Практическая работа 6

Линейная аппроксимация в MathCAD

Цель работы: найти линейную функцию, отражающую зависимость между экспериментальными данными.

Допустим, в результате некоторых исследований были получены эмпирические данные. Например, была получена таблица совместно наблюдаемых значений x_i, y_i, где величины $y_1, y_2, \ldots, y_l$ зависят от величин $x_1, x_2, \ldots, x_i$:

x	x_1	x_2		x_i		x_n
y	y_1	y_2		y_i		y_n

Требуется найти некоторую функцию, заданную аналитически и описывающую зависимость эмпирических данных *y* от *x*. Приближенное представление исходной функции с помощью другой функции называется **аппроксимацией**.

В случае ***линейной аппроксимации*** искомая функция *y=f(x)* имеет вид **$y=a_1+a_2x$.**

Согласно методу наименьших квадратов, **нахождение коэффициентов a_1** и **a_2** линейной аппроксимирующей функции сводится к решению системы уравнений (1):

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \qquad (1)$$

где *n* – число измерений.

Решение в MathCAD

1. С помощью панели инструментов **Матрица** формируем вектора с исходными данными:

$$x := \begin{pmatrix} 2.889 \\ 3.265 \\ 3.292 \\ 3.409 \\ 3.468 \\ 3.497 \\ 3.607 \\ 3.695 \\ 3.731 \\ 3.864 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1.286 \\ 1.537 \\ 1.556 \\ 1.673 \\ 1.685 \\ 1.707 \\ 1.79 \\ 1.859 \\ 1.927 \\ 1.995 \end{pmatrix}$$

2. С помощью значка векторизации $\overrightarrow{f(M)}$ вычисляем произведения (*x*x*) и (*x*y*):

$\overrightarrow{(x \cdot x)} =$

	0
0	8.346
1	10.66
2	10.837
3	11.621
4	12.027
5	12.229
6	13.01
7	13.653
8	13.92
9	14.93

$\overrightarrow{(x \cdot y)} =$

	0
0	3.715
1	5.018
2	5.122
3	5.703
4	5.844
5	5.969
6	6.457
7	6.869
8	7.19
9	7.709

3. С помощью значка суммирования векторов $\sum V$ вычисляем суммы:

$$\sum x = 34.717$$
$$\sum \overrightarrow{(x \cdot x)} = 121.235$$
$$\sum y = 17.015$$
$$\sum \overrightarrow{(x \cdot y)} = 59.596$$

4. Составляем матрицы **A** и **B** для решения системы линейных уравнений (1). Решаем систему (1) ***методом обратной матрицы***:

Матрица коэффициентов А

n	Σx_i
Σx_i	Σx_i^2

Столбец св. членов В

Σy_i
$\Sigma x_i y_i$

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 34.717 \\ 34.717 & 121.2355 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 17.015 \\ 59.596 \end{pmatrix} \quad A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -0.8712 \\ 0.741 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем коэффициенты линейной функции: $\boldsymbol{a_1}$**= - 0,8712;** $\boldsymbol{a_2}$ **= 0,741**

Следовательно, уравнение линейной аппроксимации имеет следующий вид:

$$f(x) := -0.8712 + 0.741 \cdot x$$

5. Вычислим значение **коэффициента детерминированности R^2,** применяя встроенную функцию **corr(A, B).**

R^2 = corr(A, B)^2

$$\mathrm{corr}(y, f(x))^2 = 0.9935$$

6. Построим график из экспериментальных точек (***y***) и график линейной аппроксимирующей функции ***f***(***x***):

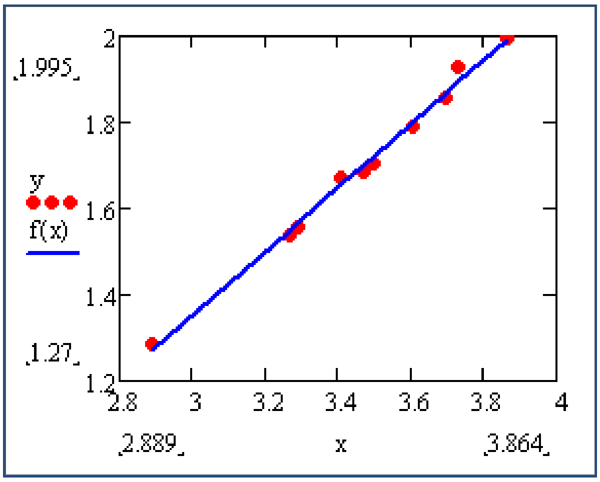

Рисунок 1 – Линейный тренд

При построении графика функции *y* из исходных точек (на данном рисунке он красного цвета**), полученный график необходимо отформатировать: на вкладке Трассировка установить тип линии Точки и увеличить ширину символов (3-4).**

2-й способ решения в MathCAD

Линейную регрессию в системе MathCAD можно также выполнить, применяя специальные встроенные функции:

- **intercept(*x*,*y*)** – вычисляет параметр a_1,
- **slope(*x*,*y*)** – вычисляет параметр a_2.

Полученные значения коэффициентов используются в уравнении линейной регрессии $f(x) = a1+a2*x$

Проведем необходимые расчеты:

$a1 := \mathrm{intercept}(x,y)$ $\quad a1 = -0.8712$

$a2 := \mathrm{slope}(x,y)$ $\quad a2 = 0.7411$

Как видно, значения коэффициентов линейной регрессии, полученные с помощью встроенных функций MatCAD, совпали с расчетными значениями, полученными методом наименьших квадратов.

Следовательно, $y(x) = -0.8712 + 0.7411x$

Вывод: в ходе выполнения данной работы была решена задача линейной аппроксимации в MatCAD двумя способами.

Была получена искомая линейная аппроксимирующая функция:

$y(x) = -0,8712 + 0,7411x$

Вычислен коэффициент детерминированности: $R^2=0,9935$

Поскольку значение R^2 **близко** к **1**, то можно утверждать, что полученная линейная функция **достаточно точно** отражает зависимость между эмпирическими данными.

Примечание.

Если $0.71<R^2<0.9$, то линейная аппроксимирующая функция **недостаточно точно** отражает зависимость между экспериментальными данными.

Если **$R^2<0.7$,** то линейная аппроксимирующая функция **неточно** отражает зависимость между экспериментальными данными (ее нельзя использовать; нужно искать другую функцию, например, квадратичную).

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Примечание: первый столбец – аргумент *x*, второй столбец - функция *y=f(x)*

1	0,013	-12,417	2	3,065	-19,695
	4,760	-33,795		4,016	-22,225
	1,538	0,345		4,417	-28,186
	3,161	-11,662		4,398	-27,889
	4,821	-34,842		1,374	0,972
	3,836	-19,758		1,820	-0,985
	0,869	2,228		4,858	-35,484
	2,883	-8,857		4,387	-27,718
	1,883	-1,325		2,358	-4,404
	3,923	-20,934		2,815	-8,218
3	0,812	13,322	4	1,946	7,030
	2,550	-5,905		0,705	2,416
	3,108	-11,103		0,902	2,177
	4,418	-28,201		0,200	2,320
	0,677	2,437		4,027	-22,379
	1,028	1,942		2,960	-9,603
	4,118	-23,680		2,731	-7,455
	4,929	-36,732		4,531	-29,998
	2,673	-6,944		2,823	-8,293
	1,037	1,923		4,331	-26,853
5	0,081	-6,359	6	0,945	-4,563
	4,160	-24,291		2,935	-9,358
	0,976	2,047		0,434	2,491
	3,723	-18,275		1,954	-1,728
	4,050	-22,705		0,142	2,244
	0,165	2,276		0,482	2,499
	2,889	-8,915		1,803	-0,896
	4,840	-35,171		1,850	-1,145
	1,023	1,953		2,080	-2,493
	2,139	-2,873		3,926	-20,975
7	2,980	7,896	8	0,278	0,117
	0,960	2,077		1,226	1,446
	0,492	2,500		1,661	-0,196
	4,915	-36,484		2,819	-8,256
	4,617	-31,399		0,124	2,217
	1,564	0,236		1,756	-0,655
	0,768	2,356		3,833	-19,718
	1,679	-0,280		2,468	-5,246
	3,946	-21,250		3,256	-12,691
	0,946	2,102		2,142	-2,892

	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]
9	0,351	5,809	10	1,964	0,632
	0,947	2,100		0,129	2,225
	0,511	2,500		3,736	-18,443
	1,190	1,548		0,559	2,493
	2,349	-4,338		4,224	-25,236
	4,593	-31,005		0,399	2,480
	2,686	-7,057		4,798	-34,446
	2,568	-6,053		2,543	-5,848
	4,532	-30,014		4,988	-37,784
	0,911	2,162		1,277	1,293
11	2,256	0,942	12	1,626	1,896
	4,030	-22,422		0,617	2,473
	4,931	-36,768		1,008	1,984
	2,779	-7,888		0,808	2,310
	0,978	2,043		4,071	-23,004
	2,267	-3,745		1,615	0,014
	2,025	-2,151		0,228	2,352
	4,638	-31,746		3,173	-11,790
	0,610	2,476		2,647	-6,719
	1,301	1,217		1,160	1,629
13	4,673	-28,856	14	1,672	3,496
	2,816	-8,228		2,902	-9,039
	2,493	-5,444		3,252	-12,647
	0,715	2,408		2,882	-8,848
	3,802	-19,306		4,374	-27,516
	4,773	-34,017		0,494	2,500
	0,533	2,498		0,609	2,476
	3,930	-21,030		4,007	-22,098
	3,727	-18,327		2,931	-9,320
	4,929	-36,732		1,376	0,965
15	4,248	-22,442	16	0,020	7,800
	3,708	-18,083		1,938	-1,636
	1,002	1,996		0,177	2,291
	0,924	2,140		4,546	-30,240
	4,557	-30,418		4,883	-35,921
	2,630	-6,574		4,682	-32,478
	3,433	-14,705		0,101	2,182
	3,240	-12,515		0,475	2,499
	3,652	-17,370		1,978	-1,869
	1,727	-0,511		4,713	-32,999
17	1,036	3,079	18	4,385	-20,539
	1,359	1,024		2,898	-9,001
	0,649	2,456		3,460	-15,023
	3,115	-11,176		4,937	-36,874
	2,170	-3,078		3,097	-10,989
	2,180	-3,145		2,176	-3,118
	0,227	2,351		1,443	0,722
	0,816	2,300		0,680	2,435
	2,963	-9,633		4,522	-29,853
	0,188	2,305		3,410	-14,436