Министерство образования и науки
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Факультет городского строительства
и жилищно-коммунального хозяйства

Кафедра математики

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

**Рабочая программа, методические указания
и контрольные задания**

Санкт-Петербург
2012

УДК 519.95 (075.8)

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доцент Е. К. Ершов (СПбГАСУ)

Элементы линейной алгебры: рабочая программа, методические указания и контрольные задания / сост.: Г. В. Красоленко, Н. В. Сванидзе, Г. В. Якунина; СПбГАСУ. – СПб., 2012. – 28 с.

Даются методические рекомендации по выполнению индивидуального домашнего задания (контрольной работы № 7) по курсу высшей математики «Элементы линейной алгебры».

Приводятся варианты контрольных работ.

Предназначены для студентов факультета безотрывной формы обучения.

Библиогр.: 4 назв.

Введение

Прежде чем приступать к выполнению контрольных работ, необходимо ознакомиться с «Рабочей программой» и изучить соответствующий теоретический материал по учебникам, указанным в разделе «Рекомендуемая литература».

Во время экзаменационной сессии для студентов безотрывной формы обучения читаются установочные лекции и проводятся практические занятия, которые носят обзорный характер.

К сдаче экзамена или зачета допускаются студенты, контрольные работы которых проверены и зачтены преподавателями кафедры математики.

Следует обратить внимание на оформление контрольной работы. На титульном листе должны быть указаны:

- *фамилия, имя, отчество*;
- *номер студенческого билета (или зачетной книжки)*;
- *специальность*;
- *название дисциплины и номер контрольной работы*;
- *номер варианта.*

Номер варианта, который должен выполнять студент, соответствует *последней цифре* номера студенческого билета (или зачетной книжки). Цифре 0 (ноль) соответствует вариант № 10.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Элементы линейной алгебры

1. Перестановки из n целых чисел и их свойства.
2. Определители 2-го и 3-го порядков и их свойства.
3. Определитель n-го порядка как обобщение определителя второго порядка. Свойства определителя порядка n. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Разложение определителя по элементам ряда (теорема Лапласа). Теоремы аннулирования и замещения. Приемы вычисления определителей.
4. Матрица и ее размеры. Квадратная матрица и ее порядок. Разновидности квадратных матриц (диагональная матрица, скалярная матрица, единичная матрица, верхняя и нижняя треугольные матрицы).
5. Определители квадратных матриц частного вида (диагональной, скалярной, единичной, треугольных). Особенная (вырожденная) и неособенная (невырожденная) квадратные матрицы. Нуль-матрица. Равенство матриц. Сложение матриц и его свойства. Умножение матрицы на скаляр и его свойства. Соответственные матрицы. Умножение соответственных матриц и его свойства. Умножение квадратной матрицы на матрицу-столбец. Матрица, союзная с данной квадратной матрицей. Матрица, обратная к данной квадратной матрице, и ее единственность.
6. Система линейных алгебраических уравнений (с прямоугольной, в частности квадратной, матрицей). Ее матричная запись. Однородная система. Решение системы. Совместная и несовместная системы. Определенная и неопределенная системы. Решение системы с неособенной квадратной матрицей (формула Крамера). Необходимое условие ненулевого решения однородной системы с квадратной матрицей. Метод Гаусса. Схема решения с выбором ведущего элемента. Приведение системы к базисному виду. Нахождение обратной матрицы путем решения n систем уравнений с матрицей, равной данной матрице, при свободных членах, образующих единичную матрицу.
7. Собственные векторы и собственные значения матриц.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 7 ПО ТЕМЕ « ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1} = E$.

Систему линейных уравнений записать в матричной форме; используя обратную матрицу A^{-1}, решить систему.

1. Решение системы линейных уравнений по формулам Крамера

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $(x_1, x_{2,} \ldots x_n)$ (отметим, что число уравнений в системе равно числу неизвестных)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_{n.}. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь a_{ij} – коэффициенты при неизвестных $(1 \le i \le n; 1 \le j \le n)$; $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – свободные члены, или правые части системы.

Решением системы называется такая совокупность значений $x_1, \ldots, x_n$, при подстановке которой в систему (1) все уравнения системы обращаются в тождества.

Матрица этой системы

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\|, \qquad (2)$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, будет квадратной.

Определитель

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

соответствующий матрице системы, называется *определителем системы.*

Теорема Крамера

Если определитель Δ системы (1) не равен нулю, то система имеет единственное решение. Оно определяется по формулам

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (4)$$

где Δ_k – определитель, полученный из определителя Δ заменой элементов k-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Из формулировки теоремы видно, что при решении системы (1) по формулам Крамера (4) нужно предварительно вычислить $(n+1)$ определителей n-го порядка: Δ и Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

В соответствии с методическим требованием задания 1) при вычислении определителей необходимо использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей.

Замечание. *Правило Саррюса* можно использовать только для проверки правильности полученного вами результата. Оно применяется только для вычисления *определителей 3-го порядка*!

По теореме разложения определитель любого порядка n выражается через n определителей $(n-1)$-го порядка. Применяя эту теорему несколько раз, можно привести исходный определитель к некоторому числу определителей второго порядка, вычисление которых не представляет труда. Однако для упрощения вычислений целесообразно предварительно преобразовать определитель так, чтобы в одной из его строк (или столбце) все элементы, кроме одного, обратились в нуль. Тогда данный определитель сведется к одному определителю более низкого порядка. Указанное преобразование определителя можно выполнить, опираясь на его свойства, в частности на следующее свойство: *величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умножив их предварительно на один и тот же множитель.*

Приведем формулировку теоремы Лапласа о разложении определителя, но сначала напомним определение минора и алгебраического дополнения элемента определителя.

Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя

Рассмотрим определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Выделим в определителе Δ i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}:

$$\begin{array}{cl}
\left|\begin{array}{ccc|c|cc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right| & \leftarrow \textit{строка номер } i \\
\uparrow & \\
\textit{столбец номер } j &
\end{array}$$

Если в определителе Δ мы вычеркнем i-ю строку и j-й столбец, то получим определитель порядка $n-1$ (то есть имеющий порядок, на единицу меньший по сравнению с исходным определителем), называемый *минором* элемента a_{ij} определителя Δ. Будем обозначать *минор* элемента a_{ij} символом Δ_{ij}.

Определение. А*лгебраическим дополнением* элемента a_{ij} определителя Δ называется минор Δ_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$ и обозначаемый символом A_{ij}. Согласно определению получим

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Разложение определителя по элементам его строки (или столбца)

Теорема разложения (теорема Лапласа)

Всякий определитель равен сумме парных произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Для i-й строки $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

или для j-го столбца $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{lj}A_{lj}.$$

Напомним еще раз, что теорема разложения позволяет заменить вычисление одного определителя n-го порядка вычислением n определителей $(n-1)$-го порядка.

Однако для упрощения вычислений целесообразно для определителей высоких порядков использовать метод «размножения нулей», основанный на следующем свойстве: *величина определителя не изменится, если к элементам любой его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умножив их предварительно на один и тот же множитель.*

Его идея:

- сначала «размножить нули» в некоторой строке (или столбце), т. е. получить строку (или столбец), в которой только один элемент не равен нулю, остальные нули;
- затем разложить определитель по элементам этой строки (или столбца).

Следовательно, на основании теоремы разложения исходный определитель равен произведению ненулевого элемента на его алгебраическое дополнение.

Приступим непосредственно к решению нашей системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

Это система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2 и x_3.

Составим матрицу этой системы (ее элементами являются коэффициенты при неизвестных) и матрицу-столбец свободных членов

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}. \qquad (6)$$

Для того чтобы воспользоваться формулами Крамера (4), необходимо, чтобы определитель матрицы A не равнялся нулю, то есть $\Delta = \det A \neq 0$.

Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Для этого сохраним первую строку определителя и «размножим нули» в первом столбце: из элементов второй строки вычтем элементы первой строки, предварительно умноженные на 2, и одновременно из элементов третьей строки вычтем элементы первой строки, предварительно умноженные на 3.

При таких преобразованиях величина определителя не изменится,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$$

Теперь воспользуемся теоремой Лапласа и разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}.$$

В результате вычисление определителя третьего порядка свели к вычислению одного определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Таким образом,

$$\Delta = (-3)(-4) - (-5)(-2) = 12 - 10 = 2 \neq 0,$$

и теорема Крамера утверждает, что решение нашей системы существует и единственно, то есть система линейных уравнений определенная.

Аналогичным образом вычисляем значения вспомогательных определителей Δ_1, Δ_2 и Δ_3.

Определитель Δ_1 получается из определителя системы Δ заменой первого столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вновь сохраним первую строку определителя и «размножим нули» в первом столбце. Для этого из элементов второй строки вычтем элементы первой строки и одновременно из элементов третьей строки вычтем элементы первой строки. Разлагая определитель по элементам первого столбца, получаем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\,2 - (-2)\,2 = -2 + 4 = 2.$$

Найдем определитель Δ_2, который получается из определителя системы Δ заменой второго столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(1 \cdot 2 - (-2)\,2) = -(2+4) = -6\,.$$

И, наконец, вычислим определитель Δ_3, который получается из определителя системы Δ заменой третьего столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 - (-1)\,2 = 2 + 2 = 4\,.$$

Используя формулы Крамера (4), находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1\,, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{2} = -3\,, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

Сделаем проверку. Для этого подставим найденные значения $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ и $x_3 = 2$ в левую часть каждого из уравнений системы:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 1 - 6 + 6 = 1\,,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \cdot 1 + (-3) + 2 = 2 - 3 + 2 = 1\,,$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 3 - 12 + 10 = 1\,.$$

В результате получили три верных равенства.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.

2. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Формулы Крамера весьма важны в теоретическом отношении, так как позволяют найти явные выражения неизвестных через коэффициенты и свободные члены системы. Однако для решения системы с численными коэффициентами применять формулы Крамера нецелесообразно, особенно при больших n, поскольку имеются менее трудоемкие способы решения. Одним из них является *метод Гаусса*, называемый также *методом последовательного исключения неизвестных.*

Идея метода Гаусса сводится к следующему:

а) сначала с помощью элементарных преобразований *последовательно исключают неизвестные* из уравнений с таким расчетом, чтобы привести решаемую систему уравнений к равносильной системе с верхней треугольной матрицей (этот этап работы называется *прямым ходом метода Гаусса*);

б) затем решают полученную систему уравнений с верхней треугольной матрицей, начиная с последнего уравнения (этот этап работы называется *обратным ходом метода Гаусса*).

Напомним, что две системы с одним и тем же набором неизвестных называются *равносильными* в двух случаях: 1) каждое решение первой системы является решением второй и наоборот; 2) обе системы несовместны. Равносильные системы должны иметь одинаковый набор неизвестных, но число уравнений может не совпадать.

К *элементарным преобразованиям*, которые переводят систему в *равносильную,* относятся:

1) обмен местами уравнений в системе;

2) умножение уравнения на любое число, отличное от нуля;

3) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного предварительно на произвольное число.

Универсальный метод Гаусса имеет несколько вычислительных схем. Рассматриваемая здесь схема называется *схемой единственного деления.*

Применим ее к решению нашей системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\,, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1\,, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1\,. \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса

Первый шаг. Выделяем в данной системе первое уравнение и делим его на коэффициент при x_1, называемый *ведущим элементом* первого шага:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \tag{8}$$

(в нашем случае коэффициент при x_1 равен 1).

С помощью полученного уравнения исключаем неизвестное x_1 из всех последующих уравнений системы. Для этого умножаем уравнение (8) на 2 и вычитаем из второго уравнения системы, далее умножаем уравнение (8) на 3 и вычитаем из третьего уравнения системы.

В результате получим равносильную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ \quad\;\; -3x_2 - 5x_3 = -1, \\ \quad\;\; -2x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases} \tag{9}$$

Второй шаг. Выделяем в системе (9) второе уравнение и делим его на коэффициент –3 при x_2, называемый *ведущим элементом второго шага*:

$$x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{1}{3}. \tag{10}$$

В результате получим равносильную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ \qquad\;\; x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{1}{3}, \\ \quad\;\; -2x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases}$$

С помощью полученного уравнения (10) исключаем неизвестное x_2, для этого умножаем уравнение (10) на 2 и прибавляем к третьему уравнению системы.

В результате получим равносильную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ \qquad\;\; x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{1}{3}, \\ \qquad\quad\; -\frac{2}{3}x_3 = -\frac{4}{3}. \end{cases} \tag{11}$$

Третий шаг. Выделяем в системе (11) третье уравнение и делим его на коэффициент $-\frac{2}{3}$ при x_3, называемый *ведущим элементом третьего шага.*

В результате получим равносильную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ \qquad\;\; x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{1}{3}, \\ \qquad\qquad\quad\; x_3 = 2. \end{cases} \tag{12}$$

На этом заканчивается *прямой ход метода Гаусса.*

Обратный ход метода Гаусса

Решаем систему уравнений (12), начиная с последнего уравнения:

$$x_3 = 2,$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}x_3 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} \cdot 2 = -3,$$

$$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 - 2(-3) - 3 \cdot 2 = 1.$$

Ответ. $x_1 = 1,\quad x_2 = -3,\quad x_3 = 2.$

Замечание. Важной характеристикой всякого численного метода служит число умножений и делений, необходимых для получения решения (операции сложения и вычитания обычно не учитываются, так как они менее трудоемки). Можно подсчитать, что число умножений и делений, необходимых для решения системы из n уравнений методом единственного деления, равно $\frac{1}{3}(n^3+3n^2-n)$. Отметим, что оно приблизительно в n раз меньше числа аналогичных операций, необходимых для решения системы из n уравнений по формулам Крамера.

3. Обратная матрица и ее вычисление с помощью союзной матрицы

Пусть A – квадратная неособенная матрица, то есть $\det(A) \neq 0$,

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Матрица называется *обратной* матрице A, если ее произведение на матрицу A и справа, и слева равно единичной матрице E. Обратную матрицу будем обозначать A^{-1}. Таким образом, A^{-1} – обратная для A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \cdot$$

Вычислим алгебраические дополнения A_{ik} каждого элемента a_{ik} в определителе матрицы A. Из полученных алгебраических дополнений A_{ik} построим матрицу

$$C = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Матрица C называется *союзной*, или *присоединенной*, по отношению к матрице A.

*Отметим, что в i-й **строке** союзной матрицы C стоят алгебраические дополнения элементов i-го **столбца** матрицы A.*

Тогда обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} C .$$

Найдем обратную матрицу для квадратной неособенной матрицы порядка 3 нашей системы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Напомним, что определитель матрицы A был уже найден в п. 1): $\Delta = 2$ ·

Вычислим алгебраические дополнения A_{ik} каждого элемента a_{ik} в определителе матрицы A и составим союзную матрицу

$$C = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения A_{ik} каждого элемента a_{ik} в определителе матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5-4 = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(10-3) = -7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8-3 = 5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\Delta_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=-(10-12)=2\,,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\Delta_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&5\end{vmatrix}=5-9=-4\,,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\Delta_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-(4-6)=2\,,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\Delta_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=2-3=-1\,,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\Delta_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=-(1-6)=5\,,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\Delta_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=1-4=-3\,.$$

Составим союзную матрицу

$$C=\begin{Vmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&2&-1\\-7&-4&5\\5&2&-3\end{Vmatrix},$$

тогда обратная матрица имеет вид

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}C=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}1&2&-1\\-7&-4&5\\5&2&-3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0{,}5&1&-0{,}5\\-3{,}5&-2&2{,}5\\2{,}5&1&-1{,}5\end{Vmatrix}.$$

Проверим, выполняется ли равенство $A^{-1}A=E$.

Напомним, что *произведением матрицы* A *с размерами* $m\times n$ *на матрицу* B *с размерами* $m\times q$ *(такие матрицы называются соответственными) называется матрица* $P=AB$ *с размерами* $m\times q$*, элементы которой* p_{ik} *определяются формулами*

$$p_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}b_{\alpha k}\,, \qquad (13)$$

где $i=1,2,\ldots,m$ и $k=1,2,\ldots,q$.

Матрица $P=AB$ имеет столько строк, сколько их содержит первый сомножитель A, и столько столбцов, сколько их содержит второй сомножитель B.

Правило перемножения матриц часто называют правилом *«строка на столбец»*, так как по формуле (13) элемент p_{ik} произведения равен сумме парных произведений элементов i-й строки матрицы A на элементы k-го столбца матрицы B.

$$A^{-1}A=\begin{Vmatrix}0{,}5&1&-0{,}5\\-3{,}5&-2&2{,}5\\2{,}5&1&-1{,}5\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1&2&3\\2&1&1\\3&4&5\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}\frac{1}{2}\cdot1+1\cdot2+\left(-\frac{1}{2}\right)3 & \frac{1}{2}\cdot2+1\cdot1+\left(-\frac{1}{2}\right)4 & \frac{1}{2}\cdot3+1\cdot1+\left(-\frac{1}{2}\right)5\\ \left(-\frac{7}{2}\right)1+(-2)\cdot2+\frac{5}{2}\cdot3 & \left(-\frac{7}{2}\right)2+(-2)\cdot1+\frac{5}{2}\cdot4 & \left(-\frac{7}{2}\right)3+(-2)\cdot1+\frac{5}{2}\cdot5\\ \frac{5}{2}\cdot1+1\cdot2+\left(-\frac{3}{2}\right)3 & \frac{5}{2}\cdot2+1\cdot1+\left(-\frac{3}{2}\right)4 & \frac{5}{2}\cdot3+1\cdot1+\left(-\frac{3}{2}\right)5\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}=E\,.$$

Ответ. $$A^{-1}=\begin{Vmatrix}0{,}5&1&-0{,}5\\-3{,}5&-2&2{,}5\\2{,}5&1&-1{,}5\end{Vmatrix}.$$

4. Матричная запись системы линейных уравнений (1). Решение системы линейных уравнений в матричной форме

Пусть A – матрица этой системы, составленная из коэффициентов при неизвестных, размером $n \times n$; X – матрица-столбец, составленная из неизвестных, размером $n \times 1$ и B – матрица-столбец, составленная из свободных членов системы, размером $n \times 1$:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{Vmatrix}.$$

Тогда на основании правила умножения матриц систему (1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B.$$

Если матрица A неособенная, то есть $\det(A) \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1} и решение системы (1) можно представить в матричной форме

$$X = A^{-1}B.$$

Представим в матричной форме систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

и решим ее в матричной форме.

Это система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2 и x_3.

Составим матрицу этой системы (ее элементами являются коэффициенты при неизвестных) и матрицу-столбец свободных членов

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}. \qquad (14)$$

Тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{Vmatrix} 0,5 & 1 & -0,5 \\ -3,5 & -2 & 2,5 \\ 2,5 & 1 & -1,5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0,5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-0,5) \cdot 1 \\ (-3,5) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 2,5 \cdot 1 \\ 2,5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1,5) \cdot 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.

Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы применяется довольно широко. Известный в строительной механике прием построения решения с использованием так называемых чисел влияния фактически является способом решения системы с использованием обратной матрицы. При этом числа влияния являются элементами обратной матрицы.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7 ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

Вариант № 1

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1}=E$; систему линейных уравнений записать в матричной форме; используя обратную матрицу A^{-1}, решить систему.

Вариант № 2

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1}=E$; систему линейных уравнений записать в матричной форме, используя обратную матрицу A^{-1}, решить систему.

Вариант № 3

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1}=E$; систему линейных уравнений записать в матричной форме; используя обратную матрицу A^{-1}, решить систему.

Вариант № 4

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1}=E$; систему линейных уравнений записать в матричной форме; используя обратную матрицу A^{-1} , решить систему.

Вариант № 5

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1}=E$; систему линейных уравнений записать в матричной форме; используя обратную матрицу A^{-1}, решить систему.

Вариант № 6

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1}=E$; систему линейных уравнений записать в матричной форме; используя обратную матрицу A^{-1}, решить систему.

Вариант № 7

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1}=E$; систему линейных уравнений записать в матричной форме; используя обратную матрицу A^{-1}, решить систему.

Вариант № 8

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1}=E$; систему линейных уравнений записать в матричной форме; используя обратную матрицу A^{-1}, решить систему.

Вариант № 9

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -12, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1} = E$; систему линейных уравнений записать в матричной форме; используя обратную матрицу A^{-1}, решить систему.

Вариант № 10

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -9, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

тремя методами:

1) по формулам Крамера (при вычислении определителей следует использовать свойства определителей и теорему Лапласа о разложении определителей. Правило Саррюса использовать запрещается);

2) методом Гаусса;

3) для матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, найти обратную матрицу A^{-1} и проверить справедливость равенства $AA^{-1} = E$; систему линейных уравнений записать в матричной форме; используя обратную матрицу A^{-1}, решить систему.

Рекомендуемая литература

1. *Натансон И. П.* Краткий курс высшей математики / И. П. Натансон. – СПб.: Лань, 2005.

2. *Клиот-Дашинский М. И.* Алгебра матриц и векторов / М. И. Клиот-Дашинский. – СПб.: Лань, 1998.

3. *Основы* линейной алгебры: метод. указания для студентов всех специальностей и всех форм обучения / сост. Л. Е. Морозова, О. В. Соловьева; СПбГАСУ. – СПб., 2006.

4. *Линейная* алгебра: метод. указания к выполнению самостоятельной работы для студентов I курса / сост. М. И. Клиот-Дашинский. – Л.: ЛИСИ, 1988.

Оглавление

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Рабочая программа, методические указания
и контрольные задания

Составители: **Красоленко** Георгий Владимирович,
Сванидзе Николай Владимирович,
Якунина Галина Владимировна

Редактор А. В. Афанасьева
Корректор К. И. Бойкова
Компьютерная верстка И. А. Яблоковой

Подписано к печати 01.11.12. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 1,6. Тираж 1500 экз. Заказ 149. «С» 80.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.
Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 5.