ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

Т.И. Ушакова

Задание для контрольной работы
по дисциплине
«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» (Б1.О.10)

для направления подготовки

13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника
по профилю
«Промышленная теплоэнергетика»

Форма обучения – заочная

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ВЕКТОРЫ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Санкт-Петербург 2020

Контрольная работа № 1 (Часть 1) состоит из 11 задач. Контрольная работа допускается к защите, если она содержит пять (и более) полностью и правильно решенных задач. Контрольная работа не проверяется и не рецензируется, если в ней содержится менее пяти решенных задач.

Задача 1.

1.01-1.10. Вычислить определители.

1.01. а) $\begin{vmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 1/2 & 4/9 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

1.02. а) $\begin{vmatrix} 2/5 & 3/10 \\ 1/3 & 5/2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

1.03. а) $\begin{vmatrix} 2/5 & 3/4 \\ 4/15 & 1/7 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

1.04. а) $\begin{vmatrix} 3/4 & 2/7 \\ 1/4 & 1/21 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

1.05. а) $\begin{vmatrix} 1/6 & 2/9 \\ 3/4 & 5/3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

1.06. а) $\begin{vmatrix} 3/8 & 1/4 \\ 1/2 & 2/5 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

1.07. а) $\begin{vmatrix} 3/7 & 4/3 \\ 2/9 & 14/3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

1.08. а) $\begin{vmatrix} 5/6 & 1/2 \\ 1/2 & 3/4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

1.09. а) $\begin{vmatrix} 1/15 & 3/4 \\ 2/3 & 5/2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

1.10. а) $\begin{vmatrix} 2/13 & 5/2 \\ 4/15 & 26/3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

Задача 2.

1.11-1.20. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера. Сделать проверку.

1.11. $\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ 1.12. $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ 1.14. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ 1.16. $\begin{cases} -x + 3y = 6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} -3x + y = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$

Задача 3.

1.21-1.30. Решить систему линейных уравнений тремя методами:

а) по формулам Крамера;

б) методом Гаусса;

в) с помощью обратной матрицы.

1.21. $\begin{cases} -4x_1 - 5x_2 - 16x_3 = 15 \\ -2x_1 - x_2 = 11 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 17 \end{cases}$ 1.22. $\begin{cases} 12x_1 + 2x_3 = -2 \\ 8x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -20x_1 + 4x_2 - x_3 = -11 \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13 \end{cases}$ 1.24. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -7 \end{cases}$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ -5x_1 - 8x_3 = 33 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 - 5x_3 = 10 \\ -3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 28 \end{cases}$$

1.25. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 = -11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$ 1.26. $\begin{cases} -5x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -1 \\ -15x_1 - 12x_2 + 9x_3 = -1 \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7 \\ -4x_1 + 6x_3 = -4 \\ 10x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$ 1.28. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = -1 \\ 3x_1 + 8x_2 = -6 \\ -9x_1 + 2x_2 - 9x_3 = -8 \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} -3x_1 - x_2 - 15x_3 = -22 \\ -6x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -6 \\ 6x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$ 1.30. $\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 32 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -15 \\ -2x_1 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

Задача 4.

1.31-1.40. Исследовать (по теореме Кронекера-Капелли) совместность и решить систему линейных уравнений.

1.31. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ 1.32. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$

1.33. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ 1.34. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7 \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25 \end{cases}$

1.35. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ 1.36 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$

1.37, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$ 1.38. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$

1.39. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ 1.40. $\begin{matrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{matrix}$

Задача 5.

1.41-1.50. При каких A и B система имеет бесчисленное множество решений? Найти эти решения.

1.41. $\begin{cases} 3x+7y+Az=6 \\ 6x+8y-4z=B \\ 12x+6y-8z=13 \end{cases}$ 1.42. $\begin{cases} 4x+3z=4 \\ Ax+5y+12z=11 \\ 3x+5y+6z=B \end{cases}$

1.43. $\begin{cases} 7x+8y+Az=-5 \\ 8x+7y+8z=-5 \\ 2x+y+2z=B \end{cases}$ 1.44. $\begin{cases} 5x-11y-3z=B \\ x+y+5z=-3 \\ 5x+Ay+11z=-5 \end{cases}$

1.45. $\begin{cases} x+3y+Az=3 \\ 5x-6y-7z=B \\ 7x-12y-5z=-12 \end{cases}$ 1.46. $\begin{cases} 5x-3y-5z=5 \\ 12x-7y-13z=B \\ 4x-3y+Az=1 \end{cases}$

1.47. $\begin{cases} x+z=4 \\ 7x+5y-3z=B \\ 8x+5y+Az=-3 \end{cases}$ 1.48. $\begin{cases} 5x+6y=-6 \\ Ax+9y+3z=B \\ 7y+5z=3 \end{cases}$

1.49. $\begin{cases} 13x-3y+4z=3 \\ 12x-7y+z=B \\ 7x+6y+Az=-6 \end{cases}$ 1.50. $\begin{cases} x+4y-5z=-1 \\ 3x+2y-z=B \\ 4x+y+Az=-7 \end{cases}$

Задача 6.

1.51. Используя матричные операции, выразить z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3, x_4.

$$\begin{cases} y_1=2z_1-z_2+z_3 \\ y_2=-4z_1+z_2-3z_3 \\ y_3=-z_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1=-x_1+x_2-x_3+2x_4 \\ y_2=x_1+3x_2-3x_3+4x_4 \\ y_3=2x_2-x_3+3x_4 \end{cases}$$

1.52. Используя матричные операции, выразить y_1, y_2, y_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1=5y_1-2y_2+2y_3 \\ x_2=6y_1-y_2+3y_3 \\ x_3=5y_1-3y_2 \\ x_4=6y_1-2y_2+2y_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1=-4x_1+3x_2+3x_3-2x_4 \\ z_2=-7x_1+6x_2+5x_3-4x_4 \\ z_3=-x_2+x_4 \end{cases}$$

1.53. Используя матричные операции, выразить z_1, z_2, z_3 через y_1, y_2, y_3.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 - y_3 \\ x_3 = y_1 + 2y_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -z_1 + z_3 \\ x_2 = -7z_1 - 2z_2 - 5z_3 \\ x_3 = z_2 \end{cases}$$

1.54. Используя матричные операции, выразить x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3.

$$\begin{cases} y_1 = -z_1 - z_3 \\ y_2 = -7z_1 - 6z_2 - 5z_3 - 4z_4 \\ y_3 = -3z_1 - 2z_2 - 2z_3 - z_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ z_2 = -3x_1 + x_2 - 5x_3 \\ z_3 = -5x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ z_4 = 6x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

1.55. Используя матричные операции, выразить y_1, y_2, y_3 через x_1, x_2, x_3.

$$\begin{cases} z_1 = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ z_2 = -7x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ z_3 = 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 3y_1 + y_3 \\ z_2 = -4y_1 - y_2 - 2y_3 \\ z_3 = 7y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

1.56. Используя матричные операции, выразить x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3,

$$\begin{cases} z_1 = -7y_1 - 2y_2 + 5y_3 \\ z_2 = -y_1 + y_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -3x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 - 5x_2 - 4x_3 \end{cases}$$

1.57. Используя матричные операции, выразить y_1, y_2, y_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} x_1 = 3z_1 \\ x_2 = 2z_1 - z_2 + z_3 \\ x_3 = 3z_1 + z_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -4y_1 - y_2 - 3y_3 \\ x_2 = -y_1 - y_3 \\ x_3 = -3y_1 - 2y_3 \end{cases}$$

1.58. Используя матричные операции, выразить x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} y_1 = 4z_1 - 2y_3 \\ y_2 = 5z_1 + z_2 - 3y_3 \\ y_3 = 2z_1 - 2z_2 + y_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -x_1 + x_3 \\ y_2 = -4x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y_3 = 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 \end{cases}$$

1.59. Используя матричные операции, выразить x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

$$\begin{cases} z_1 = -y_1 + y_3 \\ z_2 = -4y_1 + 3y_2 + 3y_3 - 2y_4 \\ z_3 = 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 + 3y_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ y_2 = 7x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ y_3 = 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ y_4 = 5x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

1.60. Используя матричные операции, выразить y_1, y_2, y_3 через z_1, z_2, z_3, z_4.

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = -4y_1 + y_2 - 3y_3 \\ x_3 = -y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -z_1 + z_2 - z_3 + 2z_4 \\ x_2 = z_1 + 3z_2 - 3z_3 + 4z_4 \\ x_3 = 2z_2 - z_3 + 3z_4 \end{cases}$$

Задача 7.

1.61-1.70. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей А.

1.61. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.62. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

1.63. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

1.64. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1.65. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

1.66. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1.67. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 2 \end{pmatrix}$

1.68. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

1.69. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

1.70. $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 8.

1.71-1.80. Завод производит три вида продукции A, B, C в трех цехах I, II, III. В таблице приведены коэффициенты распределения прибыли между цехами по разным видам продукции.

завод \ товар	A	B	C
I	0,4	0,5	0,6
II	0,2	0,3	0,1
III	0,4	0,2	0,3

Распределение всей прибыли завода по сезонам в течение двух лет представлено в условных единицах в таблицах «Год 1», «Год 2». Проводя расчеты в матричной форме, определить прибыль каждого цеха по сезонам. Ответ представить в виде таблицы.

1.71.

Год 1

сезон \ товар	A	B	C
зима	50	10	20
весна	60	30	10
лето	50	10	14
осень	10	50	60

Год 2

сезон \ товар	A	B	C
зима	10	20	40
весна	20	30	60
лето	70	80	100
осень	10	30	40

1.72.

Год 1

сезон \ товар	A	B	C
зима	40	60	10
весна	20	70	40
лето	100	30	50
осень	50	20	30

Год 2

сезон \ товар	A	B	C
зима	50	40	20
весна	60	30	60
лето	50	70	80
осень	80	90	50

1.73.

Год 1

сезон \ товар	A	B	C
зима	80	70	50
весна	20	40	60
лето	70	20	70
осень	30	100	80

Год 2

сезон \ товар	A	B	C
зима	20	100	50
весна	80	90	70
лето	70	60	30
осень	60	90	70

1.74.

Год 1

сезон \ товар	A	B	C
зима	60	20	0
весна	10	50	40
лето	50	60	90
осень	70	30	100

Год 2

сезон \ товар	A	B	C
зима	30	20	40
весна	60	40	50
лето	60	80	30
осень	70	100	70

1.75.

Год 1

сезон \ товар	A	B	C

Год 2

сезон \ товар	A	B	C

зима	40	30	20
весна	90	80	40
лето	20	60	50
осень	80	50	100

зима	70	100	80
весна	100	20	40
лето	20	60	50
осень	30	70	60

1.76.

Год 1

товар / сезон	A	B	C
зима	70	60	80
весна	90	50	70
лето	20	70	60
осень	100	60	100

Год 2

товар / сезон	A	B	C
зима	90	70	30
весна	50	100	90
лето	40	80	60
осень	30	60	80

1.77.

Год 1

товар / сезон	A	B	C
зима	100	80	30
весна	40	90	60
лето	50	70	200
осень	60	20	170

Год 2

товар / сезон	A	B	C
зима	20	30	100
весна	10	80	190
лето	60	90	30
осень	70	40	20

1.78.

Год 1

товар / сезон	A	B	C
зима	60	40	80
весна	60	100	90
лето	80	80	70
осень	30	50	40

Год 2

товар / сезон	A	B	C
зима	60	70	100
весна	20	40	30
лето	50	20	80
осень	60	100	90

1.79.

Год 1

товар / сезон	A	B	C
зима	50	30	60
весна	60	90	30
лето	40	90	100
осень	50	70	80

Год 2

товар / сезон	A	B	C
зима	40	100	60
весна	80	90	90
лето	20	70	50
осень	60	80	40

1.80.

Год 1

товар / сезон	A	B	C
зима	60	80	130
весна	40	70	120
лето	100	50	70
осень	90	60	90

Год 2

сезон товар	A	B	C
зима	40	90	30
весна	100	70	20
лето	90	60	100
осень	80	50	60

Задача 9.

1.81-1.90. Вычислить комплексное число z и найти его модуль.

1.81. $z = i + \dfrac{1}{\sqrt{3} + i}$. 1.82. $z = \dfrac{1}{1 - i\sqrt{3}} - 1$. 1.83. $z = \dfrac{7}{\sqrt{3} + 2i} + 3i$.

1.84. $z = 1 + \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$. 1.85. $z = 1 + \dfrac{i}{1 - i}$. 1.86. $z = \dfrac{4i}{1 + i\sqrt{3}} - 2i$.

1.87. $z = \dfrac{2 - 3i}{1 + i} - 2$. 1.88. $z = \dfrac{2}{1 + i} - 1$. 1.89. $z = \dfrac{5i}{2 + i} - i$.

1.90. $z = \dfrac{5}{2i - 1} + 3i$.

Задача 10.

1.91-1.100. Решить квадратное уравнение на множестве комплексных чисел.

1.91. $x^2 - 2x + 5 = 0$. 1.92. $x^2 + 2x + 17 = 0$.

1.93. $.x^2 - 4x + 13 = 0$ 1.94. $x^2 + 2x + 5 = 0$.

1.95. $x^2 - x + 1 = 0$. 1.96. $x^2 - 8x + 25 = 0$.

1.97. $x^2 + 8x + 25 = 0$. 1.98. $x^2 + 6x + 25 = 0$.

1.99. $x^2 - 6x + 25 = 0$. 1.100. $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Задача 11.

1.101-1.110. Вычислить все значения корня и построить их на комплексной плоскости.

1.101. $\sqrt[3]{\sqrt{3} + i}$. 1.102. $\sqrt[3]{1}$. 1.103. $\sqrt[3]{2 - 2i}$.

1.104. $\sqrt[3]{27}$. 1.105. $\sqrt{1 - i}$. 1.106. $\sqrt{-9}$.

1.107. $\sqrt{1 + i}$. 1.108. $\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}i}$. 1.109. $\sqrt{1 - i}$.

1.110. $\sqrt[3]{-8}$.

Задача 12.

1.111-1.120. Дано комплексное число а. Требуется:

а) записать число а в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;

б) изобразить а на комплексной плоскости;

в) вычислить a^{12};

г) найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$;

д) вычислить произведение полученных корней;

е) составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, корнем которого, является а.

1.111. $a = \dfrac{-2\sqrt{2}}{1-i}$; 1.112. $a = \dfrac{i}{\sqrt{3}-i}$; 1.113. $a = \dfrac{1+i}{1-i}$;

1.114. $a = \dfrac{1+i}{i}$; 1.115. $a = \dfrac{-2\sqrt{2}i}{1+i}$; 1.116. $a = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$;

1.117. $a = \dfrac{-4}{1-i\sqrt{3}}$; 1.118. $a = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$; 1.119. $a = \dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$;

1.120. $a = \dfrac{-4i}{\sqrt{3}-i}$.

Контрольная работа № 1 (Часть 2) состоит из 7 задач. Контрольная работа допускается к защите, если она содержит пять (и более) полностью и правильно решенных задач. Контрольная работа не проверяется и не рецензируется, если в ней содержится менее пяти решенных задач.

Задача 13.

2.1-2.10.

2.1. Даны векторы $\vec{a}(2,1,3)$; $\vec{b}(-1,3,2)$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ и длину $\vec{a}$.

2.2. Даны векторы $\vec{a}(4,1,2\sqrt{2})$; $\vec{b}(2,-1,\sqrt{2})$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ и длину $\vec{a}$.

2.3. Даны векторы $\vec{a}(1,2,3)$; $\vec{b}(-1,4,1)$. Найти $\vec{a}\times\vec{b}$ и косинус угла между этими векторами.

2.4. Даны векторы $\vec{a}(-2,4,1)$; $\vec{b}(1,-1,3)$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ и длину $\vec{b}$.

2.5. Даны векторы $\vec{a}(-1,2,1)$; $\vec{b}(0,4,2)$. Найти $\vec{a}\times\vec{b}$ и косинус угла между этими векторами.

2.6. Даны векторы $\vec{a}(3,-5,1)$; $\vec{b}(0,6,2)$. Найти $\vec{a}\times\vec{b}$ и косинус угла между этими векторами.

2.7. Даны векторы $\vec{a}(1,1,0)$; $\vec{b}(2,-1,3)$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ и длину $\vec{b}$.

2.8. Даны векторы $\vec{a}(-1,-1,4)$; $\vec{b}(5,2,1)$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ и длину $\vec{b}$.

2.9. Даны векторы $\vec{a}(0,1,-1)$; $\vec{b}(3,4,5)$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ и длину $\vec{a}$.

2.10. Даны векторы $\vec{a}(6,0,8)$; $\vec{b}(-2,1,3)$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ и длину $\vec{a}$.

Задача 14.

2.51-2.60. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M, K и L в виде $Ax+By+Cz+D=0$.

2.51.	M(1, 2, 3);	K(–1, 3, 5);	L(0, 1, 1)
2.52.	M(–1, 3, 1);	K(2, 1, 1);	L(0, 0, 1)
2.53.	M(1, 5, 7);	K(–1, 3, 1);	L(1, 1, 0)
2.54.	M(2, 1, 1);	K(3, 5, 1);	L(–1, –1, –1)
2.55.	M(3, 0, 0);	K(1, –1, 1);	L(0, 1, 1)
2.56.	M(1, 3, 2);	K(–1, 4, 0);	L(1, 1, –1)
2.57.	M(–2, 1, 1);	K(3, 1, 2);	L(–2, 0, 1)
2.58.	M(1, 0, 0);	K(2, 2, 2);	L(1, 1, 3)
2.59.	M(3, 1, 1);	K(4, 0, 0);	L(1, 1, 2)
2.60.	M(–1, 1, -1);	K(–2, 1, 1);	L(3, 1, 0)

Задача 15.

2.11-2.20. Даны 4 вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Вычислить:

1) координаты вектора $\vec{d}$ d в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

2) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

3) $\vec{c} \cdot \vec{d}$;

4) $(2(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (5\vec{c} - 4\vec{d})$;

5) $\vec{a} \times \vec{b}$;

6) $\vec{c} \times \vec{d}$;

7) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{d}$.

2.11. $\vec{a}$ (4, 5, 2); $\vec{b}$ (3, 0, 1); $\vec{c}$ (–1, 4, 2); $\vec{d}$ (5, 2.2, 8);

2.12. $\vec{a}$ (5, 2, 8); $\vec{b}$ (–8, –1, 0); $\vec{c}$ (5,–1,–4); $\vec{d}$ (–6, 3, 11);

2.13. $\vec{a}$ (–2, 5, –1); $\vec{b}$ (–5, 18,–7); $\vec{c}$ (5,–18, 8); $\vec{d}$ (0, 1, 0);

2.14. $\vec{a}$ (–2, 2, 8); $\vec{b}$ (5, –7, –5); $\vec{c}$ (4, –5, –9); $\vec{d}$ (–3, 6, 4);

2.15. $\vec{a}$ (1, –7, –5); $\vec{b}$ (4, 8, 1); $\vec{c}$ (3, –1,5); $\bar{\text{d}}$(–2, 5, –1);

2.16. $\vec{a}$ (–1, –9, 1); $\vec{b}$ (0, –12, 3); $\vec{c}$ (1, –6, 3); $\vec{d}$ (1, –10, 4);

2.17. $\vec{a}$ (–5, –12, 0); $\vec{b}$ (4, 7, –1); $\vec{c}$ (0, 2, 10); $\vec{d}$ (5, 10, 2);

2.18. $\vec{a}$ (5, 3, –1); $\vec{b}$ (9, 4, 0); $\vec{c}$ (–15, –7,-1); $\vec{d}$ (1, 0, 3);

2.19. $\vec{a}$ (–3, 3, 0); $\vec{b}$ (4, –3, –2); $\vec{c}$ (1, 0, 4); $\vec{d}$ (1, –2, –7);

2.20. $\vec{a}$ (7, –10, –4); $\vec{b}$ (2, –8, –4); $\vec{c}$ (–6, 16, 7); $\vec{d}$ (11, –13, –5).

Задача 16.

2.31-2.40. Написать уравнение прямой, проходящей через точки A и B.
В ответе надо приводить уравнение прямой в виде $y = kx+b$. Построить эту прямую.

2.31. A(1, 0); B(3, 2).

2.32. A(0, 3); B(1, 1).

2.33. A(-1, 2); B(1, 1).

2.34. A(2, 0); B(4, 1).

2.35. A(4, 2); B(-1, 3).

2.36. A(-2, 1); B(-1, 2).

2.37. A(4, 4); B(-2, 3).

2.38. A(-3, 1); B(2, 2).

2.39. A(0, 0); B(4, 5).

2.40. A(-4, 1); B(3, 3).

Задача 17.

2.41-2.50. Даны вершины треугольника ABC. Найти:

1) длину стороны AB;
2) уравнение стороны AB;
3) длину медианы AM;
4) уравнение медианы AM;
5) уравнение высоты BH;
6) длину высоты BH;
7) площадь треугольника;
8) угол BAC (в градусах);
9) уравнение прямой, параллельной стороне BC и проходящей через точку A.

В ответах надо приводить уравнения прямых в виде $y = kx+b$. Все вычисления проводить с двумя знаками после запятой.

2.41. A(1, 1); B(4, 3); C(–4, 2).
2.42. A(2, 3); B(7, –5); C(–3, 1).
2.43. A(2, 2); B(7, 2); C(1, –3).
2.44. A(4,-4); B(-3,-3); C(1, 2.4).
2.45. A(0, 5); B(–3, –2); C(8, 3).
2.46. A(–1, 5); B(3, 0); C(0, 8).
2.47. A(3, 8); B(1, 1); C(–5, –4).
2.48. A(1, 3); B(0, –7); C(–3, 5).
2.49. A(4, 2); B(0, 5); C(–3, –7).
2.50. A(–3, 0); B(–5, 2); C(3, 8).

Задача 18.

2.51-2.60. Написать уравнение плоскости в виде $Ax + By + Cz + D = 0$, проходящей через точку M параллельно векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2.51 $M(1,2,3)$; $\overline{a}(-1,3,5)$; $\overline{b}(0,1,1)$.
2.52 $M(-1,3,1)$; $\overline{a}(2,1,1)$; $\overline{b}(0,0,1)$.
2.53 $M(1,5,7)$; $\overline{a}(-1,3,1)$; $\overline{b}(1,1,0)$.
2.54 $M(2,1,1)$; $\overline{a}(3,5,1)$; $\overline{b}(-1,-1,-1)$.

2.55 $M(3,0,0)$; $\overline{a}(1,-1,1)$; $\overline{b}(0,1,1)$.

2.56 $M(1,3,2)$; $\overline{a}(-1,4,0)$; $\overline{b}(1,1,-1)$.

2.57 $M(-2,1,1)$; $\overline{a}(3,1,2)$; $\overline{b}(-2,0,1)$.

2.58 $M(1,0,0)$; $\overline{a}(2,2,2)$; $\overline{b}(1,1,3)$.

2.59 $M(3,1,1)$; $\overline{a}(4,0,0)$; $\overline{b}(1,1,2)$.

2.60 $M(-1,1,-1)$; $\overline{a}(-2,1,1)$; $\overline{b}(3,1,0)$.

Задача 19.

2.61-2.70. Даны вершины пирамиды $SPMN$. Найти:

1) длину ребра SN;
2) уравнение ребра SN;
3) уравнение грани SPN;
4) площадь грани SPN;
5) уравнение высоты, опущенной из вершины S на грань PMN;
6) длину высоты, опущенной из вершины S на грань PMN;
7) угол между ребрами SP и SN (в градусах);
8) угол между ребром SP и гранью PMN (в градусах);
9) объем пирамиды.

В ответах надо приводить уравнения плоскостей и прямых в виде $Ax + By + Cz + D = 0$ и $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$. Все вычисления проводить с двумя знаками после запятой.

2.61. $S(1, 0, 0)$; $P(0, 1, 0)$; $M(0, 0, 2)$; $N(0, 4, -1)$.
2.62. $S(2, 0, 0)$; $P(0, 2, 0)$; $M(0, 0, 3)$; $N(8, 5, 8)$.
2.63. $S(3, 0, 0)$; $P(0, 1, 0)$; $M(0, 0, 2)$; $N(6, 9, 2)$.
2.64. $S(4, 0, 0)$; $P(0, 2, 0)$; $M(0, 0, 1)$; $N(5, 8, 2)$.
2.65. $S(5, 0, 0)$; $P(0, 1, 0)$; $M(0, 0, 4)$; $N(1, 2, 6)$.
2.66. $S(2, 0, 0)$; $P(0, 3, 0)$; $M(0, 0, 1)$; $N(7, 9, 6)$.
2.67. $S(3, 0, 0)$; $P(0, 1, 0)$; $M(0, 0, 1)$; $N(7, 3, 2)$.
2.68. $S(1, 0, 0)$; $P(0, 4, 0)$; $M(0, 0, 2)$; $N(6, 9, 2)$.
2.69. $S(2, 0, 0)$; $P(0, 2, 0)$; $M(0, 0, 3)$; $N(8, 5, 8)$.
2.70. $S(4, 0, 0)$; $P(0, 1, 0)$; $M(0, 0, 2)$; $N(3, 9, 8)$.

Контрольная работа № 1 (Часть 3) состоит из 9 задач. Контрольная работа допускается к защите, если она содержит пять (и более) полностью и правильно решенных задач. Контрольная работа не проверяется и не рецензируется, если в ней содержится менее пяти решенных задач.

Задача 20.

3.01-3.10. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется:

а) построить линию по точкам, начиная от φ равного нулю и увеличивая затем значения φ на $\pi/8$;

б) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью;

в) по уравнению в декартовой системе координат определить тип линии.

3.01. $r = 5/(6 + 3\cos\varphi)$.

3.02. $r = 1/(3 - 3\cos\varphi)$.

3.03. $r = 3/(1 - 2\cos\varphi)$.

3.04. $r = 10/(2 + \cos\varphi)$.

3.05. $r = 5/(3 - 4\cos\varphi)$.

3.06. $r = 1/(2 + 2\cos\varphi)$.

3.07. $r = 8/(3 - \cos\varphi)$.

3.08. $r = 4/(2 - 3\cos\varphi)$.

3.09. $r = 1/(1 + \cos\varphi)$.

3.10. $r = 1/(2 + \cos\varphi)$.

Задача 21.

3.11-3.20. Для заданной функции найти точки разрыва, если они существуют, и построить график.

3.11. $$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \le -2; \\ 2 - x, & -2 < x < 0; \\ x^2 + 2, & x \ge 0. \end{cases}$$

3.12. $$f(x) = \begin{cases} -(x + 1), & x \le -1; \\ (x + 1)^2, & -1 \le x \le 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

3.13. $$f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 2, & x>1.\end{cases}$$

3.14. $$f(x)=\begin{cases}x, & x\le -1;\\ 0.5, & -1<x\le \pi/6;\\ \sin x, & x>\pi/6.\end{cases}$$

3.15. $$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ -\sin x, & 0\le x\le \pi/2;\\ \pi/2+x, & x>\pi/2.\end{cases}$$

3.16. $$f(x)=\begin{cases}4/x, & x<-2;\\ x, & -2\le x<0;\\ 1-x, & x\ge 0.\end{cases}$$

3.17. $$f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ \sqrt{x}, & 0<x<4;\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

3.18. $$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 2;\\ x+1, & x>2.\end{cases}$$

3.19. $$f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x<-1;\\ 3x, & -1\le x\le 3;\\ 5, & x>3.\end{cases}$$

3.20. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le -\pi;\\ -1, & -\pi<x\le 0;\\ \sqrt{x+1}, & x>0.\end{cases}$

Задача 22-24.

3.21-3.30. Найти производные функций.

3.21

1) $y=x^5$

2) $y=\sqrt[5]{x^2}$

3) $y=3x^2-2e^x+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{10}\right)$

4) $y=(\sin 3x)\cdot x^3$

5) $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$

3.22.

1) $y=3x^4$

2) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{6}$

3) $y=\dfrac{e^{2x}}{2}+5\mathrm{tg}(4-2x)-3\ln x$

4) $y=x^6\cos\dfrac{x}{3}$

5) $y=\dfrac{2x+3}{x-5}$

3.23.

1) $y=\dfrac{1}{x}$

2) $y=\sqrt[3]{x^2}$

3) $y=3^x-2\mathrm{arctg}\sqrt{x}+6$

4) $y=x^2\ln x$

5) $y=\dfrac{5x+3}{5-x}$

3.24.

1) $y=31x$

2) $y=\sqrt[6]{x}$

3) $y=x^3\mathrm{tg}2x$

4) $y=\dfrac{x}{3}+5\log_2 x$

5) $y=\dfrac{e^x}{x}$

3.25.

1) $y=6x^{101}$

2) $y=\sqrt{x^7}$

3) $y=3x^3-2\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}+4\arcsin x$

3.26.

1) $y=3x^{-8}$

2) $y=\sqrt[5]{x^2}$

3) $y=3x^2+4\log_2 x-2\cos 5x$

4) $y=(1-x^2)\cdot e^{2x}$

5) $y=\dfrac{5x+1}{6x-1}$

4) $y=x^5\cdot e^{3x}$

5) $y=\dfrac{3x-1}{4-5x}$

3.27.

1) $y=\dfrac{x^6}{3}$

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3) $y=\dfrac{x}{2}+5\operatorname{arctg}(2x-1)+4$

4) $y=x^3\cdot 3^x$

5) $y=\dfrac{2x-1}{3x+5}$

3.28.

1) $y=4x^5$

2) $y=\sqrt[4]{x^3}$

3) $y=2x-3\sin\dfrac{x}{6}+1$

4) $y=x\cdot\arcsin x$

5) $y=\dfrac{\cos 2x}{x^2+2x+3}$

3.29.

1) $y=-x^{-4}$

2) $y=\sqrt[8]{x}$

3) $y=10x^2-\cos(\pi-2x)+6$

4) $y=e^x\cdot \operatorname{tg}2x$

5) $y=\dfrac{\sin 5x}{x^2}$

3.30.

1) $y=4x^{-5}$

2) $y=\sqrt[6]{x^{11}}$

3) $y=8-3\ln(2x+1)-e^{x^2}$

4) $y=x^3\cdot 5^x$

5) $y=\dfrac{5x-6}{2x+3}$

3.31-3.40. Найти производные функций.

3.31.

1) $y=\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}$;

2) $y=\sqrt{x^2+3x}-\sqrt[3]{(6x-1)^2}$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x} -\dfrac{1}{x}$;

4) $y=\dfrac{4\ln x}{1-\ln x}$;

5) $y=\dfrac{1}{3}\left(\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}2x+x\right)$;

6) $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$.

3.32.

1) $y = 5\sqrt[5]{1-4x} + \dfrac{2}{\sqrt{x-x^3}+1}$; 2) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$;

3) $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$; 4) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$;

5) $y = 2^{\sin^3 4x}$; 6) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} 4x}{1-5x}$.

3.33.

1) $y = 3x^3 + \dfrac{4}{1-x^2} + \sqrt[3]{x^2} - \pi^2$; 2) $y = \dfrac{3\cos 2x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$;

3) $y = 5^{\arcsin\sqrt{3x}}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}}{e^{-4x}}$;

5) $y = \operatorname{tg} x \cdot (1-\ln(1-2x))$; 6) $y = \ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$.

3.34.

1) $y = 3\cdot\sqrt[3]{x^5+5x^4-\dfrac{5}{x}}$; 2) $y = \sin^3 2x + 4\cos^2 3x$;

3) $y = \ln\arcsin 3x$; 4) $y = \left(1-x\sqrt{1-3x}\right)^2$;

5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg} 5x}}$; 6) $y = 3^{x\cdot\operatorname{arctg} 2x}$.

3.35.

1) $y = 4x^3 + 2\sqrt{4x+3} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^3-\frac{1}{x^3}+1}}$; 2) $y = \dfrac{\arccos x}{x}$;

3) $y = \ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)$; 4) $y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$;

5) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$; 6) $y = 2^{\sin(x^2)}$.

3.36.

1) $y=\sqrt[3]{x^3-x+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1-4x}}$; 2) $y=x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}$;

3) $y=(x+\ln x)^3$; 4) $y=5^{\operatorname{arctg}^2 3x}$;

5) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$; 6) $y=\sin^4\left(x+\sqrt{3x}\right)$.

3.37.

1) $y=\sqrt[4]{x+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$; 2) $y=\cos 2x\cdot\sin^2 x$;

3) $y=\left(1+x^2\sqrt{1-2x}\right)^4$; 4) $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1-3x^2}$;

5) $y=\frac{e^{-x}}{\operatorname{tg}3x}$; 6) $y=\arcsin\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$.

3.38.

1) $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$;

3) $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)^3$; 4) $y=\sin^3 5x\cdot\cos^5 3x$;

5) $y=e^{\cos^2 4x}$; 6) $y=\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg}^3 2x}$.

3.39.

1) $y=x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{\pi^2}{4}$; 2) $y=\left(x+\frac{1}{(1-x)^2}+\sqrt[3]{x^2}\right)^5$;

3) $y=x^2\cdot\sin^3 x$; 4) $y=\ln^2(6x+1)$;

5) $y=\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$; 6) $y=\sqrt{\arcsin\sqrt{x}}$.

3.40.

1) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt{x}}+x\right)^2$; 2) $y=\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$;

3) $y=3^{\sqrt{x}}+e^{\sin^5 x}$; 4) $y=x\cdot\sqrt{5-3x^2}$;

5) $y=\ln(\mathrm{ctg}\sqrt[3]{x})$; 6) $y=e^{-\frac{x}{2}}+x\cdot e^{\frac{2}{x}}$.

3.41-3.50. Найти производные функций.

3.41.

1) $y=\mathrm{ctg}\left(3^{\sqrt{x}}\right)$; 2) $y=(\arcsin x)^{x}$;

3) $\begin{cases} x=t\cdot\ln t \\ y=\dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$; 4) $2^{x}+2^{y}=2^{x+y}$.

3.42.

1) $y=\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin x$; 2) $y=(\cos x)^{\mathrm{tg}3x}$;

3) $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=t-\mathrm{arctg}\,t \end{cases}$; 4) $2y\cdot\ln y=x$.

3.43.

1) $y=\left(\dfrac{x-\sqrt{\mathrm{tg}x}}{x+\sqrt{\mathrm{tg}x}}\right)^{2}$; 2) $y=(\cos x)^{x^2}$;

3) $\begin{cases} x=1-e^{3t} \\ y=\dfrac{e^{3t}+e^{-3t}}{3} \end{cases}$; 4) $xy=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$.

3.44.

1) $y=\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{4}}{1+\cos^2\dfrac{x}{4}}$; 2) $\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{t+1}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t+1}} \end{cases}$;

3) $\sin(xy)+\cos(xy)=0$; 4) $y=\sqrt[x]{x+1}$.

3.45.

1) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $y=(x)^{\mathrm{ctg}2x}$;

3) $\begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{1+\sin t} \\ y = \dfrac{\cos t}{1+\sin t} \end{cases}$; 4) $\left(e^{x}-1\right)\left(e^{y}-1\right)=xy$.

3.46.

1) $y = 3^{\sqrt{x}} + \dfrac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$; 2) $y = (\mathrm{tg} x)^{\sqrt{x}}$;

3) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2} \\ y = t - \sin t \end{cases}$; 4) $\ln y = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3.47.

1) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$; 2) $y = x^{-x}$;

3) $\begin{cases} x = \mathrm{tg}\, t \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$; 4) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

3.48.

1) $y = \ln\left(\mathrm{tg}\dfrac{x^2}{12}\right)$; 2) $y = (\arccos x)^{x}$;

3) $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = 1 - \cos(e^{2t}) \end{cases}$; 4) $y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$.

3.49.

1) $y = \ln\left(\mathrm{tg}\dfrac{x^2}{12}\right)$; 2) $y = (\arcsin x)^{x}$;

3) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 + t \\ y = \ln\left(t^2+1\right) \end{cases}$; 4) $x - y + \sin(xy) = 0$.

3.50.

1) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{4x-1}$;   2) $y = (x+1)^{\cos x}$;

3) $\begin{cases} x = 7\cdot\ (t+\sin t) \\ y = 7\cdot\ (1-\cos t) \end{cases}$;   4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}.$

Задача 25.

3.51-3.60. Найти пределы функций.

3.51.

1) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+8^3}{x-4^2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-3}{2-3x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 \ln^3 x)$.

3.52.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2-1}}{3x^2+4x^3}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0} (x^3 \ln^2 x)$.

3.53.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-2x^2+1}{2-3x^2+4x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$;

3.54.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-5x+4}{x^3-1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+\sin x}{3x-\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{(x+2)(x+3)} - x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$

3.55.

1) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1+\cos 4x}{1-\sin 2x}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(3^{1/x}-\dfrac{2x^3}{1-3x^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x-2)}{x^2-2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{1/x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

3.57.

1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}+2x}{x^2-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$

3.56.

1) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln^3 x$

3.58.

1) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x+x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\frac{2}{1-\ln x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sin x + x}{4\cos x - x}$.

3.59.

1) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^4}{1-2x^4} - 2^{\frac{1}{x}}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 e^{\frac{1}{x^2}})$.

3.60.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x - 1}{3(2^x + 1)}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x^2 - x - 2}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x^3 + 1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\left(\frac{3}{x^2}\right)}$.

Задача 26.

3.61-3.70. Найти экстремумы и промежутки монотонности функций; построить графики функций.

3.61. $y = -3x^2 + 2x - 1$.

3.62. $y = x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 2x$.

3.63. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x$.

3.64. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{4}x^2 - 5x + \dfrac{25}{12}$.

3.65. $y = 2x^2 + 5x - 3$.

3.66. $y = 2x^3 + 0{,}5x^2 - x + \dfrac{3}{8}$.

3.67. $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 5$.

3.68. $y = 0{,}5x^4 + x^3 - x^2 + 3$.

3.69. $y = 0{,}5x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 5$.

3.70. $y = -x^2 + 4x + 3$.

Задача 27.

3.71–3.80. Исследовать функции методами дифференциального исчисления и построить их графики.

3.71. 1) $y=\dfrac{x^2+7x+15}{x^2+6x+12}$, 2) $y=\dfrac{x^2-5x+5}{x-1}$.

3.72. 1) $y=\dfrac{x^2+5x+9}{x^2+4x+7}$, 2) $y=\dfrac{x^2-7x+11}{x-2}$.

3.73. 1) $y=\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+2x+4}$, 2) $y=\dfrac{x^2-9x+19}{x-3}$.

3.74. 1) $y=\dfrac{x^2-x+3}{x^2-2x+4}$, 2) $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$.

3.75. 1) $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-4x+7}$, 2) $y=\dfrac{x^2-6x+9}{x-2}$.

3.76. 1) $y=-\dfrac{2x^2+11x+21}{x^2+6x+12}$, 2) $y=\dfrac{x^2-8x+16}{x-3}$.

3.77. 1) $y=-\dfrac{2x^2+7x+12}{x^2+4x+7}$, 2) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.

3.78. 1) $y=-\dfrac{2x^2+3x+7}{x^2+2x+4}$, 2) $y=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$.

3.79. 1) $y=-\dfrac{2x^2-5x+9}{x^2-2x+4}$, 2) $y=\dfrac{x^2-7x+13}{x-3}$.

3.80. 1) $y=-\dfrac{2x^2-9x+16}{x^2-4x+7}$, 2) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-2}$.

Задача 28.

3.81-3.90. Определить количество действительных корней уравнения $x^3+ax+b=0$, найти их приближенное значение с точностью до 0,001.

3.81. a = 1; b = – 4.
3.82. a = 2; b = 4.
3.83. a = 6; b = – 1.
3.84. a = 4; b = 8.
3.85. a = 1; b = – 1.
3.86. a = 2; b = –11.

3.87. $a = 1$; $b = -1$. 3.88. $a = 1$; $b = 3$.
3.89. $a = 4$; $b = -6$. 3.90. $a = 5$; $b = 7$.

Контрольная работа № 1 (Часть 4) состоит из 7 задач. Контрольная работа допускается к защите, если она содержит пять (и более) полностью и правильно решенных задач. Контрольная работа не проверяется и не рецензируется, если в ней содержится менее пяти решенных задач.

Задача 29.

5.01-5.10. Найти частные производные первого порядка для функции $z = f(x, y)$.

5.01. $z = 5x^2 + 3y$.

5.02. $z = 3x^2 \cdot y$.

5.03. $z = e^{x^2+y}$.

5.04. $z = 5y^2 \cdot x$.

5.05. $z = \sin(2x - y)$.

5.06. $z = 6x^3 - xy$.

5.07. $z = \mathrm{tg}(x^2 - 2y)$.

5.08. $z = 6x - y^2$.

5.09. $z = 9xy^2$.

5.10. $z = 18x^2 - 4\ln y$.

Задача 30.

5.11-5.20. Найти частные производные второго порядка для функции $z = f(x, y)$ и показать, что она удовлетворяет данному уравнению.

5.11. $z = e^{xy}$; $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$

5.12. $z = \sin(x - y)/x$; $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} \right) - x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

5.13. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

5.14. $z = xe^{y/x}$; $x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

5.15. $z = \sin(x + ay)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5.16. $z = \ln(x + e^{-y})$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

5.17. $z = e^{-\cos(ax+y)}$; $a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5.18. $z = \sin^2(y - ax)$; $a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

5.19. $z = \mathrm{arctg}(x/y)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

5.20. $z = x^y$; $y \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}.$

Задача 31.

5.21-5.30. Дана функция $z = \mathrm{f}(x, y)$ и точки $\mathrm{A}(x_0; y_0)$ и $\mathrm{B}(x_1; y_1)$. Требуется:

1) вычислить точное значение функции в точке В;

2) вычислить приближенное значение функции в точке В, исходя из значения функции в точке А, и заменив приращение функции при переходе от точки А к точке В дифференциалом;

3) оценить в процентах относительную погрешность;

4) составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \mathrm{f}(x, y)$ в точке $\mathrm{C}(x_0; y_0; z_0)$.

№	$z = f(x,y)$	$\mathrm{A}(x_0;y_0)$	$\mathrm{B}(x_1;y_1)$
5.21.	$z = 3xy + 2x + y$	A(1;2)	B(1.05; 1.93)
5.22.	$z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$	A(3;2)	B(3.02; 1.98)
5.23.	$z = 3y^2 - 9xy + y$	A(1;3)	B(1.07; 2.94)
5.24.	$z = x^2 + 2xy + 3y^2$	A(2;1)	B(1.95; 1.04)
5.25.	$z = 2xy + 3y^2 - 5x$	A(3;4)	B(3.04; 3.95)
5.26.	$z = xy + x - y$	A(1.5;2.3)	B(1.43; 2.35)
5.27.	$z = x^2 - y^2 - 2x + y$	A(4;1)	B(3.98; 1.06)
5.28.	$z = y^2 + 6xy - 3y$	A(3;2)	B(2.94; 2.05)
5.29.	$z = 2xy + 3x - 2y$	A(2;2)	B(1.93; 2.05)
5.30.	$z = x^2 + y^2 + 2x + 3y$	A(1;2)	B(1.05; 1.98)

Задача 32.

5.31-5.40. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области D. Сделать чертёж.

№	$z = f(x, y)$	Область D
5.31.	$z = x^2 - 2y + 4xy - 6x - 1$	$x \ge 0; y \ge 0; x + y \le 3$
5.32.	$z = xy - x - 2y$	$\lvert x \rvert \le 3; y \le 3; y \ge 0$
5.33.	$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$	$x \ge -1; y \ge -1; x + y \le 1$
5.34.	$z = 3x + y - xy$	$y \ge x; y \le 4; x \ge 0$
5.35.	$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4y$	$y \ge 2x; y \le 2; x \ge 0$
5.36.	$z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$	$x \le 0; y \le 0; x + y \ge -2$
5.37.	$z = x^2 + 3y^2x - y$	$x \le 1; y \le 1; x + y \ge 1$
5.38.	$z = x^2 + 2y^2 + 1$	$x \ge 0; y \ge 0; x + y \le 3$
5.39.	$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$	$x \le 0; y \le 0; x + y \ge -3$
5.40.	$z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$	$x \le 1; y \ge 0; y \le x$

Задача 33.

5.41-5.50. Найти экстремум функции $z = f(x,y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$.

№	$z = f(x, y)$	$\varphi(x, y) = 0$
5.41.	$z = x^2 + y^2$	$x + y = 1$
5.42.	$z = x^2 + y^2$	$x/3 + y/4 = 1$
5.43.	$z = x^2 + y^2$	$4x - 3y = 1$
5.44.	$z = x^2 + y^2$	$-x/3 + y/4 = 1$
5.45.	$z = x^2 + y^2$	$x - y = 1$
5.46.	$z = x/3 + y/4$	$x^2 + y^2 = 1$
5.47.	$z = x - y$	$x^2 + y^2 = 1$
5.48.	$z = 4x - 3y$	$x^2 + y^2 = 1$
5.49.	$z = x/4 - y/3$	$x^2 + y^2 = 25$
5.50.	$z = -x/5 + y/12$	$x^2 + y^2 = 1$

Задача 34.

5.51-5.60. Дана функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\bar{a} = (a_x, a_y)$.
Найти: 1) grad z в точке A;

2) производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

№	$z = f(x, y)$	$A(x_0, y_0)$	$\bar{a} = (a_x, a_y)$
5.51.	$z = \ln(\cos(x + y))$	$A(4; 3)$	$\bar{a} = (-1; 1)$
5.52.	$z = (x–y)/(x + y)$	$A(4; 3)$	$\bar{a} = (2; 2)$
5.53.	$z = \mathrm{arctg}(x^2/y)$	$A(-2; 4)$	$\bar{a} = (3; 4)$
5.54.	$z = e^{-x^3 + 4\sqrt{y}}$	$A(0; 1)$	$\bar{a} = (8; 6)$
5.55.	$z = \ln\sqrt{4 - x^2 - y^2}$	$A(1; -1)$	$\bar{a} = (4; 3)$
5.56.	$z = \mathrm{arsin}(x/\sqrt{y})$	$A(1; 4)$	$\bar{a} = (-5; 12)$
5.57.	$z = x^4 + 5x^2y^2 – 3$	$A(2; -2)$	$\bar{a} = (-2; 5)$
5.58.	$z = \ln(x^2 – \sqrt{y})$	$A(2; 1)$	$\bar{a} = (1; 4)$
5.59.	$z = 5x^2 + 6xy$	$A(2; 1)$	$\bar{a} = (1; 2)$
5.60.	$z = \ln(3x – 2y)^2$	$A(2; 1)$	$\bar{a} = (1; -1)$

Задача 35.

5.61-5.70. Экспериментально получены пять значений функции y = f(x) при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблицу.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Методом наименьших квадратов найти функцию вида Y = aX+b, выражающую приближенно функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции Y = aX+b.

Задачи	5.61	5.62	5.63	5.64	5.65	5.66	5.67	5.68	5.69	5.70
y_1	5.9	5.5	3.9	4.9	4.5	5.7	5.2	5.1	4.7	4.3
y_2	6.9	6.5	4.9	5.9	5.5	6.7	6.2	6.1	5.7	5.3
y_3	5.4	5.0	3.4	4.4	4.0	5.2	4.7	4.6	4.2	3.8
y_4	3.4	3.0	1.4	2.4	2.0	3.2	2.7	2.6	2.2	1.8
y_5	3.9	3.5	1.9	2.9	2.5	3.7	3.2	3.1	2.7	2.3