ВВЕДЕНИЕ

В горной и обогатительной промышленности широко распространены вибрационные машины различного назначения (транспортеры, дробилки, грохоты и др.). Теория колебаний разрабатывает аналитические методы, используемые для описания динамики всех этих машин.

Изложены основы теории колебаний систем с двумя степенями свободы. Приведены типовые примеры построения расчетных моделей типовых колебательных систем с двумя степенями свободы на основе составления уравнения Лагранжа II рода. «Методические указания…» содержат варианты расчетно-графических работ (РГР) для самостоятельного решения.

Цель выполнения РГР состоит в том, чтобы научить будущих горных инженеров строить расчетные модели колебательных систем, определять законы и параметры колебаний и на этой основе определять уровни их динамической нагруженности.

«Методические указания…» предназначены для студентов специальностей 150402 «Горные машины и оборудование», 150404 «Металургические машины и оборудование».

1. Механические малые колебания систем с двумя степенями свободы

Свободные колебания. Рассмотрим консервативную механическую систему с двумя степенями свободы. Положение всех точек системы при этом определяется с помощью двух обобщенных координат – q_1 *и* q_2, а скорости всех точек выражаются через соответствующие обобщенные скорости $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$. Вблизи положения равновесия кинетическая энергия системы с двумя степенями свободы определяется выражением

$$T = \frac{a_{11}}{2}\dot{q}_1^2 + a_{12}\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2 + \frac{a_{22}}{2}\dot{q}_2^2, \tag{1.1}$$

т.е. является квадратичной формой обобщенных скоростей. Виду того, что кинетическая энергия по своему смыслу положительна, должны выполняться следующие неравенства

$$a_{11} > 0,\ a_{22} > 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \tag{1.2}$$

Потенциальная энергия вблизи положения равновесия определяется выражением

$$\Pi = \frac{c_{11}}{2}q_1^2 + c_{12}\,q_1\,q_2 + \frac{c_{22}}{2}q_2^2, \tag{1.3}$$

т.е. является квадратичной формой обобщенных координат. Здесь c_{11}, c_{12}, c_{22} - квазиупругие коэффициенты:

$$c_{11} = \left.\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_1^2}\right|_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}};\ c_{12} = \left.\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_1\partial q_2}\right|_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}};\ c_{22} = \left.\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_2^2}\right|_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}}.$$

В положении равновесия $\Pi\big|_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} = 0$. Обобщенные координаты будем отсчитывать от положения равновесия $(q_1 = 0, q_2 = 0)$. Их отклонения от положения равновесия предполагаются малыми. Обобщенные силы, соответствующие потенциальным силам, в положении равновесия также равны нулю

$$Q^{(\Pi)}{}_1\Big|_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} = -\left.\frac{\partial\Pi}{\partial q_1}\right|_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} = 0 \quad, Q^{(\Pi)}{}_2\Big|_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} = -\left.\frac{\partial\Pi}{\partial q_2}\right|_{\substack{q_1=0\\ q_2=0}} = 0. \tag{1.4}$$

Положение равновесия может быть устойчивым и неустойчивым. Если колебательная система находится в устойчивом положении равновесия, то после малого возмущения обобщенных координат система возвращается к этому положению $(q_1 = 0, q_2 = 0)$ после некоторого колебательного движения. Возмущение неустойчивого положения равновесия приводит к непериодическому уходу системы. Таким образом, малые колебания системы возможны только около устойчивого положения равновесия. В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия системы имеет строгий минимум (теорема Дирихле), который определяется условиями

$$c_{11} > 0,\ c_{22} > 0,\ c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \tag{1.5}$$

т.е. вблизи положения равновесия потенциальная энергия положительна.

В случае системы с двумя степенями свободы уравнения Лагранжа II рода имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0.$$

Подставляя в последние уравнения выражения (1.1) и (1.3) для кинетической и потенциальной энергии системы, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0 \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0 \end{cases}, \tag{1.6}$$

которые и являются уравнениями малых колебаний рассматриваемой системы.

Частное решение системы (1.6) запишем в виде

$$q_1 = A\sin kt,\ q_2 = B\sin kt, \tag{1.7}$$

где *k*- неизвестная частота колебаний, A и B – неизвестные постоянные (амплитуды колебаний). После подстановки решения (1.7) в уравнения (1.6), получим систему двух однородных алгебраических уравнений относительно постоянных A и B

$$\begin{cases} \left(c_{11} - k^2 a_{11}\right)A + \left(c_{12} - k^2 a_{12}\right)B = 0 \\ \left(c_{12} - k^2 a_{12}\right)A + \left(c_{22} - k^2 a_{22}\right)B = 0 \end{cases}. \tag{1.8}$$

Система уравнений (1.6) имеет отличные от нуля решения только в том случае, если ее определитель равен нулю

$$\Delta(k)=\begin{vmatrix} c_{11}-k^2a_{11} & c_{12}-k^2a_{12} \\ c_{12}-k^2a_{12} & c_{22}-k^2a_{22} \end{vmatrix}=0 \tag{1.9}$$

или

$$\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)k^4-\left(a_{11}c_{22}+a_{22}c_{11}-2a_{12}c_{12}\right)k^2+c_{11}c_{22}-c_{12}^2=0\,. \tag{1.10}$$

Можно показать, что дискриминант биквадратного уравнения (1.10) положителен. Совместно с условиями (1.2) и (1.4) это означает, что уравнение (1.10) имеет два вещественных положительных корня относительно k^2 – квадраты круговых частот свободных колебаний (собственных частот)

$$k_1^2>0,\, k_2^2>0.$$

Таким образом, рассматриваемые колебания являются двухчастотными, причем $k_1>k_2$. Этим частотам соответствуют две формы колебаний

$q_1=A_1\sin k_1t,\, q_2=B_1\sin k_1t$ - 1 - я форма колебаний,

$q_1=A_2\sin k_2t,\, q_2=B_2\sin k_2t$ - 2 - я форма колебаний.

Постоянные A_1, B_1, A_2, B_2 не являются независимыми и из системы (1.8) не могут быть определены однозначно. Определены (например из первого уравнения (1.18)), могут быть лишь их отношения n_1 и n_2- коэффициенты первой и второй форм колебаний

$$n_1=\frac{B_1}{A_1}=-\frac{c_{11}-k_1{}^2a_{11}}{c_{12}-k_1{}^2a_{12}},\; n_2=\frac{B_2}{A_2}=-\frac{c_{11}-k_2{}^2a_{11}}{c_{12}-k_2{}^2a_{12}}\,. \tag{1.11}$$

Можно показать, что $n_1>0$ и $n_2<0$. Таким образом, 1-я форма свободных колебаний является одноузловой, 2- я форма - двухъузловой.

Найденным частотам свободных колебаний соответствует общее решение

$$\begin{aligned} q_1&=A_1\sin(k_1t+\alpha_1)+A_2\sin(k_2t+\alpha_2), \\ q_2&=n_1A_1\sin(k_1t+\alpha_1)+n_2A_2\sin(k_2t+\alpha_2)' \end{aligned} \tag{1.12}$$

где A_1, B_1, α_1, α_2- произвольные постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Вынужденные колебания. Пусть на рассматриваемую колебательную систему действуют возмущающие силы, изменяющиеся со временем по гармоническому закону

$$F_1=F_{10}\sin\,pt, F_2=F_{20}\sin\,pt,..., F_n=F_{n0}\sin\,pt.$$

Обобщенные силы Q_1, Q_2 определяются как коэффициенты при вариациях обобщенных координат q_1 и q_2 в выражении для элементарной работы

$$\delta A=Q_1\,\delta q_1+Q_2\,\delta q_2\,.$$

Эти силы будут также гармоническими функциями времени

$$Q_1=Q_{10}\sin\,pt,\, Q_2=Q_{20}\sin\,pt.$$

Тогда неоднородные уравнения Лагранжа II рода будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_1}-\frac{\partial T}{\partial q_1}+\frac{\partial\Pi}{\partial q_1}=Q_1,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_2}-\frac{\partial T}{\partial q_2}+\frac{\partial\Pi}{\partial q_2}=Q_2\,,$$

или после подстановки в них выражений (1.1) и (1.3) для кинетической и потенциальной энергий

$$\begin{cases} a_{11}\ddot q_1+a_{12}\ddot q_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=Q_1=Q_{10}\sin\,pt \\ a_{12}\ddot q_1+a_{22}\ddot q_2+c_{12}q_1+c_{22}q_2=Q_2=Q_{20}\sin\,pt \end{cases}. \tag{1.13}$$

Решение системы (1.13) будем искать в виде вынужденных колебаний

$$q_1=A\sin pt,\, q_2=B\sin pt,$$

где p- частота вынужденных колебаний, A и B- амплитуды колебаний. Для определения амплитуд колебаний получим неоднородную систему, левые части уравнений, которой аналогичны (1.8)

$$\begin{cases} \left(c_{11}-p^2a_{11}\right)A+\left(c_{12}-p^2a_{12}\right)B=Q_{10} \\ \left(c_{12}-p^2a_{12}\right)A+\left(c_{22}-p^2a_{22}\right)B=Q_{20}\,. \end{cases}$$

Решая последнюю систему по методу Крамера, будем иметь

$$A=\frac{\begin{vmatrix} Q_{10} & c_{12}-p^2a_{12} \\ Q_{20} & c_{22}-p^2a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta(p)},\quad B=\frac{\begin{vmatrix} c_{11}-p^2a_{11} & Q_{10} \\ c_{12}-p^2a_{12} & Q_{20} \end{vmatrix}}{\Delta(p)}\,. \tag{1.14}$$

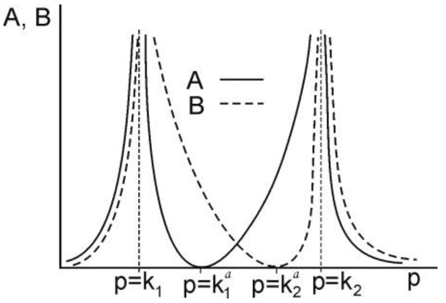


рис. 1.1

Здесь $\Delta(p)$- определитель (9) на частоте возмущения. Поскольку k_1 и k_2 являются корнями уравнения $\Delta(k)=0$, то при $p \to k_1$ или $p \to k_2$ амплитуды вынужденных колебаний А и В неограниченно возрастают и в системе будет иметь место резонанс. Те значения частоты возмущения p, при которых амплитуды A и B в (1.14) обращаются в ноль, называются частотами антирезонанса. На рис. 1.1 построены резонансные кривые для каждой степени свободы.

Задание. Определить частоты малых свободных колебаний, а также формы свободных колебаний системы с двумя степенями свободы, пренебрегая силами сопротивления, массами пружин и моментами инерции скручиваемых валов. Составить общее решение, определив постоянные интегрирования из начальных условий. Рассмотреть вынужденные колебания в системе под действием заданной возмущающей силы $F = F_0 \cos pt$ или момента $M = M_0 \cos pt$. Сила всегда приложена в центре масс тела. Вычислить обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам и связанные с действием заданного возмущающего усилия. Используя полученные для свободных колебаний однородные уравнения Лагранжа, составить дифференциальные уравнения движения, описывающие вынужденные колебания системы в обобщенных координатах. Построить резонансную кривую для каждой обобщенной координаты. Маховики и шестерни (за исключением косозубых) считать сплошными однородными дисками, стержни - тонкими однородными. Пружины деформируются только вдоль своих осей. Во всех случаях качение дисков происходит без проскальзывания.

Пример 1. Система состоит (рис. 1.2) из двух тел, соединенных пружинами между собой и с неподвижным основанием.

Дано: m_1 = 4 кг, m_2 = 4 кг $c_1=3\cdot 10^3$ Н/м, $c_2=2\cdot 10^3$ Н/м.

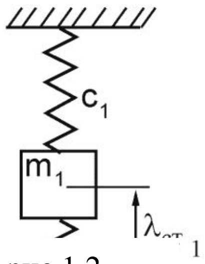


рис 1.2

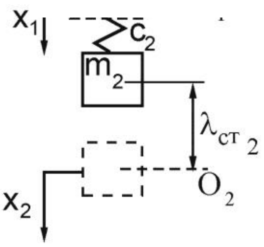


Рис. 2

Начальные условия: телу с массой m_1 сообщается скорость 10 м/с, направленная вниз.

Для расчета вынужденных колебаний считать, что система находится под действием гармонической возмущающей силы $F_1 = F_0 \cos pt$, приложенной к телу с массой m_1 и направленной вниз, F_0= 100 Н.

За обобщенные координаты примем x_1 и x_2 – вертикальные перемещения грузов, отсчитываемые от положений статического равновесия тел (O_1 и O_2). Соответствующие обобщенные скорости - $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} . \qquad (1.15)$$

Потенциальная энергия:

$$\Pi = \frac{c_1}{2}\left[(x_1 + \lambda_{cm\,1})^2 - \lambda_{cm\,1}^2\right] + \frac{c_2}{2}\left[(x_2 - x_1 + \lambda_{cm\,2})^2 - \lambda_{cm\,2}^2\right] - m_1 g\, x_1 - m_2 g\, x_2. \qquad (1.16)$$

Здесь первые два слагаемых соответствуют энергии упругой деформации пружин, вторые два – потенциальной энергии поля силы тяжести; $\lambda_{cm\,1}, \lambda_{cm\,2}$- статические деформации пружин.

Используя (1.4), получаем систему для определения $\lambda_{cm\,1}, \lambda_{cm\,2}$:

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} = c_1 \lambda_{cm\,1} - c_2 \lambda_{cm\,2} - m_1 g = 0;$$

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} = c_2 \lambda_{cm\,2} - m_2 g = 0.$$

Отсюда: $\lambda_{cm\,1} = \dfrac{(m_1 + m_2) g}{c_1}, \lambda_{cm\,2} = \dfrac{m_2\, g}{c_2}$. После подстановки этих выражений в (1.16) и преобразований, получим

$$\Pi = \frac{c_1}{2} x_1^2 + \frac{c_2}{2}(x_2 - x_1)^2 = \frac{c_1 + c_2}{2} x_1^2 - c_2 x_1 x_2 + \frac{c_2}{2} x_2^2 . \qquad (1.17)$$

Свободные колебания. После подстановки выражений для кинетической (1.15) и потенциальной (1.17) энергий в уравнения Лагранжа, получим дифференциальные уравнения свободных колебаний системы:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 = 0;$$
$$m_2\ddot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 = 0. \qquad (1.18)$$

Решение системы будем искать в виде :

$$x_1 = A\sin kt,\ x_2 = B\sin kt.$$

Для определения постоянных А и В получим систему, аналогичную (1.8):

$$\begin{cases} \left(c_1 + c_2 - k^2 m_1\right)A - c_2\, B = 0 \\ -c_2\, A + \left(c_2 - k^2 m_2\right)B = 0. \end{cases} \qquad (1.19)$$

Частотное уравнение, согласно (9) и (10):

$$k^4 - \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1}\right)k^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0$$

или, после подстановки значений масс и жесткостей:

$$k^4 - 1{,}75\cdot 10^3 k^2 + 0{,}375\cdot 10^6 = 0\ .$$

Как биквадратное это уравнение имеет два вещественных корня $k_1^2 = 250c^{-2}, k_2^2 = 1550c^{-2}$. Соответственно, собственные частоты:

$$k_1 = 15{,}8\ c^{-1}, k_2 = 38{,}7\ c^{-1}.$$

Коэффициенты первой и второй форм по (1.11):

$$n_1 = \frac{c_1 + c_2 - m_1 k_1^2}{c_2} = 2,\ \ n_2 = \frac{c_1 + c_2 - m_1 k_2^2}{c_2} = -0{,}5\ .$$

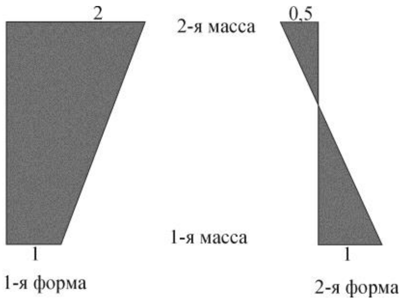


рис. 1.3

Таким образом, при колебаниях системы по 1-ой форме оба тела отклоняются от положения равновесия в одном направлении; при этом отклонение тела массой m_2 в два раза превышает отклонение тела массой m_1. При колебаниях по 2-ой форме, тела отклоняются в противоположные стороны и, наоборот, отклонение тела массой m_1 в два раза превышает отклонение тела массой m_2 (рис.1.3).

Найденным частотам свободных колебаний соответствует общее решение

$$x_1 = A_1 \sin\left(15{,}8t + \alpha_1\right) + A_2 \sin\left(38{,}7t + \alpha_2\right),$$
$$x_2 = 2\,A_1 \sin\left(15{,}8t + \alpha_1\right) - 0{,}5\,A_2 \sin\left(38{,}7t + \alpha_2\right). \qquad (1.20)$$

По начальным условиям ($x_1\big|_{t=0} = 0,\ \dot{x}_1\big|_{t=0} = 10,\ x_2\big|_{t=0} = 0,\ \dot{x}_2\big|_{t=0} = 0$) определим постоянные интегрирования $A_1, B_1, \alpha_1, \alpha_2$:

$$A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2 = 0,$$
$$15{,}8A_1 \cos\alpha_1 + 38{,}7A_2 \cos\alpha_2 = 10,$$
$$2A_1 \sin\alpha_1 - 0{,}5B_1 \sin\alpha_2 = 0,$$
$$2\cdot 15{,}8A_1 \cos\alpha_1 - 0{,}5\cdot 38{,}7A_2 \cos\alpha_2 = 0.$$

Решив систему, получим:

A_1=0,13 м; A_2=0,2 м; α_1=α_2=0.

Подставив значения постоянных интегрирования в решения (1.19), получим окончательный вид общего решения задачи вынужденных колебаний.

Вынужденные колебания. Элементарная работа сил, приложенных к первому второму телу $\delta A = F_1\ \delta x_1 + F_2\ \delta x_2$ (F_2=0) и, следовательно, обобщенные силы Q_1=F_1, Q_2=0. Уравнения Лагранжа для вынужденных колебаний (1.13) будут иметь вид (правые части этих уравнений совпадают с правыми частями уравнений (1.18))

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 = F_0 \sin\ pt;$$
$$m_2\ddot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 = 0.$$

Решение последней системы будем искать в виде

$$x_1 = A\sin pt,\ x_2 = B\sin pt.$$

При этом для определения амплитуд вынужденных колебаний А и В получим неоднородную систему

$$\begin{cases}\left(c_1+c_2-p^2m_1\right)A-c_2\,B=F_0\\ -c_2\,A+\left(c_2-p^2m_2\right)B=0.\end{cases}$$

Решая ее, получим

$$A=\frac{c_2-m_2p^2}{\Delta(p)}F_0,\ \ B=\frac{c_2}{\Delta(p)}F_0. \tag{1.21}$$

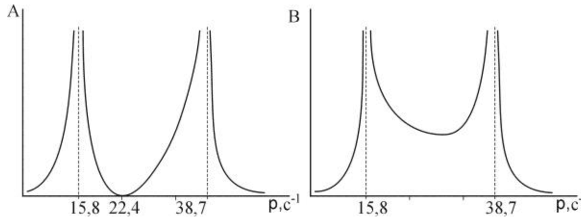


рис. 1.4

Здесь $\Delta(p)$- определитель правой части системы (1.21) (определитель однородной системы (1.19) на частоте возмущения). По формулам (1.21) построим резонансные кривые *A(p)* и *B(p)* (рис. 1.4).

Из условия A=0 определим частоту антирезонанса $k^a=\sqrt{\dfrac{c_2}{m_2}}=22{,}4\,c^{-1}$.

Пример 2. Система состоит (рис. 1.5) из сплошного цилиндра 1 и двух стержней: горизонтального OE (3) и шарнирно закрепленного в точке A стержня AB (2).

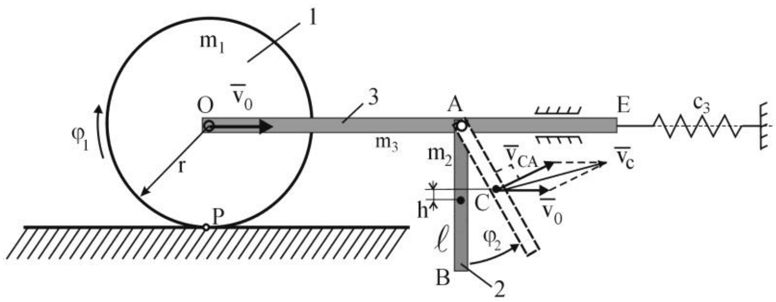


рис. 1.5

Дано: m_1 = 6 кг, m_2 = 4 кг, m_3 = 2 кг, $c_2=2\cdot10^2$ Н/м, ℓ=1 м, r =2 м. *Начальные условия*: телу 3 сообщается скорость 2 м/с, направленная вправо.

Для расчета вынужденных колебаний считать, что система находится под действием гармонической возмущающей силы $F=F_0\cos pt$, приложенной к стержню OE и направленной вправо, F_0 = 40 Н.

За обобщенные координаты примем φ_1 и φ_2 –угловые перемещения цилиндра и стержня AB, соответственно. В данном случае в положении статического равновесия значения φ_1=φ_2 =0 и пружина не деформирована. Соответствующие обобщенные скорости - $\dot\varphi_1$ и $\dot\varphi_2$. Кинетическая энергия системы (тела 1 и 2 совершают плоскопараллельное движение, тело 3 – поступательное; кинетическая энергия тела 3, совершающего сложное движение определяется по теореме Кёнига):

$$T=\frac{m_1v_0^2}{2}+\frac{J_{z1}\,\dot\varphi_1^2}{2}+\frac{m_3v_0^2}{2}+\frac{m_2v_C^2}{2}+\frac{J_{Cz2}\,\dot\varphi_2^2}{2}. \tag{1.22}$$

Здесь $v_A=v_0=\dot\varphi_1 r$,

$$v_C^2=v_0^2+v_{CA}^2-2v_0v_{CA}\cos(\pi-\varphi_2)=(r\dot\varphi_1)^2+\left(\frac{\ell}{2}\dot\varphi_2\right)^2+2r\dot\varphi\frac{\ell}{2}\dot\varphi_2\cos\varphi_2=$$

$$=(r\dot\varphi_1)^2+\left(\frac{\ell}{2}\dot\varphi_2\right)^2+2r\dot\varphi_1\frac{\ell}{2}\dot\varphi_2\left(1-\frac{\varphi_2^2}{2}\right)=\left[r\dot\varphi_1+\frac{\ell}{2}\dot\varphi_2\right]^2.$$

В последней формуле использовано, что $\cos\varphi_2\approx1-\dfrac{\varphi_2^2}{2}$, ввиду предполагаемой малости колебаний. Здесь следует удерживать лишь слагаемые второй степени по обобщенной скорости. После подстановки в (1.22) выражений для скоростей v_0, v_C и моментов инерции, а затем значений всех исходных данных, получим окончательное выражение для кинетической энергии системы

$$T=30\dot\varphi_1^2+2\dot\varphi_1\dot\varphi_2+1{,}2\dot\varphi_2^2.$$

Потенциальная энергия состоит из энергии деформированной пружины и энергии в поле силы тяжести стержня AB:

$$\Pi=\frac{1}{2}c_3\Delta^2-m_2gh=\frac{1}{2}c_3(r\varphi_1)^2+m_2g\frac{\ell}{2}(1-\cos\varphi_2)=$$

$$=\frac{1}{2}c_3r^2\varphi_1^2-m_2g\frac{\ell}{2}\frac{\varphi_2^2}{2}=4\cdot10^2\cdot\varphi_1^2+5\cdot\varphi_2^2.$$

Свободные колебания. После подстановки выражений для кинетической и потенциальной энергий в уравнения Лагранжа, получим дифференциальные уравнения свободных колебаний системы:

$$
\begin{aligned}
&60\ddot{\varphi}_1 + 2\ddot{\varphi}_2 + 800\varphi_1 = 0;\\
&2\ddot{\varphi}_1 + 2{,}4\ddot{\varphi}_2 + 10\varphi_2 = 0.
\end{aligned}
\qquad (1.23)
$$

Решение системы будем искать в виде

$$\varphi_1 = A\sin kt,\ \varphi_2 = B\sin kt.$$

Для определения постоянных А и В получим систему:

$$
\begin{cases}
\left(8\cdot 10^2 - 60k^2\right)A - 2k^2 B = 0\\
-2k^2 A + \left(10 - 2{,}4k^2\right)B = 0.
\end{cases}
\qquad (1.24)
$$

Частотное уравнение, согласно (9) и (10):

$$k^4 - 18k^2 + 57{,}1 = 0\,.$$

Собственные частоты:

$$k_1 = 2\ c^{-1}, k_2 = 3{,}7\ c^{-1}.$$

Коэффициенты первой и второй форм из первого уравнения (1.24):
$n_1 = \dfrac{\left(8\cdot 10^2 - 60k_1^{\,2}\right)}{2k_1^2} = 66$; $n_2 = \dfrac{\left(8\cdot 10^2 - 60k_2^{\,2}\right)}{2k_2^2} = -1{,}22$. Таким образом, при колебаниях системы по 1-ой форме цилиндр 1 практически неподвижен, а колебания совершает стержень АВ. При колебаниях по 2-ой форме, угловые колебания цилиндра и стержня АВ близки по величине, но противоположны по направлению (рис. 1.6).

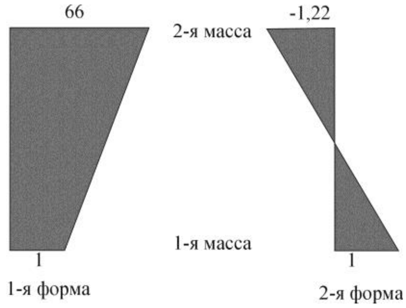


рис. 1.6

Найденным частотам свободных колебаний соответствует общее решение

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= A_1\sin\left(2t + \alpha_1\right) + A_2\sin\left(3{,}7t + \alpha_2\right),\\
\varphi_2 &= 66\cdot A_1\sin\left(2t + \alpha_1\right) - 1{,}22\,A_2\sin\left(3{,}7t + \alpha_2\right).
\end{aligned}
\qquad (1.25)
$$

По начальным условиям ($\varphi_1\big|_{t=0} = 0, \dot{\varphi}_1\big|_{t=0} = 1\,c^{-1}, x_2\big|_{t=0} = 0, \dot{x}_2\big|_{t=0} = 0$) определим постоянные интегрирования A_1, B_1, α_1, α_2:

$$
\begin{aligned}
&A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2 = 0,\\
&2A_1\cos\alpha_1 + 3{,}7A_2\cos\alpha_2 = 1\,,\\
&66\cdot A_1\sin\alpha_1 - 1{,}22A_2\sin\alpha_2 = 0\,,\\
&66\cdot 2A_1\cos\alpha_1 - 1{,}22\cdot 3{,}7A_2\cos\alpha_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Решив систему, получим:

A_1=0,01 м; A_2=0,3 ; α_1=α_2=0.

Подставив значения постоянных интегрирования в решения (1.25), получим окончательный вид общего решения задачи вынужденных колебаний.

Вынужденные колебания. Элементарная работа сил, приложенных к первому и второму телу $\delta A = F_1\, r\delta\varphi_1 + M_2\ \delta\varphi_2$ ($M_2=0$) и, следовательно, обобщенные силы $Q_1=F_1r$, $Q_2=0$. Уравнения Лагранжа для вынужденных колебаний (1.13) будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
&60\ddot{\varphi}_1 + 2\ddot{\varphi}_2 + 800\varphi_1 = F_0 r\sin pt;\\
&2\ddot{\varphi}_1 + 2{,}4\ddot{\varphi}_2 + 10\varphi_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Решение последней системы будем искать в виде

$$x_1 = A\sin pt,\ x_2 = B\sin pt.$$

При этом для определения амплитуд вынужденных колебаний А и В получим неоднородную систему

$$
\begin{cases}
\left(8\cdot 10^2 - 60p^2\right)A - 2p^2 B = F_0 r\\
-2p^2 A + \left(10 - 2{,}4p^2\right)B = 0.
\end{cases}
$$

Решая ее, получим

$$A = \frac{\left(10 - 2{,}4p^2\right)}{\Delta(p)}F_0 r,\ \ B = \frac{2p^2}{\Delta(p)}F_0 r. \qquad (1.26)$$

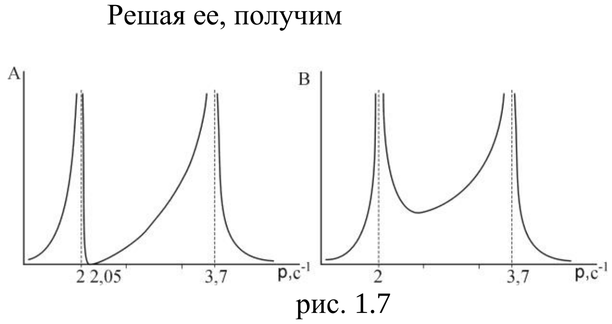


рис. 1.7

По формулам (1.26) построим резонансные кривые *A(p)* и *B(p)* (рис. 1.7). Из условия A=0 определим частоту антирезонанса $k^a = \sqrt{\dfrac{10}{2.4}} = 2{,}05\,c^{-1}$.

Пример 3. Система состоит (рис. 1.8) из четырех шестеренок 1 – 4 (однородных сплошных дисков), закрепленных на упругих валах и попарно (1–4 и 2-3) входящих в зацепление. По концам A и B вала заделаны. Дано: массы шестеренок: m_1 = 300 кг, m_2 = 200 кг, m_3 = 100 кг, m_4 = 50 кг; радиусы шестеренок: r_1=0,5м, r_2=0,7м, r_3=0,3м, r_4=0,5м; крутильные жесткости валов: c_1=100 Н м, c_2=150 Н м, c_3=200 Н м. В положении статического равновесия валы недеформированы.

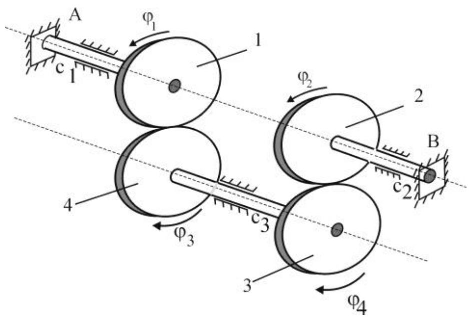


рис. 1.8

Начальные условия: шестерне 1 сообщается угловая скорость 2 1/c, направленная против ч.с.

Для расчета вынужденных колебаний считать, что система находится под действием гармонического возмущающего момента $M = M_0 \cos pt$, приложенного к шестерне 1 и направленного против ч.с., M_0 = 40 Н.

За обобщенные координаты примем φ_1 и φ_2 –угловые перемещения шкивов 1 и 2, соответственно. В данном случае в положении статического равновесия значения φ_1=φ_2 =0. Соответствующие обобщенные скорости - $\dot\varphi_1$ и $\dot\varphi_2$. Кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{J_1\dot\varphi_1^2}{2} + \frac{J_2\dot\varphi_2^2}{2} + \frac{J_3\dot\varphi_3^2}{2} + \frac{J_4\dot\varphi_4^2}{2}.$$

Здесь J_1, J_2, J_3, J_4 – моменты инерции шестеренок 1 - 4, а $\dot\varphi_3 = \dfrac{r_1}{r_3}\dot\varphi_1,\ \dot\varphi_4 = \dfrac{r_1}{r_4}\dot\varphi_1$.

После подстановки в (27) выражений для моментов инерции, а затем значений всех исходных данных, получим окончательное выражение для кинетической энергии системы

$$T = 21{,}9\dot\varphi_1^2 + 36{,}75\dot\varphi_2^2.$$

Потенциальная энергия состоит из энергии деформированных валов (крутильных пружин):

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1\varphi_1^2 + \frac{1}{2}c_2\varphi_2^2 + \frac{1}{2}c_3(\varphi_3 - \varphi_4)^2 = \frac{1}{2}c_1\varphi_1^2 + \frac{1}{2}c_2\varphi_2^2 + $$
$$+ \frac{c_3}{2}\left(\frac{r_1}{r_3}\varphi_2 - \frac{r_1}{r_4}\varphi_1\right)^2 = 329\cdot\varphi_1^2 - 334\varphi_1\varphi_2 + 354\cdot\varphi_2^2.$$

Свободные колебания. После подстановки выражений для кинетической и потенциальной энергий в уравнения Лагранжа, получим дифференциальные уравнения свободных колебаний системы:

$$43{,}8\ddot\varphi_1 + 658\varphi_1 - 334\varphi_2 = 0;$$
$$73{,}5\ddot\varphi_1 - 334\varphi_1 + 708\varphi_2 = 0.$$

Решение системы будем искать в виде:

$$\varphi_1 = A\sin kt,\ \varphi_2 = B\sin kt.$$

Для определения постоянных A и B получим систему:

$$\begin{cases}\left(658 - 43{,}8k^2\right)A - 334B = 0\\ -334A + \left(708 - 73{,}5k^2\right)B = 0.\end{cases} \tag{1.27}$$

Частотное уравнение:

$$k^4 - 24{,}7k^2 + 110{,}1 = 0.$$

Собственные частоты:

$$k_1 = 2{,}4\,c^{-1},\ k_2 = 4{,}3\,c^{-1}.$$

Коэффициенты первой и второй форм определим из первого уравнения (1.28):

$$n_1 = \frac{\left(658 - 43{,}8k_1^2\right)}{334} = 1{,}2;\quad n_2 = \frac{\left(658 - 43{,}8k_2^2\right)}{334} = -0{,}5.$$

Таким образом, при колебаниях системы по 1-ой форме шестерни 1 и 2 совершают колебания близкие по амплитуде, отклоняясь одновременно от положения равновесия в одном направлении. При колебаниях по 2-ой форме, они отклоняются в противоположных направлениях и амплитуда углового отклонения шестерни 2 в два раза больше, чем шестерни 1 (рис. 1.9).

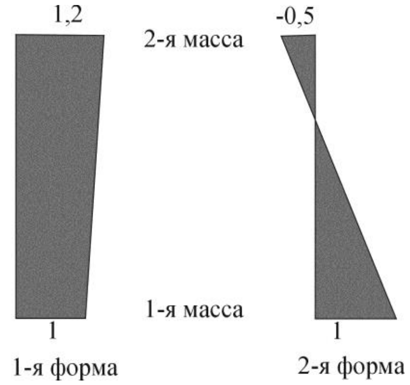


рис. 1.9

Найденным частотам свободных колебаний соответствует общее решение

$$\varphi_1 = A_1 \sin(2{,}4t + \alpha_1) + A_2 \sin(4{,}3t + \alpha_2),$$
$$\varphi_2 = 1.2 \cdot A_1 \sin(2{,}4t + \alpha_1) - 0{,}5 A_2 \sin(4{,}3t + \alpha_2). \qquad (1.28)$$

По начальным условиям ($\varphi_1\big|_{t=0} = 0, \dot{\varphi}_1\big|_{t=0} = 2\,c^{-1}, x_2\big|_{t=0} = 0, \dot{x}_2\big|_{t=0} = 0$) определим постоянные интегрирования $A_1, B_1, \alpha_1, \alpha_2$:

$$A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2 = 0,$$
$$2{,}4A_1 \cos\alpha_1 + 4{,}3A_2 \cos\alpha_2 = 2\,,$$
$$1{,}2 \cdot A_1 \sin\alpha_1 - 0{,}5A_2 \sin\alpha_2 = 0\,,$$
$$1{,}2 \cdot 2{,}4A_1 \cos\alpha_1 - 0{,}5 \cdot 4{,}3A_2 \cos\alpha_2 = 0.$$

Решив систему, получим:

A_1=0,5 м; B_1=0,7 ; $\alpha_1=\alpha_2$=0.

Подставив значения постоянных интегрирования в решение (1.28), получим окончательный вид общего решения задачи вынужденных колебаний.

Вынужденные колебания. Элементарная работа сил, приложенных к первому второму телу $\delta A = M_1 \delta\varphi_1 + M_2\ \delta\varphi_1$ ($M_2=0$) и, следовательно, обобщенные силы $Q_1=M_1$, Q_2=0. Уравнения Лагранжа для вынужденных колебаний (1.13) будут иметь вид

$$43{,}8\ddot{\varphi}_1 + 658\varphi_1 - 334\varphi_2 = M_0 \sin pt;$$
$$73{,}5\ddot{\varphi}_1 - 334\varphi_1 + 708\varphi_2 = 0.$$

Решение последней системы будем искать в виде

$$x_1 = A \sin pt,\ x_2 = B \sin pt.$$

При этом для определения амплитуд вынужденных колебаний A и B получим неоднородную систему

$$\begin{cases} \left(658 - 43{,}8k^2\right)A - 334B = M_0 \\ -334A + \left(708 - 73{,}5k^2\right)B = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$A = \frac{\left(708 - 73{,}5k^2\right)}{\Delta(p)} M_0,\ \ B = \frac{334}{\Delta(p)} M_0. \qquad (1.29)$$

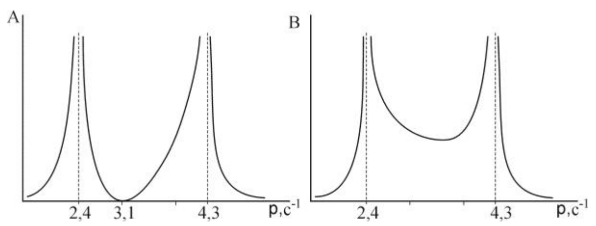


рис. 1.10

По формулам (1.30) построим резонансные кривые *A(p)* и *B(p)* (рис. 1.10).

Из условия A=0 определим частоту антирезонанса $k^a = \sqrt{\dfrac{708}{73.5}} = 3{,}1\,c^{-1}.$

2. Задания представлены вариантами 1 – 30.

ВАРИАНТ 1

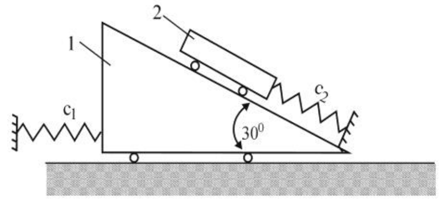


рис. 2.1

Система состоит из двух упругозакрепленных тел – одно (1) установлено на катки и может перемещаться вдоль горизонтальной плоскости, другое (2) – на катках перемещается по наклонной плоскости первого. Массой и размерами катков пренебрегаем. В положении равновесия пружина с жесткостью c_1 недеформирована, пружина с жесткостью c_2 – деформирована.

Дано: m_1 = 8 кг, m_2 = 2 кг, $c_1=2\cdot10^3$ Н/м, $c_2=1{,}5\cdot10^3$ Н/м.

Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 2м/с, направленная влево; возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вправо, P_0= 100 Н.

ВАРИАНТ 2

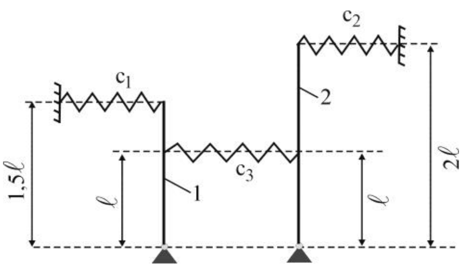


рис. 2.2

Система состоит из двух упругозакрепленных тел - однородных стержней длиной 2ℓ и $1{,}5\ell$, способных вращаться в вертикальной плоскости относительно осей шарниров. Стержни 1 и 2 в положении равновесия занимают вертикальное положение, пружины в этом положении не деформированы.

Дано: ℓ = 0,5 м, m_1 = 5 кг, m_2 = 2 кг, $c_1=6\cdot10^2$ Н/м, $c_2=8\cdot10^2$ Н/м, $c_3=7\cdot10^2$ Н/м.

Начальные условия: стержню 1 сообщается угловая скорость 5 c^{-1}, направленная против ч.с.;
возмущающий момент приложен к телу 1, M_0= 10 Нм.

ВАРИАНТ 3

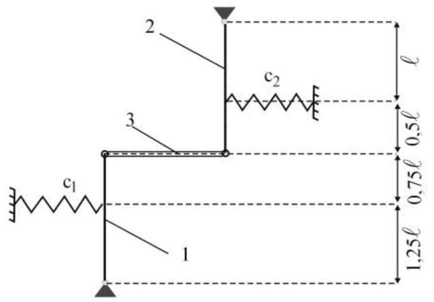


рис. 2.3

Система состоит из двух упругозакрепленных тел - однородных стержней длиной $1{,}5\ell$ и 2ℓ, способных вращаться в вертикальной плоскости относительно осей шарниров. Стержни соединены жесткой безмассовой вставкой 3. Стержни 1 и 2 в положении равновесия занимают вертикальное положение, пружины в этом положении не деформированы

Дано: ℓ = 0,5 м, m_1 = 5 кг, m_2 = 2 кг, $c_1=8\cdot10^2$ Н/м, $c_2=6\cdot10^2$ Н/м, $c_3=7\cdot10^2$ Н/м.

Начальные условия: стержню 1 сообщается угловая скорость 1 c^{-1}, направленная против ч.с.;
возмущающий момент приложен к телу 1, M_0= 10 Нм.

ВАРИАНТ 4

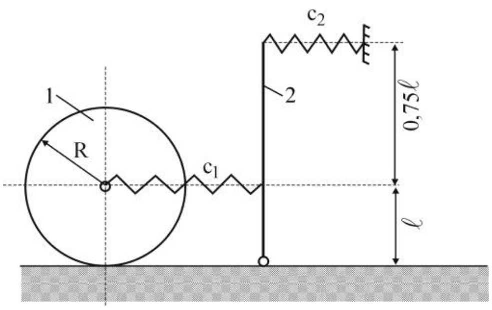


рис. 2.4

Система состоит из двух тел –диска 1 и однородного стержня 2 длиной $1{,}75\ell$, способного вращаться в вертикальной плоскости относительно оси шарнира. В положении равновесия стержень 2 вертикален и обе пружины не деформированы.

Дано: ℓ = 0,3 м, R = 0,3 м, m_1 = 4 кг, m_2 = 1 кг, $c_1=4\cdot10^3$ Н/м, $c_2=3\cdot10^3$ Н/м.

Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 4м/с, направленная влево; возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вправо, P_0= 100 Н..

ВАРИАНТ 5

Система состоит из двух тел– упругозакрепленного тела 1, установленного на катки и однородного стержня (2) длиной ℓ, способного вращаться в вертикальной плоскости относительно оси шарнира, жестко связанного с телом 1. В положении равновесия стержень 2 вертикален и пружины не деформированы.

Дано**:** ℓ = 0,3 м, R = 0,3 м, m_1 = 3 кг, m_2 = 1 кг, $c_1=6\cdot10^2$ Н/м, $c_2=4\cdot10^2$ Н/м, $c_3=8\cdot10^2$ Н/м. *Начальные условия*: телу 1 сообщается скорость 10 м/с, направленная вправо.
возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вправо, P_0= 100 Н.

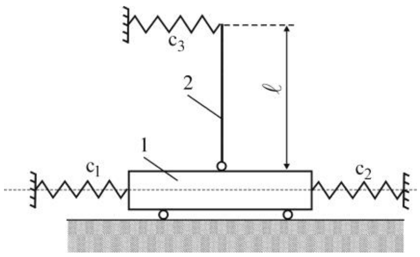


рис. 2.5

ВАРИАНТ 6

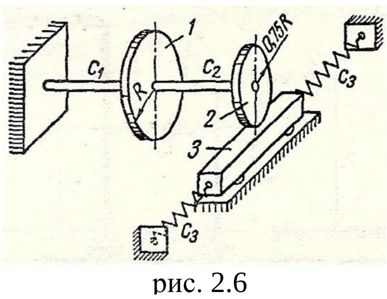


рис. 2.6

Система состоит из трех тел – маховика 1 , шестерни 2 и тела 3, установленного на невесомые катки, на которых оно может перемещаться в горизонтальной плоскости. Тела 1 и 2 связаны упругими (на кручение) осями между собой и неподвижной стенкой. В положении равновесия все пружины не деформированы.

Дано: R = 0,4 м, m_1 = 30 кг, m_2 = 30 кг, m_3 = 10 кг, $c_1=2\cdot10^4$ Нм, $c_2=1\cdot10^4$ Нм, $c_3=1\cdot10^4$ Н/м. *Начальные условия*: маховику 1 сообщается угловая скорость 4 1/с, направленная против ч.с.;
возмущающий момент приложен к маховику 1, M_0= 20 Нм.

ВАРИАНТ 7

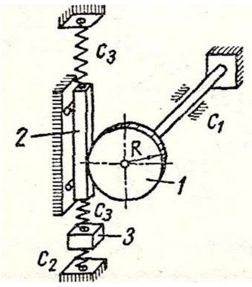


рис. 2.7

Система состоит из трех тел – тела 3, шестерни 1, тела (бруска) 2, связанного с помощью невесомых катков с вертикальной плоскостью, вдоль которой оно может перемещаться. Шестерня 1 связана упругой (на кручение) осью с неподвижной стенкой. В положении равновесия все пружины оказываются деформированы, т.е. получат статические удлинения $\lambda_{ст\, i}$.
Дано: R = 0,4 м, m_1 = 40 кг, m_2 = 20 кг, m_3 = 10 кг, $c_1=3\cdot10^4$ Нм, $c_2=1\cdot10^4$ Н/м, $c_3=1{,}5\cdot10^4$ Н/м.
Начальные условия: шестерни 1 сообщается угловая скорость 10 1/с, направленная против ч.с.; возмущающий момент приложен к шестерне 1, M_0= 20 Нм.

ВАРИАНТ 8

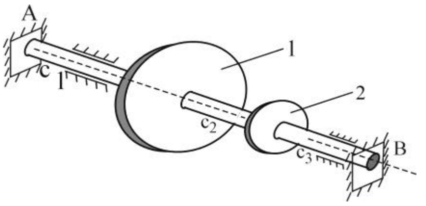


рис. 2.8

Система состоит из двух тел –маховиков 1 и 2, насаженных на упругий вал. На концах А и В вал жестко закреплен. Жесткости на кручение участков вала - c_1, c_2, c_3. Массой вала пренебрегаем. В положении равновесия вал не деформированы.
Дано**:** R = 0,2 м, m_1 = 50 кг, m_2 = 60 кг, $c_1=2\cdot10^4$ Нм, $c_2=3\cdot10^4$ Нм, $c_3=1\cdot10^4$ Нм.
Начальные условия:маховику 1 сообщается угловая скорость 20 1/с, направленная против ч.с.;возмущающий момент приложен к маховику 1, M_0= 50 Нм.

ВАРИАНТ 9

Система состоит из четырех тел – шестеренок 1, 2, 3, 4. Одним из концов ось шестерни 1 жестко закреплена. Жесткости на кручение осей шестеренок 1, 3 - 4 - c_1, c_2. Массой осей пренебрегаем. Ось шестерни 2 – абсолютно жесткая. В положении равновесия пружины- оси не деформированы.
Дано**:** R = 0,35 м, m_1 = 40 кг, m_2 = 60 кг, m_3 = 30 кг, m_4 = 40 кг,$c_1=1\cdot10^4$ Нм, $c_2=3\cdot10^4$ Нм.
Начальные условия: шестерни 4 сообщается угловая скорость 40 1/с, направленная против ч.с.; возмущающий момент приложен к шестерни1, M_0= 20 Нм.

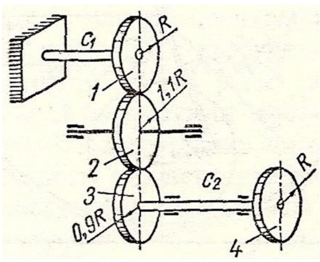


рис. 2.9

ВАРИАНТ 10

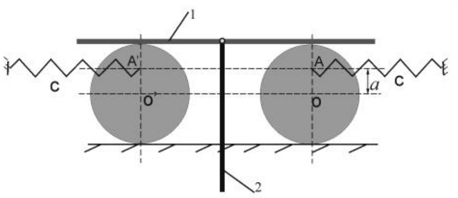


рис. 2.10

Система состоит из четырех тел –двух упругозакрепленных одинаковых дисков радиуса R и массой m_3, горизонтальной балки 1, длинной ℓ и однородного стержня 2 длиной b, способного вращаться в вертикальной плоскости относительно оси шарнира, жестко связанного с балкой 1. В положении равновесия стержень 2 вертикален и пружины не деформированы. Проскальзывания между дисками и балкой нет.
Дано: ℓ = 3 м, R = 0,5 м, a=0,2 м, m_1 = 15 кг, m_2 = 10 кг, m_3 = 20 кг , $c_1=6\cdot10^2$ Н/м, $c_2=4\cdot10^2$ Н/м, $c_3=8\cdot10^2$ Н/м.
Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 10 м/с, направленная вправо; возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вправо, P_0= 100 Н.

ВАРИАНТ 11

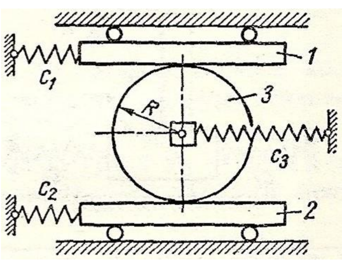


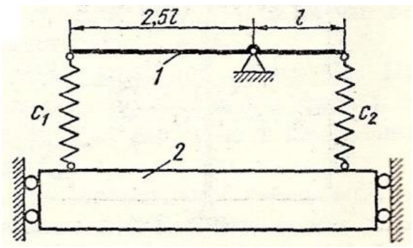
рис. 2.11

Система состоит из трех тел –двух упругозакрепленных брусков 1, 2 с массами m_1 и m_2 и цилиндра 3 с массой m_3. В положении равновесия пружины не деформированы. Проскальзывания между цилиндром и брусками нет.
Дано: R = 0,4 м, a=0,2 м, m_1 = 2 кг, m_2 = 3 кг, m_3 = 8 кг , $c_1=20\cdot10^2$ Н/м, $c_2=40\cdot10^2$ Н/м, $c_3=30\cdot10^2$ Н/м.

Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 20 м/с, направленная вправо; возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вправо P_0= 20 Н.

ВАРИАНТ 12

Система состоит из двух тел –упругозакрепленного тела 2, находящегося в особых вертикальных направляющих и однородного стержня 1 длиной $3{,}5\ell$, способного вращаться в вертикальной плоскости относительно оси шарнира. В положении равновесия обе пружины оказываются деформированы, т.е. получат статические удлинения $\lambda_{ст\ i}$, стержень 1 – получит угловое статическое перемещение.



Дано: ℓ = 0,5 м, m_1 = 8 кг, m_2 = 10 кг, c_1=$40\cdot10^3$ Н/м, c_2=$60\cdot10^3$ Н/м.

Начальные условия: стержню 1 сообщается - угловая скорость 4 $с^{-1}$, направленная по ч.с.; возмущающий момент приложен к стержню 1, M_0= 20 Нм.

ВАРИАНТ 13

Система состоит из четырех тел –двух упругозакрепленных одинаковых дисков радиуса R и массой m_3, горизонтальной балки 1, однородного стержня 2 длиной b, способного вращаться в вертикальной плоскости относительно оси шарнира, жестко связанного с балкой 1. В положении равновесия стержень 2 вертикален и пружины не деформированы. Проскальзывания между дисками и балкой нет.

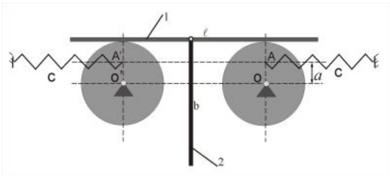


рис. 2.13

Дано: R = 0,5 м, *a*=0,2 м, b=2 м, m_1 = 15 кг, m_2 = 10 кг, m_3 = 20 кг , c =$6\cdot10^2$ Н/м.

Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 10 м/с, направленная вправо; возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вправо, P_0= 100 Н.

ВАРИАНТ 14

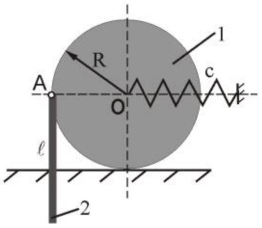


рис. 2.14

Система состоит из двух тел –диска 1 и однородного стержня 2 длиной ℓ, способного вращаться в вертикальной плоскости относительно оси шарнира А. В положении равновесия стержень 2 вертикален и обе пружина не деформирована.

Дано**:** ℓ = 0,6 м, R = 0,5 м, m_1 = 4 кг, m_2 = 1 кг, c=$4\cdot10^3$ Н/м.

Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 4м/с, направленная влево; возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вправо, P_0= 100 Н.

ВАРИАНТ 15

Система – двойной физический маятник состоит из двух однородных стержней 1 и 2, расположенных в вертикальной плоскости. Длины стержней ℓ_1 и, ℓ_2; каждый способен вращаться относительно горизонтальных оси в точках О и А соответственно.

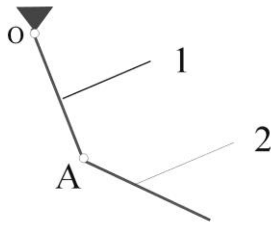


рис. 2.15

Дано: ℓ_1 = 1 м, ℓ_2 = 2 м, m_1 = 4 кг, m_2 = 8 кг,

Начальные условия: стержню 1 сообщается скорость 10 м/с, направленная влево; возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вправо, P_0= 100 Н.

ВАРИАНТ 16

Система состоит из трех тел –конических шестеренок 1 и 2 и диска 3. Одним из концов оси шестеренки 1 и диска 3 жестко закреплены. Жесткости на кручение осей тел 1, 2 и 3 - c_1, c_2, c_3. Массой осей пренебрегаем. В положении равновесия пружины- оси не деформированы. Оси х-х и у-у взаимно перпендикулярны; i_2 i_1 – радиусы инерции шестеренок 2 и 1.

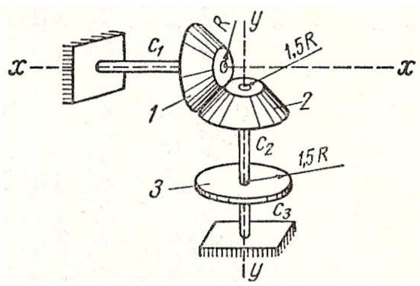


рис. 2.16

Дано: R = 0,4 м, m_1 = 30 кг, m_2 = 40 кг, m_3 = 20 кг, c_1=$1\cdot10^4$ Нм, c_2=$0{,}5\cdot10^4$ Нм, c_3=$2\cdot10^4$ Нм, $i_2 = i_1$ =0,5 м.
Начальные условия: колесу 3 сообщается угловая скорость 20 1/с, направленная против ч.с.; возмущающий момент приложен к колесу 1, M_0= 10 Нм.

ВАРИАНТ 17

Система состоит из двух тел: рамки 1 из трех одинаковых однородных стержней, жестко соединенных в точках O, A, B, способной вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси шарнира в точке O и исходно вертикального однородного стержня 2, способного вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси шарнира в точке C. Пружины деформируются только вдоль своей оси. В положении равновесия пружины не деформированы.

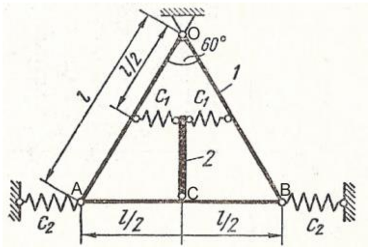


рис. 2.17

Дано: ℓ = 0,4 м, m_1 = 40 кг, m_2 = 2 кг, c_1=$2\cdot10^2$ Н/м, c_2=$1\cdot10^2$ Н/м.

Начальные условия: стержню 1 сообщается угловая скорость 1 $с^{-1}$, направленная против ч.с.; возмущающий момент приложен к телу 1, M_0= 20 Нм.

ВАРИАНТ 18

Система состоит из двух тел –цилиндров 1 и 2, радиусов r_1 и r_2 соответственно. Цилиндры способны кататься по параллельным горизонтальным плоскостям без скольжения.

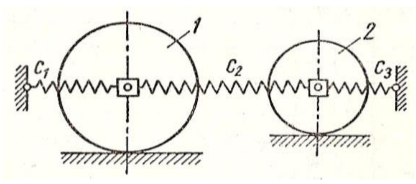


рис. 2.18

Дано: r_1 = 0,5 м, r_2 = 0,3 м, m_1 = 6 кг, m_2 = 4 кг, c_1=$2\cdot10^3$ Н/м, c_2=$1\cdot10^3$ Н/м, c_3=$3\cdot10^3$ Н/м.
Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 10 м/с, направленная влево; возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вправо, P_0= 100 Н.

ВАРИАНТ 19

Система состоит из шкива 1 (сплошного однородного диска радиуса r), закрепленного на валу с крутильной жесткостью c_1 и двух грузов 2, подвешенных к концам троса, переброшенного через шкив. Вал заделан концами A и B в вертикальные направляющие. Направляющие крепятся к вертикальным пружинам жесткости c_2. В положении равновесия вертикальные пружины деформированы (т.е. получат статические удлинения $\lambda_{ст}$), валы – нет.
Дано: r = 0,4 м, m_1 = 80 кг, m_2 = 20 кг, c_1=$3\cdot10^4$ Нм, c_2=$6\cdot10^5$ Н/м.
Начальные условия: шкиву 1 сообщается угловая скорость 20 1/с, направленная против ч.с.; возмущающий момент приложен к шкиву 1, M_0= 20 Нм.

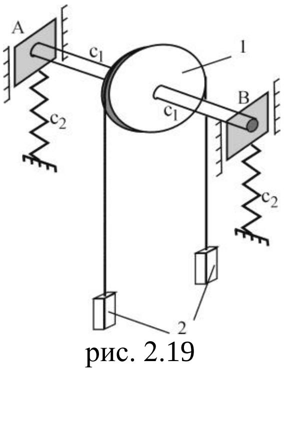


рис. 2.19

ВАРИАНТ 20

Система состоит из двух упругосвязанных однородных цилиндров радиуса r и массы m, способных вращаться относительно горизонтальных осей, проходящих через точки O' и O'$_1$ соответственно. Точки O' и O'$_1$ смещены по вертикали относительно O и O_1 на r/2.
Дано: r = 0,5 м, *a*=0,2 м, m_1 = 15 кг, c =$6\cdot10^2$ Н/м.
Начальные условия: правому цилиндру сообщается скорость 10 м/с, направленная вправо; возмущающая сила приложена к правому цилиндру и направлена вправо, P_0= 100 Н.

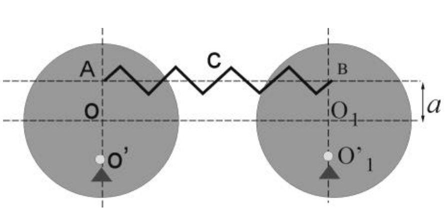


рис. 2.20

ВАРИАНТ 21

Система состоит из двух дисков 1 и 2, первый (радиуса r) из которых закреплен на упругом валу с крутильной жесткостью c, а другой (радиуса r/2) может вращаться относительно горизонтальной оси, параллельной оси вала и проходящей через точку O на ободе первого диска.
Дано: r = 0,4 м, m_1 = 80 кг, m_2 = 40 кг, c_1=$3\cdot10^4$ Нм.

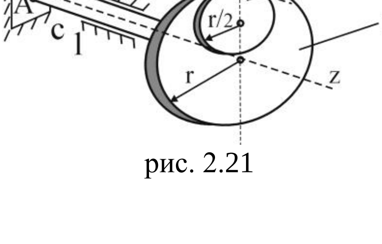


рис. 2.21

Начальные условия: диску 2 сообщается угловая скорость 20 1/с, направленная против ч.с.; возмущающий момент приложен к диску 1, M_0= 20 Нм.

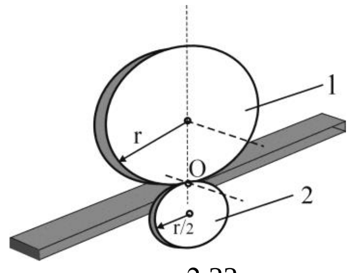


рис. 2.22

ВАРИАНТ 22

Система состоит из двух дисков 1 и 2. Первый может кататься по горизонтальной плоскости, а другой может вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через точку О на ободе первого диска.

Дано**:** r = 0,4 м, m_1 = 100 кг, m_2 = 50 кг.

Начальные условия: диску 2 сообщается угловая скорость 10 1/с, направленная против ч.с.;
возмущающая сила приложена к диску1 и направлена вправо, P_0= 80 Н.

ВАРИАНТ 23

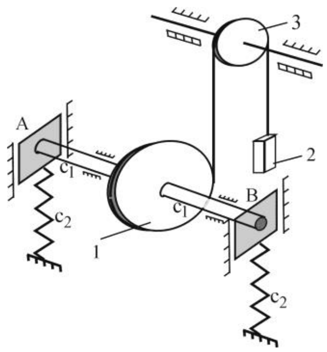


рис. 2.23

Система состоит из шкивов 1 и 3 (сплошных однородных дисков) и груза 2. Шкив 1 закреплен на валу с крутильной жесткостью c_1. Вал заделан концами А и В в вертикальные направляющие. Направляющие крепятся к вертикальным пружинам жесткости c_2. Ось шкива 3 абсолютно жесткая. В положении равновесия вертикальные пружины и вал деформированы (т.е. получат статические удлинения $\lambda_{ст\,i}$).

Дано**:** r = 0,4 м, m_1 = 80 кг, m_2 = 20 кг, m_3 = 40 кг, c_1=3·10^4 Нм, c_2=6·10^5 Н/м.

Начальные условия: шкиву 1 сообщается угловая скорость 10 1/с, направленная против ч.с.; возмущающий момент приложен к шкиву 1, M_0= 10 Нм.

ВАРИАНТ 24

Система состоит из двух, находящихся в вертикальной плоскости, дисков 1 и 2. Первый может катиться по горизонтальной плоскости, а другой может вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через точку О – центр первого диска. Радиус диска 2 равен $\frac{1}{4}r$. Точка О соединена с горизонтальной, расположенной в плоскости дисков, пружиной.

Дано**:** r = 0,4 м, m_1 = 60 кг, m_2 = 20 кг, с=3·10^4 Нм.

Начальные условия: диску 2 сообщается угловая скорость 4 1/с, направленная против ч.с.;
возмущающий момент приложен к диску 1, M_0= 20 Нм.

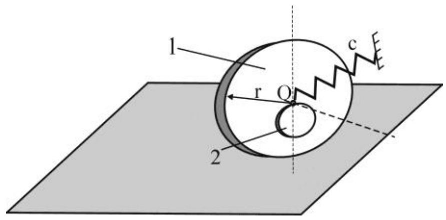


рис. 2.24

ВАРИАНТ 25

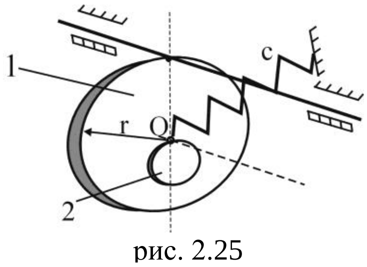


рис. 2.25

Система состоит из двух, находящихся в вертикальной плоскости, дисков 1 и 2. Первый может вращаться вокруг горизонтальной оси, а другой- относительно горизонтальной оси, проходящей через точку О – центр первого диска. Ось диска 1 абсолютно жесткая. Радиус диска 2 равен $\frac{1}{4}r$. Точка О соединена с горизонтальной, расположенной в плоскости дисков, пружиной.

Дано**:** r = 0,4 м, m_1 = 50 кг, m_2 = 10 кг, с=5·10^4 Нм.

Начальные условия: диску 2 сообщается угловая скорость 4 1/с, направленная против ч.с.; возмущающая сила приложена к диску 1 и направлена вправо, P_0= 50 Н.

ВАРИАНТ 26

Система состоит из двух упругозакрепленных тел, находящихся на гладкой наклонной плоскости. В положении равновесия все пружины деформированы.

Дано: m_1 = 8 кг, m_2 = 2 кг, c_1=2·10^3 Н/м, c_2=1,5·10^3 Н/м.

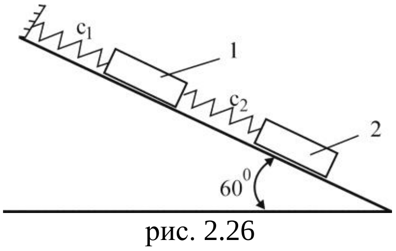


рис. 2.26

Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 2м/с, направленная вниз вдоль наклонной плоскости; возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вниз вдоль наклонной плоскости, P_0= 50 Н.

ВАРИАНТ 27

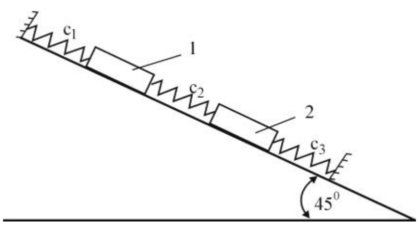


рис. 2.27

Система состоит из двух упругозакрепленных тел, находящихся на гладкой наклонной плоскости. В положении равновесия все пружины деформированы.

Дано: m_1 = 12 кг, m_2 = 8 кг, $c_1=2\cdot10^3$ Н/м, $c_2=1{,}5\cdot10^3$ Н/м, $c_3=4\cdot10^3$ Н/м.

Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 2м/с, вниз вдоль наклонной плоскости; возмущающая сила приложена к телу 1 и направлена вниз вдоль наклонной плоскости, P_0= 100 Н.

ВАРИАНТ 28

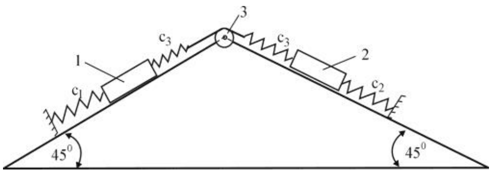


рис. 2.28

Система состоит из двух упругозакрепленных тел, находящихся на гладкой наклонной плоскости. В положении равновесия все пружины деформированы.

Дано: m_1 = 10 кг, m_2 = 6 кг, $c_1=2\cdot10^3$ Н/м, $c_2=1{,}5\cdot10^3$ Н/м, $c_3=1\cdot10^3$ Н/м.

Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 2м/с, вниз вдоль наклонной плоскости; возмущающая сила приложена к телу 2 и направлена вниз вдоль наклонной плоскости, P_0= 100 Н.

ВАРИАНТ 29

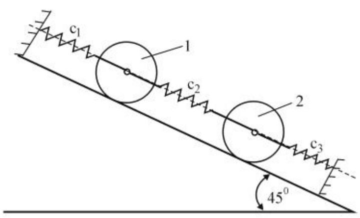


рис. 2.29

Система состоит из двух упругозакрепленных тел – цилиндров 1 и 2, находящихся наклонной плоскости. В положении равновесия все пружины деформированы.

Дано: m_1 = 12 кг, m_2 = 18 кг, $c_1=4\cdot10^4$ Н/м, $c_2=2{,}5\cdot10^4$ Н/м, $c_3=5\cdot10^4$ Н/м.

Начальные условия: телу 1 сообщается скорость 2 м/с, вниз вдоль наклонной плоскости; возмущающая сила приложена к телу 2 и направлена вниз вдоль наклонной плоскости, P_0= 100 Н.

ВАРИАНТ 30

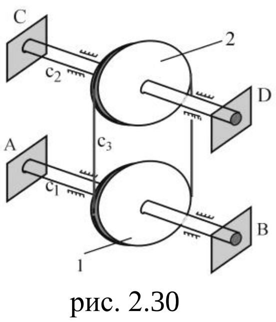


рис. 2.30

Система состоит из двух тел –шкивов 1 и 2 (i_1 i_2 – радиусы инерции шкивов), насаженных на упругие валы. На концах А и В вал жестко закреплен. Жесткости на кручение валов - c_1, c_2, c_3. Массой валов пренебрегаем. Шкивы связаны ремнем с жесткостью на растяжение c_3. В положении равновесия валы и ремень не деформированы.

Дано**:** m_1 = 50 кг, m_2 = 60 кг, $c_1=2\cdot10^5$ Нм, $c_2=3\cdot10^5$ Нм, $c_3=1\cdot10^4$ Н/м, $i_2 = i_1$ =0,5 м.

Начальные условия: шкиву 1 сообщается угловая скорость 15 1/с, направленная против ч.с.; возмущающий момент приложен к шкиву 1, M_0= 50 Нм.

Библиографический список

1. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике. Яблонский А.А. и др.; М.: Высш. шк., 1985.
2. *Горшков Л.К.* Основы теории механических колебаний в разведочном бурении: Учебное пособие. СПб.: СПГГИ, 1998. –109 с.
3. Теория механических колебаний с примерами из практики горного дела. / *Р.Ф. Нагаев, Р.И. Шкадов, Н.А. Лебедев и др.* – СПб.: СПГГИ, 1993. –88 с.
4. *Горшков Л.К., Яковлев А.А.* Теория колебаний: Методические указания к РГР.- СПб.:СПГГИ, 2005.