется?

Список литературы

1. Половко, А.М. Интерполяция. Методы компьютерных технологии их реализации / П.Н. Бутусов – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. - 320с.
2. Высшая математика: методические указания по выполнению контрольной работы «Дифференциальные уравнения и ряды» для студентов очной формы обучения / сост.: И.Э. Апакова, О.Е. Куляхтина: З.Л. Абжандадзе: М.Э. Юдовин: Н.Л. Белая: ВШТЭ СПбГУПТД. - СПб. 2016. - 40 с.

Ответы на контрольные вопросы

9. Что обозначает термин интерполяция?

Интерполяция — это способ приближенного или точного нахождения какой-либо величины по известным отдельным значениям этой же или других величин, связанных с ней.

10. Какие существуют методы интерполяции?

- Формулы Маклорена и Тейлора.
- Интерполяционный многочлен Логранжа.
- Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона.
- Первая интерполяционная формула Гаусса.

11. Напишите частный случай формулы Тейлора.

Формула Маклорена является частным случаем формулы Тейлора при x_0=0,принимает вид

$$f(x) = f(0) = x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \cdots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + R_n(x),$$

12. Что называется интерполяционным многочленом Лагранжа?

Интерполяционный многочлен Лагранжа — многочлен минимальной степени, принимающий данные значения в данном наборе точек. Для $n+1$ пар чисел $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, где все x_j различны, существует единственный многочлен $L(x)$ степени не более n, для которого $L(x_j) = y_j$. В простейшем случае $(n=1)$ — это линейный многочлен, график которого — прямая, проходящая через две заданные точки.

13. Напишите первую интерполяционную формулу Ньютона.

$$P_n(X) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! \cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

14. Какую интерполяционную формулу Ньютона необходимо применять в начале таблично заданной функции, какую – в конце?

$$P_n(X) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! \cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

- интерполяционный полиномом Ньютона для интерполяции в начале таблицы (интерполирование «вперед») или первым полиномом Ньютона.

Формула Ньютона применяется для интерполяции и экстраполяции в конце таблицы:

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

15. Напишите вторую интерполяционную формулу Ньютона.

Вторая формула Ньютона применяется для интерполяции и экстраполяции в конце таблицы:

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

16. Интерполяционные формулы Гаусса. Когда они применяются?

Первая интерполяционная формула Гаусса имеет вид:

$$G_n(x) =$$
$$= y_0 + \Delta y_0 + \frac{q^{[2]}}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[3]}}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)^{[4]}}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots$$
$$+ \frac{(q+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)^{[2n]}}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

где $q = \frac{(x-x_0)}{h}$;

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$ (i = -*n*, -(*n*-*1*),…,*n*-*1*) = *const* - шаг таблицы, является величиной постоянной.

$x = x_0 + qh$

$q^{[m]} = q(q-1)\ldots[q-(m-1)]$

$\Delta^2 y_{-1}$ - центральные разности между значениями функции $P_n(x)$.

Преимущество интерполяционной формулы Гаусса состоит в том, что указанный выбор узлов интерполяции обеспечивает наилучшую оценку остаточного члена по сравнению с любым другим выбором, а упорядоченность узлов по мере их близости к точке интерполяции уменьшает вычислительную погрешность интерполирования