

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

Кафедра информатики и компьютерных технологий

ИНФОРМАТИКА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

*Методические указания по выполнению курсовой работы
для студентов направления подготовки 130400, специализации
«Электрификация и автоматизация горного производства»*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2012

ИНФОРМАТИКА. Численное решение систем дифференциальных уравнений при расчете переходного процесса в электрических цепях: Методические указания по выполнению курсовой работы / Национальный горный университет «Горный». Сост. А.И. Коварова. СПб, 2012. 43 с.

Методические указания содержат варианты заданий для курсовой работы, подробные пояснения и рекомендации по выполнению расчетов и различных приложений, а также требования и рекомендации по составлению и оформлению пояснительной записки. Приведены математические модели предлагаемых заданий. Кратко изложен теоретический материал по тем численным методам вычисления, которые необходимо использовать для решения предложенных заданий. Даны рекомендации по составлению алгоритмов и программ.

Методические указания предназначены для студентов направления подготовки 130400 «Горное дело», специализации «Электрификация и автоматизация горного производства».

Табл.9. Илл.7. Библиогр.: 8 назв.

Научный редактор проф. А.Б.Маховиков

© Национальный горный университет «Горный», 2012

ВВЕДЕНИЕ

Ускорение темпов научно-технического прогресса предъявляет повышенные требования к выпускникам технических университетов. В связи с этим, одной из задач высшей школы следует считать выпуск специалистов, не только хорошо освоивших дисциплины своего направления подготовки, но и умело сочетающих знания специальности с широким использованием компьютерной техники.

Подготовка студентов по специальности «Электрификация и автоматизация горного производства» включает в себя ряд сложных дисциплин, таких как теоретические основы электротехники, электроника, микропроцессорная автоматизация и управление технологическими процессами и др. Во многих случаях процессы, изучаемые в этих дисциплинах, описываются дифференциальными уравнениями. Дифференциальные уравнения высших порядков и системы дифференциальных уравнений, как правило, имеют аналитическое решение, если они линейны. Математические модели реальных процессов могут быть довольно сложными, описываются системами неоднородных дифференциальных уравнений, в том числе и нелинейными. Получить решение задачи в аналитической форме бывает практически невозможно. В этом случае прибегают либо к упрощенным моделям, но, чаще, к численным методам решения систем дифференциальных уравнений.

Основное назначение курсовой работы состоит в том, чтобы на примере решения задачи численного дифференцирования закрепить знания, полученные в курсе «Информатика»; расширить и закрепить практические навыки работы в среде базовых информационных технологий, таких как: MS Word, MS Excel, MathCAD и в среде объектно-ориентированного языка программирования. приобрести навыки постановки задач, построения математических моделей и применения численных методов вычисления. Научить применять полученные знания по составлению вычислительных алгоритмов и программ в своей основной специальности; привить вкус к использованию вычислительной техники в будущей профессиональной деятельности.

В качестве учебной задачи курсовой работы предусматривается проведение расчетов переходных процессов, возникающих в

Задание по курсовой работе выдается на второй - третьей неделе от начала занятий. При выдаче задания устанавливаются сроки выполнения отдельных этапов. Выполняя работу, студент обязан не реже одного раза в месяц информировать руководителя работы о продланных этапах и представлять материал на проверку.

При выставлении оценки за курсовую работу учитывается качество отчета, знание студента по существу работы, оригинальность и творческий подход к решению, а также своевременность выполнения всей работы.

ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Отчёт по курсовой работе должен быть оформлен в соответствии с установленными в Университете правилами оформления курсовых и других аттестационных работ [6] и содержать следующие части:

- Титульный лист /в соответствии со стандартом.
- Стандартный лист с заданием.
- Аннотацию на русском и иностранном языке.
- Содержание (оглавление).
- Введение.
- Математическое описание алгоритма вычисления со всеми расчетными формулами, необходимыми для решения заданной задачи.
- Подробное описание решения задачи в конкретном приложении с графическим материалом.
- Блок-схему алгоритма решения задачи, если пишется программа на объектно-ориентированном языке программирования, и описание работы программы.
- Проверку решения с использованием встроенных стандартных средств и графический материал.
- Анализ результатов и выводы.
- Список использованной литературы.
- Приложения – полные листы приложений с расчетами и текст программы с комментариями.

Раздел «Введение», как правило, содержит краткую информацию об электрической схеме, с иллюстрацией, таблицу исходных данных и общую постановку задачи.

Последующие разделы содержат математическое описание алгоритма решения, которому предшествуют краткие теоретические сведения, и это, ни в коем случае, не должно быть прямым и бездумным копированием текста методического пособия. Поскольку поставленная задача решается различными методами, каждому разделу с расчетами предшествует математическое описание соответствующего метода и расчетные формулы. Все это должно быть связано с конкретным заданием, в том числе и обозначения.

При использовании ПК, формализация процесса решения задачи требует записи всех формул, необходимых для вычисления каждого параметра, и определения последовательности применения формул.

Описание решения задачи с помощью табличного процессора MS Excel должно демонстрировать этапы расчетов с необходимыми для их понимания комментариями. В отчете приводятся фрагменты рабочих листов в режиме отображения данных и в режиме отображения формул, либо только в режиме отображения данных со вставленными рядом Excel-формулами, а так же все графики. Полные расчеты, выполненные в табличном процессоре MS Excel, представляются в разделе «Приложение».

Описание решения задачи в математическом пакете MathCAD также должно демонстрировать этапы расчетов с необходимыми комментариями, пояснениями и графиками. Полные расчеты, выполненные в математическом пакете MathCAD, помещают в разделе «Приложение».

Описание решения задачи с использованием одного из объектно-ориентированных языков программирования предшествует описанию алгоритма, структурированное по принципу "сверху вниз". Это означает, что сначала рассматриваются укрупненные этапы решения задачи. Затем каждый "сложный" этап разбивается на более мелкие шаги и т. д. Процесс детализации завершается, когда все шаги становятся очевидными с точки зрения программирования, т.е. их можно представить либо одним оператором, либо небольшим количеством операторов, либо готовой подпрограммой (макросом).

Программа должна быть доступна для понимания любому человеку, знакомому с программированием. Это означает, что она содержит достаточное количество комментариев, идентификаторы имеют мнемонический смысл, а цель достигается простейшими средствами.

Поскольку исходных данных мало, их рекомендуется задать оператором ввода, используя стандартное окно ввода с соответствующим приглашением. Это особенно удобно, когда необходимо рассчитать несколько вариантов, с различными исходными данными. При использовании Visual Basic for Application (VBA) результаты вычислений, в форматированном виде, выводятся в виде таблиц на отдельные листы Excel. Столбцы должны иметь текстовые заголовки. Все графики строятся с использованием одного макроса, путем соответствующего обращения.

В тексте программы (в комментариях) следует указать: фамилию, инициалы студента, шифр учебной группы и номер варианта. Распечатка полного текста программы помещается в разделе «Приложение».

Точность представлений выводимых значений должна быть одинаковой во всех вариантах расчетов и выбирается в соответствии с физическим смыслом вычисляемых параметров.

Далее приводится описание проверки правильности результатов расчетов, выполненное в математическом пакете MathCAD, с использованием стандартных функций.

Завершающий раздел – «Выводы/Заключение» содержит сравнительный анализ результатов работы, а также смысловые оценки и выводы.

В конце отчета приводится список использованной литературы. Этот список следует составлять согласно общим правилам.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Напомним основные определения из курса высшей математики. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, её функцию и

производные различных порядков этой функции. Наивысший из порядков производной определяет порядок дифференциального уравнения. Обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В курсовой работе будем рассматривать только дифференциальные уравнения первого порядка. Общий вид такого уравнения:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

В частном случае уравнение (1) может не содержать x или y (или их обоих), но произвольная y' должна содержаться обязательно, иначе это не будет дифференциальным уравнением.

Общим решением (общим интегралом) дифференциального уравнения (1) называется такая функция $\varphi(x, C)$, (где C — произвольная постоянная), которая, будучи подставлена в дифференциальное уравнение вместо y (разумеется, при этом вместо y' подставляется $\varphi'(x, C)$), обращает (1) в тождество.

Решения, которые получают из общего решения $\varphi(x, C)$ путем закрепления постоянной C , называются частными. Таким образом, общее решение содержит в себе бесчисленное множество частных решений.

Как известно из курса высшей математики (и в чем можно было убедиться, выполняя лабораторные работы по информатике), далеко не для всех интегралов может быть определена первообразная через элементарные функции, т.е. общий интеграл может быть не берущимся. Следовательно, получение общего решения дифференциального уравнения невозможно.

В таких случаях, задав условия, которые закрепляют значение постоянной C , можно получить частное решение дифференциального уравнения численными методами вычисления, т.е. для каждого значения x_i найти соответствующее значение y_i и получить зависимость $y(x)$ в табличной форме (табл.1).

Таблица 1

X	x_0	x_1	...	x_i	...	x_n
Y	y_0	y_1	...	y_i	...	y_n

По табличным данным, как правило, строится график функции $y(x)$. Далее можно подобразить аналитическую функцию (аппроксимирующую функцию), которая будет достаточно удовлетворительно описывать получившийся график, но в данном методическом пособии задача подбора аппроксимирующей функции не рассматривается.

Чтобы единственным образом закрепить постоянную C , можно задать значение искомой функции y в некоторой точке $x = x_0$, т.е. задать значение $y_0 = y(x_0)$.

В этом случае решение задачи интегрирования дифференциального уравнения (1) называется решением задачи Коши, а значение $y_0 = y(x_0)$ - начальным значением (начальным условием).

Помимо задания начального значения y_0 , необходимо задать последовательность значений аргумента $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ в порядке монотонного возрастания или убывания их величин, начиная с x_0 .

Интервал между соседними значениями аргумента $h = x_i - x_{i+1}$ называется шагом интегрирования. Часто шаг интегрирования выбирают постоянным. Однако, если дифференциальное уравнение описывает быстро протекающий процесс, и значение производной вблизи точки x_0 велико, но по мере изменения аргумента x величина производной падает, можно рекомендовать переменный шаг интегрирования.

Обобщим сказанное и повторим алгоритм вычисления.

Прежде всего, в таблице 1 должны быть заданы значения первой пары чисел (x_0, y_0) . Если дифференциальное уравнение описывает какой-то реальный физический процесс (явление), значения (x_0, y_0) полностью определяются из физики описываемого процесса, т.е. значения задаются исходя из физических законов.

Затем следует задать шаг интегрирования. Это ответственный этап, поскольку величина шага определяет (как будет показано в дальнейшем) точность (достоверность) вычисляемых значений искомой функции. Более того, в случае серьезной ошибки при выборе

шага интегрирования, можно получить абсурдные результаты или сбоя в работе программы.

На этом же этапе следует ограничить пределы изменения переменной x конкретным отрезком $[x_0, x_n]$, либо выбрать другой критерий для окончания вычислений функции $y_i = y(x_i)$, чтобы получить исчисленное количество элементов таблицы 1.

Далее, используя выбранный метод численного дифференцирования, последовательно вычисляются значения функции y_i .

Существует достаточно много численных методов решения задачи Коши. Они различаются сложностью алгоритма и точностью получаемого решения, но во всех методах реализуется идея рекуррентного вычисления. Вычисление следующей точки y_{i+1} осуществляется через ранее найденное значение y_i , путем добавления к этому значению некоторого приращения Δy_i .

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \quad (2)$$

Задача всех методов численного дифференцирования - разделить, возможно, правильно, величину приращения на каждом i -том шаге и, таким образом, правильно определить числовые значения искомой функции.

Различные методы заключаются в различии подходов к определению и вычислению приращения Δy_i .

Совершенно очевидно, что найти это приращение на каждом шаге с абсолютной точностью невозможно (ведь функция $y(x)$ неизвестна). Следовательно, достоинством (или, наоборот, недостатком) того или иного метода является получаемая достоверность вычисления.

Как правило, чем сложнее алгоритм вычисления приращения Δy_i , тем достовернее получаемое решение. В конкретной ситуации мы всегда ищем компромисс между сложностью алгоритма и точностью (правильностью) получившихся вычислений.

Одним из первых методов численного решения дифференциального уравнения был метод Эйлера, рассматривавшийся в курсе информатики. Для записи расчетной формулы вычисления приращения

щения Δy_i методом Эйлера преобразуем дифференциальное уравнение (1), выделив производную y' в явном виде.

$$y' = f(x, y). \quad (3)$$

В таком случае приращение Δy_i определяется по формуле:

$$\Delta y_i = h \cdot f(x_i, y_i).$$

Метод Эйлера - самый простой метод численного дифференцирования, но точность (достоверность) получаемого решения не высока. Если шаг изменения аргумента x_i выбрать постоянный, $h = x_{i+1} - x_i - \text{const}$, то погрешность вычисления методом Эйлера на каждом i -том шаге $- R_i$, определяется:

$$R_i = 0,5 h^2 y''(x_j) \text{ где } x_i \leq x_j \leq x_{i+1}.$$

Погрешность пропорциональна h^2 , следовательно, для получения удовлетворительного результата необходимо выбрать очень маленький шаг и, соответственно, проводить очень много вычислений - получается громоздкая таблица. Поэтому простой метод Эйлера, практически, не применяется.

Существует улучшенный метод Эйлера, в котором достоверность правильного определения приращения существенно выше, однако на практике, в качестве численного метода гораздо чаще применяется метод Рунге-Кутты.

Метод Рунге-Кутты имеет несколько разновидностей формул различного порядка для определения приращения Δy_i . Перейдем к более подробному рассмотрению этого метода.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка вида (3).

Для заданных значений аргумента $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, расположенных в порядке монотонного изменения, требуется вычис-

лить все значения $y_i = y(x_i)$ функции $y = y(x)$, являющейся решением уравнения (3), если известно начальное значение $y_0 = y(x_0)$.

Как указывалось выше, решение ищется по общей рекуррентной формуле $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Для вычисления приращения Δy_i , существует несколько видов формул под названием формулы Рунге-Кутты m -го порядка. Величина порядка определяется количеством промежуточных (вспомогательных) слагаемых, средневзвешенная сумма которых определяет окончательную величину приращения Δy_i на каждом шаге вычисления. При этом вклад каждого слагаемого в общую сумму может быть различным.

В большинстве случаев изменением аргумента x_i производится с постоянным шагом (обозначим h). Тогда формула Рунге-Кутты первого порядка ($m = 1$) совпадает с простой формулой Эйлера и имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i).$$

Формулы второго порядка ($m = 2$) совпадают с формулой улучшенного метода Эйлера.

$$y_{i+1} = y_i + 0,5 \cdot (k_1 + k_2), \text{ где}$$

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i), \quad k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1).$$

При вычислении по формуле второго порядка учитывается значение производной в i -ой точке и, в будущей, $i + 1$ -ой. Точность вычисления существенно лучше, чем в 1-ом случае, но процесс перехода от i -ой точки к $i + 1$ -ой никак не учитывается.

Формулы Рунге-Кутты третьего порядка ($m = 3$), записываются следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 4k_2 + k_3}{6}, \quad (4)$$

$$\text{где } k_1 = h \cdot f(x_i, y_i);$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right);$$

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ

При установившихся (стационарных) режимах в цепях постоянного напряжения токи неизменны во времени, а в цепях переменного напряжения они представляют собой периодические функции времени. Установившиеся режимы при заданных и неизменных параметрах цепи полностью определяются только источником энергии. Следовательно, источники постоянного напряжения (или тока) в стационарном режиме создают в цепи постоянный ток, а источники переменного напряжения (или тока) — переменный ток той же частоты, что и частота источника энергии.

Под переходным процессом или режимом в электрических цепях понимается процесс перехода цепи из одного установившегося состояния (режима) в другое стационарное состояние.

Переходные процессы возникают при любых изменениях режима электрической цепи: при подключении и отключении цепи, при изменении нагрузки, при возникновении аварийных режимов (короткое замыкание, обрыв провода и т.д.). Изменения в электрической цепи можно представить в виде тех или иных переключений, называемых в общем случае коммутацией. Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода от энергетического состояния, соответствующего до коммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему после коммутационному режиму.

Переходные процессы обычно быстро протекающие: длительность их составляет десятки, сотни, а иногда и миллиардные доли секунды. Сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд или десятков секунд. Тем не менее, изучение переходных процессов весьма важно, так как позволяет установить, как деформируется сигнал по форме и амплитуде; выявить превышения напряжения на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными для изоляции установок; выявить увеличения амплитуд токов, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося процесса и вызывать срабатывание защиты от перегрузки или вызывать пробой МК-схем, транзисторов и др. элементов схем. С другой стороны, работа многих электротехнических устройств, особенно устройств промышленной электроники,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 4k_2 + k_3}{6}; \quad z_{i+1} = z_i + \frac{q_1 + 4q_2 + q_3}{6}; \quad (7)$$

где k_1, k_2, k_3 - приращения функции y , а q_1, q_2, q_3 - приращения функции z , вычисленные в i -ой точке, в $i+1$ -ой и в середине интервала $[x_i, x_{i+1}]$.

Запишем формулы для вычисления приращений в этих точках.

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i, z_i); \quad q_1 = h \cdot \psi(x_i, y_i, z_i);$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{q_1}{2}\right);$$

$$q_2 = \psi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{q_1}{2}\right);$$

$$k_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2, z_i - q_1 + 2q_2);$$

$$q_3 = h \cdot \psi(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2, z_i - q_1 + 2q_2).$$

Подчеркнем важный момент: приращения для функций y и z должны вычисляться парно, поскольку без значений k_1 и q_1 нельзя вычислить k_2 и q_2 , и т.д.

Формулы для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящей из n уравнений первого порядка, методом Рунге-Кутты записываются по такому же принципу.

Напомним, что задачей курсовой работы является освоение численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений в различных приложениях. В качестве примера, в курсовой работе рассматривается расчет переходного процесса в электрической цепи. Поэтому перейдем к краткому рассмотрению основ теории переходных процессов в электрических цепях.

основана на переходных процессах. Например, в электрических нагревательных печах качество выпускаемого материала зависит от характера протекания переходного процесса. Чрезмерно быстрое нагревание может стать причиной брака, а чрезмерно медленное так же отрицательно сказывается на качестве материала и приводит еще и к снижению производительности.

ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ

Индуктивные и емкостные элементы, обладают способностью накапливать и отдавать энергию магнитного или электрического поля при возникновении каких-либо изменений в режиме работы электрической цепи.

Любой установившийся (стационарный) режим электрической цепи, содержащей индуктивности и емкости, характеризуется определенным суммарным запасом энергии магнитного и электрического полей в каждый момент времени:

$$W = \sum_k \frac{L_k \cdot i_k^2(t)}{2} + \sum_t \frac{C_t \cdot u_t^2(t)}{2}, \quad (8)$$

где i_k , u_t - мгновенный ток и напряжение в катушке L_k и на конденсаторе C_t , соответственно; k и t - порядковые номера элементов.

Следовательно, если в цепи имеются индуктивные и емкостные элементы, то при любой коммутации, вызывающей изменение значений токов и напряжений на этих элементах, неизбежно возникает переходной процесс, обусловленный изменением энергетического состояния.

Изучая переходные процессы, обычно, полагают, что коммутация происходит мгновенно в момент времени $t=0$ и осуществляется с помощью идеального ключа, сопротивление которого равно нулю, если он замкнут, и бесконечно велико, если он разомкнут.

В момент коммутации, когда начинается переходный процесс, происходит перераспределение энергии между индуктивными и емкостными элементами цепи и внешними источниками энергии, подключенными к цепи. При этом часть энергии безвозвратно пре-

образуется в другие виды энергий (например, в тепловую на активном сопротивлении).

Изменения энергии магнитного и электрического полей не могут происходить мгновенно, и, следовательно, переходные процессы не могут протекать мгновенно в момент коммутации. Мгновенное изменение энергии в индуктивном или емкостном элементе потребовало бы бесконечно большой мощности $P = dW/dt$, что практически невозможно и лишено физического смысла.

На основании этого вывода и соотношения (8), могут быть сформулированы два закона коммутации.

1. Ток в любом индуктивном элементе является непрерывной функцией времени и не может изменяться скачком. Следовательно, ток в ветви с индуктивным элементом в начальный момент времени после коммутации имеет то же значение, какое он имел непосредственно перед коммутацией, а затем с этого значения он начинает плавно изменяться. Сказанное обычно записывают в виде:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+),$$

где $t = 0_-$ - время непосредственно до коммутации,

$t = 0_+$ - время непосредственно после коммутации.

Знаки $+$ и $-$ обозначают бесконечно малое приращение времени к моменту коммутации, соответственно, положительное и отрицательное.

2. Напряжение на любом емкостном элементе является непрерывной функцией времени и не может изменяться скачком. Следовательно, напряжение на емкостном элементе в начальный момент после коммутации имеет то же значение, какое оно имело непосредственно перед коммутацией, а затем с этого значения оно начинает плавно изменяться:

$$U_C(0_-) = U_C(0_+).$$

При этом особо подчеркнём, что возможны скачки тока и напряжения на резисторах, напряжений на индуктивностях и токов

на емкостях, т.к. это не требует мгновенного перераспределения запасенной энергии электромагнитного поля.

После окончания переходного процесса устанавливается новый установившийся режим, который определяется только внешними источниками энергии.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Задача исследования переходных процессов заключается в том, чтобы выяснить, по какому закону и как долго будет наблюдаться заметный переход от старых значений токов в ветвях и напряжений на участках цепи к их новым установившимся значениям.

Установившийся режим после коммутации рассчитывают при теоретическом условии $t \rightarrow \infty$. Практически переходные процессы являются быстропротекающими, и их длительность обычно составляет доли секунды.

Анализ переходных процессов производят путем решения дифференциальных уравнений, составленных для исследуемой электрической цепи на основе, например, законов Кирхгофа или метода контурных токов.

Для примера, рассмотрим электрическую схему, состоящую из сопротивления, идеальной катушки индуктивности (без сопротивления), идеального конденсатора (без сопротивления утечки), идеального ключа и источника постоянного напряжения с внутренним сопротивлением равным нулю (рис.1).

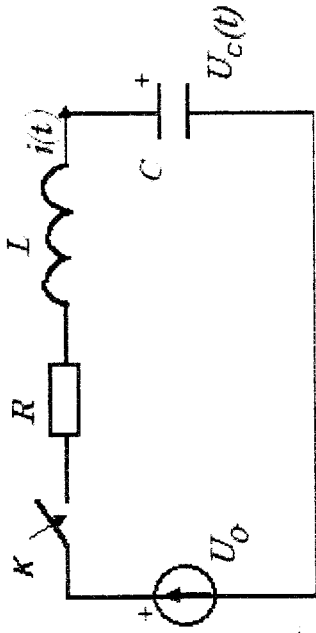


Рис. 1

Все элементы соединены последовательно, ключ в разомкнутом состоянии. Соответственно, тока в цепи нет, напряжения на всех пассивных элементах равны нулю.

В некоторый момент времени ($t = 0$) ключ замыкается, подключая источник напряжения, и начинается переходной процесс, связанный с зарядом конденсатора. В данном случае электрическая цепь содержит два реактивных элемента - индуктивность и емкость. Это означает, что дифференциальное уравнение, описывающее переходной процесс, будет иметь второй порядок. Опишем математически этот процесс, в котором напряжения на элементах и ток в цепи являются функциями времени.

Из первого закона Кирхгофа, для произвольного момента времени, получаем:

$$i_L(t) = i_R(t) = i_C(t) = i(t). \quad (9)$$

Из второго закона Кирхгофа, обойдя контур, для произвольного момента времени, получаем:

$$U_0(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t). \quad (10)$$

Как известно из курса электротехники, ток заряда конденсатора описывается дифференциальным уравнением:

$$i(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt}. \quad (11)$$

Будем интересоваться, в первую очередь, напряжением на емкости $U_C(t)$, поэтому другие напряжения, входящие в (10), а именно, напряжение на резисторе $U_R(t)$ и напряжение на индуктивности $U_L(t)$, выразим через $U_C(t)$.

Из курса электротехники так же известно, что напряжение на индуктивности (ЭДС самоиндукции) в произвольный момент времени, описывается дифференциальным уравнением:

$$U_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = LC \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2}. \quad (12)$$

С учетом закона Ома, напряжение на активном сопротивле-

нии:

$$U(t) = U_{\text{вын}}(t) + U_{\text{св}}(t). \quad (15)$$

Заметим, что физически существует только реальные переходные токи и напряжения, а разложение их на свободную и вынужденную составляющие является математическим приемом, позволяющим упростить расчет переходных процессов в линейных цепях. Напомним, что принцип суперпозиции применим лишь к линейным цепям.

Существуют различные методы решения однородного дифференциального уравнения (16), полученного из уравнения (14).

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c(t) = 0. \quad (16)$$

Классический математический метод решения заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений. Решение находят в виде суммы экспонент:

$$U_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (17)$$

где число слагаемых равно порядку дифференциального уравнения.

Для получения конкретного решения, записываем соответствующее характеристическое уравнение:

$$LC p^2 + RC p + 1 = 0 \quad (18)$$

и определяем его корни:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad (19)$$

где введены следующие обозначения: $\alpha = R / 2L$ - коэффициент затухания; $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$ - резонансная частота идеального контура без потерь.

Постоянные интегрирования A_1, A_2 находят из начальных условий, которые определяют с помощью законов коммутации. Различают независимые и зависимые (после коммутационные) начальные условия. К первым относят значения токов через индуктивности и значения напряжений на емкостях, известные из докоммутационного режима работы цепи.

$$U_R(t) = i(t) \cdot R = R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt}. \quad (13)$$

После подстановки (12 и 13) в (10) получим дифференциальное уравнение:

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C(t) = U_0. \quad (14)$$

Полученное уравнение (14) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Из математики известно, что полное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами находят в виде суммы частного решения неоднородного и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Поскольку в правой части дифференциального уравнения, описывающего электрическое состояние цепи, находится напряжение источника питания (внешняя вынуждающая сила), то частное решение находят из анализа установившегося режима после коммутации. Отсюда этот режим называют вынужденным и, соответственно, токи и напряжения, найденные в данном режиме, называют вынужденными. Расчет вынужденного режима, когда внешний источник вырабатывает постоянную ЭДС, не представляет трудностей, и может быть осуществлен любым известным методом.

Однородное дифференциальное уравнение получают из выражения (14) путем "освобождения" его от правой части. Физически это означает, что исследуемая цепь "освобождается" от внешней вынуждающей силы. Токи или напряжения, найденные при решении однородного дифференциального уравнения, называются свободными. Свободные токи и напряжения являются результатом действия внутренних источников схемы: ЭДС самоиндукции, возникающих в катушках, и напряжений на конденсаторах, когда и те, и другие не уравновешены внешними источниками.

Схематически анализ переходного процесса может быть представлен как результат наложения двух режимов: вынужденного и свободного. Действительное переходное напряжение в соответствии с принципом суперпозиции равно сумме установившегося вынужденного и свободного напряжений:

Значения остальных токов и напряжений при $t = 0_+$ (в после коммутационной схеме), определяемые по независимым начальным значениям из законов Кирхгофа для схемы после коммутации, называют зависимыми начальными значениями.

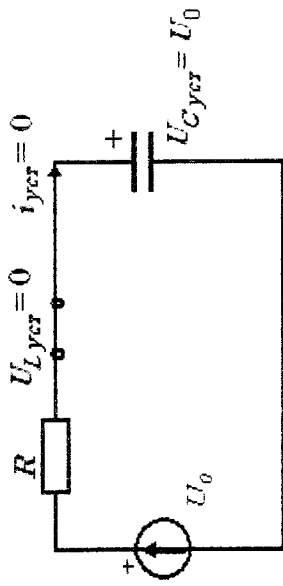


Рис. 2

Вынужденную составляющую решения определим как установившееся значение напряжения на емкости в режиме постоянного тока в цепи после коммутации (рис. 2).

Из уравнения (10), по второму закону Кирхгофа, получим $U_{C,уст} = U_{Свн} = U_0$. Таким образом, полное решение для напряжения на конденсаторе:

$$U_C(t) = U_0 + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} \quad (20)$$

Полное решение для тока в цепи:

$$i(t) = C \frac{dU_C}{dt} = CA_1 P_1 e^{P_1 t} + CA_2 P_2 e^{P_2 t} \quad (21)$$

Используя законы коммутации, определим независимые начальные условия, при $t = 0$, для схемы на рисунке 1. Это необходимо для определения постоянных интегрирования: A_1 и A_2 .

$$U_C(0_-) = U_C(0_+) = U_0 + A_1 + A_2 = 0;$$

$$i(0_-) = i(0_+) = C \cdot A_1 \cdot P_1 + C \cdot A_2 \cdot P_2 = 0.$$

Из этих уравнений получаем формулы для определения A_1 и

A_2 :

$$A_1 = \frac{U_0 P_2}{P_1 - P_2}; \quad A_2 = \frac{-U_0 P_1}{P_1 - P_2} \quad (22)$$

Дальнейшая конкретизация решения связана с видом корней P_1 и P_2 характеристического уравнения (19).

В зависимости от соотношения между параметрами цепи возможны следующие варианты:

Аперiodический режим. Условие $\alpha \geq \omega_0$, корни вещественные, отрицательные. Как нетрудно убедиться, это условие эквивалентно соотношению: $R \geq 2\sqrt{L/C}$ или $R \geq 2 \cdot \rho$, где $\rho = \sqrt{L/C}$ - характеристическое сопротивление контура.

Обобщенной характеристикой контура, как известно, является величина добротности Q , определяемая всеми тремя элементами контура.

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, контур имеет значительные потери, т.е. является низкооборотным $Q \leq 0,5$.

При этом корни (19) $P_{1,2} = -\alpha \pm \beta$, где $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, являются вещественными отрицательными числами. Подставляя эти корни в (20, 21, 22 и 12), получим точное решение для трех функций: напряжение на емкости, ток в цепи и напряжение на индуктивности.

$$U_C(t) = U_0 + \frac{U_0}{2\beta} [(\alpha - \beta)e^{-(\alpha+\beta)t} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha-\beta)t}]; \quad (23)$$

$$i(t) = \frac{C P_1 P_2 U_0}{2\beta} (e^{-(\alpha-\beta)t} - e^{-(\alpha+\beta)t}) = \frac{U_0}{2\beta L} (e^{-(\alpha-\beta)t} - e^{-(\alpha+\beta)t}); \quad (24)$$

$$U_L(t) = \frac{U_0}{2\beta} [(\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)t} - (\alpha - \beta)e^{-(\alpha-\beta)t}]. \quad (25)$$

Качественный график полученных функций показан на рисунке 3. Переходное напряжение на емкости имеет аперiodический

(не колебательный) характер, и представляет монотонно возрастающую функцию. Происходит апериодический, монотонный заряд конденсатора до напряжения источника U_0 .

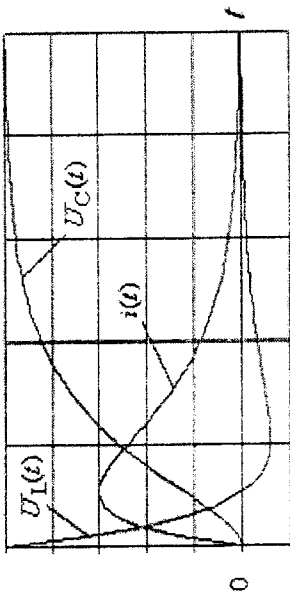


Рис. 3

На этом же рисунке приведены качественные графики тока $i(t)$ и напряжения на индуктивности $U_L(t)$, получающиеся по формулам (24, 25).

Поскольку напряжение на индуктивности пропорционально производной от тока, то оно должно быть положительным во время возрастания тока и отрицательным во время его убывания.

Колебательный режим. При выполнении условия $\alpha < \omega_0$ корни комплексные, сопряженные. Как нетрудно убедиться, условие эквивалентно соотношению: $R < 2\sqrt{L/C}$ или $R < 2 \cdot \rho$, т.е. $Q > 0,5$. Корни характеристического уравнения (18) комплексные и имеют вид:

$$P_{1,2} = \alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_k, \text{ где } \omega_k = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - \text{угловая частота свободных затухающих колебаний контура.}$$

При подстановке этих корней в (20, 21, 22), и используя формулы Эйлера для экспонент с мнимыми показателями, окончательно, получим

$$U_C(t) = U_0 - \frac{U_0}{\omega_k \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_k t + \psi); \quad (26)$$

$$i(t) = \frac{U_0}{\omega_k L} e^{-\alpha t} \sin(\omega_k t); \quad (27)$$

$$U_L(t) = -\frac{U_0}{\omega_k \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_k t - \psi), \quad (28)$$

где $\sin \psi = \frac{\omega_k}{\omega_0}$, $\psi = \arcsin\left(\frac{\omega_k}{\omega_0}\right)$

Кривые $U_C(t)$ и $i(t)$ (рис.4) отображают затухающий колебательный процесс. Как видно из графика, обе кривые стремятся к своим асимптотам — к новым установившимся значениям. Кривая тока совершает затухающие колебания относительно нулевого значения, а кривая напряжения на конденсаторе стремится к величине напряжения источника U_0 .

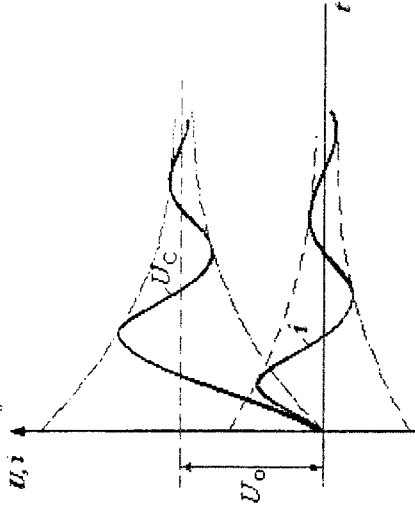


Рис. 4

Анализ (26 — 28) показывает, что скорость затухания колебаний i , соответственно, время переходного процесса и определяется в первую очередь, добротностью контура Q .

Отметим также, что за время переходного процесса часть энергии источника переходит в тепло на сопротивлении R , а другая часть запасается в электрическом поле конденсатора. Общая израсходованная источником питания энергия определится

$$\int_0^{\infty} U i dt = \int_0^{\infty} i^2 R dt + \frac{CU_0^2}{2}.$$

ОПИСАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В RLC-ЦЕПИ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как отмечалось ранее, аналитическое решение дифференциального уравнения не всегда возможно, поэтому приходится использовать численные методы вычисления. В качестве учебного примера численного решения дифференциального уравнения рассмотрим предыдущую задачу расчета переходного процесса в электрической цепи.

Напомним, что схема состоит из последовательно соединенных: сопротивления, идеальной катушки индуктивности (без активного сопротивления), идеального конденсатора (без сопротивления утечки), идеального ключа и источника постоянного напряжения с внутренним сопротивлением равным нулю (рис.1). Переходной процесс, возникающий в этой цепи при подключении источника напряжения, описывается дифференциальным уравнением (14).

В прикладной математике разработаны численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка, поэтому уравнение (14) необходимо преобразовать в систему, состоящую из двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Это можно выполнить двумя способами: путем формальной замены переменных $U' = z$; $U'' = z'$ и получения двух уравнений первого порядка или, используя уравнения электродинамики, описать законы изменения тока в цепи и напряжения на конденсаторе дифференциальными уравнениями.

В случае применения первого варианта получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} U_c' = z(t) \\ z' = U_0 - \frac{R}{L}z(t) - \frac{U_c(t)}{LC} \end{cases} \quad (29)$$

Как видно из системы уравнений, функция тока в явном виде здесь не присутствует.

Второй вариант, очевидно, более удобен. Рассмотрим его подробнее. Используем, непосредственно, дифференциальные уравнения (11) и (12) и применим второй закон Кирхгофа (10), и закон Ома, чтобы исключить третью переменную - U_L , выразив её через другие переменные и константы.

$$U_L(t) = U_0(t) - U_R(t) - U_C(t) = U_0(t) - I(t) \cdot R - U_C(t).$$

В результате получаем систему дифференциальных уравнений (30). Решение этой системы дифференциальных уравнений первого порядка численным методом и является основной задачей данной работы, т.е. задачей численного дифференцирования.

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{E - R \cdot I(t) - U_C(t)}{L} \\ \frac{dU_C}{dt} = \frac{I(t)}{C} \end{cases} \quad (30)$$

В качестве численного метода решения системы дифференциальных уравнений первого порядка (30) предлагается использовать метод Рунге-Кутты 3-его или 4-ого порядка.

Каждый студент решает поставленную задачу в одной из возможных трёх сред: в MS Excel или в MathCAD, или с использованием одного из языков программирования (Pascal, Delphi, Visual Basic for Application). Выбор конкретных сред и метода Рунге-Кутты определенного порядка зависит от номера группы, номера варианта и определяется руководителем курсовой работы.

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ MATHCAD ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Начиная с версии MathCAD 5.0 PLUS, в математический пакет включаются специальные функции для решения систем дифференциальных уравнений численными методами. В этом параграфе

Напомним, что в MathCAD, по умолчанию, значения индекса первого элемента вектора – ноль. Если параметру ORIGIN присвоить значение 1, то имя первой функции изменится элементом вектора с индексом 1, имя второй функции изменится элементом вектора с индексом 2 и т.д.

Веденные обозначения позволяют системе MathCAD оперировать, как и с переменными, входящих в правые части, являются искомыми функциями, поскольку правые части системы дифференциальных уравнений могут содержать еще и различные независимые переменные, которые, в частном решении, принимают конкретные значения.

Рассмотрим конкретный пример решения системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка (31).

$$\begin{cases} y' = z - 0.5y + \sin(0.5x) \\ z' = 2z - 3y + e^{0.3x} \end{cases} \quad (31)$$

Решим задачу Коши на отрезке интегрирования [1; 3] при начальных значениях $y(1) = 0$; $z(1) = 1$. Количество разбиений возьмем равным 50, соответственно, шаг интегрирования равен 0,04; погрешность будет пропорциональна $0,04^5 = 0000001024$

Обозначим вектор начальных значений VN , вектор замены искомых функций w .

Уравнение производной функции y' записано первым, следовательно, функция y заменяется на w_0 , уравнение производной функции z' записано вторым, следовательно, функция z заменяется на w_1

Фрагмент записи в MathCAD будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} a &:= 1 & b &:= 3 & VN &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ D(x, w) &:= \begin{pmatrix} w_1 - 0.5 \cdot w_0 + \sin(0.5x) \\ 2 \cdot w_1 - 3 \cdot w_0 + e^{0.3x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Omega := rkfixed(VN, a, b, 50, D)$$

рассмотрим одну из них, ориентированную на решение задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка – функцию *rkfixed*. Эта функция предназначена для решения задачи Коши методом Рунге-Кутты 4-го порядка при фиксированном шаге интегрирования. Шаг интегрирования вычисляет компьютер, задать следует начало и конец интервала интегрирования, и количество точек разбиения этого интервала.

Если имеется система, состоящая из k обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанная в канонической форме аналогично системе уравнений (6), т.е. первые производные каждой функции представлены в явном виде, то применение функции *rkfixed* позволит получить решение в матричной форме.

Обращение к функции выполняется следующим образом:

$$G := rkfixed(V, x1, x2, N, D),$$

где G – выходные данные, матрица результатов, содержащая в первом столбце значения аргументов, в остальных столбцах – значения функций; функции расположены слева направо в том порядке, в каком расположены их производные в системе дифференциальных уравнений сверху вниз;

V – вектор начальных значений (условий), содержащий начальные значения всех k искомых функций;

$x1$ – начальное значение аргумента x ;

$x2$ – конечное значение аргумента x ;

N – количество точек разбиения интервала интегрирования;

D – функция в векторной форме, содержащая преобразованные правые части системы дифференциальных уравнений.

Функция F содержит два параметра (аргумента). Первый – независимая переменная, по которой искомые функции дифференцированы. Второй – вектор, элементы которого используются вместо имен искомых функций. При этом имя функции, для которой дифференциальное уравнение записано первой строкой в системе уравнений, заменяется первым элементом вектора (индекс 0). Функция, дифференциальное уравнение которой в системе уравнений записано второй строкой, заменяется вторым элементом вектора (индекс 1), и т.д.

Функция *fixed* возвращает найденное решение в виде двумерного массива Z . Столбец $G^{<0>}$ будет содержать 51 значение аргумента x . В столбцах $G^{<1>}$ и $G^{<2>}$ будут значения функций $y(x)$ и $z(x)$, соответственно.

По результатам расчетов строим график (рис.5).

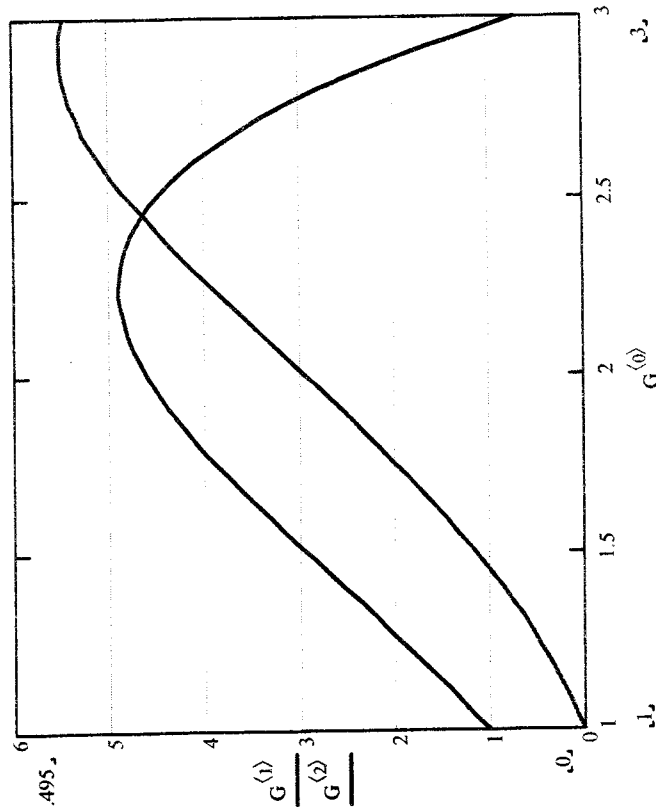


Рис.5.

КРАТКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА В MS EXCEL

В случае решения системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта в табличном процессоре MS Excel можно ре-

комендовать расположить исходные данные, а также одиночные вычисленные параметры, в виде отдельной небольшой таблицы. Ниже этой таблицы удобно расположить основную таблицу с вычислениями искомого функций (рис. 6).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
5	t	Ic	Uc	U1	Ur	k1	q1	k2	q2	k3	q3	ΔU_c	ΔI_c
6	0,000	0,00	0,0	90,0	0,0	0,00	0,53	1,15	0,51	2,19	0,49	1,1	0,51
7	0,0035	0,51	1,1	84,8	4,1	2,23	0,49	3,32	0,48	4,24	0,45	3,3	0,47

Рис. 6

В приведенном на рисунке 6 примере, вычисления проводились методом Рунге-Кутта третьего порядка. Это видно по количеству приведенных в таблице приращений: три для напряжения и три для тока. ΔU_c и ΔI_c - окончательные, средневзвешенные приращения для вычисления следующего, очередного значения напряжения на конденсаторе и тока в цепи.

Переходной процесс может оказаться довольно длительным по времени, соответственно, длина основной таблицы может содержать более сотни строк. Для удобства работы рекомендуется закрепить заголовки таблицы, так, чтобы он не перемещался ручной прокрутки. Для этого активизировать любую ячейку второй строки таблицы и дать команду «Окно → Закрепить область».

В результате, при перемещении ручки прокрутки, будут последовательно скрываться верхние строки, а заголовки будут оставаться на рабочем листе. Это позволит отслеживать смысловое содержание столбцов нижних строк таблицы.

Таких основных расчетных таблиц будет несколько, т.к. при изменении значения любого элемента электрической цепи переходный процесс нужно рассчитывать заново. Наверное, будет рационально, если разместить таблицы на разных листах книги Excel.

При написании пояснительной записки большие таблицы следует размещать в приложении, а в тексте отчета записывать соответствующую ссылку.

Весь графический материал, созданный в MS Excel, помещается непосредственно в основном разделе пояснительной записки и

сопровождается необходимыми пояснениями, комментариями и выводами.

КРАТКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА В MATHCAD

В случае решения системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта в математическом пакете MathCAD, с применением расчетных формул (без использования встроенных стандартных функций типа *rkfixed*), можно рекомендовать векторную форму записи для аргумента t , для функций U_C и I , а так же для всех других искомым функций. Соответственно, основные расчетные рекуррентные формулы записываются в векторной форме, с использованием индексов.

Вычисления всех приращений следует описать, используя пользовательские функции, причем, можно с двумя, а не тремя формальными параметрами, т.к. время не входит в явном виде в правую часть дифференциальных уравнений. Например:

$$q1(U, I) := h \cdot \frac{(E - R \cdot I - U)}{L}; \quad \dots \quad k2(U, I) := h \cdot \frac{I + \frac{q1(U, I)}{C}}{2}$$

При обращении к этим функциям, в качестве фактических параметров необходимо будет использовать элементы векторов UC_i и I_i . Напомним, что имена формальных параметров выбираются произвольно и могут совпадать с именами фактических переменных или векторов.

Пределы изменения индексов задают с использованием ранжированных переменных. Задание ранжированных переменных эквивалентно заданию конечных циклов. Если шаг изменения равен 1, то задается только начальное и конечное значение ранжированной переменной. Напомним, что в MathCAD начальное значение индекса векторов, по умолчанию, имеет значение ноль.

Ранжированные переменные удобно использовать при вычислении таблицы значений пользовательской функции, при вычислении элементов векторов, а также при построении графиков. Графики очень удобно строить и с использованием самих векторов. Нельзя только использовать ранжированные переменные для вычисления простой переменной.

Однако с использованием ранжированных переменных и элементов векторов в качестве фактических параметров не все так просто. Если записывать рекуррентные формулы вычисления элементов векторов отдельно, то эти элементы нельзя использовать в качестве фактических параметров. Для того чтобы MathCAD работал правильно, все вектора должны быть вложены в один вектор, т.е. каждый элемент внешнего вектора сам является вектором. Запись будет иметь вид, аналогичный приведенному ниже фрагменту.

$$dU(U, I) := \frac{k1(U, I) + k2(U, I)}{2} \quad dI(U, I) := \frac{q1(U, I) + q2(U, I)}{2}$$

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ I_0 \\ UC_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad i := 0..50$$

$$\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ I_{i+1} \\ UC_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_i + h \\ I_i + dI(UC_i, I_i) \\ UC_i + dU(UC_i, I_i) \end{pmatrix}$$

Конкретное значение h задано выше.

По вычисленным значениям тока в электрической цепи и напряжения на конденсаторе (записанных в соответствующих векторах), строятся графики, как функции вектора времени.

Напряжения на индуктивности определяется в векторной форме по второму закону Кирхгофа.

ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую переходный процесс в электрической цепи. В зависимости от варианта, решение проводится в двух или трех средах (MS Excel, MathCAD и на объектно-ориентированном языке программирования) и тремя способами.

Первоначально вычисляются основные параметры электрической цепи (в любой из трех сред), и в зависимости от получившейся величины добротности, определяется характер переходного процесса (колебательный или апериодический) при каждом значении элементов электрической цепи.

Затем, используя одну из сред и, в соответствии с заданием, вычисляются контрольные значения $U_C(t)$, $i(t)$, $U_L(t)$, по приведенным выше формулам (23, 24, 25) для апериодического процесса, и по формулам (26, 27, 28) для колебательного процесса.

По вычисленным контрольным значениям строятся графики и сравниваются с теоретическими графиками, представленными на рисунках 3 либо 4. Если графики имеют такой же вид, а сумма напряжений на элементах цепи, в каждый момент времени, равна напряжению источника $U_C(t) + U_L(t) + U_R(t) = U_0$ (второй закон Кирхгофа выполняется), можно предположить, что вычисления проведены правильно, и полученные результаты считать контрольными для проверки результатов последующих расчетов.

Контрольные значения и построенные графики позволяют проверить правильность решения системы дифференциальных уравнений численным методом и сравнить точность результатов вычисления.

Далее приступаем к основному разделу задания – решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты в одной из сред, в соответствии с вариантом задания. Подробные рекомендации даны были выше. По вычисленным результатам строятся графики и сравниваются с графиками, полученными на предыдущем этапе.

На последнем этапе расчетов решаем эту задачу в математическом пакете MathCAD, с использованием специальной встроенной

Графический материал, созданный в MathCAD, помещается непосредственно в основном разделе пояснительной записки и сопровождается необходимыми пояснениями, комментариями и выводами. На графиках должны быть оси координат и линии сетки. Все числовые подписи следует форматировать.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОСТАВЛЕНИЮ ПРОГРАММЫ

При разработке программы с применением объектно-ориентированного языка программирования нужно следовать принципам структурного программирования: поэтапная детализация, использование только базовых структур (следование, ветвление, цикл), повышение наглядности программы.

Уже на стадии разработки программы нужно продумать мероприятия по ее отладке (подготовка тестов, включение в программу, для ее отладки или поиска смысловых ошибок, операторов вывода промежуточных результатов).

В общем случае нужно быть готовым к неожиданностям при запуске программы и поэтому иметь твердые копии программы (распечатки текста) для ее восстановления в случае необходимости.

Разрабатывая программу, нужно помнить о целесообразности использования подпрограмм-функций и об оформлении некоторых важных ее частей в виде отдельных подпрограмм (макросов). Метод подпрограмм облегчает написание и отладку программы в целом.

При использовании VBA результаты вычислений выводятся на отдельные листы Excel, т.к. при изменении значения любого элемента электрической цепи переходный процесс нужно рассчитывать заново. Задание номера листа вывода очередной таблицы через исходные данные будет оцениваться как дополнительный плюс при общей оценке работы.

Все графики строятся с использованием одного макроса.

ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую переходной процесс в электрической цепи. В зависимости от варианта, решение проводится в двух или трех средах (MS Excel, MathCAD и на объектно-ориентированном языке программирования) и тремя способами.

Первоначально вычисляются основные параметры электрической цепи (в любой из трех сред), и в зависимости от получившейся величины добротности, определяется характер переходного процесса (колебательный или апериодический) при каждом значении элементов электрической цепи.

Затем, используя одну из сред и, в соответствии с заданием, вычисляются контрольные значения $U_C(t)$, $i(t)$, $U_L(t)$, по приведенным выше формулам (23, 24, 25) для апериодического процесса, и по формулам (26, 27, 28) для колебательного процесса.

По вычисленным контрольным значениям строятся графики и сравниваются с теоретическими графиками, представленными на рисунках 3 либо 4. Если графики имеют такой же вид, а сумма напряжений на элементах цепи, в каждый момент времени, равна напряжению источника $U_C(t) + U_L(t) + U_R(t) = U_0$ (второй закон Кирхгофа выполняется), можно предположить, что вычисления проведены правильно, и полученные результаты считать контрольными для проверки результатов последующих расчетов.

Контрольные значения и построенные графики позволят проверить правильность решения системы дифференциальных уравнений численным методом и сравнить точность результатов вычисления.

Далее приступаем к основному разделу задания – решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты в одной из сред, в соответствии с вариантом задания. Подробные рекомендации даны были выше. По вычисленным результатам строятся графики и сравниваются с графиками, полученными на предыдущем этапе.

На последнем этапе расчетов решаем эту задачу в математическом пакете MathCAD, с использованием специальной встроенной

Графический материал, созданный в MathCAD, помещается непосредственно в основном разделе пояснительной записки и сопровождается необходимыми пояснениями, комментариями и выводами. На графиках должны быть оси координат и линии сетки. Все числовые подписи следует форматировать.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОСТАВЛЕНИЮ ПРОГРАММЫ

При разработке программы с применением объектно-ориентированного языка программирования нужно следовать принципам структурного программирования: поэтапная детализация, использование только базовых структур (следование, ветвление, цикл), повышение наглядности программы.

Уже на стадии разработки программы нужно продумать мероприятия по ее отладке (подготовка тестов, включение в программу, для ее отладки или поиска смысловых ошибок, операторов вывода промежуточных результатов).

В общем случае нужно быть готовым к неожиданностям при запуске программы и поэтому иметь твердые копии программы (распечатки текста) для ее восстановления в случае необходимости.

Разрабатывая программу, нужно помнить о целесообразности использования подпрограмм-функций и об оформлении некоторых важных ее частей в виде отдельных подпрограмм (макросов). Метод подпрограмм облегчает написание и отладку программы в целом.

При использовании VBA результаты вычислений выводятся на отдельные листы Excel, т.к. при изменении значения любого элемента электрической цепи переходный процесс нужно рассчитывать заново. Задание номера листа вывода очередной таблицы через исходные данные будет оцениваться как дополнительный плюс при общей оценке работы.

Все графики строятся с использованием одного макроса.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Дана последовательная электрическая RLC-цепь, подключаемая к источнику постоянного напряжения с внутренним сопротивлением равным нулю. Если каких-то компонент одного типа несколько, то каждый из них должен подключаться по очереди, с помощью переключателя. Переходной процесс рассчитывается для каждого варианта подключения отдельно.

Пример электрической схемы для первого варианта (рис.7)

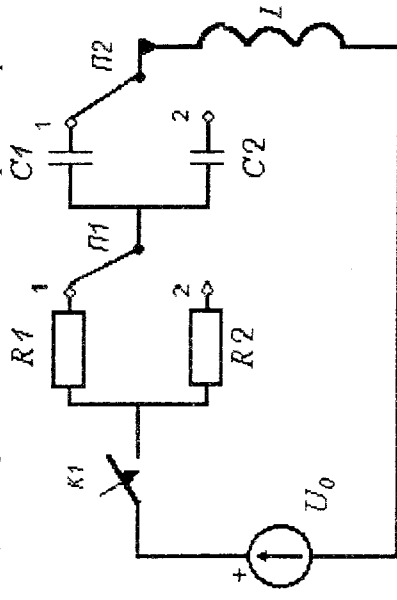


Рис.7.

Числовые значения всех вариантов заданий приведены в таблице 2.

Таблица 2

№ варианта	C_1 [мкф]	C_2 [мкф]	L_1 [Гн]	L_2 [Гн]	R_1 [Ом]	R_2 [Ом]	U_0 [В]
1.	400	200	0,2	-	9	82	100
2.	300	600	0,6	-	8	120	90
3.	500	800	0,4	-	7	100	80
4.	100	250	0,9	-	16	140	120
5.	600	1000	0,5	-	8	90	80
6.	500	-	0,5	0,9	9	100	90
7.	300	-	0,8	0,4	6	110	100
8.	200	-	1	0,5	5	150	120
9.	400	-	0,4	0,2	6	120	90

функции *rkfixed*. Рекомендации даны были выше. Отметим, что в пакете MathCAD это далеко не единственная функция, решающая систему дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты, но самая быстрая действующая. Студент может использовать любую другую, например, *Rkadapt* или *rkadapt* [3].

Все вычисления следует проводить, практически, на полном временном интервале переходного процесса. Процесс считать оконченным, когда модуль величины отклонения напряжения на конденсаторе от напряжения в установившемся режиме $|U_C(t) - U_{C\text{уст}}|$ становится не более $3\% \div 5\%$ от $U_{C\text{уст}}$, а текущая величина тока $i(t)$ не более $3\% \div 5\%$ от $i(t)_{\text{пак}}$.

Шаг изменения времени Δt (шаг интегрирования) выбирается в зависимости от значения периода собственных колебаний RLC-контура и от величины его добротности. На различных временных интервалах шаг интегрирования может быть различным. Минимальное значение шага должно быть в самом начале переходного процесса, когда скорость изменения тока и напряжения максимальна, потом шаг можно увеличивать. Шаг интегрирования рекомендуется выбирать одинаковым для различных методов расчета, иначе сложно будет сравнить результаты вычислений.

Провести сравнение всех трех способов решения и полученных результатов. Оценить удобство, сложность, трудоемкость решения и т.п. в использованных приложениях, в личном плане.

Оформить пояснительную записку в соответствии со стандартом и защитить в установленные сроки.

Продолжение таблицы 2

№ варианта	C_1 [мкф]	C_2 [мкф]	L_1 [Гн]	L_2 [Гн]	R_1 [ом]	R_2 [ом]	U_0 [В]
10.	800	-	0,3	0,7	9	90	80
11.	350	600	0,45	-	11	110	70
12.	250	400	0,75	-	12	140	60
13.	200	500	0,8	-	24	180	80
14.	400	800	0,7	-	10	200	100
15.	150	450	0,55	-	10	150	110
16.	250	-	0,65	1,2	11	140	60
17.	400	-	0,4	1	16	110	80
18.	350	-	0,35	0,65	13	90	90
19.	200	-	0,3	0,15	14	150	110
20.	100	-	0,5	0,3	10	200	70
21.	150	350	0,15	-	15	70	75
22.	220	100	0,2	-	21	95	60
23.	300	150	0,55	-	18	90	80
24.	450	200	0,4	-	24	100	90
25.	120	250	0,37	-	16	120	100
26.	200	-	0,33	0,16	12	110	110
27.	250	-	0,25	0,12	9	75	120
28.	300	-	0,17	0,35	10	91	80
29.	150	-	0,45	0,22	18	82	90
30.	100	-	0,52	0,3	9	160	60
31.	400	200	0,48	-	10	110	50
32.	300	150	0,27	-	15	130	75
33.	240	120	0,24	-	13	150	80
34.	100	200	0,37	-	20	200	90
35.	500	250	0,55	-	11	140	100
36.	150	-	0,18	0,38	12	75	110
37.	250	-	0,25	0,45	7	100	50
38.	130	-	0,34	0,6	13	170	90
39.	200	-	0,33	0,55	15	150	80
40.	350	-	0,45	0,22	10	91	60
41.	240	500	0,33	-	12	110	70
42.	120	350	0,56	-	11	150	120

Окончание таблицы 2

№ варианта	C_1 [мкф]	C_2 [мкф]	L_1 [Гн]	L_2 [Гн]	R_1 [ом]	R_2 [ом]	U_0 [В]
43.	100	250	0,47	-	14	200	80
44.	300	120	0,27	-	9	120	90
45.	360	600	0,24	-	10	68	100
46.	150	-	0,19	0,4	8	110	60
47.	140	-	0,43	0,21	16	140	50
48.	200	-	0,52	0,2	15	110	110
49.	220	-	0,37	0,75	9	150	70
50.	400	-	0,22	0,45	10	75	80

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Порядок выполнения курсовой работы	5
Требования к отчету по курсовой работе	6
Краткие теоретические сведения	8
Общие положения	8
решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты	12
Краткие сведения о переходных процессах	17
законы коммутации	18
Математические основы анализа переходных процессов в электрических цепях	20
описание переходного процесса в цепи системы дифференциальных уравнений	28
Встроенные функции mathcad для решения систем дифференциальных уравнений	29
Краткие рекомендации по решению дифференциальных уравнений методом рунге-кутта в MS EXCEL	32
Краткие рекомендации по решению дифференциальных уравнений методом рунге-кутта в MathCAD	34
Рекомендации по составлению программы	36
Задание к курсовой работе	37
Варианты заданий к курсовой работе	39
Библиографический список	42

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. Информатика: Учебник для вузов / Под ред. Н.В. Макаровой – 3-е изд., перераб. – М.: Финансы и статистика, 2009, 768 с
2. Быкова О.Г. Информатика. Работа в пакете MathCAD. Методические указания к лабораторным работам. СПб. СПбГИ. 2009, 71 с
3. Макаров Е.Г. MathCAD. Учебный курс. – СПб. Питер, 2009, 592 с
4. Максфилд Б. MathCAD в инженерных расчетах. +CD. – СПб.: КОРОНА-век, 2010, 317 с
5. Слепцова Л.Д. Программирование на VBA в Microsoft Office 2010. – М.: Вильямс, 2010, 188 с
6. Правила оформления курсовых и квалификационных работ. Методические указания. СПб, РИО СПбГИ, 2005, 50 с

Дополнительный

1. Основы теории цепей: Учеб. для вузов /Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. –5-е изд., перераб. –М.: Энергоатомиздат, 1989, 528 с
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. Учеб. для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. –7-е изд., перераб. и доп. –М.: Высшая школа, 1978, 375 с