Лабораторная работа № 7

Тема – Исследование функции одной переменной

1. Исследование функций с помощью первой производной

Производная находит многочисленные применения к исследованию функций и построению графиков функций.

Рассмотрим возможные приложения производной к решению вопроса о монотонности функции на некотором промежутке

***Теорема* 1** (*необходимые и достаточные условия монотонности функции*). Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X и внутри него имеет конечную производную, то необходимым и достаточным условием неубывания (невозрастания) функции $y = f(x)$ в X является $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$.

***Определение* 1.** Точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если $\exists$ такая $\delta-$окрестность x_0, что $\forall x \in \dot{U}\left(x_0, \delta\right) \Rightarrow \Delta f(x_0) < 0$ $\left(\Delta f\left(x_0\right) > 0\right)$.

Точки локального максимума и локального минимума функции $f(x)$ называются точками *локального экстремума*.

***Теорема* 2** (*необходимое условие локального экстремума*). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и в ней имеет локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

В точках локального экстремума касательная параллельна оси Ox.

***Определение* 2.** Точки $x_1, x_{2,\dots}$, в которых $f'(x) = 0$, называются *стационарными точками*, или *точками возможного экстремума*.

П р и м е р 1. Пусть задана функция $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$, $3x^2 = 0$, $x = 0$ – стационарная точка, но не является точкой локального экстремума.

***Теорема* 3** (*1-е достаточное условие локального экстремума*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой δ –окрестности стационарной точки x_0. Тогда, если $f'(x) > 0$, $\left(f'(x) < 0\right)$ при $x \in \left(x_0 - \delta, x_0\right)$, а $f'(x) < 0$ $\left(f'(x) > 0\right)$ при $x \in \left(x_0, x_0 + \delta\right)$, то в точке x_0 функция имеет локальный максимум (локальный минимум).

Если $f'(x)$ во всей δ-окрестности точки x_0 имеет один и тот же знак, то в точке x_0 локального экстремума нет.

П р и м е р 2. Найти точки экстремума функции $f(x) = (x-2)^5$.

Решение. $f(x) = (x-2)^5$,

$$f'(x) = 5(x-2)^4 = 0.$$

$x_0 = 2$ – стационарная точка, не являющаяся точкой экстремума, так как $f'(x) \succ 0$. Точек экстремума нет. ►

З а м е ч а н и е 1. В точке экстремума производная может не существовать или обращаться в бесконечность (критическая точка!), но обязательно меняет знак в $\delta-$окрестности этой точки. В этом случае экстремум называют *острым* (в противоположность *гладкому* экстремуму, который имеет функция с непрерывной производной). Примером может служить функция $y = |x|$, у которой в точке $x = 0$ производная не существует, но $f'(0-0) < 0$, а $f'(0+0) > 0$.

***Теорема* 4** (*2-е достаточное условие экстремума*). Пусть функция $f(x)$ в стационарной точке x_0 дважды непрерывно дифференцируема. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если $f''(x_0) < 0$ и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Задание 1. Построить график функции $f(x) = 3*\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$ с помощью производной первого порядка.

Решение.

Для функции $f(x) := 3\cdot\sqrt[3]{\left[(x+4)^2\right]} - 2x - 8$

найдем производную первого порядка:

$p(x) := \frac{d}{dx}f(x)$ $\qquad$ $p(x) \rightarrow \dfrac{2\cdot x + 8}{\left[(x+4)^2\right]^{\frac{2}{3}}} - 2$

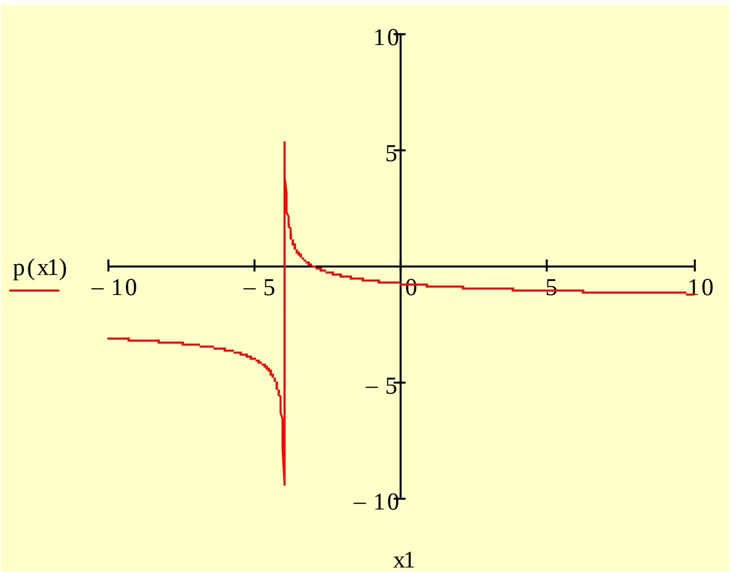
Отыскиваем критические точки – решения системы уравнений.

Given $\qquad p(x) = 0$

$\text{Find}(x) \rightarrow -3$

$f(-3) = 1$ $\qquad$ $f(-4) = 0$

Определяем: есть ли экстремумы среди точек -3 и -4 с помощью графика производной функции.



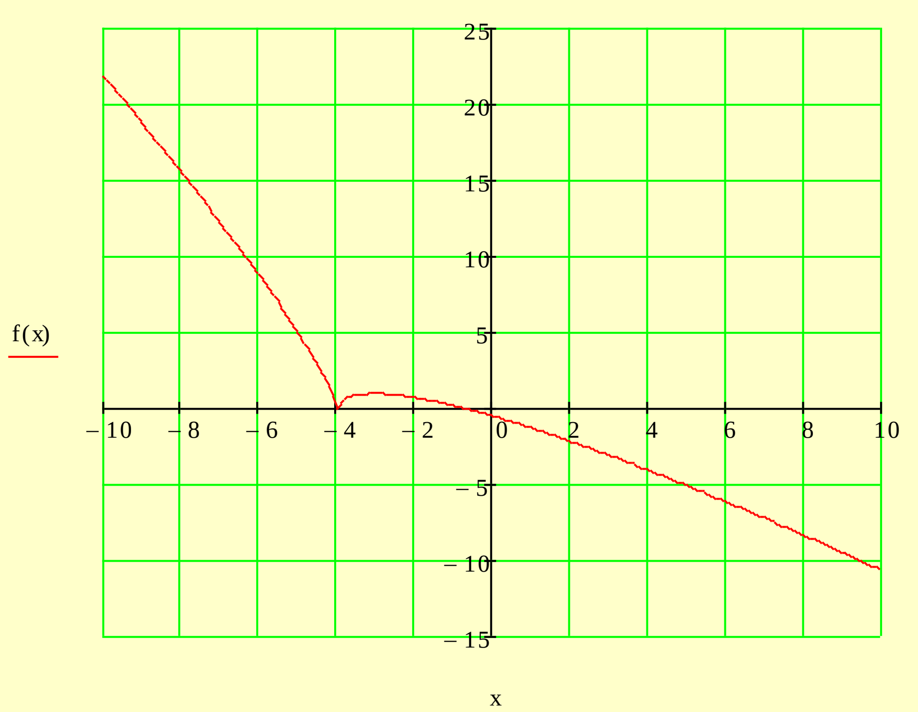
При переходе через точку $x = -4$ производная y' меняет знак с «–» на «+», значит, $x = -4$ – точка минимума функции.

При переходе через точку $x = -3$ производная y' меняет знак с «+» на «-», значит, $x = -3$ – точка максимума функции.

Функция убывает на промежутках $(-\infty,-4)$ и $[-3,+\infty)$, возрастает на промежутке $(-4,-3]$.

Строим график функции.

x:=−10,−9.9..10



2. Выпуклость и вогнутость функций

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует касательная к графику функции $f(x)$ в любой точке этого интервала.

Определение **3.** График дифференцируемой функции $f(x)$ называется выпуклым (вогнутым) на интервале (a,b), если он расположен на (a,b) ниже (выше) касательной, проведенной в любой его точке из (a,b) (рис. 1).

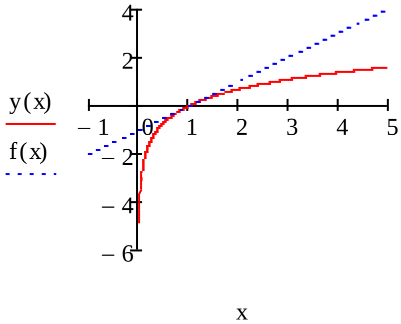


Рис.1

Теорема **5** *(достаточный признак выпуклости, вогнутости)*. Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a,b) вторую производную и $f''(x) < 0$ $\left(f''(x) > 0\right)$ во всех точках интервала (a,b), то график функции $f(x)$ – выпуклый (вогнутый).

Определение **4.** Точка $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ называется *точкой перегиба* графика непрерывной функции $y = f(x)$, если точка M разделяет промежутки, в которых график выпуклый и вогнутый.

***Теорема* 6** *(необходимое условие точки перегиба).* Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$ и пусть функция $y = f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывную вторую производную. Тогда

$$f''(x_0) = 0.$$

***Теорема* 7** *(достаточное условие точки перегиба).* Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в окрестности точки x_0. Если при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет свой знак, то x_0 - точка перегиба.

П р и м е р 3. Найти точки перегиба для функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$.

Решение. $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$, $f''(x) = 0$ при $x = 1$. $f''(0) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0$. Следовательно, точка $x = 1$ – точка перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$.

3. Асимптоты графика функции

***Определение* 5.** Прямая называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки, принадлежащей графику до этой прямой, стремится к нулю при неограниченном удалении точки по графику функции от начала координат (рис. 2).

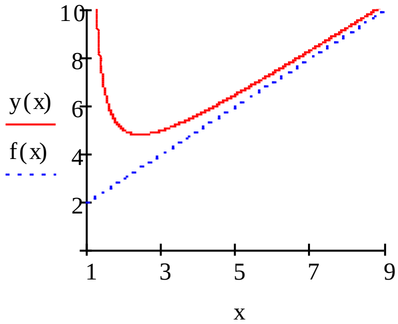


Рис. 2

Существует три типа асимптот: вертикальная, горизонтальная и наклонная.

***Определение* 6.** Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$ (рис. 3).

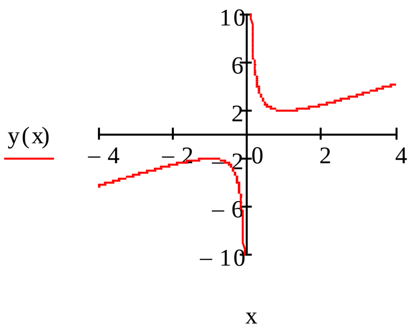


Рис. 3

***Определение* 7.** Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - (kx + b)) = 0$.

Заметим, что при $k = 0$ наклонная асимптота часто называется *горизонтальной*.

Теорема 8. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$, если существуют пределы $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$.

Если хотя бы один из этих двух пределов не существует или $k \to +\infty$ $(-\infty)$, то кривая наклонных асимптот не имеет.

Задание 2. Найти асимптоты и построить график функции

$$f(x) = \frac{9 - 10x^2}{\sqrt{4x^2 - 1}}.$$

Решение. Данная функция является четной, так как

$f(x) := \dfrac{9 - 10 \cdot x^2}{\sqrt{4 \cdot x^2 - 1}}$ $\quad$ $f(-x) \to -\dfrac{10 \cdot x^2 - 9}{\sqrt{4 \cdot x^2 - 1}}$ $\quad$ $f(x) = f(-x)$

Найдем точки, «подозрительные» на вертикальные асимптоты.

Given $\quad 4 \cdot x^2 - 1 = 0$

$\text{Find}(x) \to \left(-\dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{2} \right)$

Область определения функции - $(-\infty, -\dfrac{1}{2}) \cup (\dfrac{1}{2}, +\infty)$.

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{9 - 10 \cdot x^2}{\sqrt{4 \cdot x^2 - 1}} \to \infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{9 - 10 \cdot x^2}{\sqrt{4 \cdot x^2 - 1}} \to \infty$$

Следовательно, прямые $x = -\dfrac{1}{2}$ и $x = \dfrac{1}{2}$ являются вертикальными асимптотами. Так как

$k := \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} \to -5$ $\quad$ $b := \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + 5 \cdot x) \to 0$

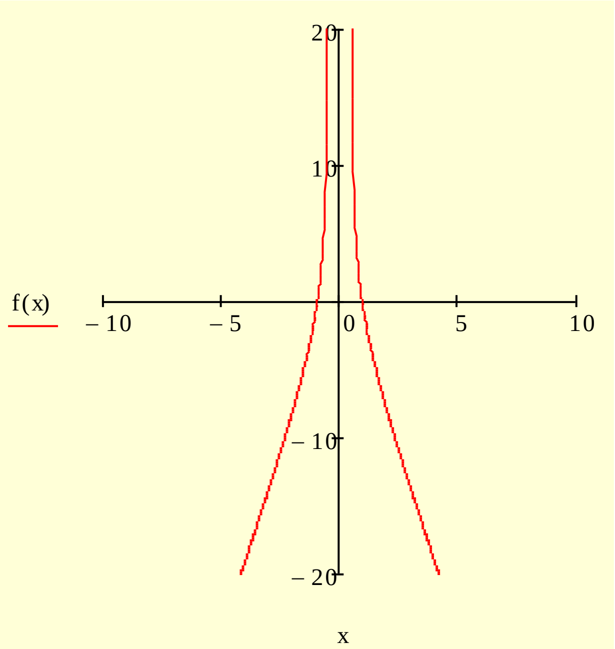
то $y = -5x$ является наклонной асимптотой на $+\infty$, а $y = 5x$ - наклонная асимптота на $-\infty$.

Найдем точки пересечения с осью Ox.

Given $\quad f(x) = 0$

$\text{Find}(x) \to \left(\dfrac{3 \cdot \sqrt{10}}{10} \quad -\dfrac{3 \cdot \sqrt{10}}{10} \right) = (0.949 \quad -0.949)$

Далее строим график функции.



4. Схема исследования функции

1. Найти область определения функции, ее точки разрыва.
2. Найти точки пересечения с осями.
3. Выяснить является ли функция четной, нечетной или общего вида.
4. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. На основании полученных результатов построить график функции.

Задание 3. Провести полное исследование функции $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$ и построить ее график.

Решение. Исследование выполним по предложенной схеме.

$$f(x) := \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$$

1. Область определения функции: $\tilde{o} \in (-\infty, +\infty)$.
2. **Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.**

Given $\quad f(x) = 0$

$$\text{Find}(x) \rightarrow -\frac{3}{2}$$

$$f(0) = -0.587$$

3. Проверим, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

$$f(-x) \rightarrow \left[(x-1)^2\right]^{\frac{1}{3}} - \left[(x-2)^2\right]^{\frac{1}{3}} \qquad f(-x) \neq f(x)$$

Функция общего вида.

4. Асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные, горизонтальные).
Вертикальных асимптот нет, так как нет точек разрыва.

$$k := \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \to 0 \qquad b := \lim_{x \to \infty} f(x) \to 0$$

Прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой на $+\infty$ и $-\infty$.

5. Найдем промежутки монотонности (возрастания и убывания) функции и точки экстремума.

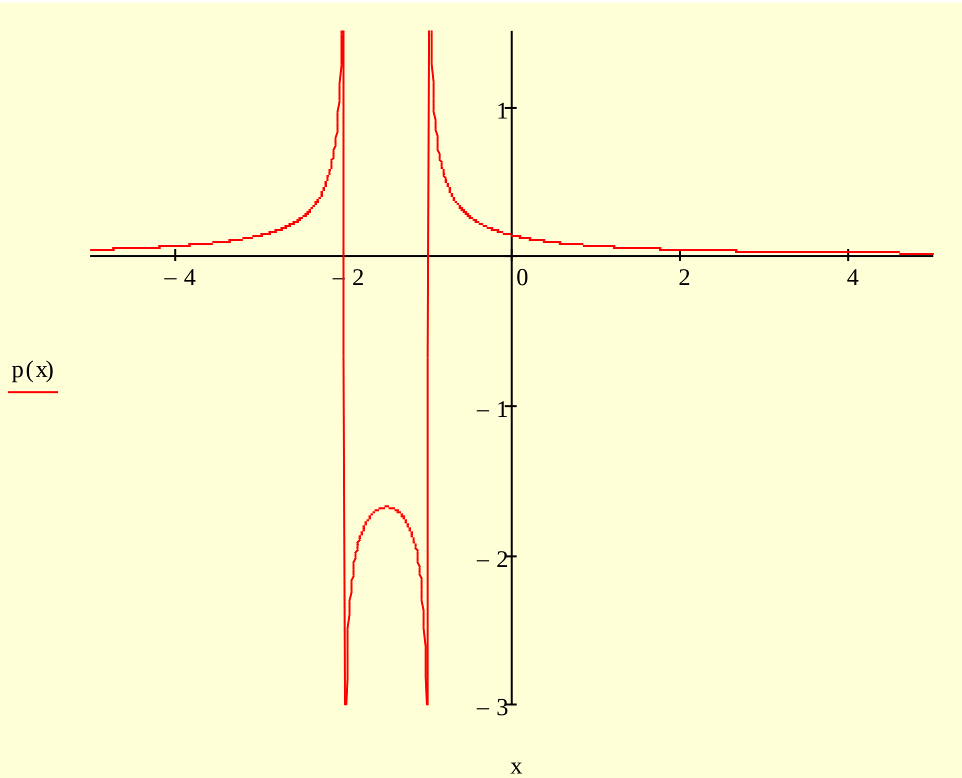
Находим производную первого порядка.

$$p(x) := \frac{d}{dx} f(x) \to \frac{2 \cdot x + 2}{3 \cdot \left[(x+1)^2\right]^{\frac{2}{3}}} - \frac{2 \cdot x + 4}{3 \cdot \left[(x+2)^2\right]^{\frac{2}{3}}}$$

Given $\quad p(x) = 0$

$\quad$ Find(x) $\to$

Производная не обращается в нуль, но не существует в точках $x = -1$ и $x = -2$.



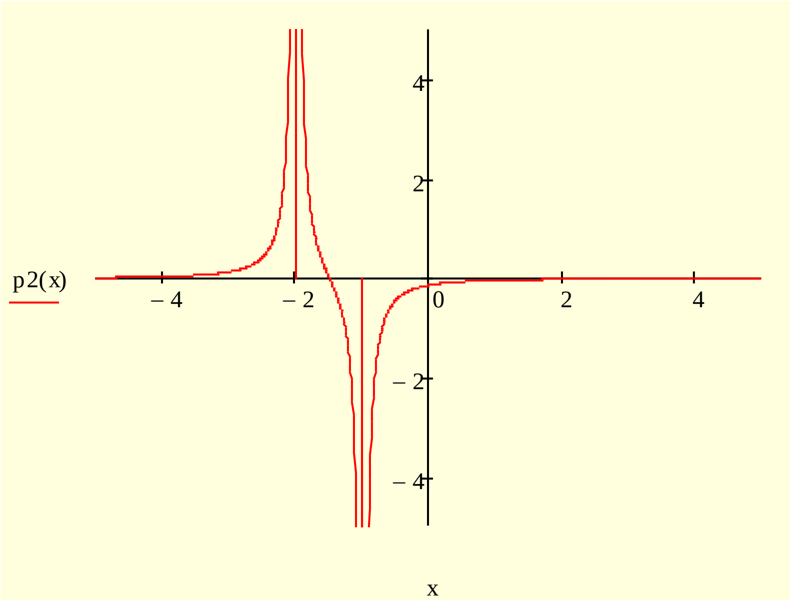
При переходе через точку $x = -1$ производная y' меняет знак с «–» на «+», значит, $x = -1$ – точка минимума функции. При переходе через точку $x = -2$ производная y' меняет знак с «+» на «-», значит, $x = -2$ – точка максимума функции.

$f(-1) = -1 \qquad f(-2) = 1$

Итак, функция возрастает на промежутках $(-\infty,-2)$ и $(-1,+\infty)$, убывает на промежутке $(-2,-1)$.

6. Найдем промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба. Для этого вычислим производную второго порядка и найдем критические точки.

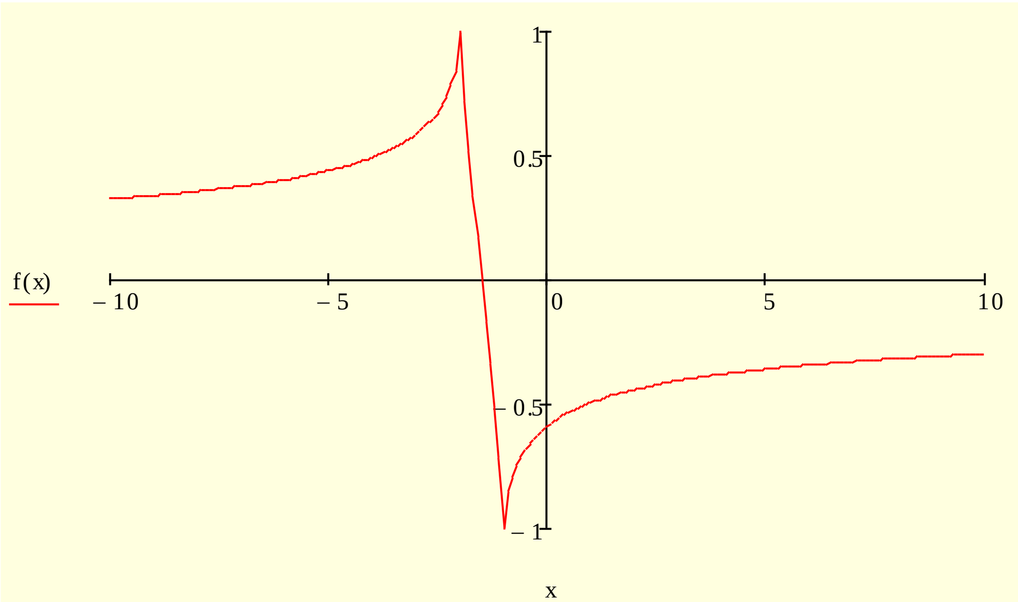
$$p2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x) \qquad p2(x) \rightarrow \frac{2}{3\cdot\left[(x+1)^2\right]^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3\cdot\left[(x+2)^2\right]^{\frac{2}{3}}} - \frac{2\cdot(2\cdot x+2)^2}{9\cdot\left[(x+1)^2\right]^{\frac{5}{3}}} + \frac{2\cdot(2\cdot x+4)^2}{9\cdot\left[(x+2)^2\right]^{\frac{5}{3}}}$$



Получили, что $x=-1$, $x=-2$ и $x=-1.5$ - точки перегиба функции.

$x:=-1.($ $\qquad$ $\text{root}(p2(x),x)=-1.5$ $\qquad$ $p2(-1.5)=0$ $\qquad$ $f(-1.5)=0$

7. Строим график данной функции.



Варианты заданий

Задача 1. Построить график функции с помощью производной первого порядка.

1. $y=\dfrac{12\sqrt[3]{6(x-2)^2}}{x^2+8}$.
2. $y=16x^2(x-1)^2$.
3. $y=6x-6-9\sqrt[3]{(x-1)^2}$.
4. $y=\sqrt[3]{x^2+4x+3}$.
5. $y=27(x^3+x^2)/4-5$.
6. $y=\dfrac{-6\sqrt[3]{6(x+3)^2}}{x^2+10x+33}$.
7. $y=-(x+1)^2(x-3)^2/16$.
8. $y=\dfrac{-12\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{x^2+2x+9}$
9. $y=2-\sqrt[3]{x^2+3x-4}$.
10. $y=\sqrt[3]{x^2-9}$.
11. $y=\dfrac{3\sqrt[3]{6(x-4)^2}}{x^2-4x+12}$.
12. $y=x(12-x^2)/8$.
13. $y=2+\sqrt[3]{8x(x+2)}$.
14. $y=(2x+1)^2(2x-1)^2$.
15. $y=9\sqrt[3]{(x+1)^2}+x$.

Задача 2. Построить график функции с помощью асимптот.

1. $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$.
2. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.
3. $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x+2}$.
4. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.
5. $y=\dfrac{1}{x^2-2x+3}$.
6. $y=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$.
7. $y=\dfrac{1}{x^3+2x^2}$.
8. $y=\dfrac{x-2}{x^2(x+2)}$.
9. $y=\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}$.
10. $y=\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$.
11. $y=\dfrac{1}{x^2-x}$.
12. $y=\dfrac{x^2+x}{x-2}$.
13. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.
14. $y=\dfrac{x+2}{x^2+1}$.
15. $y=\dfrac{1}{x^2-x}$.

Задача 3. Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y=\sqrt[3]{x(x+1)^2}$.

2. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

3. $y=xe^{-x^2}$.

4. $y=x^2(1-x)$.

5. $y=\sqrt{x^2(x-1)}$.

6. $y=\sqrt{x(x+2)}$.

7. $y=\sqrt{x(x-1)}$.

8. $y=\dfrac{x(x+1)}{(x-2)^2}$.

9. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

10. $y=\sqrt[3]{x(x+1)^2}$.

11. $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+3)^2}$.

12. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

13. $y=\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

14. $y=\dfrac{x+2}{x^2+1}$.

15. $y=(x+1)e^{x+1}$.