



И.И. Вульфсон И.А. Шарапин

**МЕХАНИКА МАШИН И ТЕОРИЯ
КОЛЕБАНИЙ**

КОЛЕБАНИЯ ПРИВОДА МАШИНЫ



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»
Кафедра «Теоретическая и прикладная механика»

И.И. Вульфсон И.А. Шарапин

МЕХАНИКА МАШИН И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

КОЛЕБАНИЯ ПРИВОДА МАШИНЫ

*Утверждено Редакционно-издательским советом
Университета в качестве методических указаний
для выполнения контрольной и курсовой работ
студентами заочной формы обучения*



Санкт-Петербург

Утверждено
на заседании кафедры
29.12.2016 г., протокол № 5

Рецензент К.И. Молчанов

Методические указания содержат основные сведения о принципах построения динамических моделей механизмов и приводов машин, их математическом описании и методах расчета типовых колебательных режимов.

В издание включены методические материалы, типовые схемы, динамические модели приводов машин и задания, необходимые для выполнения самостоятельных работ студентов по теории механических колебаний.

Указания разработаны для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки: 15.03.02 – «Технологические машины и оборудование».

Учебное электронное издание сетевого распространения
Издано в авторской редакции

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=2017667, по паролю. – Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию _____. 2017 г. Рег.№ 667/17

ФГБОУВО «СПБГУПТД»
Юридический и почтовый адрес: 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18
<http://sutd.ru>

ПРЕДИСЛОВИЕ

С колебательными процессами человеку приходится сталкиваться на каждом шагу. Обычно научные дисциплины, реализуемые в учебном процессе, соответствуют основным разделам физики – таким, как механика, оптика, электричество, тепловые процессы и т. п. С колебаниями дело обстоит несколько иначе, так как различные виды колебаний имеют различную физическую природу и единую сущность – их математическое описание. При таком широком взгляде на выбранную тему в рамках одного учебного предмета, естественно, не удастся отразить весь спектр колебательных явлений в рассматриваемой области техники. Курс теории колебаний, таким образом, распадается на ряд ответвлений. Представленная работа посвящена природе механических колебаний, иногда называемых вибрациями.

Создание современных машин невозможно без учета колебательных процессов, во многом определяющих такие параметры машин, как их производительность, качество выпускаемой продукции, долговечность, надежность, условия труда человека-оператора. Этим оправдывается объединение понятий «колебания» и «машина» в рамках единой учебной дисциплины.

Каждая современная машина состоит из нескольких функциональных частей – двигателя, механической системы машины и системы управления движением. Механическим колебаниям в первую очередь подвержены элементы механической системы машины. В ней осуществляется преобразование сравнительно простых движений входных звеньев в сложные движения исполнительных органов, требуемых для выполнения заданных технологических или транспортных операций. Кинематическая схема машины является «скелетом» ее реальной конструкции. Выбор и проектирование схемы, выбор материалов и размеров деталей будущей машины определяют этапы проектирования конструкции. Определение методов и средств изготовления той или иной конструкции завершает этапы проектирования.

Процесс воплощения идеи в металле является длительным, сложным и многообразным. «Механика машин», «Детали машин», «Соппротивление материалов», «Теория колебаний» являются комплексными науками, в которых проблемы структуры, кинематики, динамики и прочности конструкций тесно переплетаются с проблемами их оптимального проектирования.

При решении подобных задач мы чаще всего имеем дело с многокритериальными системами и поиском оптимальных вариантов их реализации. Эта проблема в настоящее время решается применением в расчетах современных вычислительных средств.

Одной из важных современных задач является интенсификация производственных процессов, которой в итоге сопутствует рост рабочих скоростей. Это в свою очередь приводит к необходимости более глубокого и разнообразного учета динамических факторов. Игнорирование упругих свойств элементов машин и возбуждаемых колебаний ведет не только к ухудшению эксплуатационных характеристик машин, но и к серьезным авариям. Часто колебания создают прямую угрозу прочности ответственных конструкций,

таких как фундаменты, валопроводы, рабочие органы машин и др.

Кроме того, нередко колебания приводят к существенным искажениям заданных функций программного движения рабочих органов, к нарушению требований точности при обработке изделий и других условий нормальной эксплуатации оборудования. Колебания могут оказывать вредное физиологическое воздействие на обслуживающий персонал, подвергаемый вибрационным (общим, локальным, толчкообразным) и шумовым нагрузкам; они занимают 2-е и 3-е (после пылевой) места среди всех профессиональных заболеваний. Проявляются в виде вибрационных патологий. Эти болезни в настоящее время включены в список профзаболеваний; они поддаются эффективному лечению лишь на ранних стадиях. В более тяжелых формах ведут к инвалидности (заболевания нервной системы, анализаторов, тонус кровеносных сосудов, влияние на обменные процессы и т. д.). В последнее время медицина научилась выявлять людей, которые вовсе не переносят вибрацию.

В то же время в технике и медицине с каждым годом все шире применяются различные эффекты, основанные на использовании специально возбуждаемых колебаний, так как вибрация обладает высокой биологической активностью. Сила ответных реакций определяется не только уровнем энергетического воздействия, но и биомеханическими свойствами человеческого тела как сложной колебательной системы.

Учет упругих свойств звеньев и их колебаний при динамических расчетах механизмов и машин позволяет решать широкий класс задач, необходимых для создания и эксплуатации современных высокоскоростных машинных агрегатов.

Итак, решение этих задач обычно преследует следующие цели:

1. Устранение аварийных режимов.
2. Обеспечение нормальных условий работы машины и ее обслуживания.

При решении данной задачи должны приниматься во внимание условия, обеспечивающие:

- высококачественное и надежное осуществление заданной технологической или транспортной операции;
- воспроизведение с заданной точностью требуемых кинематических зависимостей;
- ограничение уровня колебаний, связанных с учетом характеристик технологических процессов, средств автоматизации и др.;
- требования защиты человека-оператора от повышенного уровня шума и вибрации.

3. Рациональное использование колебательных явлений для реализации технологических и транспортных операций (вибротранспорт, виброинструмент и т. п.).

При решении задач динамики механизмов с упругими звеньями инженер сталкивается с различными источниками возбуждения механических колебаний. По этому признаку различаются следующие разновидности колебаний:

- *свободные* колебания, возникающие при начальных условиях (начальное отклонение от положения равновесия, начальная скорость);
- *вынужденные* колебания, происходящие под действием переменных во времени вынуждающих сил или кинематических возмущений;
- *параметрические* колебания, связанные с изменением во времени приведенных масс, моментов инерции и коэффициентов жесткости;
- *автоколебания*, которые возникают в нелинейных колебательных системах при неколебательном источнике энергии.

Представленная работа базируется на лекционном курсе, приведенном в [2–4], а также в монографиях и учебных пособиях [1, 5–14]. Особо считаем необходимым отметить возможность непосредственного использования учебного пособия [4], доступного для студентов заочной формы образования (см. сайт www.vntr.ru – библиотека, Вульфсон И.И. Краткий курс теории механических колебаний).

В данном пособии большое внимание уделяется расчету колебаний привода машин при самостоятельной работе студента, в процессе выполнения которой закрепляются теоретические знания, а также развивается умение и навыки использования этих знаний на практике.

ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Звено – твердое тело, входящее в состав механизма.

Стойка – звено, принимаемое за неподвижное.

Входное звено – звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемое движение других звеньев.

Выходное звено – звено, совершающее движение, для выполнения которого обычно и предназначен механизм.

Обобщенные координаты механической системы – независимые между собой координаты, однозначно определяющие положение механической системы.

Число степеней свободы механической системы – число ее обобщенных координат.

Обобщенная скорость – производная по времени от обобщенной координаты.

Механизм – связанная система тел (звеньев), предназначенная для преобразования движения одного или нескольких из этих тел в требуемое движение других тел и образующая кинематическую цепь, в которой одно из звеньев является стойкой, а число входных звеньев равно числу степеней свободы относительно стойки (степени подвижности).

Машина (машинный агрегат) – устройство, предназначенное для осуществления механических движений и силовых воздействий в целях выполнения технологических и транспортных операций, а также преобразования энергии, материалов и информации.

Возможное перемещение материальной точки – любое допустимое

наложенными связями перемещение материальной точки из положения, занимаемого ею в данный момент времени, в бесконечно близкое положение.

Возможные перемещения механической системы – любая совокупность возможных перемещений материальных точек данной механической системы, допускаемых всеми наложенными на нее связями.

Идеальные связи – связи, для которых сумма элементарных работ их реакций равна нулю на любом возможном перемещении механической системы (при удерживающих связях).

Обобщенная сила – величина, равная коэффициенту при вариации данной обобщенной координаты в выражении возможной работы сил, действующих на механическую систему.

Кинетическая энергия материальной точки – скалярная мера механического движения материальной точки, равная половине произведения ее массы на квадрат ее скорости.

Кинетическая энергия механической системы – величина, равная сумме кинетических энергий всех материальных точек, образующих систему.

Потенциальная энергия материальной точки – величина, равная работе, которую произведет сила, действующая на материальную точку, находящуюся в потенциальном силовом поле, при перемещении этой точки из данного положения в положение, для которого значение потенциальной энергии принято равным нулю.

Потенциальная энергия механической системы – величина, равная сумме потенциальных энергий всех точек механической системы.

Функция положения звена – $\Pi(\varphi_1)$ – зависимость координаты звена от координаты входного звена или координат входных звеньев.

Функция положения механизма – $\Pi(\varphi_1)$ – функция положения выходного звена механизма.

Первая геометрическая передаточная функция (аналог скорости) – $\Pi'(\varphi_1)$ – производная функции положения по координате входного звена (для механизмов с одной степенью подвижности).

Вторая геометрическая передаточная функция (аналог ускорения) – $\Pi''(\varphi_1)$ – вторая производная функции положения по координате входного звена (для механизмов с одной степенью подвижности).

Зубчатое колесо – звено, имеющее элемент высшей кинематической пары, выполненной в виде зубьев, последовательно входящих в зацепление.

Зубчатый механизм – механизм, звеньев которого имеются форму зубчатых колес, входящих в зацепление.

Шаговый механизм – механизм, в котором выходное звено совершает движение в одном направлении с периодическими остановками (выстоями).

Передаточное отношение – $u_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}$ – отношение угловых скоростей, где $\omega_i = \text{const}$, $\omega_j = \text{const}$.

Угловая скорость вращающегося звена $\omega_i = d\varphi_i/dt = P'\omega_1$.

Угловое ускорение вращающегося звена $\varepsilon_i = d\omega_i/dt = P''\omega_1^2 + P'\varepsilon_1$.

Динамический анализ механизма – определение сил по заданному движению звеньев (*первая задача динамики*) или определение движения звеньев по заданным силам (*вторая задача динамики*).

Динамический синтез механизма – определение и выбор параметров механизма, отвечающих требуемым динамическим характеристикам.

Приведенная сила или момент – обобщенная сила, отвечающая координате звена приведения.

Приведенная масса механизма – масса, которую надо сосредоточить в точке приведения, чтобы кинетическая энергия этой материальной точки равнялась сумме кинетических энергий всех звеньев механизма (машины). Приведенная масса является в общем случае величиной переменной, зависящей от координаты входного звена и не зависящей от его скорости.

Приведенный момент инерции – момент инерции, которым должно обладать звено приведения относительно оси его вращения, чтобы кинетическая энергия этого звена равнялась сумме кинетических энергий всех звеньев механизма (машины). Приведенный момент инерции является в общем случае величиной переменной, зависящей от координаты звена приведения и не зависящей от его угловой скорости.

Кинетическая энергия механизма – T – кинетическая энергия всех звеньев механизма (машины).

Установившееся движение машины – движение, при котором кинетическая энергия является периодической функцией времени.

Цикл установившегося движения – τ – период изменения кинетической энергии.

Коэффициент неравномерности – отношение разности максимального и минимального значений скорости звена приведения к ее среднему значению за один цикл установившегося движения.

Полезная работа – работа движущих сил за вычетом работы, затраченной на преодоление сил вредного сопротивления.

Коэффициент полезного действия – отношение полезной работы к работе движущих сил за один цикл установившегося движения.

Механические колебания – движение механической системы, при котором обобщенные координаты и (или) обобщенные скорости поочередно возрастают и убывают во времени.

Периодические колебания – колебания, при которых состояние системы повторяется через равные промежутки времени. Состояние системы характеризуется обобщенными координатами и их производными.

Гармонические колебания – колебания, при которых обобщенная координата или ее производная во времени изменяется пропорционально функции \sin или \cos с аргументом, линейно зависящим от времени.

Амплитуда гармонических колебаний – A – наибольшее отклонение объекта гармонического колебательного процесса от среднего его значения.

Фаза гармонических колебаний – φ – аргумент функции, описывающей гармонические колебания.

Начальная фаза – α – значение фазы гармонических колебаний в начальный момент времени.

Сдвиг фаз – γ – разность фаз двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами.

Круговая (циклическая) частота – ω – производная фазы гармонических колебаний во времени (число циклов за 2π секунд) с^{-1} .

Частота – ν – число колебаний в секунду, Гц. (Частота в Гц в 2π раз меньше круговой частоты).

Период – $\tau = 2\pi/\omega = 1/\nu$ – наименьший промежуток времени (T, τ), по истечении которого повторяется состояние системы.

Свободные колебания – колебания, выполняемые без переменного внешнего воздействия и поступления энергии извне. Свободные колебания происходят за счет энергии, подведенной в начальный момент времени в виде начальных условий (начального отклонения от положения равновесия и начальной скорости).

Вынужденные колебания – колебания, вызванные и поддерживаемые силовым или кинематическим возбуждением. При **силовом возбуждении** к системе приложена переменная сила, зависящая от времени. При **кинематическом возбуждении** какая-либо точка (сечение) принудительно перемещается по заданному закону движения.

Параметрические колебания – колебания, вызванные и поддерживаемые изменением во времени одного или нескольких параметров системы (приведенной массы, приведенного момента инерции, приведенной жесткости и др.).

Автоколебания – установившиеся колебания, которые возникают в системе при неколебательном источнике энергии или источнике энергии с существенно отличающейся частотой и регулируются движением самой системы.

Линейные колебания – колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями.

Нелинейные колебания – колебания, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями.

Собственная частота – k_i – каждая из частот свободных колебаний линейной колебательной системы.

Коэффициент формы – β_i – соотношение амплитуд разных координат для свободных колебаний при фиксированной собственной частоте.

Декремент колебаний – D – отношение амплитуд затухающих свободных колебаний, разделенных одним периодом.

Логарифмический декремент – λ – абсолютная величина натурального логарифма отношения амплитуд свободных затухающих колебаний, разде-

ленных одним периодом.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – $A(\omega)$ – зависимость амплитуды гармонических вынужденных колебаний от частоты гармонического силового или кинематического возбуждения.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) – $\gamma(\omega)$ – зависимость сдвига фаз гармонических вынужденных колебаний относительно фазы гармонического возбуждения.

Статическая амплитуда – $A_{ст}$ – деформация упругой системы под действием амплитудного значения вынуждающей силы, приложенной в статических условиях.

Коэффициент динамичности при силовом возбуждении – $\alpha = A/A_{ст}$ – отношение амплитуды вынужденных колебаний к статической амплитуде.

Коэффициент частотной расстройки – $z = \omega/k$ – отношение частоты гармонического возбуждения к собственной частоте колебательной системы с одной степенью свободы.

Коэффициент динамичности при кинематическом возбуждении – α_1 – отношение амплитуды вынужденных колебаний к амплитуде гармонического кинематического возбуждения.

Безразмерная форма АЧХ – $\alpha(z)$, $\alpha_1(z)$ – зависимость коэффициента динамичности от коэффициента частотной расстройки.

Гармоника – каждая составляющая периодических колебаний или периодической силы, представленных в виде ряда Фурье.

Резонанс – вынужденные колебания, соответствующие одному из максимумов амплитудно-частотной характеристики.

Антирезонанс – вынужденные колебания, соответствующие одному из минимумов амплитудно-частотной характеристики.

Биения – колебания, являющиеся результатом сложения двух гармонических колебаний с близкими значениями частот.

Частота параметрического возбуждения – частота изменения параметра.

Период параметрического возбуждения – период изменения параметра.

Глубина пульсации – отношение амплитудного значения переменной составляющей параметра к среднему значению этого параметра.

Параметрический резонанс – нарастание амплитуд колебаний в линейной колебательной системе, связанное с потерей динамической устойчивости в окрестности определенных частот параметрического возбуждения.

Критическое значение глубины пульсации – значение глубины пульсации, ниже которого обеспечивается подавление параметрического резонанса.

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О СХЕМАТИЗАЦИИ МЕХАНИЗМОВ ПРИ ИХ ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

1.1. Динамическая модель и ее математическое описание

Теоретическое исследование любого физического процесса начинается с составления так называемой физической модели, в которой автор стремится отобразить наиболее существенные факторы рассматриваемой задачи.

Поскольку здесь пойдет речь о проблемах динамики механизмов, мы в дальнейшем воспользуемся термином "*динамическая модель*", понимая под этим *идеализированное отображение рассматриваемой системы, используемое при ее теоретическом исследовании и инженерных расчетах.*

При рассмотрении любой реальной механической системы неизбежно приходится абстрагироваться от некоторых ее частных особенностей, поэтому не может быть составлена настолько совершенная динамическая модель, которая полностью отвечала бы своему оригиналу.

Таким образом, с одной стороны, любая динамическая модель оказывается ограниченной и пригодной лишь при определенных условиях и для рассмотрения вполне определенного круга вопросов. С другой стороны, следует, что при динамическом исследовании одному и тому же механизму может соответствовать целый ряд динамических моделей.

Наиболее простая динамическая модель механизма, основанная на допущении о недеформируемости звеньев, рассматривается в классическом курсе теории механизмов и машин. Результаты, полученные на основе этой модели, в дальнейшем будем называть "*идеальными*", а модель – кинетостатической. При рассмотрении подобных моделей, как правило, решается *первая задача динамики*, когда *при заданном движении звеньев определяются силы, вызывающие это движение.*

Вторую задачу динамики, в которой *определяются законы движения звеньев под действием заданных сил*, в этом случае приходится решать лишь при рассмотрении машинного агрегата в целом, например в связи с определением неравномерности вращения ведущих звеньев.

Анализ кинетостатической модели дает исходное оценочное представление о динамике механизма, которое оказывается достаточно совершенным при характере нагружения объекта, близком к статическому. Однако и при учете упругости звеньев кинетостатический анализ также является полезным, так как полученные при этом анализе силы обычно служат источником возмущений в колебательной системе.

Степень идеализации реальной системы при ее отображении динамической моделью зависит от многих факторов. Учитываемое количество свобод движения зависит от частотного спектра возмущающих сил; кроме того, иногда без ущерба для точности результатов какая-либо группа сил может быть исключена из расчета, учтена в линейном приближении и т. п.

Очень важно, чтобы при выборе динамической модели идеализация не вступала в противоречие с возможностями принципиального характера в описании тех или иных колебательных явлений. Например, при исследова-

нии параметрических колебаний обязательно должна быть принята во внимание переменность параметров системы, а при изучении автоколебаний – нелинейные связи в системе.

Сама процедура выбора динамической модели уже требует определенного уровня знаний и понимания качественной картины изучаемых явлений.

В одних случаях конструктивные особенности исследуемого механизма таковы, что позволяют сразу составить одну или несколько динамических моделей, на которых будут базироваться динамические расчеты.

В более сложных случаях для составления динамической модели требуются предварительные расчеты, а иногда даже проведение поискового эксперимента. Большую роль при выборе удачной динамической модели играет инженерная интуиция, базирующаяся на опыте предыдущих динамических расчетов и экспериментальных исследований, а также на практике эксплуатации различных машин и механизмов.

Особый вред приносят некорректные динамические модели, создающие лишь иллюзию учета тех или иных факторов. Пример подобной ситуации – сведение задачи об учете сил упругости в механизмах к определению статических деформаций под действием сил инерции, полученных на основании кинетостатической модели. Очевидно, что при таком подходе все свойства колебательной системы полностью игнорируются.

С увеличением рабочих скоростей машин растут и частоты возбуждаемых в них колебательных процессов, что ведет к необходимости усложнения динамических моделей. В этих случаях приходится увеличивать число учитываемых упругих элементов машины. При этом растет число степеней свободы исследуемой системы.

Несмотря на то, что вид динамической модели в значительной степени определяется конкретными условиями, возможен отбор ряда типовых моделей, свойственных многим механизмам, как по целям динамического расчета, так и способности отразить наиболее важные динамические свойства.

При таком подходе, который характерен для многих задач прикладной теории колебаний, в рассмотрение вводятся некоторые эталонные модели. К ним может быть сведено большое число конкретных систем. Накопление материалов, содержащих сведения о наиболее характерных динамических моделях механизмов и их приводов, является существенным условием их рационального проектирования и совершенствования.

Математическим описанием (математической моделью) колебаний привода – динамической модели механизма – является система дифференциальных уравнений второго порядка. Решение этой системы уравнений позволяет получить ответ на первую или вторую задачи динамики машин.

Динамические модели цикловых механизмов имеют отличительную особенность, выделяющую эти модели в отдельный класс со своими специфическими свойствами. Эта особенность заключается в том, что абсолютные координаты при прохождении кинематической цепи могут подвергаться нелинейным преобразованиям в соответствии с геометрическими характеристиками механизмов.

1.2. Геометрические характеристики механизма и некоторые динамические критерии кинестатической модели

Под идеальным механизмом, как уже отмечалось, будем понимать его кинестатическую модель при абсолютно точном воспроизведении заданных характеристик, т. е. такой абстрактный механизм, в котором звенья не деформируются, а зазоры и погрешности при изготовлении отсутствуют. Если такой механизм имеет одну степень подвижности, то положение любого его звена однозначно определяется в зависимости от угла поворота его ведущего (входного) звена φ_1 .

Для определенности предположим, что звено n совершает вращательное или поступательное движение, описываемое одной координатой φ_n .

Тогда

$$\varphi_n = \Pi_n(\varphi_1), \quad (1.1)$$

где Π_n – функция положения звена n .

Рассмотрим далее полученные дифференцированием (1.1) функции

$$\Pi'_n = d\Pi_n/d\varphi_1; \quad \Pi''_n = d^2\Pi_n/d\varphi_1^2; \quad \Pi'''_n = d^3\Pi_n/d\varphi_1^3,$$

которые называются соответственно первой, второй и третьей геометрическими передаточными функциями либо аналогами скоростей, ускорений и ускорений второго порядка. Если φ_1 соответствует угловой координате, то размерность передаточных функций совпадает с размерностью Π_n .

Плоскопараллельное движение звена может быть описано тремя функциями положения, фиксирующими угловую координату звена и положение одной из его точек.

Связь геометрических характеристик $\Pi'_n, \Pi''_n, \Pi'''_n$ с характеристиками кинематическими

$$\dot{\varphi}_n = d\varphi_n/dt; \quad \ddot{\varphi}_n = d^2\varphi_n/dt^2; \quad \dddot{\varphi}_n = d^3\varphi_n/dt^3$$

определяется зависимостями:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_n = \Pi'_n(\varphi_1)\dot{\varphi}_1; \\ \ddot{\varphi}_n = \Pi''_n(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + \Pi'_n(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1; \\ \dddot{\varphi}_n = \Pi'''_n(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^3 + 3\Pi''_n(\varphi_1)\dot{\varphi}_1\ddot{\varphi}_1 + \Pi'_n(\varphi_1)\dddot{\varphi}_1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Структура выражения (1.2) – свидетельство того, что при использовании передаточных функций наблюдается четкое разделение геометрических и кинематических характеристик, описывающих движение рассматриваемого звена механизма. В частном случае, например, в зубчатых механизмах с постоянным передаточным отношением функция положения линейна. Как следует из (1.2),

$$\dot{\varphi}_n = \Pi'_n(\varphi_1)\dot{\varphi}_1; \quad \ddot{\varphi}_n = \Pi'_n(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1; \quad \dddot{\varphi}_n = \Pi'_n(\varphi_1)\dddot{\varphi}_1,$$

где коэффициентом пропорциональности служит первая передаточная функ-

ция. Если ведущее звено при этом движется с постоянной ($\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \text{const}$), скоростью то и ведомое (выходное) звено будет перемещаться равномерно.

Возникновение инерционных нагрузок в подобных механизмах возможно только за счет нарушения условий $\dot{\varphi}_1 = \text{const}$ или $\ddot{I}'_n = \text{const}$. Последнее проявляется лишь при наличии ошибок изготовления и иных погрешностей.

При нелинейной функции положения, свойственной цикловым механизмам – кулачковым, рычажным, шаговым и т. п., динамические условия работы оказываются более напряженными по сравнению с механизмами, имеющими линейную функцию положения. Даже в идеальном цикловом механизме в силу $\ddot{\varphi}_n \neq 0$ возникают инерционные нагрузки, причем нередко – весьма значительные. Кроме этого имеется более невыгодная силовая связь между ведущим и ведомым звеньями. Если, например, на ведомом звене n приложена сила F , которая на ведущем звене уравнивается моментом M , то в силу равенства работ на возможных перемещениях имеем

$$M = \Pi'_n(\varphi_1)F. \quad (1.3)$$

Очевидно, что при $\Pi'_n \neq \text{const}$ даже постоянная сила F приводит к возникновению на ведущем звене переменного вынуждающего момента, способного возбуждать вынужденные колебания всего привода.

Практический интерес представляет еще один частный случай. Пусть сила F является силой инерции ведомого звена n . Тогда, предполагая, что ведомое звено совершает поступательное движение, при $\dot{\varphi}_1 = \text{const}$ имеем

$$|F| = m\dot{\varphi}_1^2 |\Pi''_n|. \quad (1.4)$$

После подстановки (1.4) в (1.3) получим

$$|M| = m\dot{\varphi}_1^2 |\Pi'_n \Pi''_n|. \quad (1.5)$$

Легко показать, что

$$\Pi'_n \Pi''_n = \frac{1}{m\dot{\varphi}_1^3} \frac{dT_n}{dt},$$

где T_n – кинетическая энергия звена n ; dT_n/dt – кинетическая мощность.

Выражения (1.3)÷(1.5) свидетельствуют о том, что геометрические характеристики существенно влияют на динамику механизма. Поэтому экстремальные значения функций $|\Pi'|_{\max}$, $|\Pi''|_{\max}$, $|\Pi'\Pi''|_{\max}$ могут быть использованы в качестве простейших критериев, с помощью которых производится сопоставление различных законов движения, а также синтез новых законов, обладающих в определенном смысле оптимальными свойствами.

Для контроля уровня пульсации инерционных нагрузок на ведомом и ведущем звеньях могут быть использованы критерии K_1 и K_2 :

$$K_1 = \Pi''_{\max} + \xi_1 |\Pi''|_{\min}; \quad K_2 = (\Pi'\Pi'')_{\max} + \xi_2 |(\Pi'\Pi'')_{\min}|.$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 – некоторые весовые коэффициенты, с помощью которых можно учесть степень важности разбега и выбега, т.е. положительной и отрицательной составляющих.

По способу формирования геометрических характеристик механизмы можно разделить на две группы: механизмы дискретного синтеза и механизмы функционального синтеза. К первой группе можно отнести механизмы типа рычажных, у которых при синтезе определению подлежит лишь конечное число параметров. Геометрические характеристики таких механизмов заложены в их схемах и поэтому рациональным выбором параметров можно лишь приблизиться к заданной функции положения. Ко второй группе можно отнести механизмы типа кулачковых, в которых профилированием рабочей поверхности можно непосредственно реализовать заданную функцию положения. Это обстоятельство во многих случаях существенно расширяет возможности учета динамических факторов при синтезе подобных механизмов.

Поскольку в данном пособии не рассматриваются цикловые механизмы с упругими звеньями, приведенные выше критерии позволяют оптимизировать вынуждающие силы и моменты, определяющие в первом приближении колебания в приводах машинных агрегатов.

1.3. Исходные предпосылки, используемые при составлении динамической модели механизма

Как уже отмечалось, изучение динамических процессов, происходящих в машине должно начинаться с составления так называемой динамической модели, адекватной этим процессам, т. е. пригодной для описания их свойств и особенностей, которые соответствуют цели расчета или исследования.

Динамическая модель складывается из ее функциональных частей: источника энергии (двигателя) и механической системы. В свою очередь, динамическая модель механической системы состоит из динамических моделей входящих в нее механизмов.

Простейшей динамической моделью является механизм с абсолютно жесткими звеньями (кинетостатическая модель), рассматриваемая в курсе теории механизмов и машин. Эта модель, однако, не позволяет определить динамические ошибки законов движения и исследовать упругие колебания элементов механизмов, приводящие в ряде случаев к повышенному износу и разрушению.

При учете деформируемости звеньев динамическую модель механизма обычно называют механизмом с упругими звеньями. При этом полагают, что звенья являются упругими телами, подчиняющимися закону Гука; это означает, что после снятия нагрузки, вызвавшей деформацию, восстанавливается исходное недеформированное состояние звена.

Важной характеристикой динамической модели является число ее степеней свободы – число независимых (обобщенных) координат, однозначно определяющих положение системы. Поскольку каждое звено может быть представлено совокупностью бесконечного числа масс, связанных между собой элементарными "пружинками", любой механизм с упругими звеньями имеет бесконечное число степеней свободы. При схематизации исследуемого объекта это можно отразить, воспользовавшись динамическими моделями с

распределенными параметрами, которые описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных. Обычно этот тип моделей используется в практике для ограниченного числа относительно простых (хотя и весьма распространенных) элементов конструкций, таких как валы, балки, пластины, оболочки и т. п.

Анализ привода машины на базе только таких моделей практически не представляется возможным, как, впрочем, и необходимым. Поэтому в инженерных расчетах большое распространение получили динамические модели с сосредоточенными, т. е. дискретно заданными параметрами, в которых число степеней свободы конечно. При построении этих моделей исходят из двух принципов:

1. Инерционные свойства системы отображаются массами или моментами инерции, сосредоточенными в отдельных точках или сечениях.

2. Эти точки или сечения соединяются между собой упругими, диссипативными и геометрическими (или кинематическими) связями, лишенными инерционных свойств.

Использованный в данном случае термин "диссипативные", связанный с английским глаголом *to dissipate* – рассеивать (растрчивать), указывает на наличие сил сопротивления, вызывающих рассеяние механической энергии, ее частичный перевод в другие виды энергии.

Применение этих принципов сводится к тому, что в приводе машины и в механизмах выделяются наиболее массивные элементы и наиболее податливые (т. е. наименее жесткие) участки кинематической цепи.

Приведение инерционных характеристик. Данная задача базируется на стремлении сохранить неизменным баланс кинетической энергии. В отличие от задач, решаемых в классическом курсе теории механизмов и машин, при учете упругости звеньев подобную задачу можно решить лишь приближенно. Это следует хотя бы из того факта, что невозможно точно свести систему с бесконечным числом степеней свободы к системе с их конечным числом. Подробная методика приведения инерционных характеристик механизмов дана в работе [2].

Рассмотрим схему привода (рис. 1.1, а), состоящего из двигателя 1, упругой муфты 2, зубчатой передачи 3 - 4, приводящей во вращение вал 5 с барабаном 6. Если все звенья здесь считать абсолютно жесткими, то число степеней свободы этого привода совпадет с его степенью подвижности и будет равно единице. Такую модель называют кинетостатической.

Переходя к упругой модели, естественно в первую очередь учесть упругость муфты как самого податливого звена. Теперь динамической модели можно придать вид последовательной цепочки (рис. 1.1, б), которая состоит из инерционных J_i , упругодиссипативных c, ψ и кинематических Π элементов. Способ определения приведенных значений моментов инерции J (или масс m), коэффициентов жесткости c и коэффициентов рассеяния ψ , характеризующих уровень диссипации, будет пояснен далее.

В качестве кинематического аналога зубчатой передачи здесь выступает элемент Π , соответствующий функции положения, реализующей в данном случае линейное преобразование входной координаты. Данная модель имеет две степени свободы, поскольку положение всех ее элементов однозначно определяется двумя обобщенными координатами.

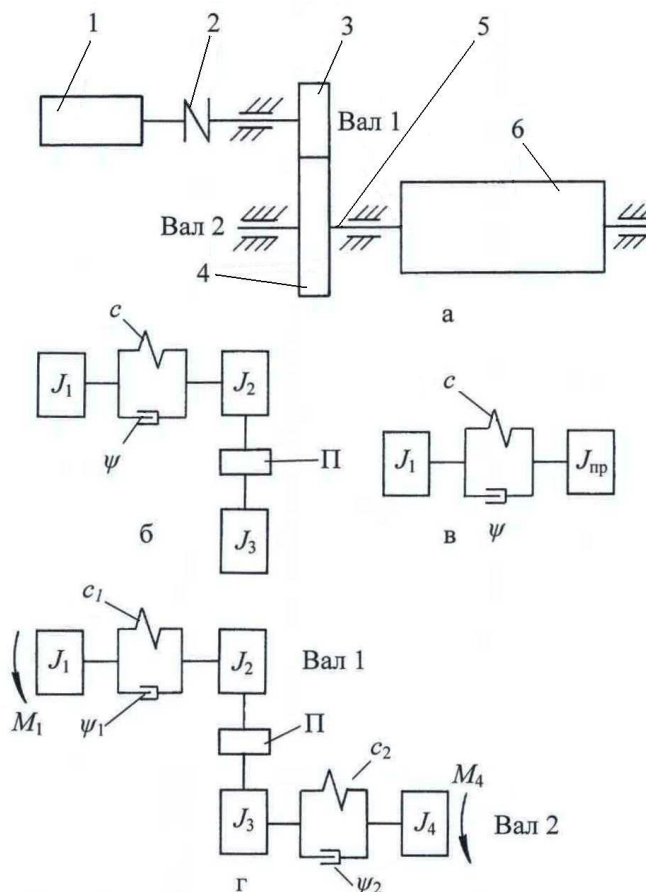


Рис. 1.1. Схема привода и модификации его динамических моделей

Цепочка инерционных и кинематических элементов, не прерываемая упругодиссипативными элементами, может быть заменена одним приведенным моментом инерции $J_{\text{вд}} = J_2 + J_3\Pi^2$ (рис. 1.1, в).

С увеличением рабочих скоростей машин, как уже отмечалось, приходится усложнять динамические модели. Наиболее часто в этих случаях появляется необходимость в увеличении числа учитываемых упругих элементов машин, то есть в увеличении числа степеней свободы исследуемой системы.

Если, например, в рассматриваемом приводе учесть крутильную податливость участка вала 5 между колесом 4 и барабаном 6, то динамическая модель приобретет дополнительную степень свободы (рис. 1.1, г). При этом общее число степеней свободы $H = 3$.

Таким образом, для изучения одного и того же объекта (машины, привода, механизма) могут использоваться совершенно разные динамические модели. Эта неоднозначность моделей машин с упругими звеньями, разумеется, усложняет динамический анализ, поскольку требует от исследователя четких представлений об изучаемых колебательных процессах.

На первый взгляд может показаться, что чем больше динамическая модель имеет степеней свободы, тем меньшую погрешность можно ожидать при решении задачи. Однако это утверждение справедливо до тех пор, пока оно подкрепляется соответствующим уровнем достоверности исходных данных. Между тем, с усложнением модели возникают дополнительные трудности, связанные с выявлением ее отдельных параметров (в первую очередь жесткостных и диссипативных факторов). Неизбежные ошибки, возникающие при их определении, недостаточная информация и грубые предположения могут свести к нулю уточнения, ожидаемые за счет усложнения модели.

По этой причине всегда следует стремиться к выбору наиболее простых динамических моделей, способных отразить исследуемые явления.

При проведении предварительных расчетов на стадии эскизного проектирования машины обычно используется модель машины с жесткими звеньями (кинетостатическая модель). С ее помощью выбирается двигатель, оцениваются в первом приближении инерционные нагрузки и реакции в кинематических парах. При учете динамической характеристики двигателя с помощью кинетостатической модели может быть оценена неравномерность вращения вала двигателя. Нередко при малом коэффициенте неравномерности можно принимать входную координату привода как $\varphi_0 \approx \omega t$, где ω – угловая скорость входного звена.

Далее, на стадии технического проекта в модель включаются упругодиссипативные элементы. В одних случаях конструктивные особенности исследуемого привода таковы, что позволяют сразу составить одну или несколько динамических моделей. Примеры такого подхода были проиллюстрированы выше. Однако в более сложных случаях для окончательного выбора удачной модели требуются несколько предварительных расчетов (например, расчет коэффициентов жесткости отдельных элементов), а иногда – поисковый эксперимент.

Нередко в машинах удается выделить такие подсистемы (механизмы, узлы и т. п.), которые в первом приближении при некоторых упрощающих предположениях можно рассматривать обособленно, что позволяет более глубоко отобразить локальные динамические процессы.

Помимо последовательного соединения элементов (цепная модель на *рис. 1.1, г*), во многих случаях возникает необходимость анализа параллельно-последовательных соединений (разветвленная модель на *рис. 1.2, а*).

Подобная модель встречается, например, при анализе колебаний в приводах с распределительным валом, от которого получает движение целый ряд механизмов.

Особый класс динамических моделей со своими специфическими особенностями образуют механизмы, работающие в замкнутой схеме (замкнутая или кольцевая модель на *рис. 1.2, б*).

На *рис. 1.2* обозначения c_i и ψ_i характеризуют упругодиссипативные элементы моделей, J_0 и J_i – инерционные элементы, φ_i и Π_i – кинематические элементы.

В некоторых случаях целесообразно отдельные звенья машины представить в виде подсистем с распределенными параметрами. Такая необходимость возникает, например, при схематизации длинных валов, каландров и т. д. (модель с распределенными параметрами на рис. 1.2, в).

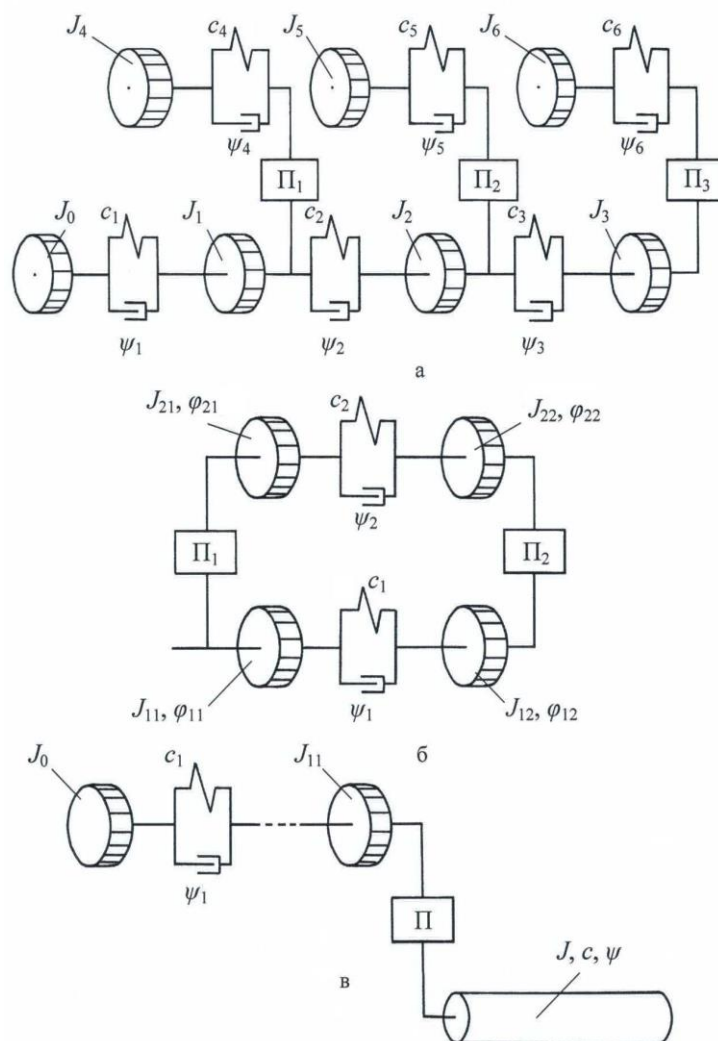


Рис. 1.2. Структурные разновидности динамических моделей

Во всех перечисленных моделях функция положения $\Pi(\varphi)$ может быть как линейной, так и нелинейной, а коэффициенты жесткости c и рассеяния ψ – постоянными либо переменными. Указанные факторы, разумеется, существенно влияют на степень сложности анализа модели. По этой причине при исследовании колебательных явлений нередко представляется заманчивым усреднить переменные параметры системы, усреднить нелинейности и т. д. Однако при этом надо помнить, что за подобное принудительное упрощение задачи приходится расплачиваться тем, что выбранная динамическая модель оказывается принципиально неспособной отображать те или иные важные колебательные режимы. Повторяя предыдущее, напомним, что **динамическая модель должна быть разумно простой**.

Выбор динамической модели зависит от поставленной динамической задачи и, как правило, имеет многоступенчатый характер. Большую роль в этой, часто эвристической, процедуре играет опыт и искусство исследователя.

Характеристики упругих связей и их приведение. Важной характеристикой любого упругого элемента при его деформациях является коэффициент жесткости

$$c = \left| \frac{dF}{dx} \right|,$$

где F – восстанавливающая сила, x – линейная деформация.

При крутильных деформациях

$$c = \left| \frac{dM}{d\varphi} \right|,$$

где M – восстанавливающий момент, а φ – угловая деформация.

В первом случае коэффициент жесткости имеет размерность Н/м, а во втором – Нм. Величину, обратную коэффициенту жесткости $e = c^{-1}$, называют **коэффициентом податливости**.

На рис. 1.3, а представлены графики восстанавливающей силы $F(x)$, которым соответствуют графики $c(x)$, показанные на рис. 1.3, б. Очевидно, что для линейной характеристики

$$c = \frac{F}{x} = \text{const.}$$

В общем случае функция $c(x)$ определяется материалом и конструктивными особенностями упругого элемента. Так, например, в рабочем диапазоне напряжений металлы обычно подчиняются закону Гука (кривая 1), в то же время для резины более свойственна "жесткая" характеристика (кривая 2), а для многих полимерных материалов – "мягкая" характеристика (кривая 3).

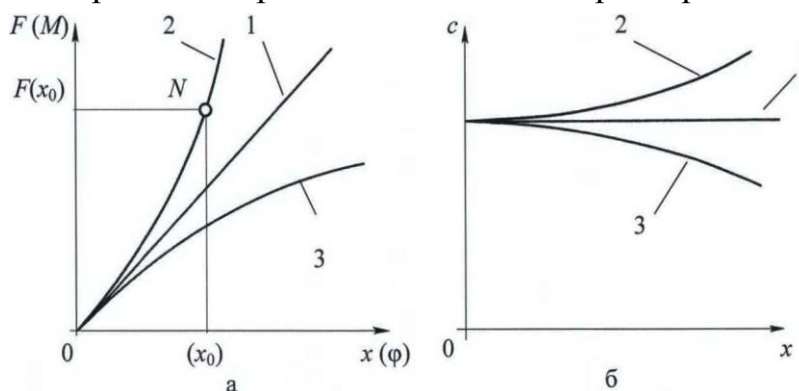


Рис. 1.3. Восстанавливающая сила и коэффициент жесткости

Однако и в конструкциях, состоящих только из металлических деталей, также возможно возникновение нелинейных восстанавливающих сил. В частности, это наблюдается при точечном или линейном контакте двух поверхностей, что характерно для элементов высших кинематических пар. Контактная жесткость здесь увеличивается с ростом нагрузок. При использовании подшипников такая же характеристика, строго говоря, свойственна и обычным шарнирам.

В целях получения требуемых нелинейных характеристик в машинах могут применяться специальные устройства, например конические пружины, у которых число рабочих витков зависит от нагрузки, нелинейные муфты и другие подобные устройства.

Помимо перечисленных причин нарушение линейной характеристики восстанавливающей силы может произойти из-за подключения или отключения элементов кинематической цепи, наличия зазоров в кинематических парах, установки упоров, фиксаторов и других факторов.

Нередко нелинейные факторы в общем балансе жесткостей оказываются малозначимыми. Кроме того, при исследовании малых колебаний, происходящих в окрестности некоторого равновесного состояния системы x_0 , нелинейные упругие характеристики могут быть линеаризованы. Предположим, что $x = x_0 + \Delta x$, где Δx отвечает малым колебаниям около положения x_0 (рис. 1.3, а). Тогда, разложив функцию $F(x_0 + \Delta x)$ в ряд Тейлора по степеням Δx , имеем

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \frac{dF}{dx}(x_0)\Delta x + 0,5 \frac{d^2 F}{dx^2}(x_0)\Delta x^2 + \dots$$

Ограничиваясь лишь двумя первыми членами данного ряда, получим

$$c = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Это, в свою очередь, означает, что нелинейную характеристику в окрестности точки N мы приближенно заменяем касательной в этой же точке. Разумеется, для того, чтобы такая замена была правомерной, необходимо, чтобы функция $F(x)$ в окрестности точки N была непрерывной и дифференцируемой. При нарушении этого условия упругие характеристики называют **существенно нелинейными**.

Необходимость учета нелинейностей обычно связана с рассмотрением динамических процессов, при которых происходят значительные деформации упругих элементов, либо в случаях, когда целью исследования являются специфические эффекты, свойственные только нелинейным системам.

Приведение упругих характеристик, как правило, имеет целью упрощение модели, что позволяет воспользоваться известным решением задачи. Поставим задачу приведения нескольких параллельно соединенных упругих элементов (рис. 1.4, а) к одному упругому элементу $c_{\text{пр}}$ (рис. 1.4, б).

Отличительным свойством параллельного соединения является равенство абсолютных значений деформаций, т. е.

$$|x_1| = \dots = |x_n| = |x|.$$

При приведении не должен нарушаться баланс потенциальной энергии системы. Для одного элемента i при деформации x_i восстанавливающая сила равна $F_i = -c_i x_i$, что отвечает потенциальной энергии

$$V_i = -\int_0^{x_i} F_i dx_i = \int_0^{x_i} c_i x_i dx_i = 0,5 c_i x_i^2.$$

Отсюда $0,5 \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 = 0,5 c_{\text{пр}} x^2$, следовательно,

$$c_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n c_i. \quad (1.6)$$

При последовательном соединении упругостей (рис. 1.4, в) имеем равенство абсолютных значений сил, действующих в поперечных сечениях, т. е.

$$|F_i| = |F|.$$

Далее на основании аналогичных рассуждений получим

$$e_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n e_i, \quad (1.7)$$

где $e_{\text{пр}} = c_{\text{пр}}^{-1}$, $e_i = c_i^{-1}$.

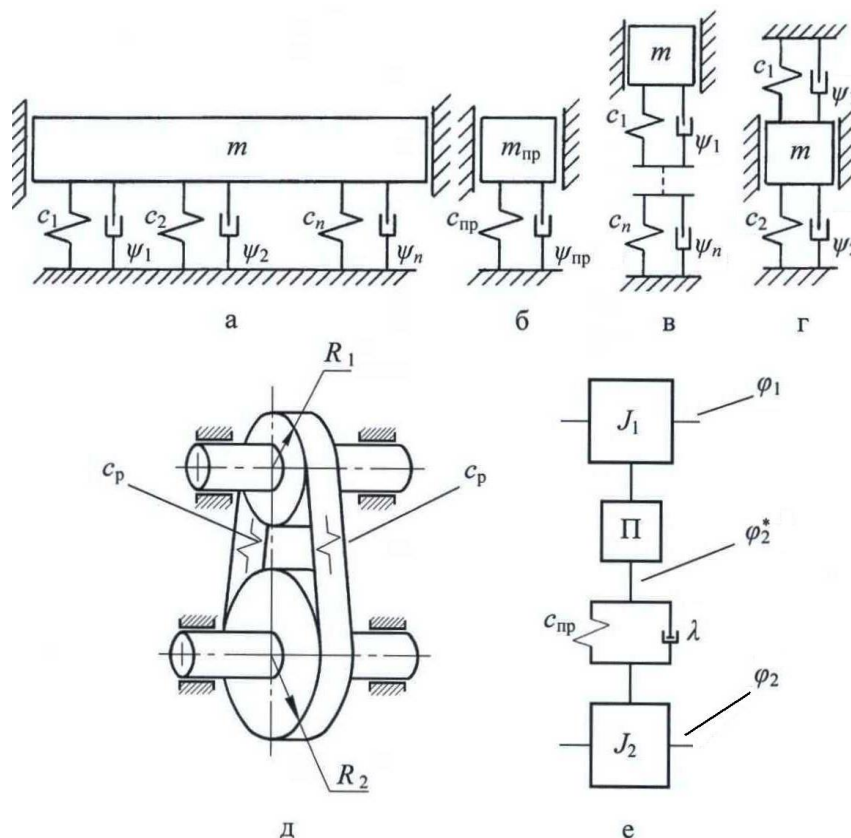


Рис. 1.4. Приведение упругих элементов машины

В процессе определения вида соединения упругих элементов их внешние признаки могут оказаться обманчивыми. Соединение, представленное на рис. 1.4, г, можно ошибочно принять за последовательное; однако при любом перемещении массы m абсолютная деформация обоих упругих элементов одинакова, следовательно, данное соединение является параллельным и

$$c_{\text{пр}} = c_1 + c_2.$$

При параллельном соединении упругостей определяющую роль играют их наиболее жесткие элементы; при последовательном – наиболее податливые элементы.

В некоторых случаях при приведении возможно изменение размерности коэффициента жесткости. Для иллюстрации произведем приведение к ведомому валу упругих характеристик передачи гибкой связью, в частности ременной передачи (рис. 1.4, д) при переходе к расчетной схеме (динамической модели) эквивалентного упругого вала, вращающегося с угловой скоростью ведомого шкива (рис. 1.4, е).

Если коэффициент жесткости одной ветви ременной передачи принять равным c , то, считая обе ветви натянутыми, выражение потенциальной энергии при деформации ремней примет вид

$$V = 0,5(cx^2 + cx^2) = cx^2,$$

где x – деформация одной ветви ремня.

Введем в рассмотрение некоторый добавочный угол поворота ведомого вала $\Delta\varphi$, соответствующий деформации x . Очевидно, что

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_2^* = \frac{x}{R_2},$$

где R_2 – радиус ведомого шкива; $\varphi_2^* = \varphi_1 u_{21}$; $u_{21} = R_1/R_2$ – передаточное отношение.

Для определения приведенного значения коэффициента жесткости $c_{пр}$ запишем выражение потенциальной энергии принятой динамической модели $V = 0,5c_{пр}\Delta\varphi^2$ и, приравнявая его к выражению для потенциальной энергии передачи, окончательно получаем $c_{пр} = 2c_p R_2^2$.

При переходе от линейных деформаций упругих элементов к угловым деформациям валов сменится размерность коэффициента жесткости – с Н/м на Н·м. Аналогичным образом могут выполняться построение моделей и учет упругих характеристик других передач гибкой связью, например, цепных или тросовых.

Параметры диссипации и их приведение. Графики восстанавливающих сил, приведенные на *рис. 1.3, а*, строго говоря, носят несколько идеализированный характер, так как при их построении деформируемые элементы принимались идеально упругими, т. е. лишены диссипативных свойств.

Если учесть силы неупругого сопротивления, направление которых противоположно скорости деформации, то соответствующий график будет иметь две ветви (*рис. 1.5*), причем верхняя ветвь (кривая 1) будет соответствовать нагружению, а нижняя ветвь (кривая 2) – разгрузке.

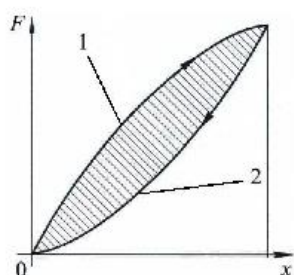


Рис. 1.5. Диссипация упругого элемента

Площадь фигуры, ограниченная снизу осью абсцисс, а сверху кривой 1, соответствует работе, затраченной при деформации упругого элемента, а площадь фигуры, ограниченная сверху кривой 2 – работе, совершаемой упругим элементом при его разгрузке.

При этом заштрихованная площадь, контур которой называют *петлей гистерезиса*, пропорциональна работе, затраченной на преодоление неупру-

гого сопротивления за один цикл. Отношение этой рассеянной энергии к энергии, затраченной при деформации, называется *коэффициентом рассеяния* и обозначается ψ .

Величина и характер зависимости этого параметра от различных факторов и, в первую очередь, определяются самой природой диссипативных сил, которые могут вызываться различными причинами.

В механизмах силы сопротивления чаще всего представляют собой силы трения, возникающие в кинематических парах и неподвижных соединениях деталей. В последнем случае речь идет о так называемом *конструктивном демпфировании*, возникающем при колебаниях на площадках контакта деталей, например в стыках, резьбе и т. п.

Иногда природа сил сопротивления связана с видом демпфирующего устройства, специально предназначенного для увеличения диссипативных свойств системы. Такие устройства могут быть фрикционными, гидравлическими или пневматическими.

Помимо перечисленных разновидностей сил сопротивления существуют силы внутреннего трения в материале, которые возникают при деформации упругих элементов. В динамике механизмов эти силы играют достаточно малую роль для металлических деталей. Для деталей, изготовленных из пластмасс, резины и других неметаллических материалов, силы внутреннего трения могут оказаться соизмеримыми с другими силами сопротивления.

Большое число диссипативных факторов, сложность и многообразие процессов, сопровождающих колебательные явления, приводят к тому, что при решении инженерных задач приходится прибегать к параметрам диссипации, полученным экспериментальным путем. В одних случаях экспериментом выявляются коэффициенты рассеяния отдельных элементов конструкции или сочленений, в других – некоторые приведенные значения, свойственные целому механизму, узлу и т. п. Параметры диссипации обычно определяются при моногармонических (одночастотных) колебаниях в режиме затухающих свободных колебаний либо в резонансе при вынужденных колебаниях.

Определим приведенное значение коэффициента рассеяния $\psi_{\text{пр}}$ при параллельном соединении упругодиссипативных элементов (*рис. 1.4, а*). Для перехода к схеме, показанной на *рис. 1.4, б*, достаточно записать условие баланса рассеянной энергии

$$\psi_{\text{пр}} \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \psi_i V_i, \quad (1.8)$$

где ψ_i, V_i – коэффициенты рассеяния и максимальная потенциальная энергия рассматриваемого элемента i .

Учитывая то, что

$$V_i = 0,5c_i x_i^2; \quad V = \sum_{i=1}^n V_i = 0,5c_{\text{пр}} x^2,$$

а также то, что при *параллельном соединении* $|x_1| = \dots = |x_n| = |x|$, на основании (1.8) получим

$$\Psi_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \Psi_i \frac{c_i}{c_{\text{пр}}}. \quad (1.9)$$

Аналогичным образом может быть получена зависимость для $\Psi_{\text{пр}}$ при последовательном соединении упругодиссипативных элементов

$$\Psi_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n \Psi_i \frac{c_{\text{пр}}}{c_i}. \quad (1.10)$$

При параллельном соединении величина $\Psi_{i\delta}$ обычно близка к значениям Ψ_i , соответствующим наиболее жестким элементам, а при последовательном соединении – наиболее податливым.

Анализ данных, полученных для большого количества механизмов текстильных и полиграфических машин, станков, машин легкой промышленности и других устройств свидетельствуют то, что приведенное значение коэффициента рассеяния $\Psi_{\text{пр}}$, как правило, укладывается в диапазон значений

$$0,3 \leq \Psi_{\text{пр}} \leq 0,7.$$

Эти результаты в качестве ориентировочных можно использовать в тех случаях, когда при предварительных расчетах отсутствует возможность получения более конкретной информации.

Здесь необходимо отметить то, что отображение диссипативных свойств механических систем затрагивает целый ряд еще не разрешенных проблем, привлекающих внимание многих исследователей.

1.4. Колебания системы с одной степенью свободы

Частотные и диссипативные характеристики. В данном параграфе мы напомним некоторые сведения из теоретического курса (подробнее см. [2 – 4]). Процедуру определения частотных и диссипативных характеристик машины проиллюстрируем на примере простейшей динамической модели с одной степенью свободы – $H = 1$ (рис. 1.6). Заметим, что здесь модель имеет настолько наглядный вид, что при записи дифференциального уравнения удобно воспользоваться непосредственно вторым законом Ньютона:

$$m\ddot{y} = -cy - b\dot{y} + F(t), \quad (1.11)$$

где m – масса машины; y – обобщенная координата, описывающая вертикальное перемещение машины; $(-cy)$ – восстанавливающая сила; c – коэффициент жесткости упругого элемента; $(-b\dot{y})$ – сила сопротивления, принятая пропорциональной первой степени скорости; b – коэффициент пропорциональности; $F(t)$ – вынуждающая сила.

Преобразуем (1.11) к форме

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = W(t), \quad (1.12)$$

где $n = b / (2m)$ – коэффициент демпфирования, c^{-1} ; $k = \sqrt{c / m}$ – частота свободных колебаний («собственная» частота) при $n = 0$; $W = F/m$, м/с^2 – отношение вынуждающей силы к массе.

Уравнение (1.12) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка, решение которого складывается из общего решения однородного уравнения, получающегося при условии ($W = 0$), и частного решения неоднородного уравнения $Y(t)$, зависящего от $W(t)$.

Решение однородного уравнения описывает так называемые свободные колебания и имеет следующий вид:

$$y = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) = A_0 e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (1.13)$$

где $e = 2,718281828\dots$ – основание натурального логарифма; $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – собственная частота (частота свободных затухающих колебаний), c^{-1} ; C_1, C_2 – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями (см. ниже); A_0 – амплитуда свободных колебаний при отсутствии диссипации.

Далее запишем $k_1 = k\sqrt{1 - \delta^2}$, где $\delta = n/k$ – безразмерный коэффициент демпфирования. Иногда этот параметр называют долей критического демпфирования, так как при $\delta \geq 1$ процесс становится аperiodическим.

В машинах при отсутствии специальных демпфирующих устройств, используемых для увеличения сил сопротивления, как правило, $\delta \leq 0,1$, поэтому для данного случая можно принять

$$k_1 \approx k = \sqrt{c/m}. \quad (1.14)$$

Тогда период свободных колебаний можно определить из выражения

$$T_1 = 2\pi/k_1 \approx 2\pi/k = T, \quad (1.15)$$

где T_1 – период свободных затухающих колебаний, с.

Заметим, что собственная частота является одной из важнейших характеристик любой колебательной системы.

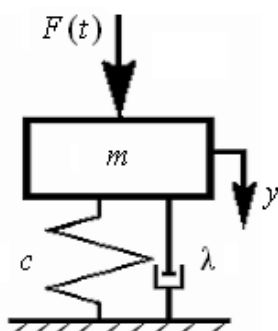


Рис. 1.6. Динамическая модель

В инженерном расчете (за исключением искусственно вводимых дополнительных сил сопротивления) влиянием этих сил на частоту и период свободных колебаний обычно можно пренебречь, т. е. принять $T_1 \approx T$.

В частности, формуле для расчета собственной частоты корпуса машины, установленной на упругой подвеске с коэффициентом жесткости c , можно придать вид

$$k = \sqrt{G/(m\Delta)} = \sqrt{g/\Delta},$$

где $G = mg$ – вес машины, Н; g – ускорение свободного падения, м/с²; Δ – осадка машины – деформация подвески под действием собственного веса машины, м.

Зависимость (1.13) описывает свободные затухающие колебания (рис. 1.7). Интенсивность затухания характеризуется декрементом колебаний и логарифмическим декрементом колебаний. **Декрементом колебаний** – D – принято называть отношение величин двух смежных амплитуд (A_1 и A_2), разделенных одним периодом T (рис. 1.7), т. е.

$$D = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_0 \dot{a}^{-nt_2}}{A_0 \dot{a}^{-nt_1}} = \dot{a}^{-n(t_2-t_1)} = \dot{a}^{-nT_1} \approx \dot{a}^{-nT}. \quad (1.16)$$

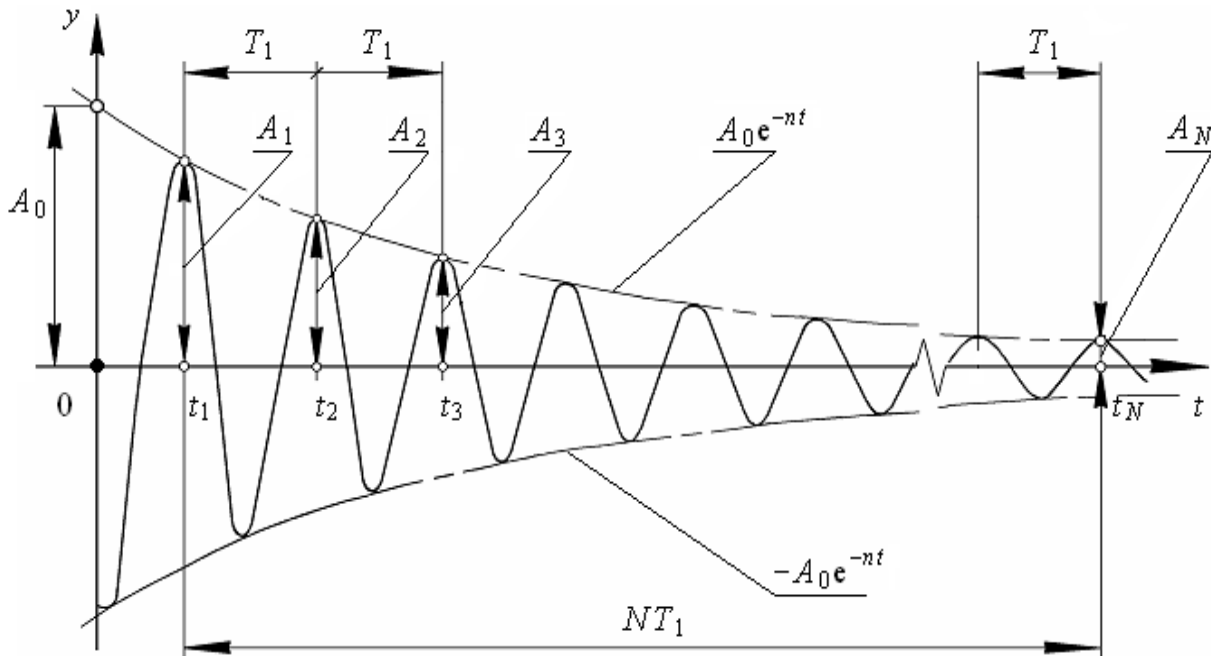


Рис. 1.7. Свободные затухающие колебания

Поскольку декремент колебаний в данном случае не зависит от амплитуды, можно принять, что уменьшение амплитуды происходит по бесконечно убывающей прогрессии, знаменатель которой равен декременту колебаний D .

В инженерных расчетах уровень диссипативных сил (сил сопротивления) обычно более предпочтительно оценивать с помощью логарифмического декремента λ или коэффициента рассеяния ψ . **Логарифмическим декрементом** принято называть взятый по абсолютной величине натуральный логарифм от декремента колебаний:

$$\lambda = |\ln D| = \ln \left| \frac{A_{i+1}}{A_i} \right| = nT = 2\pi n / k = 2\pi\delta. \quad (1.17)$$

При моногармонических колебаниях в режиме их затухания коэффициент рассеяния ψ , определяющий относительные энергетические потери, за-

трачиваемые на преодоление сил сопротивления (преимущественно – перевод механической энергии в теплоту), связан с параметром λ соотношением

$$\psi = 1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 = 1 - \dot{a}^{-2\lambda}. \quad (1.18)$$

При малых значениях $\lambda < 0,15$ можно принять $e^{-2\lambda} \approx 1 - 2\lambda$. Тогда

$$\psi \approx 2\lambda = 4\pi\delta. \quad (1.19)$$

В общем случае параметры ψ и λ не являются постоянными; они зависят от амплитуды и частоты колебаний. Анализ экспериментальных материалов свидетельствует то, что в задачах динамики механизмов зависимость параметров диссипации от частоты практически не проявляется или проявляется весьма слабо. Строго говоря, параметры ψ и λ не зависят от амплитуды только в том случае, если рассеянная энергия пропорциональна квадрату величины амплитуды, что имеет место, например, при линейном сопротивлении.

В более сложных случаях можно усреднить коэффициенты ψ или λ в пределах одного или нескольких периодов колебаний. При этом из эксперимента могут быть получены функции $\psi(A)$ или $\lambda(A)$.

При динамическом расчете коэффициенты диссипации позволяют установить некоторый энергетический эквивалент, учитывающий силы сопротивления в системе дифференциальных уравнений. Наиболее эффективный подход к учету диссипативных сил в инженерных задачах связан с так называемой эквивалентной линеаризацией, при которой нелинейная сила сопротивления заменяется условно линейной при сохранении той же величины энергии, рассеянной за один цикл. При таком подходе линеаризованная сила сопротивления может быть представлена как $R = -b\dot{x}$, где $b = c\psi / (2\pi k)$ – коэффициент пропорциональности; k – собственная частота.

Из методологических соображений сначала исключим из рассмотрения учет диссипативных сил ($\psi = 0$; $b = 0$; $\lambda = 0$; $\delta = 0$). Зададимся начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$. Тогда $q_0 = C_1 + Y(0)$; $\dot{q}_0 = C_2 k + \dot{Y}(0)$, следовательно, без учета диссипативных сил

$$y = \underbrace{y_0 \cos kt + \frac{\dot{y}_0}{k} \sin kt}_1 - \underbrace{Y(0) \cos kt - \frac{\dot{Y}(0)}{k} \sin kt}_2 + \underbrace{Y(t)}_3. \quad (1.20)$$

Группа слагаемых 1 описывает *свободные* колебания, частота которых равна собственной частоте, а амплитуда зависит от начальных условий.

Группа слагаемых 2 определяет так называемые *сопровождающие* колебания, частота которых также равна собственной частоте. В отличие от свободных колебаний, амплитуда здесь не зависит от начальных условий, а определяется разрывами частного решения и его производной при $t = 0$.

Наконец, слагаемое 3 соответствует *вынужденным* колебаниям, зависящим как от параметров вынуждающей силы, так и от параметров колебательной системы.

Далее учтем диссипативные силы. При $0 < \delta \ll 1$ имеем

$$y = e^{-nt} \left[y_0 \cos kt + \frac{\dot{y}_0}{k} \sin kt - Y_0 \cos kt - \frac{\dot{Y}_0}{k} \sin kt \right] + Y(t). \quad (1.21)$$

Если в зависимости (1.21) сгруппировать слагаемые при $\cos kt$ и $\sin kt$, т. е. записать

$$y = e^{-nt} \left[(y_0 - Y_0) \cos kt + \frac{\dot{y}_0 - \dot{Y}_0}{k} \sin kt - Y_0 \cos kt - \frac{\dot{Y}_0}{k} \sin kt \right] + Y(t)$$

и ввести подстановку вида

$$C_1 = A_0 \sin \alpha; \quad C_2 = A_0 \cos \alpha,$$

то этой зависимости можно придать вид

$$y = A(t) \sin(kt + \alpha) + Y(t). \quad (1.22)$$

Здесь $A(t) = A_0 e^{-nt}$, где $A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $A_1 = y_0 - Y_0$, $A_2 = \dot{y}_0 - \dot{Y}_0$.

Начальная фаза колебаний определяется из условия

$$\alpha = \arccos\left(\frac{A_2}{A_0}\right) \text{sign} A_1,$$

где $\text{sign} A_1 = 1$ при $A_1 > 0$ и $\text{sign} A_1 = -1$ при $A_1 < 0$.

Первое слагаемое формулы (1.22) описывает свободные и сопровождающие колебания с частотой, равной собственной частоте

$$y_1 = A_0 e^{-nt} \sin(kt + \alpha). \quad (1.23)$$

График $y_1(t)$ имеет вид, внешне совпадающий с формулой (1.13), однако теперь на начальные условия влияют параметры вынуждающей силы.

Итак, общее решение уравнения (1.12) представлено в виде (1.22). На первый взгляд кажется, что при установившемся режиме ($t \rightarrow \infty$) свободные и сопровождающие колебания затухают, а, следовательно, можно ограничиться учетом лишь вынужденных колебаний, описываемых частным решением $Y(t)$. Однако, такое утверждение справедливо лишь при условии, что частное решение $Y(t)$ и его производная не терпят разрывов непрерывности. В противном случае колебания с собственной частотой k возбуждаются не только при $t = 0$, но и в моменты времени, соответствующие этим разрывам.

Действительно, пусть в момент времени $t = t_i$ имеют место скачкообразные изменения ΔY_i , $\Delta \dot{Y}_i$. Тогда возникает динамический эффект, эквивалентный скачку ускорений при кинематическом возбуждении (подробнее см. [2]).

$$|\Delta w_i|_{\max} \approx k^2 \sqrt{\Delta Y_i^2 + \Delta \dot{Y}_i^2 / k^2}.$$

При этом режим затухания колебаний чередуется с многократным возбуждением, что нередко приводит к некоторому установившемуся режиму с существенным нарушением заданных технологических требований.

Большое число диссипативных факторов, сложность и многообразие процессов, сопровождающих колебательные явления, приводят к тому, что при решении инженерных задач приходится прибегать к параметрам диссипации, полученным экспериментальным путем. В одних случаях эксперимен-

том выявляются коэффициенты рассеяния отдельных элементов конструкции или сочленений, в других – некоторые приведенные значения, свойственные целому узлу, механизму и т. п.

Параметры диссипации обычно определяются при моногармонических (одночастотных) колебаниях в режиме затухающих свободных колебаний либо в резонансном режиме при вынужденных колебаниях.

В случае определения логарифмического декремента на основании экспериментальной записи свободных затухающих колебаний для повышения точности проводимых измерений следует выбирать амплитудные значения A_i , разделенные по времени целым (достаточно большим) числом периодов N , т. е. $t_N - t_1 = TN$, где N – целое число. Тогда

$$A_N / A_1 = \dot{a}^{-n(t_N - t_1)} = \dot{a}^{-nTN} \approx \dot{a}^{-N\lambda}. \quad (1.24)$$

Отсюда получим

$$\lambda = |\ln(A_N / A_1)| / N. \quad (1.25)$$

Поскольку логарифмический декремент на данном этапе расчета уже определен, найдем далее величину безразмерного коэффициент демпфирования

$$\delta = \lambda / (2\pi). \quad (1.26)$$

С помощью логарифмического декремента легко определить, например, через сколько периодов N амплитуда свободных колебаний уменьшится в S раз. Для этого запишем соотношение

$$A_0 e^{-nt} = A_0 / S.$$

Пусть $t = TN = 2\pi kN$. Тогда при учете (1.26) $S = \dot{a}^{nTN} = \dot{a}^{\lambda N}$. Следовательно,

$$N = \frac{\ln S}{\lambda}.$$

Вынужденные колебания. Под действием гармонической вынуждающей силы $F(t) = F_0 \cos \omega t$ тело с массой m совершает вынужденные гармонические колебания, которым в зависимости (1.22) соответствует частное решение

$$Y(t) = A \cos(\omega t - \gamma). \quad (1.27)$$

Здесь A – амплитуда вынужденных колебаний; ω – частота вынуждающей силы, s^{-1} ; γ – сдвиг (смещение) фазы вынужденных колебаний относительно фазы вынуждающей силы.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) определяет изменение амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от частоты вынуждающей силы. Расчет амплитуды вынужденных колебаний производится по формуле

$$A = A_{ст} \alpha, \quad (1.28)$$

где $A_{ст} = F_0/c$ – статическая амплитуда – деформация упругой системы под действием амплитудного значения вынуждающей силы, приложенной в статических условиях; α – коэффициент динамичности, показывающий отношение амплитуды вынужденных колебаний к статической амплитуде.

Величина коэффициента динамичности определяется как

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\delta^2 z^2}}, \quad (1.29)$$

где $z = \omega/k$ – коэффициент частотной расстройки; ω – частота вынуждающей силы, с^{-1} ; k – частота свободных колебаний машины, с^{-1} ; $\delta = \lambda/2\pi$ – доля критического демпфирования (безразмерный коэффициент демпфирования).

При резонансе ($\omega = k$) имеем $z = 1$. При некотором удалении от резонансной зоны ($z \leq 0,7$ и $z \geq 1,4$) линейная сила сопротивления обычно мало влияет на коэффициент динамичности, поэтому на этих частотных интервалах значения α можно определять по более простой зависимости:

$$\alpha = \frac{1}{|1-z^2|}. \quad (1.30)$$

Изменение коэффициента динамичности $\alpha(z)$ в зависимости от коэффициента частотной расстройки для различных величин δ показано на *рис. 1.8*.

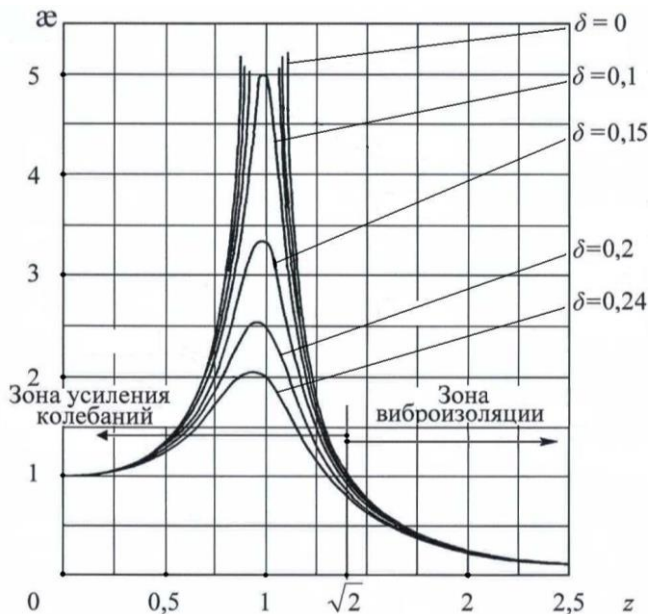


Рис. 1.8. АЧХ при различных значениях δ

Согласно (1.29) резонансное значение $\alpha_{\text{рез}}$, отвечающее условию $z = 1$, равно

$$\alpha_{\text{рез}} = 1/(2\delta). \quad (1.31)$$

Максимальное значение α^{max} , строго говоря, не совпадает с $\alpha_{\text{рез}}$ и равно

$$\alpha^{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \alpha_{\text{рез}}.$$

Это соответствует $z = \sqrt{1-2\delta^2}$. Различие численных значений величин $\alpha_{\text{рез}}$ и α^{max} , как правило, не превышает 0,5 %. В практике данное уточнение обычно не используется, так как оно не подкрепляется точностью исходной информации. На *рис. 1.8* видно, что при $z \geq \sqrt{2}$ имеем $\alpha \leq 1$. Тогда $A \leq A_{\text{ст}}$. В этой зоне реализуется виброизоляция рассматриваемого объекта. При $z \rightarrow \infty$

параметр $\varkappa \rightarrow 0$ и $A \rightarrow 0$.

Вынужденные колебания (отклик системы) происходят с некоторым фазовым сдвигом γ относительно вынуждающей силы (воздействия) (рис. 1.9). Зависимость $\gamma(z)$ отображает фазочастотную характеристику ФЧХ (рис. 1.10):

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{2\delta z}{1 - z^2} \quad (0 \leq \gamma \leq \pi), \quad (1.32)$$

(при $\operatorname{tg} \gamma < 0$ при построении графика удобнее принять $\gamma = \pi - \operatorname{arctg} |\operatorname{tg} \gamma|$).

При резонансе ($z = 1$) фазовый сдвиг равен $\pi/2$, а при $z \rightarrow \infty$ колебания относительно вынуждающей силы находятся в противофазе ($\gamma \rightarrow \pi$).

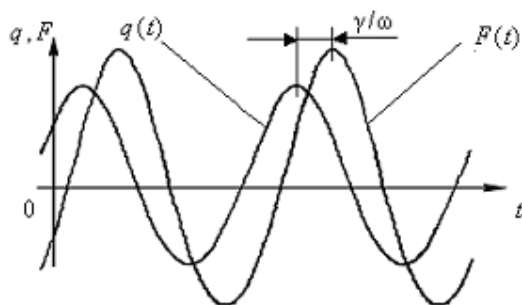


Рис. 1.9. Фазовый сдвиг по времени

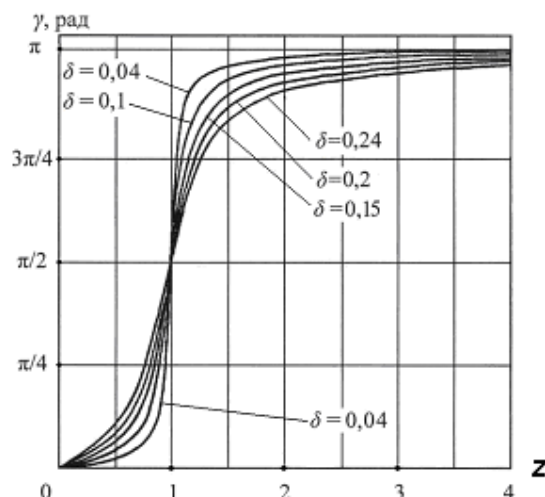


Рис. 1.10. ФЧХ

1.5. Математическое описание динамических моделей механизмов

Предварительные замечания. Составление систем уравнений – так называемой математической модели – является одним из важнейших этапов любого динамического расчета. Если уравнения составлены неверно, то даже все возможности современной вычислительной техники не помогут исправить положение.

Каждой физической модели соответствует своя модель математическая, т. е. система дифференциальных, интегральных или интегрально-дифференциальных уравнений, с помощью которых осуществляется математическое описание исследуемого объекта. При построении математической модели в ряде случаев приходится привлекать на помощь некоторые гипотезы и допущения для компенсации недостатка знаний или с целью упростить саму процедуру математического описания системы и ее дальнейший анализ.

Так, например, при учете сил сухого трения мы пользуемся законами Кулона, – т. е. оперируем несколько идеализированным трением, подчиненным этим законам. Таким образом, на этом этапе исследования иногда также приходится делать некоторые шаги в направлении идеализации системы, что требует от инженера определенного чувства меры, основанного на понимании связи между физическим явлением и его математическим образом.

В п. 1.4 при составлении дифференциального уравнения очень простой

динамической модели мы воспользовались вторым законом Ньютона. В практике инженерных расчетов при математическом описании более сложных объектов, например, механизмов и приводов предпочтительнее использовать уравнение Лагранжа 2-го рода. Дело в том, что при этом в отличие от закона Ньютона не требуется предварительное определение реакций связей.

Связи. Любой механизм можно рассматривать как механическую систему, подчиненную ограничениям (связям) геометрического или кинематического характера. Если уравнение связи может быть представлено в общем виде как функция, не содержащая производных от координат, то эта связь называется *голономной*. В частности, примером уравнения голономной связи может служить функция положения $\varphi_n = \Pi_n(\varphi_1)$, связывающая конечной зависимостью координаты ведущего и ведомого звеньев. К виду голономной связи могут приводиться некоторые зависимости, имеющие форму кинематической связи, но допускающие интегрирование уравнения связи в общем виде.

В случаях, когда в уравнении связи не могут быть исключены производные от координат, связь называют *неголономной*.

Связь называют *стационарной*, если в уравнение связи в явном виде не входит время, в противном случае связь будет *нестационарной*. Функция положения, судя по данному определению, относится к стационарным связям. Однако если можно с достаточным основанием считать, что φ_1 содержит составляющую, заданным образом зависящую от времени, такая связь окажется нестационарной, например

$$\varphi_2 = \Pi_2(\omega t + \Delta\varphi),$$

где ωt характеризует текущий идеальный угол поворота ведущего звена, а $\Delta\varphi$ – колебания ведущего звена.

Связи называются *идеальными*, если сумма работ реакций этих связей на любых возможных перемещениях равна нулю. Поскольку в реальных механизмах всегда имеется тангенциальная составляющая реакции связи, равная силе трения, то любая связь практически оказывается неидеальной.

Обобщенные координаты. Одной из наиболее важных характеристик любой модели является ее *число степеней свободы*, которое для голономных систем определяется числом независимых координат, полностью определяющих положение каждой точки системы. Эти координаты называются *обобщенными* и обозначаются q_1, q_2, \dots, q_N , где N – число степеней свободы.

Таким образом, число обобщенных координат одновременно является минимальным числом координат, которым можно охватить все возможные положения голономной системы.

Первую и вторую производные обобщенной координаты называют соответственно *обобщенной скоростью* и *обобщенным ускорением*.

Кинетическая энергия. Выразим кинетическую энергию голономной системы, включающую N масс m_i , соотношением

$$T = 0,5 \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \quad (1.33)$$

как функцию обобщенных скоростей и обобщенных координат.

Предположим, что исходная динамическая модель механизма имеет только стационарные связи. В этом случае кинетическая энергия описывается однородной квадратичной функцией (*квадратичной формой*) обобщенных скоростей с коэффициентами A_{jk} , являющимися в общем случае некоторыми функциями обобщенных координат.

В частном случае при $A_{jk} = a_{jk} = \text{const}$ можем записать

$$T = 0,5 \sum_{j=1}^H \sum_{k=1}^H a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (1.34)$$

причем $a_{jk} = a_{kj}$ и называются *инерционными* коэффициентами.

В развернутом виде зависимость (1.34) для кинетической энергии будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} H = 1; \quad T = 0,5 a_{11} \dot{q}_1^2; \\ H = 2; \quad T = 0,5 (a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2); \\ H = 3; \quad T = 0,5 (a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + a_{33} \dot{q}_3^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2a_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3). \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Структура выражений (1.35) по форме записи напоминает квадрат многочлена. Практический прием определения коэффициентов квадратичных форм a_{jk} основан на уравнивании соответствующих членов в выражениях для кинетической энергии, записанной в общем виде (1.35) и для конкретной схемы (см. ниже).

Обобщенные силы. Сумма элементарных работ на виртуальных перемещениях δ (не путаем с диссипацией) может быть представлена в виде

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_H \delta q_H. \quad (1.36)$$

Размерные коэффициенты Q_j ($j = 1, \dots, H$) носят название *обобщенных сил*, причем в зависимости от того, соответствует ли q_j линейной или угловой координате, Q_j имеет размерность силы или момента.

Потенциальная энергия. В общем случае потенциальная энергия является функцией обобщенных координат и времени. В механизмах потенциальная энергия, участвующая в колебательном процессе, в основном формируется за счет упругих деформаций элементов системы в окрестности положения равновесия.

С той же точностью, как при записи кинетической энергии, потенциальную энергию в окрестности положения равновесия выразим соотношением

$$V = 0,5 \sum_{j=1}^H \sum_{k=1}^H c_{jk} q_j q_k, \quad (1.37)$$

где $c_{jk} = c_{kj}$ и называются *квазиупругими* коэффициентами.

Выражение (1.37), записанное в развернутом виде, полностью совпадает с зависимостями (1.35), если коэффициенты a_{jk} заменить на c_{jk} , а обобщенные скорости – на обобщенные координаты.

Квадратичная форма (1.37) аналогично выражению (1.34) является знакопостоянной и притом положительной. Это следует из условия устойчи-

2. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

2.1. Основные этапы и порядок выполнения курсовой работы

Типовой расчет колебаний привода машины включает в себя:

- составление динамической и математической моделей крутильных колебаний элементов привода машины;
- расчет собственной частоты крутильных колебаний;
- расчет амплитуды вынужденных крутильных колебаний при некоторой заданной частоте вынуждающей силы (момента);
- определение максимального значения движущего момента;
- определение собственных частот и форм изгибных колебаний вала; оценка низшей частоты методом Данкерлея (*Dunkerley*);
- составление и расчет системы неоднородных дифференциальных уравнений изгибных колебаний вала;
- определение критической скорости (частоты) вращения вала.
- виброизоляция машины;
- построение амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристик остова машины на упругом основании;
- оформление работы.

В соответствии с номером задания (см. ниже) определяется расчетная схема привода. С учетом рекомендаций (п. 1.3) разрабатывается динамическая модель привода, выполняется ее чертеж и наносятся все необходимые условные обозначения. Далее выбираются обобщенные координаты (п. 2.2.2), выражаются абсолютные координаты элементов модели через обобщенные. Определяются кинематические, инерционные, упругие и диссипативные параметры. Перечень необходимых для расчета параметров содержится в соотношении абсолютных и обобщенных координат (2.1). При необходимости учета гибкой связи в приводе машины следует обратиться к п. 1.3 и п. 2.2.2.

Составление математической модели колебаний привода начинается с определения численных значений коэффициентов, входящих в левую и правую части системы дифференциальных уравнений (2.7). Для этого в квадратичной форме записывается выражение кинетической энергии для разработанной модели по аналогии с (2.8 при $H = 2$); полученное выражение сравнивается со «стандартным» вариантом этой записи (2.6) и из этого сравнения определяются численные значения инерционных коэффициентов. Далее записываются «стандартное» выражение потенциальной энергии в квадратичной форме (2.6 при $H = 2$) и для разработанной модели по аналогии с 2.10; затем путем сравнения этих выражений определяются расчетные соотношения и численные значения квазиупругих коэффициентов.

Значения коэффициентов, входящих в правую часть системы дифференциальных уравнений (2.7), определяются из уравнения работ на возможных перемещениях (2.14 при $H = 2$). Здесь следует записать уравнение работ в общем виде и по аналогии с (2.13) для разработанной модели, затем, после их

сравнения, определить численные значения обобщенных сил.

Этап составления математической модели заканчивается при подстановке численных значений a_{ik} , c_{ik} и Q_i в систему дифференциальных уравнений второго порядка, аналогичную (2.7) при $N = 2$. После нахождения коэффициентов полученной таким образом системы дифференциальных уравнений ее второе уравнение обособляется и решается относительно неизвестного параметра q_2 . Из выражения (2.20) определяется собственная частота крутильных колебаний, чем и заканчивается этот этап. После задания фиксированного значения ω (примем $\omega = 0,7k$) – частоты вынуждающей силы определяется коэффициент частотной расстройки, а затем значения q_2^* и A_2 . Этап расчета вынужденных колебаний заканчивается нахождением численных значений параметров, входящих в выражение амплитуды вынужденных крутильных колебаний (2.23) при фиксированной частоте вынуждающей силы ω .

При обособлении первого дифференциального уравнения системы (2.17) записывается расчетная зависимость для определения момента электродвигателя (2.27). С учетом принятого ранее значения ω и величинах a_{12} и A_2 рассчитывается M_D и выбирается M_D^{max} , чем и заканчивается данный этап.

Этап определения критической скорости вращающегося вала (п. 2.8) состоит в определении $\omega_{кр}$ и критической частоты вращения вала в Гц. Расчет выполняется для вала, несущего одно зубчатое колесо. Схема этого вала и необходимые данные содержится в расчетном задании.

Этап определения собственных частот и коэффициентов форм изгибных колебаний вала заключается в расчете двух собственных частот изгибных колебаний двухмассовой динамической модели по (2.38). Затем с учетом (2.41) методом Данкерлея (*Dunkerley*) определяется низшее значение собственной частоты и выполняется проверка полученных числовых значений по условию: $k_D \leq k_1$. Далее по (2.42) – основной и проверочной зависимостям – определяются два значения коэффициентов форм; результаты расчетов β_i изображаются на чертеже в виде эпюр этих двух форм изгибных колебаний вала. Расчетная часть этим заканчивается.

Выбор варианта работы

Шифром, по которому выбирается тот или иной вариант курсовой работы, является **номер зачетной книжки (студенческого билета)** исполнителя. *Вариант задания (схемы)* следует выбирать *по последней цифре шифра, вариант числовых значений* – по *предпоследней цифре* шифра. Цифра «0» в шифре соответствует цифре «10» варианта работы.

Оформление работы

1. Расчетная часть работы в виде пояснительной записки выполняется в свободной форме на одной стороне листов бумаги формата А4. Последовательность изложения этапов расчета представлена в п. 2.1. Каждый пункт указанного перечня кроме вычислений должен содержать краткие сведения из теоретического курса – основные понятия, определения, выводы и т. д.

Пояснительная записка на проверку сдается в оформленном и сшитом виде.

2. На первом – титульном – листе указывается название учебного заведения, кафедры и дисциплины, тема работы, шифр, группа и фамилия студента, дата выполнения работы и подпись автора.

3. Второй лист – двухсторонний бланк задания для исполнителя (копия схемы привода машины) с отмеченным вариантом числовых значений исходных данных для выбранного задания.

4. На последующих листах с комментариями излагается расчетная часть работы. В конце изложения формулируются выводы и дается список использованной литературы с указанием авторов, года издания, по которым выполнялась работа. Все страницы записки должны иметь сквозную нумерацию.

5. Для записи возможных замечаний по работе с правой стороны листа следует оставлять поле шириной 25 – 30 мм.

6. В конце работы указывается дата ее выполнения и ставится подпись исполнителя.

Исправление ошибок в работе после рецензирования производится в той же записке на оставшихся свободных листах. При этом следует представить подробные пояснения по всем замечаниям, сделанным рецензентом.

На защите работы студент должен показать хорошие знания по выполненной работе и умение самостоятельно решать аналогичные задачи (см. *прил. В* – вопросы для самоконтроля).

В соответствии с учебным планом выполнению курсовой работы предшествует выполнение домашнего задания (ДЗ-1 или контрольной работы), в котором студент обрабатывает диаграмму свободных затухающих колебаний динамической модели с одной степенью свободы. Материалы для выполнения ДЗ-1 выдаются студентам при посещении ими установочной лекции по дисциплине (*прил. А*).

Пример выбора исходных данных для курсовой работы (прил. Б, В).

Шифр студента заканчивается, например, цифрами **24**.

В этом случае следует брать:

- вариант задания (схемы) машинного агрегата для расчета колебаний – **4 (ЗАДАНИЕ 4)**, который копируется вместе с таблицей исходных данных для виброизоляции (*табл. Б.4.2*) на лист формата А4;

- вариант числовых значений исходных данных для выполнения расчета колебаний механизма – вертикальная колонка цифр под № **2** (для *схемы 4* – *табл. Б.4.2*);

- для определения критической скорости (частоты) вращающегося вала в **задании 4** в качестве примера следует взять одномассовую модель на двух опорах – *вал 4*.

2.2. Расчет колебаний привода машины

2.2.1. Составление динамической модели (ДМ) привода машины

Разработка динамической модели является первым этапом динамического исследования и связана с идеализированным отображением реальной механической системы, имеющей $H = \infty$, некоторой моделью, имеющей $H \neq \infty$ и сохраняющей основные свойства (инерционные, упругодиссипативные, кинематические, силовые) исходного объекта. Одному и тому же объекту, как уже отмечалось, могут соответствовать несколько моделей; степень их идеализации зависит от очень многих факторов.

Для облегчения дальнейшего изложения данного вопроса основные приемы составления и описания динамической модели проиллюстрируем на конкретном примере.

Рассмотрим расчетную схему привода машины с линейной функцией положения, изображенную на *рис. 2.1*, включающую в себя зубчатые передачи и передачу зубчатое колесо – зубчатая рейка. В соответствии с рекомендациями для составления динамических моделей выполним данную процедуру, выделяя лишь наиболее массивные элементы, отображенные сосредоточенными массами (моментами инерции), соединенными между собой кинематическими аналогами и упругодиссипативными связями наиболее податливых элементов. Инерционные и упругие свойства остальных элементов учтем в виде некоторых приведенных характеристик.

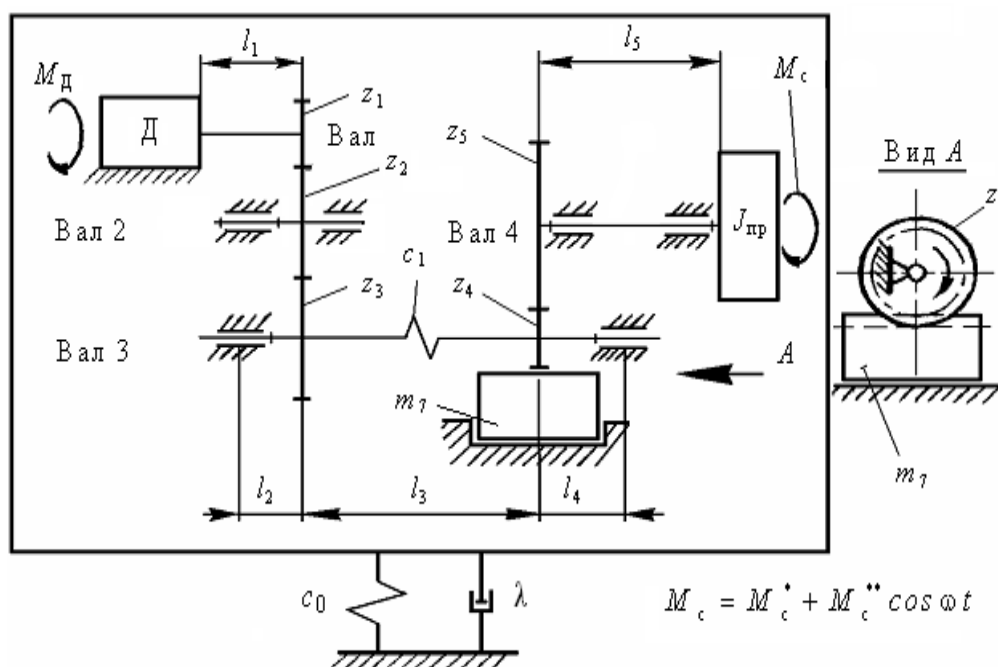


Рис. 2.1. Схема машины

На схеме машины выделен податливый вал привода, в наибольшей степени подверженный крутильной деформации. К входному звену привода приложен движущий момент M_D , к выходному – некоторый момент сопро-

тивления

$$M_c = M_c^* + M_c^{**} \cos \omega t,$$

где M_c^* – статическая составляющая момента сопротивления;

M_c^{**} – амплитуда динамической составляющей момента сопротивления;

ω – круговая частота возмущения.

Привод расположен в корпусе, связанном с основанием через упругодиссипативную подвеску, имеющую характеристики: c_0 и λ .

Составим для данной схемы ее динамическую модель, принимая, что:

- учитываются лишь упругодиссипативные свойства наиболее податливого вала 3, представленного на схеме (коэффициент жесткости – c_1);
- неравномерность вращения ротора двигателя мала. При этом можно принять $\varphi_1 = \omega_d t$, где ω_d – угловая скорость двигателя;
- моменты инерции зубчатых колес, как наиболее массивных элементов, эквивалентны моментам инерции однородных сплошных дисков, наружные диаметры которых равны диаметрам делительных окружностей соответствующих колес;
- инерционные и жесткостные характеристики, а также коэффициент рассеяния представляются как некоторые приведенные значения.

При составлении динамической модели будем использовать следующие условные обозначения:

φ_i – текущий угол поворота диска i ;

x – линейное перемещение зубчатой рейки (см. массу звена 7);

Π'_i – первая геометрическая передаточная функция;

u_{21}, u_{31}, u_{43} – абсолютные значения передаточных отношений *между валами*;

J_i – моменты инерции зубчатых колес относительно осей их вращения;

m_7 – масса зубчатой рейки;

c и λ – коэффициент жесткости и логарифмический декремент для соответствующего упругого участка вала.

В модели элементы Π_i отвечают кинематическому аналогу механизма. Это означает, что при переходе через этот элемент координата изменяется в соответствии с линейной функцией положения зубчатой передачи. Так, например:

$$\varphi_2 = \Pi_1(\varphi_1) = u_{21}\varphi_1; \varphi_{3*} = u_{32}\varphi_{2*}; x_{7*} = \Pi_{41}(\varphi_{3*}) = r_4\varphi_{3*}; \varphi_{4*} = \Pi_{42}(\varphi_{3*}) = u_{43}\varphi_{3*},$$

где $u_{21} = z_1/z_2$ – передаточное отношение, равное в данном случае первой геометрической передаточной функции механизма; Π_i – функции положения; z_i – число зубьев зубчатого колеса; $r_4 = 0,5m_0z_4$ – радиус делительной окружности; m_0 – модуль зацепления (Звездочкой отмечена идеальная координата без учета упругих деформаций).

2.2.2. Выбор обобщенных координат

При выполнении данной процедуры следует отдавать предпочтение обобщенным координатам, соответствующим сравнительно малым относи-

тельными перемещениями, которые и отображают колебания в системе. Принимая это во внимание, можно рекомендовать следующий порядок введения обобщенных координат.

В качестве первой обобщенной координаты (q_1) примем абсолютную координату в начале кинематической цепи, т.е. угол поворота ротора двигателя. Тогда $\varphi_D = \varphi_1 = q_1$. Последовательно переходя от одного элемента кинематической цепи к другому, выразим абсолютные координаты φ_i и x_7 через обобщенные координаты q_1 и q_2 . $\varphi_2 = \varphi_1 \Pi'_1 = u_{21} q_1$. В отличие от рассмотренного выше случая без учета упругости вала 3 теперь будем различать координаты φ_{31} и φ_{32} , разность которых равна крутильной деформации участка вала. При этом

$$\begin{cases} \varphi_{31} = u_{21} u_{32} q_1 = u_{31} q_1; \\ \varphi_{32} = u_{31} q_1 + q_2; \\ \varphi_{i\delta} = (u_{31} q_1 + q_2) u_{43}; \\ x_7 = (u_{31} q_1 + q_2) r_4. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь следует напомнить, что приведенные равенства справедливы лишь для рассматриваемой схемы.

Обобщенная координата q_2 в данном случае соответствует *угловой деформации* участка вала 3. Полученное число обобщенных координат соответствует числу степеней свободы ($H = 2$) – числу закреплений, превращающих исходную упругую кинематическую цепь в неподвижную систему. Составление системы дифференциальных уравнений проведем на базе уравнения Лагранжа второго рода (1.38). (Для $H = 2$ – см. формулу (2.7)).

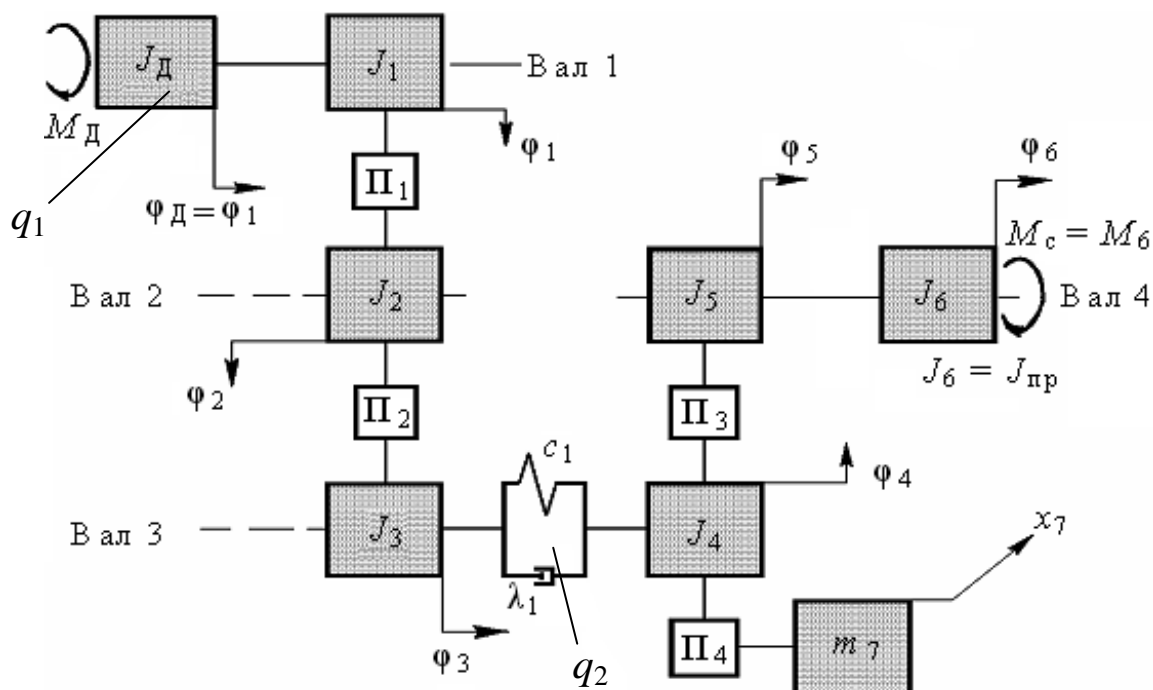


Рис. 2.2. Динамическая модель привода машины

Далее определим параметры, характеризующие элементы построенной

динамической модели, представленной на *рис. 2.2*. Для удобства дальнейшего изложения ниже примем индексацию углов φ_i , соответствующую принятой нумерации моментов инерции. Тогда $\varphi_{31} = \varphi_3$; $\varphi_{32} = \varphi_4$.

Кинематические характеристики

$$u_{21} = z_1/z_2; \quad u_{32} = z_2/z_3; \quad u_{31} = u_{21}u_{32} = z_1/z_3; \quad \Pi'_4 = dx_7/d\varphi_4 = r_4.$$

Здесь: z_i – число зубьев колес; u_{ij} – передаточные отношения; Π'_4 – первая передаточная функция элемента m_7 , равная r_4 – радиусу делительной окружности колеса 4.

Инерционные характеристики

При расчете моментов инерции зубчатых колес в первом приближении, как уже отмечалось, примем их в виде сплошных дисков с наружными диаметрами, соответствующими диаметрам делительных окружностей зубчатых колес. В этом случае момент инерции колеса относительно оси его вращения, проходящей через его центр масс, определяется из соотношения, кгм²

$$J_i = m_i r_i^2 / 2, \quad (2.2)$$

где m_i – масса I колеса, кг, r_i – радиус делительной окружности I колеса, м.

Этот радиус определяется из выражения

$$r_i = m_0 z_i / 2. \quad (2.3)$$

Здесь m_0 – модуль I зубчатого зацепления (при расчетах стандартную размерность модуля, заданную в миллиметрах, следует перевести в метры).

На основании (2.2) и (2.3) получим приближенную расчетную формулу для определения момента инерции зубчатого колеса как сплошного диска

$$J_i = 0,5 m_i r_i^2.$$

Упругие характеристики

1. *Продольную жесткость* c_i упругого элемента постоянного поперечного сечения можно определить из выражения, Н/м

$$c_i = ES_i / l_i, \quad (2.4)$$

где E – модуль Юнга, характеризующий жесткость материала при растяжении (сжатии). Для конструкционных сталей в качестве усредненного значения можно принять $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; для серых чугунов $E = 1,55 \cdot 10^{11}$ Н/м². Приведенные значения могут изменяться в некотором диапазоне. Так, в частности, для конструкционных сталей $E = (1,86 \div 2,15) \cdot 10^{11}$ Н/м²; для серых чугунов $E = (0,95 \div 1,6) \cdot 10^{11}$ Н/м².

$S_i = \pi d_i^4 / 4$ – площадь круглого поперечного сечения упругого элемента, м²; d_i – диаметр сечения, м; l_i – длина участка упругого элемента, м.

2. Крутильную жесткость c_i участка I валопровода постоянного поперечного сечения можно определить как, Нм

$$c_i = \frac{GI_{p_i}}{\ell_i}, \quad (2.5)$$

где G – модуль сдвига, характеризующий жесткость материала при сдвиге. Для конструкционных сталей в качестве усредненного значения можно принять $G = 8 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $I_{p_i} = \pi d_i^4 / 32 \approx 0,1d_i^4$ – полярный момент инерции круглого поперечного сечения вала i , м⁴; d_i – диаметр I вала, м; ℓ_i – длина участка вала, м. (Для большинства металлов и их сплавов в общем случае справедливо соотношение $G = (0,375 \div 0,4)E$).

Приведенная жесткость ветвей ремней в ременной передаче, как уже отмечалось в п. 1.3, определяется как

$$c_{пр} = 2c_p R_2^2.$$

3. Изгибную жесткость c_i для простых схем балок постоянного поперечного сечения можно определить с помощью коэффициентов податливости (влияния), приведенных в табл. 2.2 (см. ниже). Для более сложных случаев следует воспользоваться справочной литературой [11].

В ряде случаев прогиб балок является критерием работоспособности выбранного конструктивного решения. Так, например, чрезмерный прогиб валов зубчатых передач может привести к увеличению зазоров и возникновению виброударных режимов и колебаний. В этом и подобных случаях производят расчет валов на жесткость. При этом задаются допустимым прогибом $[y]$, величину которого устанавливают в зависимости от назначения и условий эксплуатации механизма, узла или детали.

Влияние диссипации в колебательной системе учитывается логарифмическим декрементом λ , величина которого задается в исходных данных курсовой работы.

2.2.3. Составление системы дифференциальных уравнений привода машины

Составление системы дифференциальных уравнений (математической модели колебаний привода) базируется на использовании уравнений Лагранжа второго рода в независимых координатах, имеющих вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, H),$$

где T и V – кинетическая и потенциальная энергии системы; q_j и \dot{q}_j – обобщенные координаты и скорости; Q_j – неконсервативные (непотенциальные) обобщенные силы; H – число степеней свободы.

Кинетическая и потенциальная энергии для малых колебаний механических систем могут быть представлены в виде знакоположительных квадра-

тичных форм соответственно обобщенных скоростей и обобщенных координат

$$T = 0,5 \sum_{i=1}^H \sum_{k=1}^H a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k; \quad V = 0,5 \sum_{i=1}^H \sum_{k=1}^H c_{ik} q_i q_k,$$

где a_{ik} , c_{ik} – инерционные и квазиупругие коэффициенты, которые для рассматриваемой системы при малых значениях обобщенных координат можно считать постоянными. («Квази» от латинского слова *quasi* – как будто, – приставка, соответствующая в данном случае значению слова «почти»).

Развернутая запись этих зависимостей при числе степеней свободы $H = 2$ с учетом (1.34), (1.35) и (1.37) примет вид

$$\begin{cases} T = 0,5(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2), \\ V = 0,5(c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + 2c_{12}q_1q_2), \end{cases} \quad (2.6)$$

в котором сумма показателей степени обобщенных скоростей (обобщенных координат) в каждом слагаемом равна двум (квадратичная форма).

После подстановки (2.6) в уравнение Лагранжа получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка – математическую модель (ММ) колебаний привода, имеющую вид (1.38), т. е.

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = Q_1; \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = Q_2. \end{cases} \quad (2.7)$$

При использовании квадратичных форм кинетической и потенциальной энергий отпадает необходимость непосредственной подстановки выражений T и V системы в уравнения Лагранжа.

Закономерность чередования индексов инерционных и квазиупругих коэффициентов (первый индекс соответствует номеру уравнения, а второй – номеру обобщенного ускорения или обобщенной координаты, при которой стоит данный коэффициент) позволяет формализовать и автоматизировать процедуру разработки математической модели, сократить трудоемкость выкладок и число возможных ошибок на этом ответственном этапе динамического исследования.

Для определения *инерционных коэффициентов* a_{ik} составим выражение кинетической энергии привода, динамическая модель которого представлена на *рис. 2.2*

$$\begin{aligned} T &= 0,5(J_{\text{д}}\dot{\phi}_{\text{д}}^2 + J_1\dot{\phi}_1^2 + J_2\dot{\phi}_2^2 + J_3\dot{\phi}_3^2 + J_4\dot{\phi}_4^2 + J_5\dot{\phi}_5^2 + J_{\text{пр}}\dot{\phi}_{\text{пр}}^2 + m_7\dot{x}_7^2) = \\ &= 0,5[J_{\text{д}}\dot{q}_1^2 + J_1\dot{q}_1^2 + J_2u_{21}^2\dot{q}_1^2 + J_3u_{31}^2\dot{q}_1^2 + J_4(u_{31}\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \\ &+ (J_5 + J_{\text{пр}})u_{43}^2(u_{31}\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_7r_4^2(u_{31}\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Напомним, что здесь $u_{31} = u_{21}u_{32}$.

Приравнивая соответствующие коэффициенты (для T) при \dot{q}_1^2 , \dot{q}_2^2 , $2\dot{q}_1\dot{q}_2$ в выражениях (2.6) и (2.8), получим, кгм²

$$a_{11} = J_{\text{д}} + J_1 + J_2u_{21}^2 + J_3u_{31}^2 + J_4u_{31}^2 + (J_5 + J_{\text{пр}})u_{31}^2u_{43}^2 + m_7r_4^2u_{31}^2;$$

$$a_{22} = J_4 + (J_5 + J_{\text{пр}})u_{43}^2 + m_7 r_4^2; \quad (2.9)$$

$$a_{12} = [J_4 + (J_5 + J_{\text{пр}})u_{43}^2 + m_7 r_4^2]u_{31}.$$

Для определения *квазиупругих коэффициентов* c_{ik} составим выражение потенциальной энергии привода, динамическая модель которого приведена на *рис. 2.2*,

$$V = 0,5c_1(\varphi_4 - \varphi_3)^2 = 0,5c_1q_2^2. \quad (2.10)$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты (для V) при q_1^2 , q_2^2 , $2q_1q_2$ в выражениях (2.6) и (2.10), получим искомый результат в виде

$$c_{22} = c_1, \quad c_{11} = c_{12} = 0. \quad (2.11)$$

Обобщенная координата q_1 , не вошедшая явно в выражение (2.10), называется *циклической*; координата q_2 , вошедшая в выражение потенциальной энергии – *позиционной*.

При определении неконсервативных обобщенных сил (т. е. вынуждающих сил и сил сопротивления, не образующих потенциальную энергию), учтем движущий момент ($M_{\text{д}}$), приложенный к приводу со стороны двигателя, момент от технологической нагрузки – технологического сопротивления – ($M_{\text{с}}$), приложенный к выходному звену, и момент от диссипативных сил – момент трения – (M_{λ}), возникающий при колебаниях вала 3. При этом имеем

$$M_{\lambda} = b(\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) = b\dot{q}_2, \quad (2.12)$$

где $b = c\psi / (2\pi k) \approx c\lambda / (\pi k)$, k – собственная частота (см. *n. 1.4*).

Момент диссипативных сил, таким образом, пропорционален первой степени скорости деформации упругого вала.

Для определения *неконсервативных обобщенных сил* Q_j составим уравнение работ на возможных (бесконечно малых) перемещениях δ (не путаем с диссипацией), выраженных через вариации обобщенных координат δq_j

$$\begin{aligned} \delta W &= M_{\text{д}}\delta\varphi_{\text{д}} - M_{\lambda}\delta(\varphi_4 - \varphi_3) - M_{\text{с}}\delta\varphi_{\text{пр}} = \\ &= M_{\text{д}}\delta q_1 - M_{\lambda}\delta q_2 - M_{\text{с}}u_{43}\delta(u_{31}q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Далее в общем виде по аналогии с (1.36) запишем уравнение элементарных работ на возможных перемещениях системы при $H = 2$

$$\delta W = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2. \quad (2.14)$$

и, сравнивая его с (2.13), получим искомый результат в виде

$$Q_1 = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}u_{43}u_{31}, \quad Q_2 = -M_{\lambda} - M_{\text{с}}u_{43}. \quad (2.15)$$

Учитывая то, что момент технологического сопротивления представлен в виде суммы среднего значения $M_{\text{с}}^*$ – статической составляющей и переменной составляющей $\Delta M_{\text{с}}^{**}(t) = M_{\text{с}}^{**} \cos\omega t$ – амплитуды динамической составляющей, выражения для Q_i перепишем в виде

$$\begin{cases} Q_1 = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}^*u_{43}u_{31} - M_{\text{с}}^{**}u_{43}u_{31}\cos\omega t; \\ Q_2 = -M_{\lambda} - M_{\text{с}}^*u_{43} - M_{\text{с}}^{**}u_{43}\cos\omega t. \end{cases} \quad (2.16)$$

При строгом подходе ММ колебаний привода система (2.16) должна быть дополнена уравнением динамической характеристики двигателя, связывающим движущий момент с угловой скоростью входного звена, однако в первом приближении можно принять, что

$$\varphi_{\text{д}} = q_1 \approx \omega_{\text{д}} t = \text{const}, \text{ т. е. } \ddot{q}_1 = 0.$$

Теперь система (2.7) с учетом (2.9), (2.11), (2.16) и принятого допущения получит вид

$$\begin{cases} a_{12}\ddot{q}_2 = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}^* u_{43} u_{31} - M_{\text{с}}^{**} u_{43} u_{31} \cos\omega t; \\ a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 = -M_{\lambda} - M_{\text{с}}^* u_{43} - M_{\text{с}}^{**} u_{43} \cos\omega t. \end{cases} \quad (2.17)$$

Решая последнее уравнение системы (2.17), найдем функцию $q_2(t)$, а значит, выполним **вторую задачу динамики**, состоящую в том, что по известным силам определим закон движения системы. Первым уравнением в дальнейшем воспользуемся для определения $M_{\text{д}}$, что соответствует решению **первой задачи динамики** – определению неизвестных обобщенных сил по заданному закону движения.

Для переходных режимов (разгон, торможение) момент $M_{\text{д}}$ обычно известен. Например, при разгоне можно принять $M_{\text{д}} = M_{\text{д}}^{\text{max}}$.

2.3. Расчет частоты свободных колебаний

Перепишем второе уравнение системы (2.17) с учетом (2.12) в виде

$$a_{22}\ddot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{22}q_2 = -M_{\text{с}}^* u_{43} - M_{\text{с}}^{**} u_{43} \cos\omega t. \quad (2.18)$$

Свободные колебания рассматриваемого привода, как уже отмечалось, описываются однородным дифференциальным уравнением, полученным из (2.18) при его нулевой правой части. Запишем это уравнение в виде

$$a_{22}\ddot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{22}q_2 = 0. \quad (2.19)$$

Решение данного уравнения имеет вид (1.22), т. е.

$$y = A_0 e^{-\nu t} \sin(kt + \alpha),$$

а собственная частота (частота свободных колебаний) при малых значениях диссипации (δ) определяется как

$$k = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}. \quad (2.20)$$

2.4. Расчет вынужденных колебаний

Вынужденные колебания привода с одной позиционной координатой и гармонической вынуждающей силой описываются дифференциальным уравнением (2.18). Для универсальности дальнейшего изложения представим это уравнение (с изменением в правой его части) в несколько ином виде, т. е.

$$a_{22}\ddot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{22}q_2 = Q_2^* + Q_2^{**} \cos\omega t, \quad (2.21)$$

где Q_2^* – представленная в общем виде постоянная составляющая вынужда-

ющего момента; Q_2^{**} – представленная в общем виде амплитуда гармонической составляющей вынуждающего момента.

В линейных системах справедлив *принцип суперпозиции* (наложения), состоящий в том, что колебания от суммы сил могут определяться как сумма колебаний от каждой силы в отдельности. По этой причине полную деформацию упругого элемента динамической модели (q_2) можем записать как алгебраическую сумму постоянной (q_2^*) и переменной (q_2^{**}) ее составляющих, т. е.

$$q_2 = q_2^* + q_2^{**}. \quad (2.22)$$

Для установившегося режима работы примем $\dot{q}_1 = \text{const}$. Тогда значение обобщенной координаты, соответствующей крутильным вынужденным колебаниям вала 3 (рис. 2.1) с учетом (2.22), равны

$$q_2 = q_2^* + q_2^{**} = q_2^* + A_2 \cos(\omega t - \gamma). \quad (2.23)$$

Здесь q_2^* – крутильная деформация упругого элемента (вала 3 на рис. 2.1) под действием *постоянной* составляющей вынуждающей силы (момента) Q_2^* ; A_2 – амплитуда гармонической составляющей крутильной деформации упругого элемента (вала 3 на рис. 2.1) под действием *переменной* составляющей вынуждающей силы (момента) Q_2^{**} .

Для определения q_2^* прием $q_2 = q_2^*$ и подставим в уравнение (2.21). Тогда, приравнявая при учете $q_2^* = \text{const}$ постоянные составляющие в левой и правой частях полученного таким образом равенства, запишем

$$c_{22}q_2^* = Q_2^* = -M_c^* u_{43}.$$

Отсюда

$$q_2^* = Q_2^* / c_{22} = -M_c^* u_{43} / c_{22}. \quad (2.24)$$

В выражении (2.23) гармоническая составляющая кроме амплитуды (A_2) вынужденные колебания характеризуются фазовым сдвигом γ относительно вынуждающей силы (см. п. 1.4).

Величина амплитуды вынужденных колебаний определяется из (1.28), т. е.

$$A_2 = A_{2\text{ст}} \alpha, \quad (2.25)$$

где

$$A_{2\text{ст}} = Q_2^{**} / c_{22} = -M_c^{**} u_{43} / c_{22}. \quad (2.26)$$

Второй множитель выражения (2.25) – коэффициент динамичности (α), определяемый по формуле (1.30).

Фазовый сдвиг γ относительно вынуждающей силы определяется из ФЧХ по формуле (1.32).

Результатом расчета этапа вынужденных колебаний является подстановка численных значений параметров q_2^* , A_2 и γ в выражение (2.23).

В рассмотренном примере величины q_2^* и A_2 имеют размерность углов поворота (рад.).

Примечание. При выполнении курсовой работы на данном этапе расчета примем фиксированное значение частоты вынуждающей силы равным $\omega = 0,7k$, где k – собственная частота. Значение диссипативной характеристики λ приведено в перечне исходных данных (см. Прил. Б) и далее используется с учетом формулы (1.26).

2.5. Определение максимального значения движущего момента

Данную процедуру выполним также для фиксированной циклической частоты вынуждающей силы ω . Воспользуемся первым дифференциальным уравнением системы (2.17), записанным при условии принятого допущения: $\omega_d = \text{const}$.

Решим его относительно неизвестной величины

$$M_D = a_{12}\ddot{q}_2 + M_c^* u_{43}u_{31} + M_c^{**} u_{43}u_{31} \cos \omega t. \quad (2.27)$$

Продифференцировав дважды частное решение (2.23) уравнения (2.27), получим

$$\ddot{q}_2 = -\omega^2 A_2 \cos(\omega t - \gamma). \quad (2.28)$$

Из анализа ФЧХ следует, что при удалении от резонансной зоны, т. е. при $z \leq 0,7$, можно принять $\gamma \approx 0$ и $\gamma \approx \pi$ при $z \geq 1,4$. Отсюда вывод, что на рабочих режимах, значительно удаленных от резонансов, можно считать

$$\ddot{q}_2 \approx -A_2 \omega^2 \cos(\omega t - \gamma) \Big|_{\gamma \rightarrow 0, \pi} = \mp A_2 \omega^2 \cos \omega t. \quad (2.29)$$

Подставив (2.29) в (2.27) при учете ФЧХ, получим окончательную расчетную зависимость для рассматриваемого примера, Нм

$$M_{\dot{A}} \approx M_{\dot{n}}^* u_{43}u_{31} + (M_{\dot{n}}^{**} u_{43}u_{31} \mp \omega^2 A_2 a_{12}) \cos \omega t, \quad (2.30)$$

В выражениях (2.29) и (2.30) знак « \leftarrow » отвечает дорезонансному режиму, а знак « \rightarrow » соответствует зарезонансному режиму.

Предельные значения M_D определяются суммой постоянной составляющей его нагружения и граничных значений переменной составляющей. Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно в (2.30) вместо $\cos \omega t$ подставить его экстремальные значения, т. е. «1» и «-1»; а затем из двух полученных результатов выбрать наибольший.

2.6. Изгибные колебания. Математическая модель.

Рассмотрим теперь методику определения собственных частот изгибных колебаний на примере вала, который представим в виде балки с двумя сосредоточенными массами m_3 и m_4 , лежащими на двух шарнирных опорах. Этот пример соответствует валу (балке) 3 на рис. 2.1 и 2.3, а, имеющему $H = 2$.

Ограничимся рассмотрением изгибных колебаний в одной из плоскостей (горизонтальной или вертикальной) и перейдем сначала к безинерционному упругому «скелету» балки (рис. 2.3, б, в). Для этого к связи (безмассовой упругой балке) кроме внешних вынуждающих сил F_3 и F_4 (пп. 2.6 и 2.7) при-

ложим в соответствии с принципом Даламбера силы инерции $(-m_3\ddot{y}_3)$ и $(-m_4\ddot{y}_4)$, где y_3 и y_4 – прогибы под соответствующими массами m_3 и m_4 .

При учете сил инерции, действующих на упругий «скелет» балки, силы P_3 и P_4 , определим из зависимостей

$$P_3 = F_3 - m_3\ddot{y}_3; \quad P_4 = F_4 - m_4\ddot{y}_4. \quad (2.31)$$

При этом

$$\begin{cases} y_3 = e_{11}P_3 + e_{12}P_4; \\ y_4 = e_{21}P_3 + e_{22}P_4, \end{cases} \quad (2.32)$$

где e_{jk} – коэффициенты податливости (влияния).

Коэффициенты податливости определяют перемещение в сечении j под действием единичной силы, приложенной в сечении k . На основании теоремы о взаимности работ можно записать, что $e_{jk} = e_{kj}$.

В табл. 2.1 приведены расчетные формулы для определения коэффициентов податливости (влияния) в зависимости от вида и количества опор вала.

В таблице принято: E – модуль упругости материала вала (п. 2.2.2);

$J_i = \pi d_i^4 / 64$ – осевой момент инерции поперечного сечения i вала, м^4 ;

d_i – диаметр i вала, м.

При использовании табличных формул следует иметь в виду, что шарнирная опора обычно соответствует одному подшипнику, а защемление – двойному.

После подстановок (2.31) в (2.32) получим систему дифференциальных уравнений изгибных колебаний вала, которую при $H = 2$ можем записать следующим образом:

$$\begin{cases} e_{11}m_3\ddot{y}_3 + e_{12}m_4\ddot{y}_4 + y_3 = e_{11}F_3 + e_{12}F_4; \\ e_{21}m_3\ddot{y}_3 + e_{22}m_4\ddot{y}_4 + y_4 = e_{21}F_3 + e_{22}F_4. \end{cases} \quad (2.33)$$

Последовательность определения сил F_3 и F_4 приведена ниже.

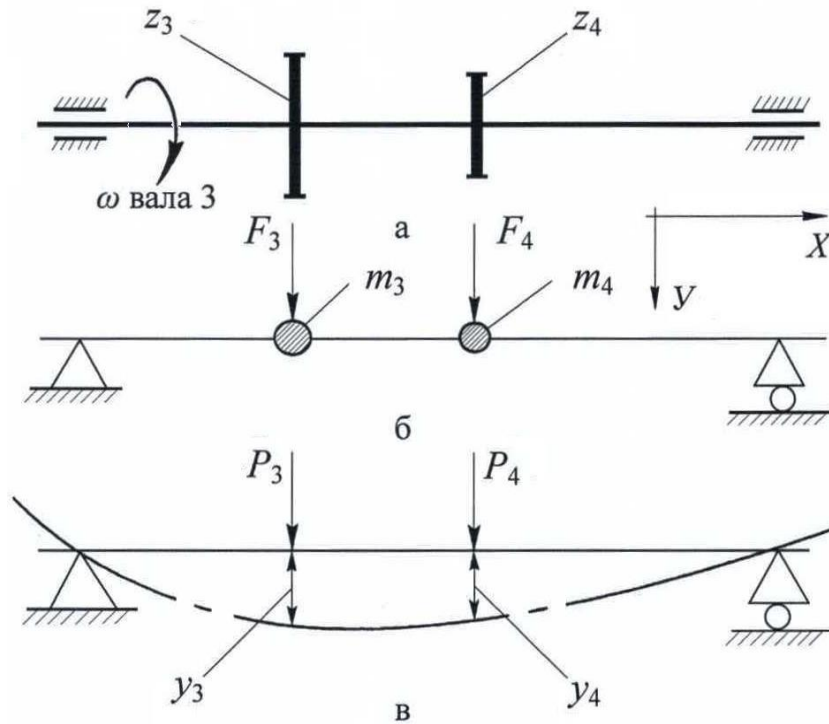


Рис. 2.3. Схема деформированной балки

Т а б л и ц а 2.1. Коэффициенты податливости (влияния) для простейших балок

| Расчетная схема балки | $e_{11}, \text{м/Н}$ | $e_{22}, \text{м/Н}$ | $e_{12} = e_{21}, \text{м/Н}$ |
|-----------------------|--|--|---|
| 1. | $\frac{a^2 b^2}{3EJl}$ | $\frac{c^2 d^2}{3EJl}$ | $\frac{ad}{6EJl} (\ell^2 - a^2 - d^2)$ |
| 2. | $\frac{a^3}{3EJ}$ | $\frac{b^3}{3EJ}$ | $\frac{a^2}{2EJ} (b - \frac{a}{3})$ |
| 3. | $\frac{a^3 b^3}{3EJl^3}$ | $\frac{c^3 d^3}{3EJl^3}$ | $\frac{ad}{6EJl^3} [bc(\ell f + 2ad) - \ell^2 f^2]$ |
| 4. | $\frac{a^3}{3EJ} [1 - \frac{a(2\ell+b)^2}{4\ell^3}]$ | $\frac{c^3}{3EJ} [1 - \frac{c(2\ell+d)^2}{4\ell^3}]$ | $\frac{a^2}{2EJ} [c - \frac{a}{3} - \frac{3c^2}{2\ell^3} (\ell - \frac{a}{3})(\ell - \frac{c}{3})]$ |
| 5. | $\frac{a^2 b^2}{3EJl}$ | $\frac{c^2}{3EJ} (\ell + c)$ | $-\frac{abc(\ell + a)}{6EJl}$ |
| 6. | $\frac{a^3}{3EJ} [1 - \frac{a(2\ell+b)^2}{4\ell^3}]$ | $\frac{c^3}{3EJ} (1 + \frac{3\ell}{4c})$ | $-\frac{ca^2}{2EJ} [1,5(1 - \frac{a}{3\ell}) - 1]$ |
| 7. | $\frac{a^2(a+b)}{3EJ}$ | $\frac{c^2(b+c)}{3EJ}$ | $\frac{abc}{6EJ}$ |

Определение собственных частот и форм изгибных колебаний вала
Система однородных дифференциальных уравнений, описывающая сво-

бодные изгибные колебания балки (вала), образуется из (2.33) при нулевых значениях обобщенных сил:

$$\begin{cases} e_{11}m_3\ddot{y}_3 + e_{12}m_4\ddot{y}_4 + y_3 = 0; \\ e_{21}m_3\ddot{y}_3 + e_{22}m_4\ddot{y}_4 + y_4 = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Решение этой системы уравнений ищем в виде

$$\begin{cases} y_3 = A\sin(kt + \alpha) \\ y_4 = B\sin(kt + \alpha) \end{cases} \quad (2.35)$$

где A и B – амплитуды изгибных колебаний вала, м.

После подстановки (2.35) в (2.34) получим, что при обязательном выполнении условий $A \neq 0$, $B \neq 0$ (так называемое *нетривиальное* решение) собственные частоты k_i должны быть корнями частотного уравнения вида

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} 1 - e_{11}m_3k^2 & -e_{12}m_4k^2 \\ -e_{21}m_3k^2 & 1 - e_{22}m_4k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.36)$$

После раскрытия определителя частотного уравнения (2.36) получим выражение (при $e_{jk} = e_{kj}$)

$$\Delta(k^2) = m_3m_4(e_{11}e_{22} - e_{12}^2)k^4 - (e_{11}m_3 + e_{22}m_4)k^2 + 1 = 0$$

или то же самое в свернутой форме

$$h_2k^4 + h_1k^2 + h_0 = 0, \quad (2.37)$$

где коэффициенты биквадратного уравнения имеют вид

$$h_2 = m_3m_4(e_{11}e_{22} - e_{12}^2), \quad h_1 = -(e_{11}m_3 + e_{22}m_4), \quad h_0 = 1.$$

При условии $e_{11}e_{22} - e_{12}^2 > 0$ график $\Delta(k^2)$ будет иметь вид параболы с выпуклостью вниз, пересекающей ось абсцисс в точках, на числовой оси соответствующих значениям k_1^2 и k_2^2 .

Два действительных корня уравнения (2.37) – это две собственные частоты изгибных колебаний вала. Решение данного уравнения ищем в виде, c^{-1}

$$k_i = \sqrt{\frac{-h_1 \mp \sqrt{h_1^2 - 4h_0h_2}}{2h_2}}. \quad (2.38)$$

Здесь значению $i = 1$ в подкоренном выражении числителя для обеспечения условия $k_1 < k_2$ соответствует знак минус, а $i = 2$ – плюс.

Полученным двум значениям частот k_1 и k_2 соответствуют частные решения вида (2.35), поэтому общее решение имеет форму

$$\begin{cases} y_3 = A_1 \sin(k_1t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2t + \alpha_2); \\ y_4 = B_1 \sin(k_1t + \alpha_1) + B_2 \sin(k_2t + \alpha_2). \end{cases} \quad (2.39)$$

Таким образом, каждая из координат участвует в сложном колебательном процессе, представляющем собой сумму гармонических движений с разными частотами, амплитудами и фазами.

Оценка низшей собственной частоты изгибных колебаний с помощью метода Данкерлея (Dunkerley)

Для частотного уравнения (2.37) при его действительных корнях согласно одной из теорем Виета запишем [2–4]

$$\sum k_i^{-2} = -h_1/h_0. \quad (2.40)$$

Обычно каждая из последующих частот численно существенно превосходит предыдущую, поэтому приближенное значение меньшего корня (частоты) определим из выражения

$$k_D \approx \sqrt{-\frac{h_0}{h_1}} = \frac{1}{\sqrt{e_{11}m_3 + e_{22}m_4}}. \quad (2.41)$$

Численные значения h_0 и h_1 имеют разные знаки, поэтому подкоренное выражение всегда положительно. При этом должно удовлетворяться условие $k_D \leq k_1$. Если исследуемая динамическая модель является одномассовой, в уравнении (2.38) массу m_4 положим равной нулю и получим

$$k = 1/\sqrt{e_{11}m_3}.$$

Коэффициенты формы

Отношение амплитуд свободных колебаний при фиксированной собственной частоте называют **коэффициентом формы**. Для системы с двумя степенями свободы коэффициенты формы $\beta_i = B_i/A_i$ определяются непосредственно из уравнений (2.35):

$$\beta_r = \frac{1 - e_{11}m_1k_r^2}{e_{12}m_2k_r^2} = \frac{e_{21}m_1k_r^2}{1 - e_{22}m_2k_r^2} \quad (r = 1, 2). \quad (2.42)$$

Таким образом, $\beta_1 = B_1/A_1$ и $\beta_2 = B_2/A_2$ зависят только от параметров системы и не зависят от начальных условий. Коэффициенты формы для рассматриваемой собственной частоты k_i характеризуют распределение амплитуд по колебательной цепи. Совокупность этих амплитуд образует так называемую **форму колебаний**.

Положительное значение β_i свидетельствует, что колебания на частоте k_i происходят синфазно, а отрицательное – противофазно (колебания по фазе смещены на π).

На *рис. 2.4* представлен пример форм изгибных колебаний балки с двумя степенями свободы. Здесь амплитуда изгибных колебаний массы m_3 принимается условно за 1, а амплитуда колебаний массы m_4 подлежит расчету по формуле (2.42) с учетом величины k_i .

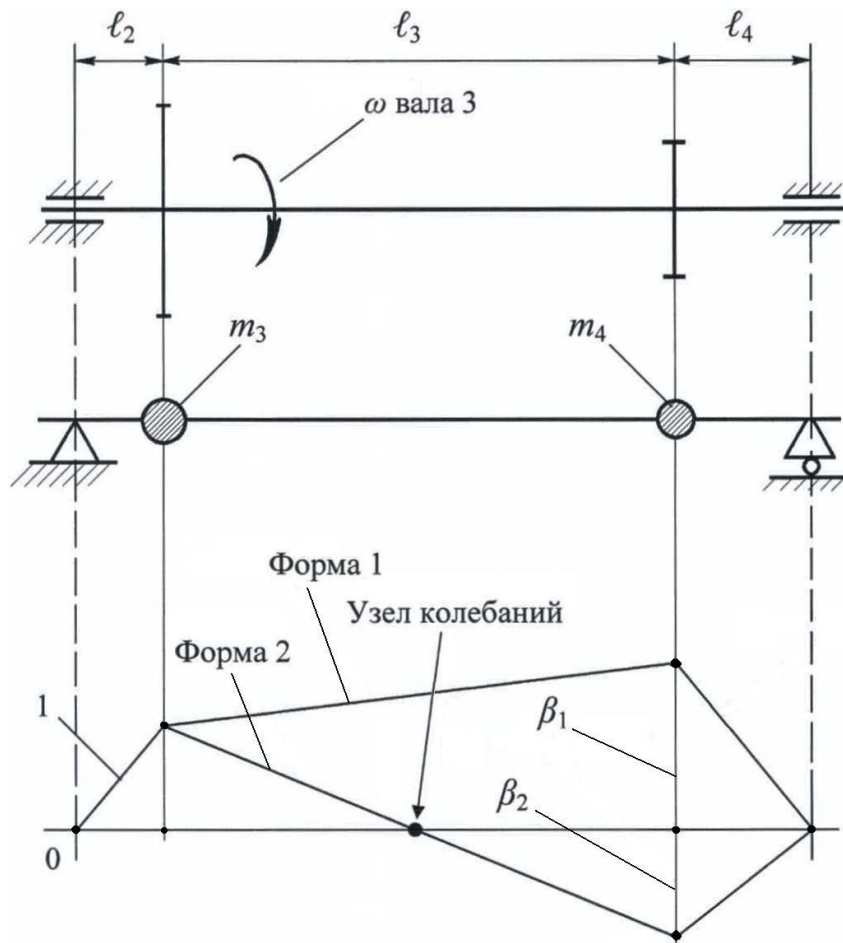


Рис. 2.4. Формы изгибных колебаний вала

2.7. Вынужденные изгибные колебания вала (Выполняется по указанию преподавателя)

Суммарная сила давления на зубья колес в некорригированной прямозубой передаче направлена по линии зацепления и определяется по формуле

$$F = \frac{2M_{кр}}{d \cos \alpha},$$

где $M_{ед}$ – крутящий момент, передаваемый на вал, Нм; d – диаметр делительной окружности зубчатого колеса, м; $\alpha = 20^\circ$ – стандартный угол зацепления зубчатой передачи.

При выполнении расчетов эту силу следует задавать в виде ее составляющих по осям координат, так как взаимное расположение обоих зубчатых пар может быть различным. В частности, на рис.2.5 приведены эти составляющие для представленного конструктивного исполнения узла. При этом окружная сила определяется как $F_{\tau\epsilon\delta} = 2M_{ед} / d$, а радиальная сила, направленная к центру вращения колеса, как $F_{\delta} = F_{\tau\epsilon\delta} \operatorname{tg} \alpha$.

Для анализа изгибных колебаний балку следует рассматривать в двух плоскостях XOY и XOZ . Однако для пояснения методики определения действующих сил F_3 и F_4 ниже ограничимся лишь плоскостью XOY , приняв, что

эти силы являются окружными силами зубчатой передачи, условно лежащими в одной (этой) плоскости. Для определения этих сил при учете выявленных ранее крутильных колебаний обратимся к рис. 2.6.

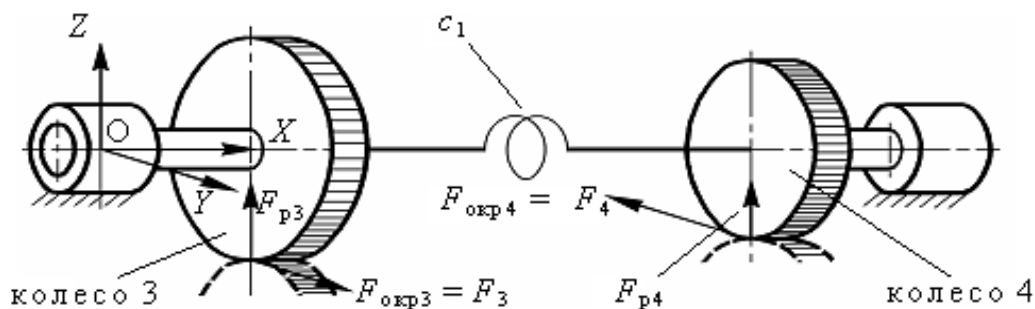


Рис. 2.5. Силы, действующие на вал 3 в прямозубой цилиндрической зубчатой передаче

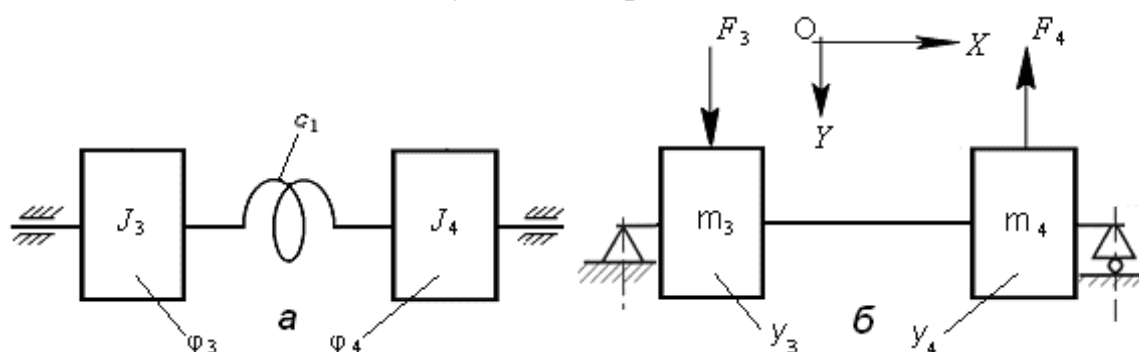


Рис. 2.6. К расчету изгибных колебаний вала 3:

a – модель крутильной системы; *б* – модель изгибной системы

Для зубчатого колеса 3 имеем (рис. 2.6, *a*) $J_3 \ddot{\varphi}_3 = -c_1 q_2 + M_3$, откуда $M_3 = J_3 \ddot{\varphi}_3 + c_1 q_2$ – момент, действующий со стороны ведущей части механизма. Здесь q_2 – угловая деформация вала 3. При этом $\varphi_3 = u_{31} q_1$; $\ddot{\varphi}_3 = 0$, следовательно $M_3 = c_1 q_2$. Искомое окружное усилие в зацеплении определим из выражения

$$F_3 = \frac{M_3}{r_3} = \frac{c_1 q_2}{r_3}.$$

Аналогичным способом находим составляющие сил во второй зубчатой передаче. Численные значения всех полученных величин с учетом направления действующих сил подставим в (2.33), после чего данную систему решим относительно неизвестных y_3 и y_4 .

Методика расчета системы неоднородных дифференциальных уравнений (2.33) приведена в учебных пособиях [2–6].

Выбор вала для каждого задания: при расчете изгибных колебаний следует в модели соответствующего задания выбрать какой-либо вал с двумя приводными механизмами.

2.8. Определение критической скорости вала (ротора).

Самоцентрирование

Динамика вращающихся систем (роторов) является большим и достаточно хорошо развитым разделом механики, имеющим много технических приложений. К последним можно отнести валы, шпиндели станков, веретена текстильных машин, сушильные барабаны, центрифуги и другие механизмы. Здесь ограничимся изложением лишь некоторых вводных понятий и весьма упрощенных представлений об этой проблеме.

Рассмотрим пример, в котором невесомый вал с одним диском – зубчатый колесом – вращается вокруг своей продольной оси (вал 2 на *рис. 2.1*). Диск на валу в силу погрешностей изготовления и сборки установлен эксцентрично. При условии невесомости вала scomпонуем его вертикально.

При вращении диска общее смещение его центра масс (s) относительно его же оси вращения, проходящей через опоры, определяется выражением

$$r = \Delta + e,$$

где Δ – прогиб вала под действием центробежной силы инерции; e – исходное смещение центра масс относительно оси вращения при $\omega = 0$ (*рис. 2.7*).

Для сохранения динамического равновесия системы в каждый момент времени необходимо иметь равенство центробежной и восстанавливающей сил, т. е.

$$F_{цб} = F_{восст} \quad \text{или} \quad m\omega^2 r = c\Delta,$$

где m – масса диска; ω – угловая скорость диска; c – изгибная жесткость вала.

Решив это уравнение относительно неизвестного значения r , получим

$$r = \frac{e}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right|}, \quad (2.43)$$

где $k = \sqrt{c/m} = \omega_{кр}$.

Круговое движение точки контакта диска и вала называют *прецессией*.

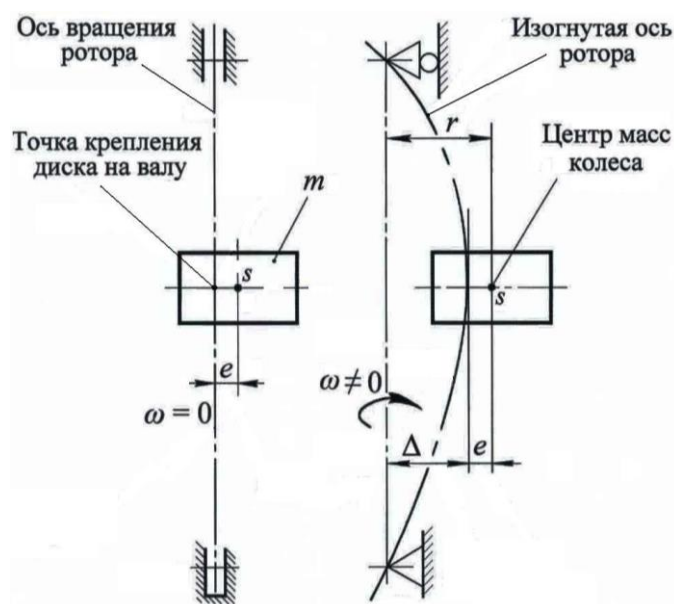


Рис. 2.7. К расчету критической скорости вала

Из (2.43) следует, что если $\omega \rightarrow k$, то $r \rightarrow \infty$, что может привести к аварии. Соответствующую угловую скорость принято называть *критической*

скоростью вращения ($\omega_{кр}$). Она совпадает с собственной частотой изгибных колебаний невращающейся системы «вал – диск», хотя, строго говоря, рассматриваемый режим не является колебательным.

При $\omega \gg k$ имеем $r \rightarrow 0$; таким образом, при очень податливых валах центр масс стремится занять положение на геометрической оси вращения. Этот эффект носит название **самоцентрирование** вала.

Здесь мы располагаем двумя способами уменьшения r , а именно уменьшением эксцентриситета e , достигаемым за счет более тщательной балансировки, и уменьшением изгибной жесткости вала, обеспечивающим самоцентрирование. В ряде случаев самоцентрирование является единственно возможным техническим решением (например, барабан стиральной машины в режиме полоскания и сушки белья).

С учетом $c^{-1} = e_{11}$ далее можно записать

$$\omega_{кр} = \frac{1}{\sqrt{e_{11}m}}, \quad (2.44)$$

где e_{11} – коэффициент податливости (влияния) – см. Табл.2.1.

Критическая частота вращения вала (Гц) определяется из выражения

$$v_{кр} = \frac{\omega_{кр}}{2\pi}.$$

Частотный диапазон в окрестности значения $\omega_{кр}$ обычно считается близким к критическому при $0,7 \leq \frac{\omega_{кр}}{k} \leq 1,4$. При более строгом рассмотрении этой задачи оказывается, что система имеет несколько отличающиеся критические частоты, зависящие от частоты вращения. Определенное влияние также оказывают диссипативные силы, которые здесь не всегда играют демпфирующую роль.

2.9. Виброизоляция машины

При работе любой машины из-за воздействия внешних сил и неуравновешенности инерционных нагрузок возникают периодические силы, передающиеся на несущие конструкции и корпус машины. Если машину жестко закрепить на фундаменте, то на него полностью будут передаваться силы, возникающие в машине.

Однако при постановке машины на упругую подвеску и при соответствующем подборе параметров подвески *переменная составляющая реакции* на фундамент может быть существенно снижена. При этом осуществляется так называемая *виброизоляция машины*.

На данном этапе решаем вопрос виброизоляции установки на фундаменте под действием гармонической вынуждающей силы, направленной вдоль вертикальной оси.

Рассмотрим простейшую динамическую модель машины на упругом основании ($H = 1$), представленную на *рис. 2.8*. Аналогом этой динамической модели может быть взята схема привода машины, изображенная на *рис. 2.1*, при условии монолитности (неделимости) самого привода.

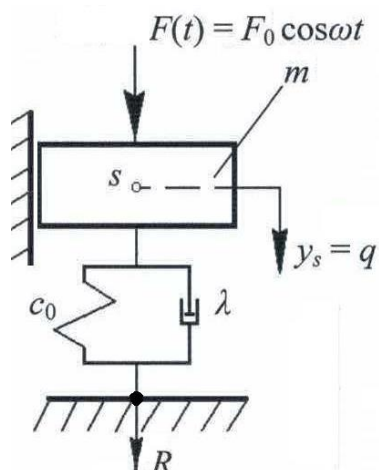


Рис. 2.8. Динамическая модель машины на фундаменте

Предположим, что центр масс машины s занимает неизменное относительно ее корпуса положение и на нее действует гармоническая вынуждающая сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, направленная вдоль вертикальной оси y .

Вынужденные колебания корпуса машины описываются дифференциальным уравнением

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F_0 \cos \omega t,$$

решение которого для установившегося режима имеет вид $q = A \cos(\omega t - \gamma)$.

Амплитуда колебаний A без учета сил сопротивления определяется из

$$A = \frac{F_0}{|1 - z^2| c_0}, \quad (2.45)$$

где c_0 – коэффициент жесткости упругой подвески машины.

Введем в рассмотрение коэффициент виброизоляции

$$\xi = R^{max} / F_0,$$

где R^{max} – максимальное значение реакции, возникающей за счет силы $F(t)$ и воздействующей на фундамент (основание).

Поскольку $R^{max} = c_0 A$, далее получим

$$\xi = \frac{c_0 A}{F_0} = \frac{1}{|1 - z^2|} = \varkappa. \quad (2.46)$$

Таким образом, без учета сил сопротивления коэффициент виброизоляции ξ равен коэффициенту динамичности \varkappa .

Если потребовать $\varkappa \leq \varkappa_*$, где $\varkappa_* < 1$ – допустимое значение коэффициента динамичности, совпадающего с коэффициентом виброизоляции, то из (1.30) следует, что данное требование может быть удовлетворено только в зарезонансном режиме при $z > \sqrt{2}$. В этом частотном диапазоне силы сопротивления при отсутствии специальных демпфирующих устройств сказываются слабо, поэтому в первом приближении здесь их можно не учитывать.

Физическая суть эффекта связана с тем обстоятельством, что в зарезонансном режиме сила инерции, возникающая при вынужденных коле-

баниях, находится в противофазе с вынуждающей силой и потому частично ее уравнивает.

Отобразим поставленное условие на координатной плоскости $c_0 - m$, где c_0 – коэффициент продольной жесткости подвески машины, m – масса машины (рис. 2.9).

1. При проектировании машин в силу чисто конструктивных требований всегда имеется **условие** $m_* \leq m \leq m_{**}$, ограничивающее реальный диапазон изменения массы машины (от минимальной ее массы m_* до максимальной m_{**}). Примем, что увеличение материалоемкости машины считается приемлемым не более чем до $m_{**} = 1,5m_*$. В этом случае обычно обеспечивается наибольшая экономичность конструкции и наименьшая ее осадка на упругой подвеске.

Неравенствам ($m_* \leq m \leq m_{**}$) соответствует область в координатной системе $c_0 - m$, расположенная **между прямыми 1 и 1'** (рис. 2.9).

2. **Условие** $\alpha \leq \alpha_*$, где α_* – допустимое значение коэффициент динамичности, приведем к виду

$$c_0 \leq m\omega^2 / (1 + \alpha_*^{-1}). \quad (2.47)$$

Решению данного неравенства отвечает область параметров, лежащая **ниже прямой 2**. Для ее построения определим значения $c_0 = 0$ при $m = 0$ и при $m = m_*$. В этом случае $c_0 = m_*\omega^2 / (1 + \alpha_*^{-1})$. Через соответствующие две точки проведем эту прямую.

3. **Условие** $A \leq A_*$, где A_* – некоторая допустимая амплитуда, приведем к виду

$$c_0 \leq m\omega^2 - \frac{F_0}{A_*}. \quad (2.48)$$

Решению данного неравенства отвечает область параметров, также лежащая **ниже прямой 3**. Для построения прямой 3 определим два значения параметра c_0 при $m = m_*$ и c_0 при $m = m_{**}$. Заметим, что прямая 3 пересекает ось ординат при $m = 0$ и $c_0 = -F_0 / A_*$. Отрицательное значение жесткости имеет смысл лишь для построения прямой 3.

4. Последним **условием** является ограничение осадки машины под действием ее собственного веса, $\Delta \leq \Delta_*$, т. е. $\frac{mg}{c_0} \leq \Delta_*$.

Отсюда имеем

$$c_0 \geq \frac{mg}{\Delta_*}. \quad (2.49)$$

Решению данного неравенства отвечает область параметров, лежащая **выше прямой 4**. Эта прямая проходит через начало координат и точку, отвечающую соотношению

$$c_0 = m_* g / \Delta_* . \quad (2.50)$$

Всем вышеперечисленным требованиям на *рис. 2.9* удовлетворяет заштрихованная область, в которой оптимальному решению соответствует некоторая точка *N*, отвечающая *наименьшему значению массы машины*. Это условие является определяющим при проектировании систем виброизоляции.

При этом нередко возникают трудности при реализации упругих элементов с малой жесткостью, поскольку не удастся обеспечить их достаточную прочность. В подобных случаях следует соответственно увеличить c_0 .

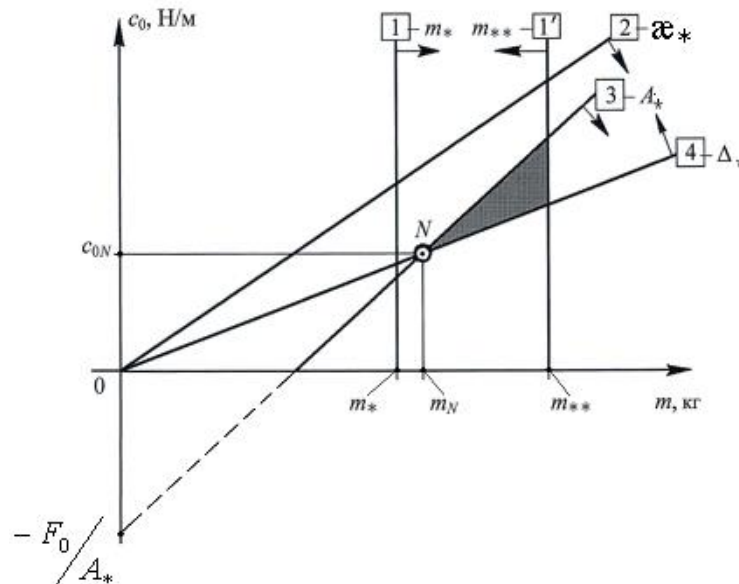


Рис. 2.9. Результаты расчета виброизоляции

Выбранной точке *N* соответствуют некоторый коэффициент жесткости c_{0N} и масса машины m_N , точные численные значения которых определяются при совместном решении уравнений (2.47) и (2.49).

Отсутствие такой области свидетельствует о взаимной несовместимости исходных условий, что требует их пересмотра. Чаще всего подобная ситуация возникает в случае, когда прямая 4 проходит выше прямой 2.

Условие совместного решения может быть получено на основании (2.47) и (2.49):

$$g/\Delta_* \leq \omega^2/(1 + \alpha_*^{-1}),$$

откуда

$$\Delta_* \geq \frac{g(1 + \alpha_*^{-1})}{\omega^2}. \quad (2.51)$$

При выполнении расчета виброизоляции на графике $c_0 - m$ строят прямые 1 и 1' для $m = m_*$, $m = m_{**}$ (для определенности можно принять $m_{**} = 1,5 m_*$) и прямые, отвечающие знаку равенства в условиях (2.47) ÷ (2.49).

Затем определяют область совместного решения, численные значения параметров c_{0N} , m_N и производят проверку полученного решения по всем ис-

ходным неравенствам.

Как уже отмечалось, виброизоляция, является одним из способов виброзащиты. Задача виброизоляции состоит в рациональном выборе параметров массы машины и жесткости ее упругой подвески, соответствующих заданному минимальному уровню амплитуд колебаний и передаваемых на фундамент нагрузок.

В инженерной практике возможны и более сложные случаи, однако даже на примере принятой модели становится ясно, что выбор параметров системы виброизоляции нередко сопряжен с удовлетворением противоречивых условий, реализация которых иногда требует определенного компромисса.

Этапы проверки результатов расчетов

1. Определение собственной частоты $k_N = \sqrt{c_{0N}/m_N}$.

2. Определение коэффициента динамичности $\alpha_N = 1/|1 - z_N^2|$,

где $z_N = \omega/k_N$.

Проверка: $\alpha_N \leq \alpha_*$

3. Определение амплитуды вынужденных колебаний $A_N = \alpha_N F_0 / c_{0N}$.

Проверка: $A_N \leq A_*$

4. Определение осадки машины под действием веса $\Delta_N = m_N g / c_{0N}$.

Проверка: $\Delta_N \leq \Delta_*$

После проверки следует показать точку N на АЧХ (рис. 2.10), отвечающую режиму виброизоляции ($z = z_N, \alpha = \alpha_N$).

Построение амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристик остова машины на упругом основании

На рис. 2.10 и 2.11 приведены графики АЧХ и ФЧХ остова машины, построенные по формулам (1.29) – (1.32) в интервале $z \in (0; 2,5)$ при наличии вынуждающей силы и диссипации (см. рис. 2.8).

α

$\alpha_{рез}$

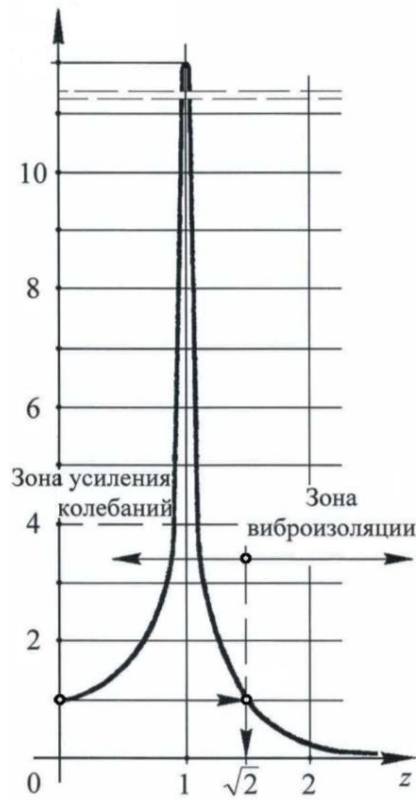


Рис. 2.10. АЧХ машины

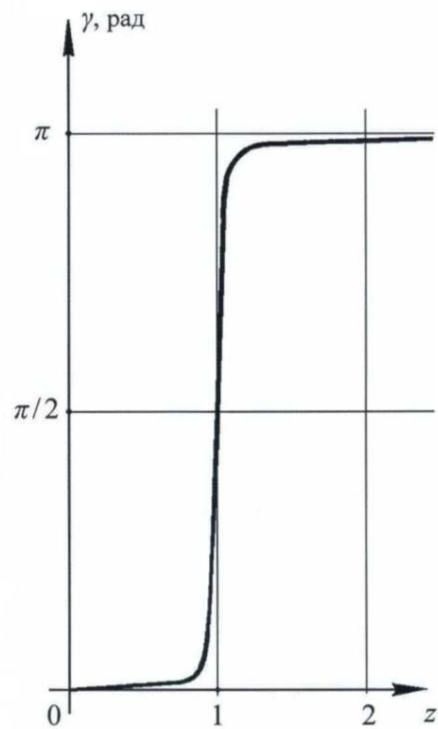


Рис. 2.11. ФЧХ машины

Приложение А

Порядок выполнения этапов самостоятельной (контрольной) работы по анализу частотных и диссипативных характеристик машины

Задачей контрольной работы является определение частотных и диссипативных характеристик машины по диаграмме затухающих колебаний.

Содержанием контрольной работы является обработка графика затухающих колебаний, выданного студенту, и оценка полученных результатов.

В качестве примера выполнения работы исследуется график, представленный на *рис. А.1*. Последовательность действий по расчету частотных и диссипативных характеристик машины заключается в следующем:

- определяется усредненный период свободных затухающих колебаний T ;
- определяется собственная частота k механической системы по формуле (1.15);
- определяется логарифмический декремент λ по формуле (1.25);
- определяется коэффициент демпфирования δ по формуле (1.26);
- определяется коэффициент рассеяния ψ по формулам (1.18) и (1.19).

Результаты выполненной работы, оформленные и снабженные выводами, передаются (пересылаются) преподавателю для проверки (см. п. 2.1).

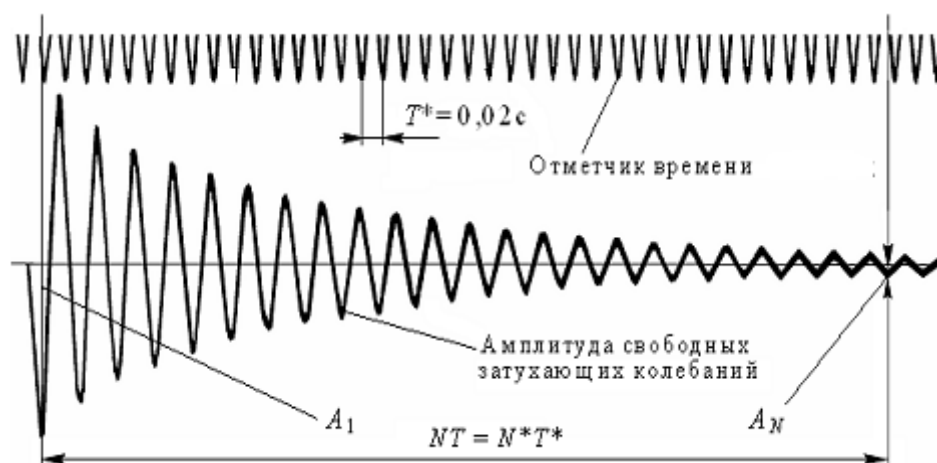


Рис. А.1. Осциллограмма свободных затухающих колебаний системы

Процесс затухания механических колебаний занимает некоторый интервал времени. Для определения времени протекания этого процесса на исследуемую осциллограмму кроме самого процесса затухания механических колебаний выведем след отметчика времени. Часто в качестве отметчика времени используется запись изменения переменного тока бытовой электрической сети, т. е. его колебания с фиксированной частотой, равной $\nu = 50$ Гц. При этом период колебаний тока в электросети составит

$$T^* = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ с.}$$

На осциллограмме выбранное число периодов (циклов) затухающих колебаний, ограничим слева и справа вертикальными прямыми. В нашем случае $N^{max} = N = 23$. Ему будет соответствовать число периодов (циклов) отметчика времени $N^* \approx 39,7$.

Продолжение прил. А

При обработке осциллограммы выберем число периодов N и, определив по осциллограмме значения амплитуд A_1 и A_N , по формуле (1.25) найдем значение логарифмического декремента λ . Далее воспользуемся вышеприведенными формулами. Сопоставив результаты расчетов значений ψ , сделаем вы-

воды о величине диссипации в механической системе, осциллограмма свободных колебаний которой взята для исследования.

Для обеспечения необходимой точности при расчетах следует сохранять не менее 3÷4 значащих цифр. Период времени $NT = N \cdot T^*$ соответствует следующим числовым значениям, с:

$$23T = 39,7 \cdot 0,02.$$

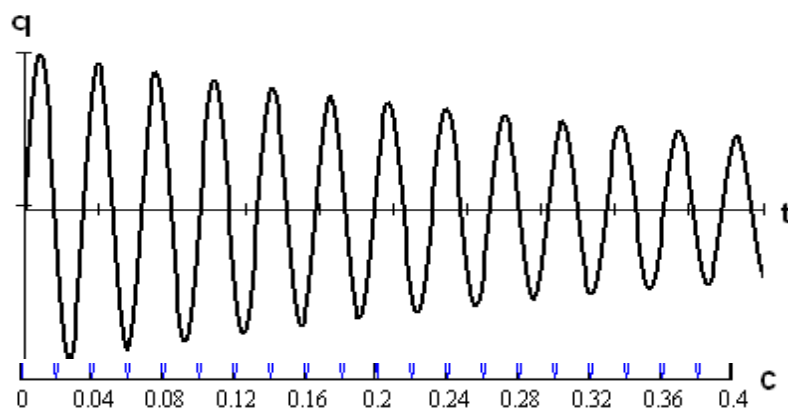
Отсюда определим величину усредненного периода свободных затухающих колебаний

$$\bar{T} = 39,7 \cdot 0,02 / 23 = 3,45 \cdot 10^{-2} \text{ с.}$$

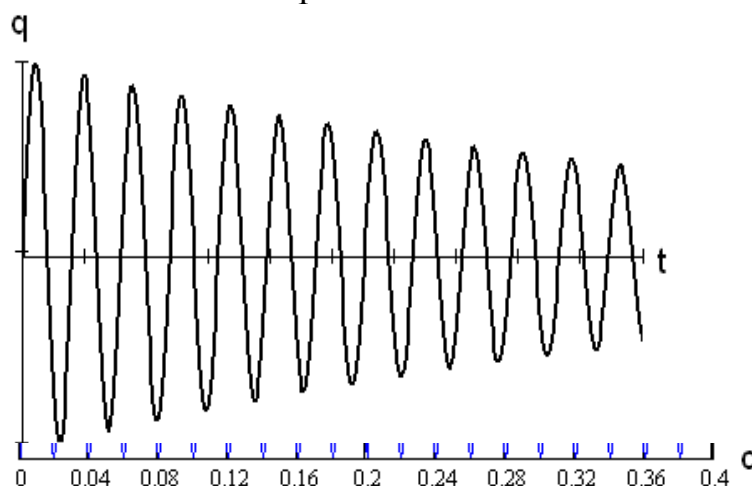
Полученное значение T подставим в формулу (1.15), после чего определим значение собственной частоты k исследуемой механической системы.

Варианты графиков затухающих колебаний для выполнения самостоятельной работы представлены ниже.

Варианты режимов затухающих колебаний

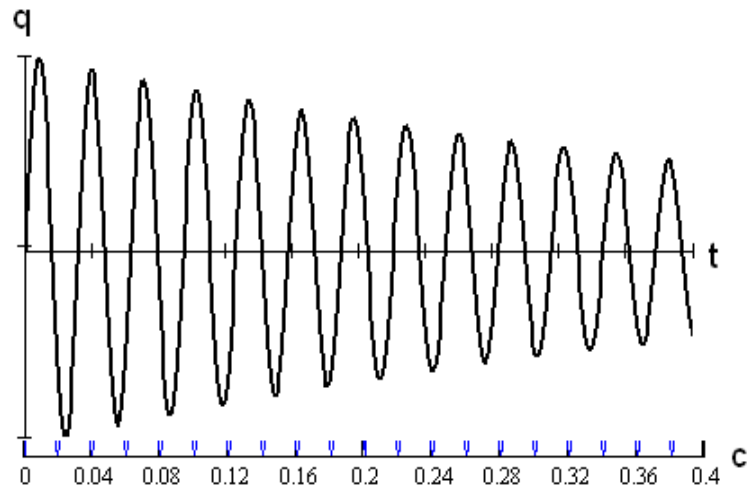


Вариант 1

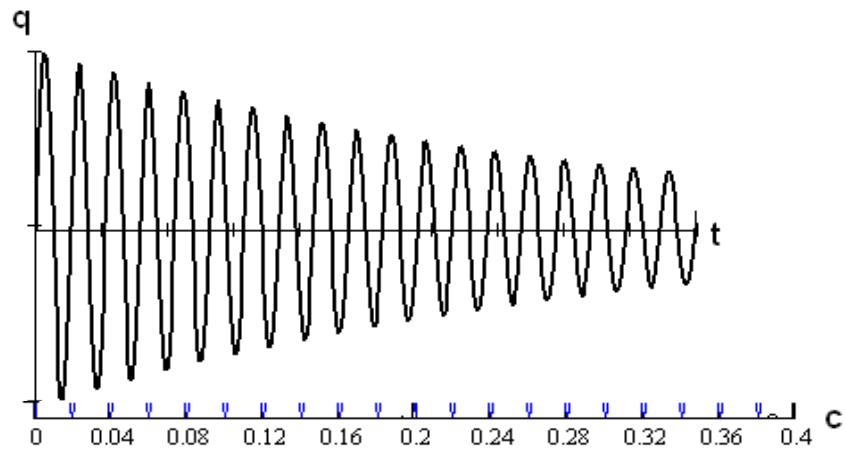


Вариант 2

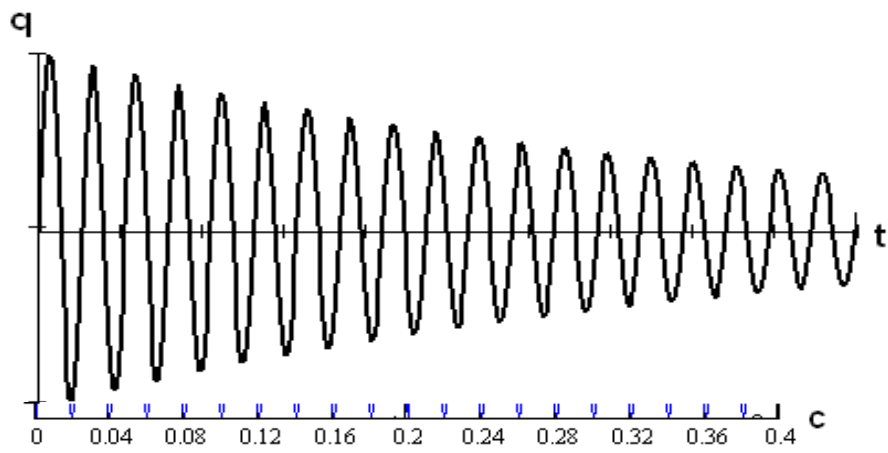
Продолжение прил. А



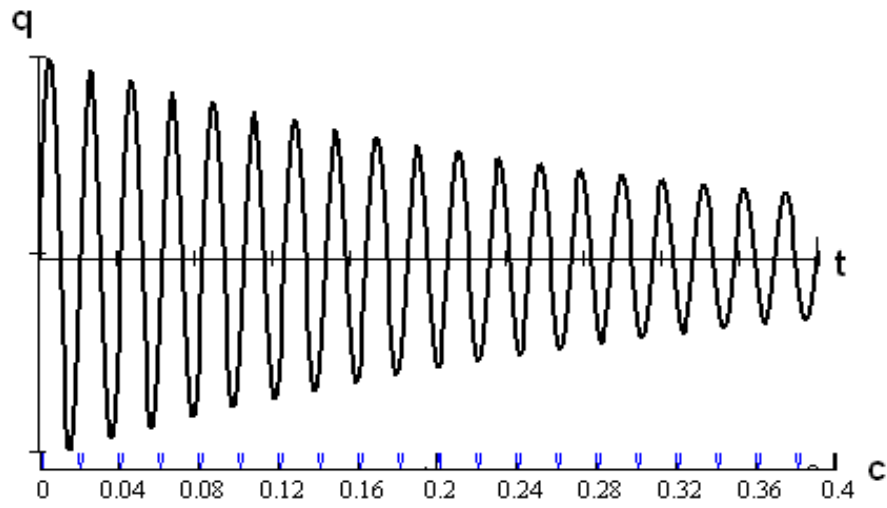
Вариант 3



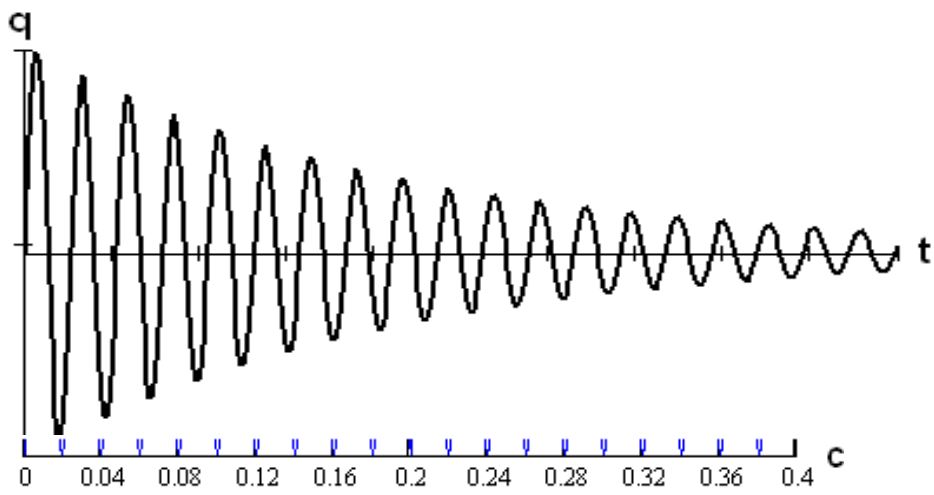
Вариант 4



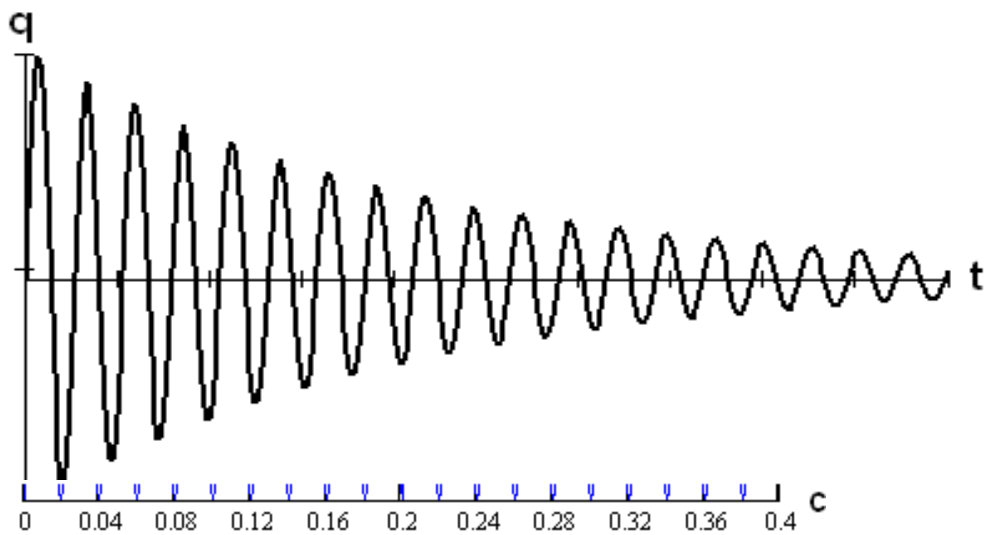
Вариант 5



Вариант 6

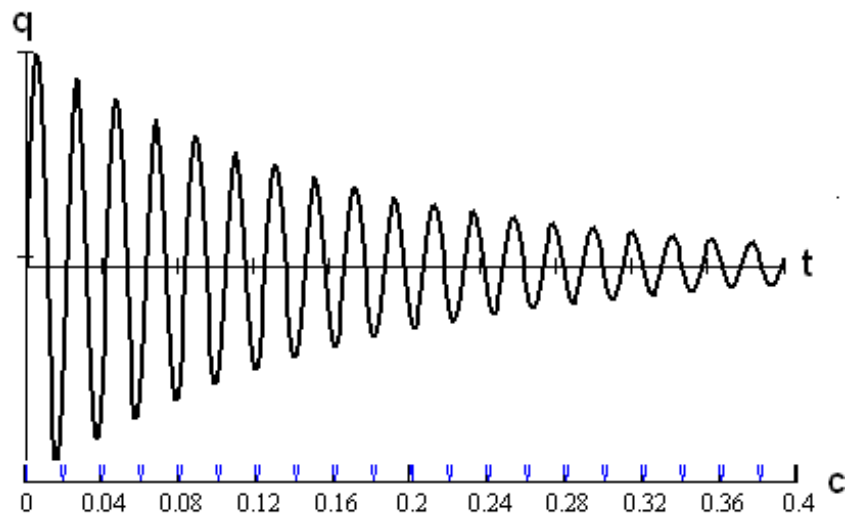


Вариант 7

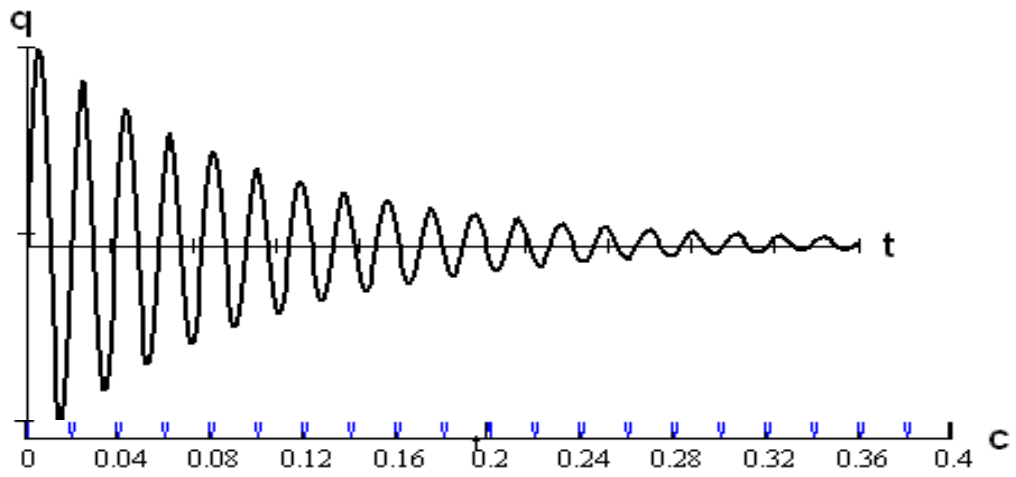


Вариант 8

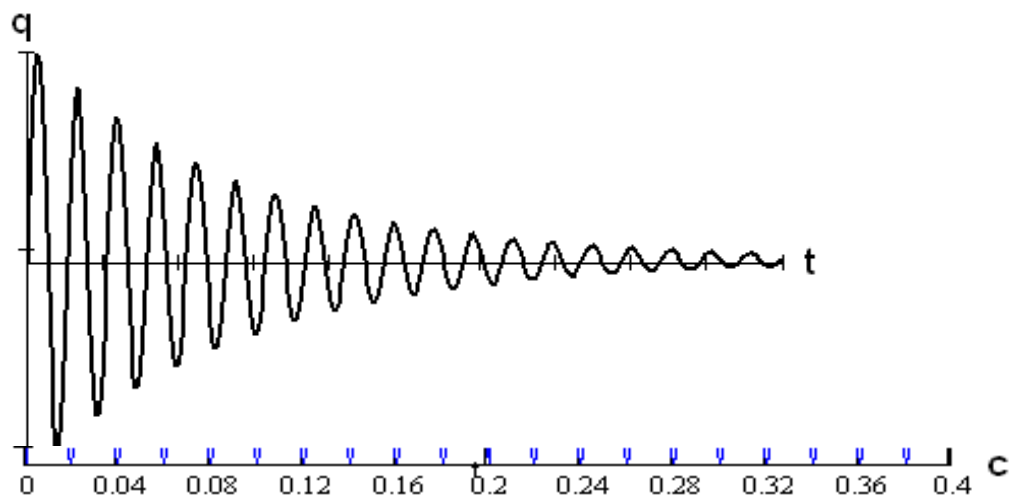
Продолжение прил. А



Вариант 9

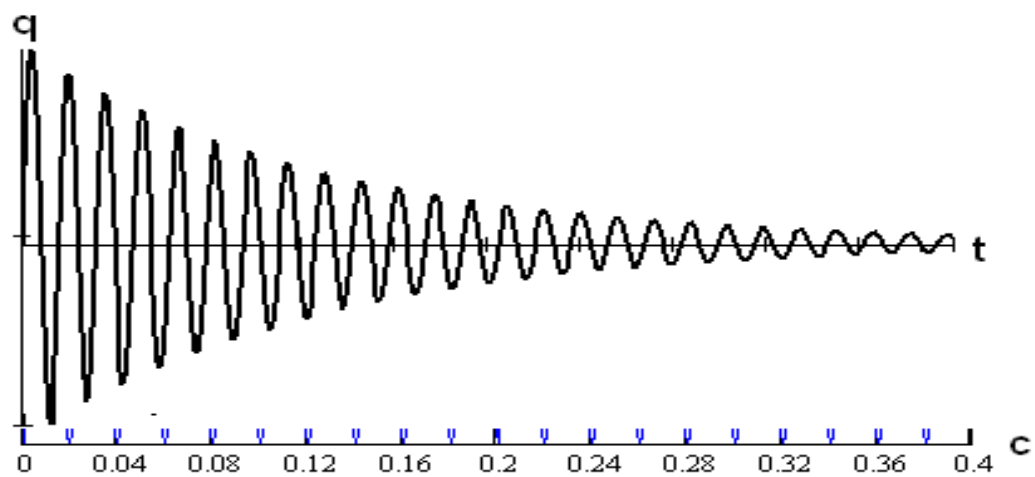


Вариант 10

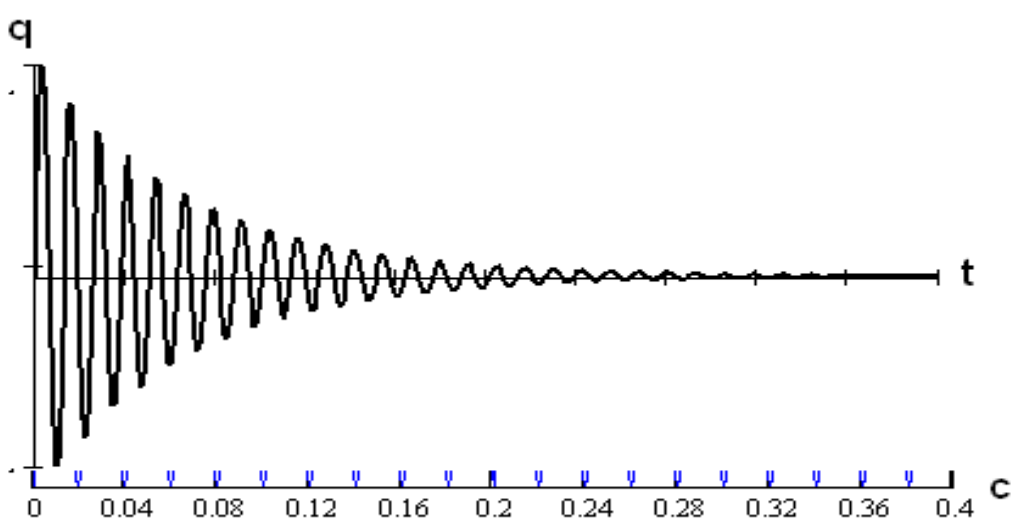


Вариант 11

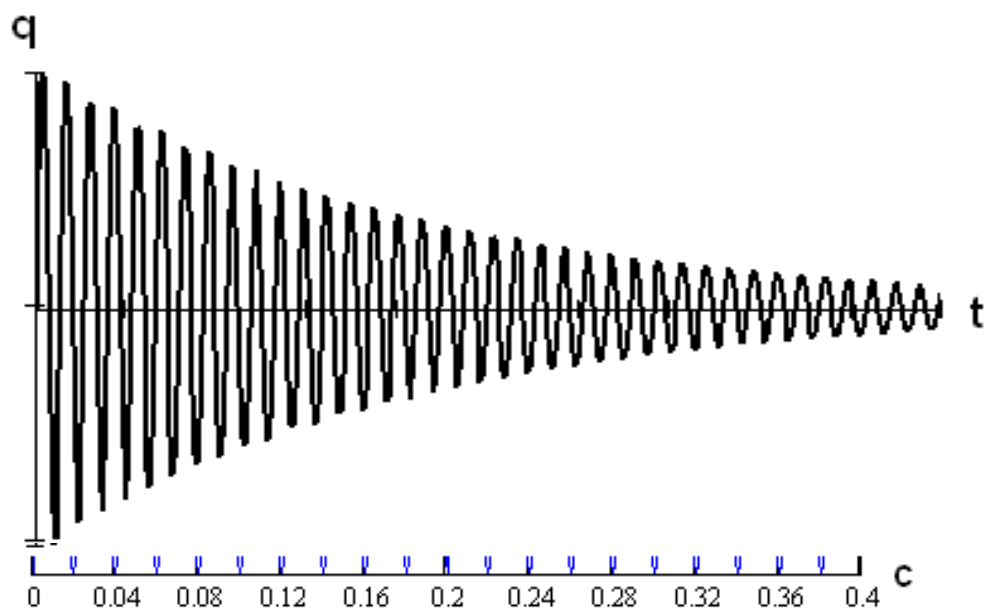
Продолжение прил. А



Вариант 12

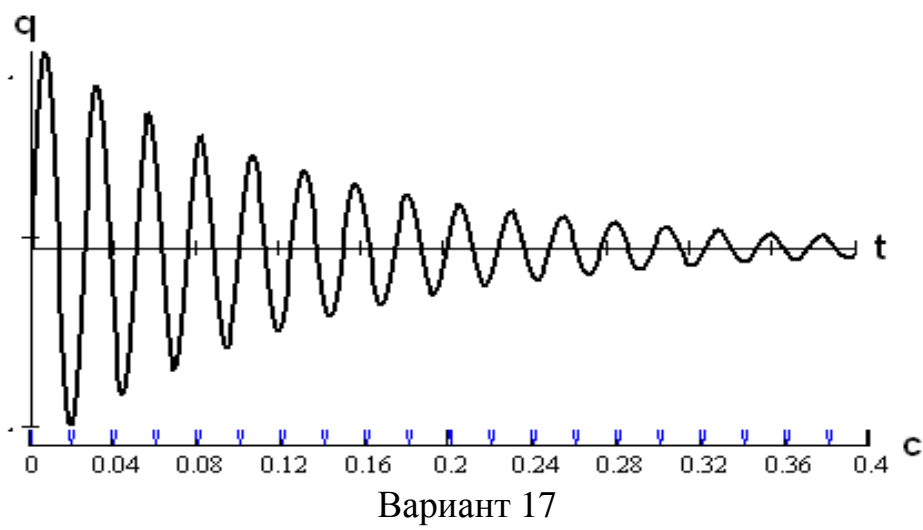
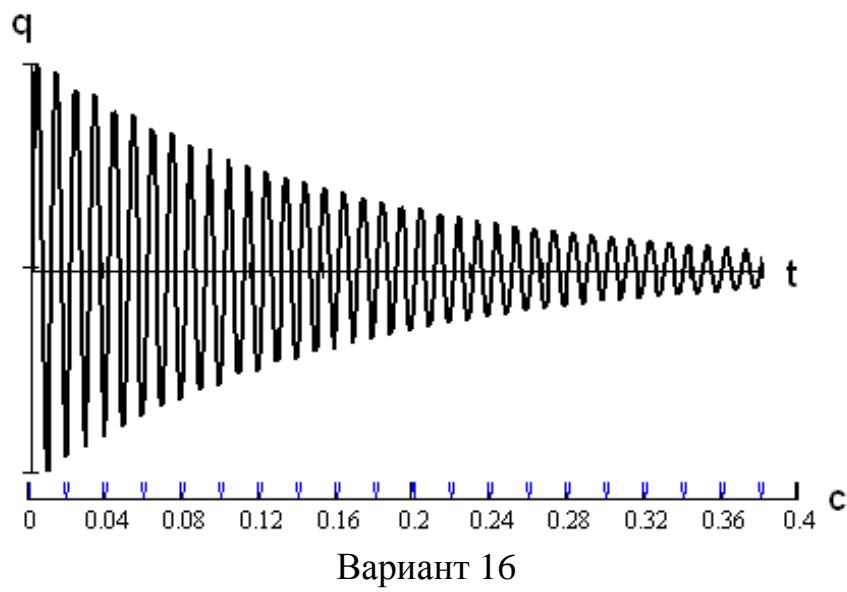
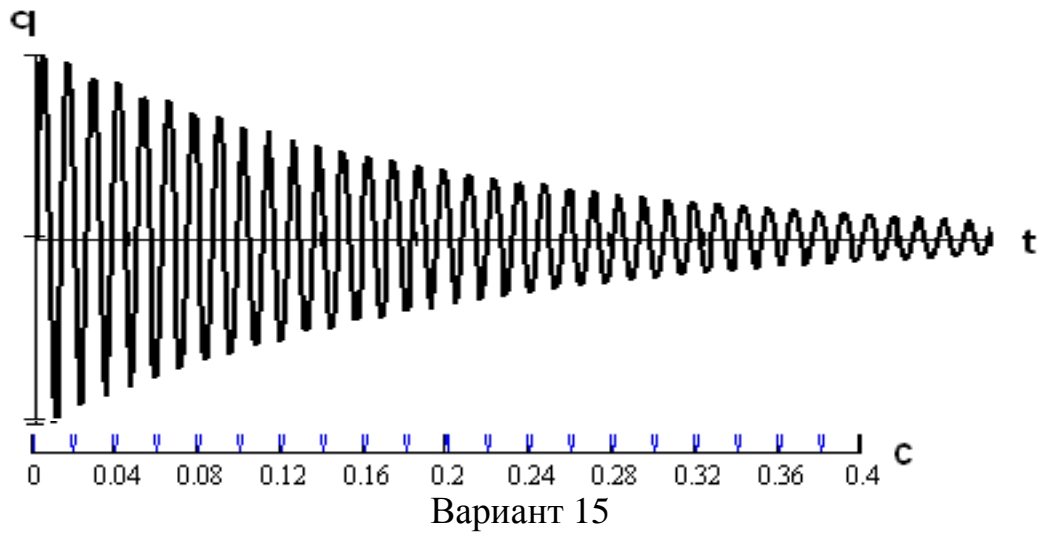


Вариант 13

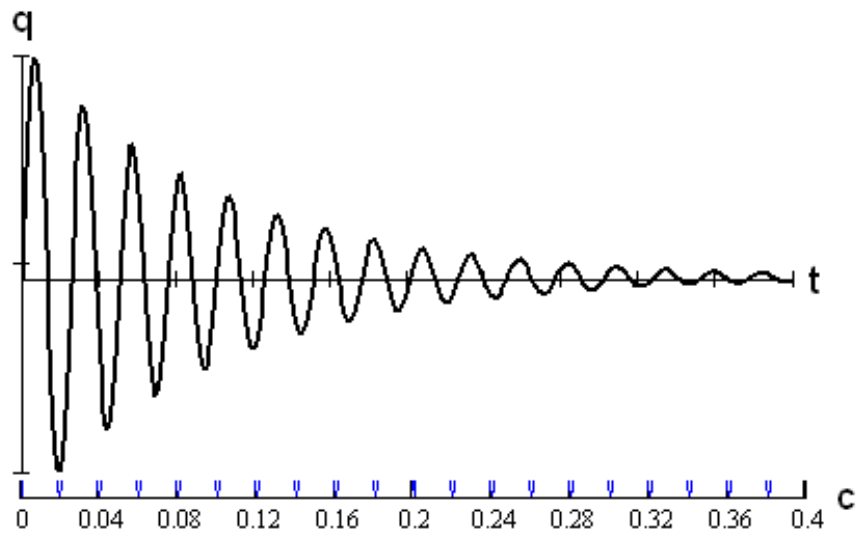


Вариант 14

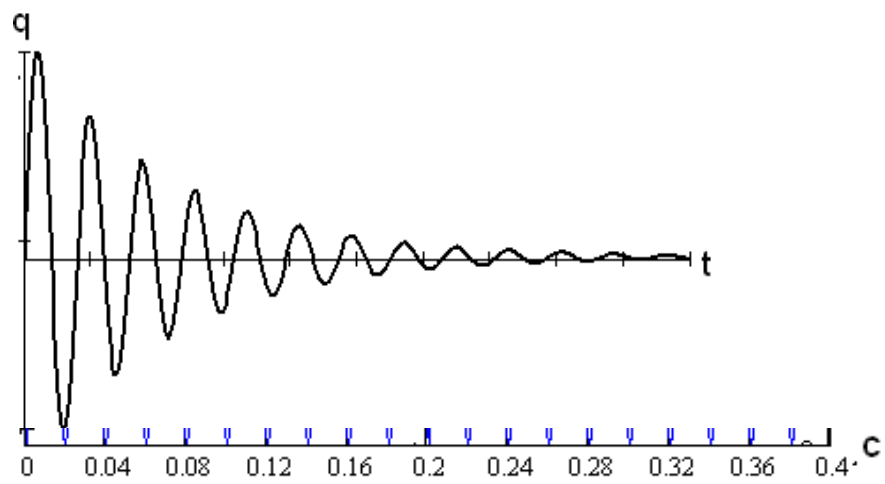
Продолжение прил. А



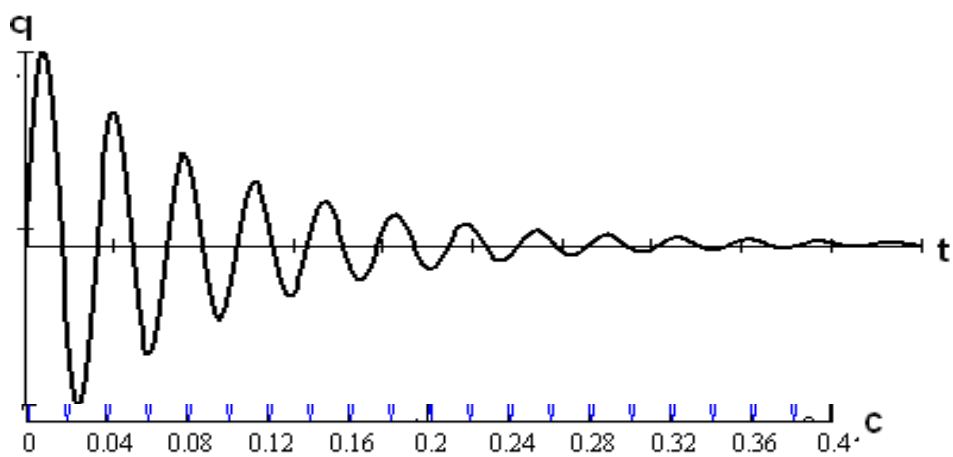
Окончание прил. А



Вариант 18



Вариант 19



Вариант 20

Исполнитель
 проекта _____
 (Фамилия, И. О.)

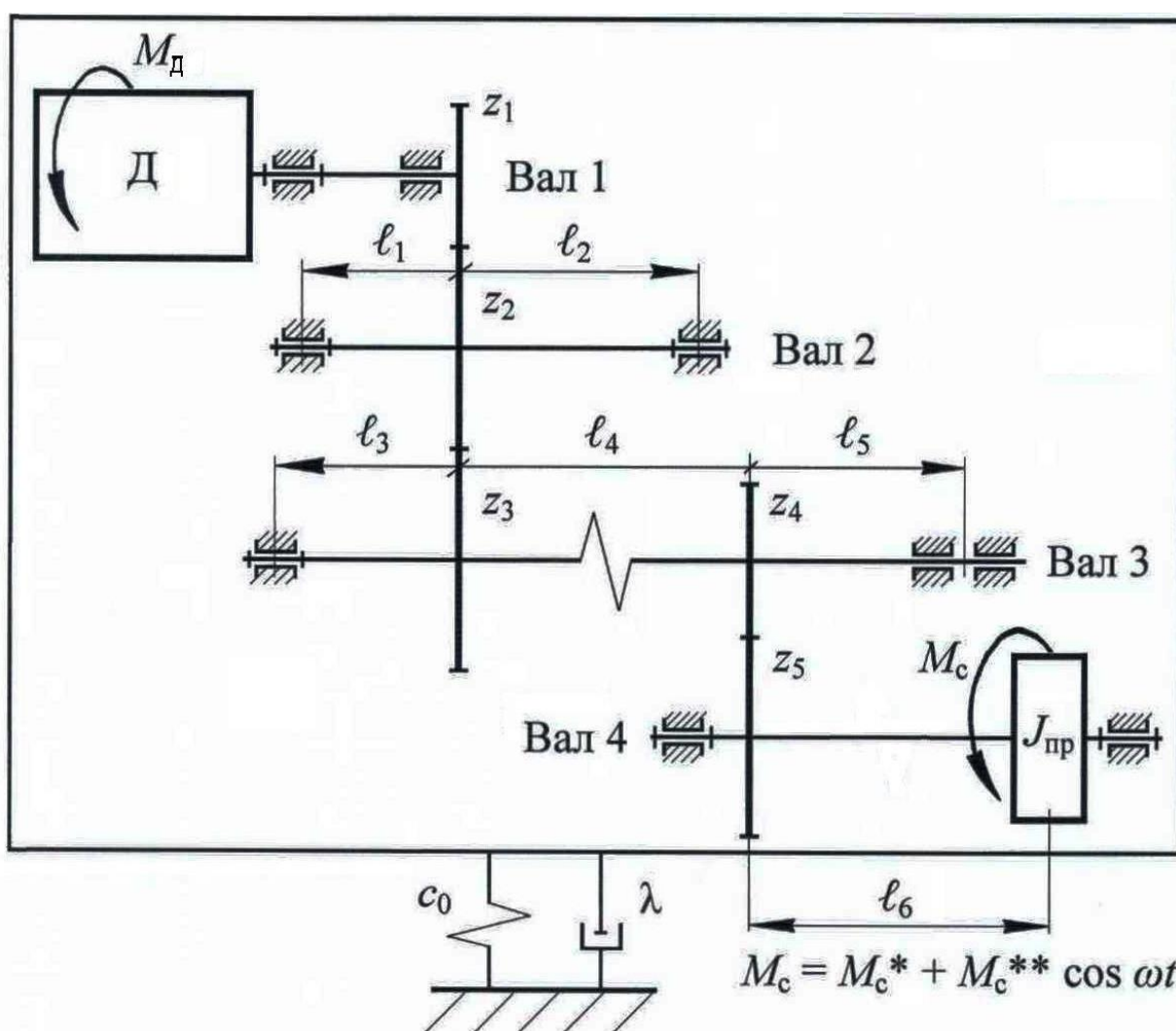
Руководитель
 проекта (работы) _____

Группа _____

Дата выдачи задания _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____
 (Подпись и шифр студента)

ЗАДАНИЕ 1



Т а б л и ц а Б.1.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 260, 380 | 0,55 | 0,02 | 0,002 | 500 | 40 |

Продолжение прил. Б

Т а б л и ц а Б.1.2. **Варианты исходных данных для задания 1**

| Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетки →) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| m_0 , мм | 3 | 2,5 | 2 | 4,5 | 3,5 | 4 | 2 | 3,5 | 2 | 4 | |
| z_1 | 15 | 22 | 24 | 16 | 20 | 18 | 15 | 14 | 15 | 17 | |
| z_2 | 18 | 16 | 28 | 20 | 30 | 40 | 30 | 28 | 32 | 22 | |
| z_3 | 30 | 48 | 48 | 36 | 24 | 32 | 25 | 20 | 18 | 34 | |
| z_4 | 25 | 16 | 18 | 24 | 40 | 60 | 60 | 35 | 40 | 28 | |
| z_5 | 45 | 32 | 27 | 36 | 50 | 65 | 65 | 50 | 55 | 35 | |
| m_1 | кг | 2,2 | 2,8 | 3 | 2,3 | 2,2 | 2 | 1,8 | 2,4 | 3 | 2,3 |
| m_2 | | 2,4 | 2,3 | 3,4 | 2,6 | 3 | 3,2 | 3,6 | 4,8 | 5 | 2,5 |
| m_3 | | 4 | 5,8 | 6 | 5 | 4 | 5,8 | 6 | 5 | 4 | 4 |
| m_4 | | 3 | 2,3 | 2,4 | 3 | 3 | 3,6 | 3,5 | 4 | 2,8 | 3 |
| m_5 | | 5,5 | 4,5 | 3,2 | 5,2 | 5,6 | 4,8 | 3,8 | 5,6 | 4,5 | 6 |
| d_1 | мм | 25 | 20 | 22 | 24 | 20 | 22 | 24 | 25 | 30 | 24 |
| d_2 | | 30 | 25 | 32 | 35 | 30 | 28 | 30 | 32 | 40 | 30 |
| d_3 | | 40 | 32 | 38 | 40 | 40 | 35 | 42 | 45 | 50 | 42 |
| d_4 | | 35 | 38 | 30 | 38 | 45 | 40 | 44 | 50 | 52 | 36 |
| l_1 | | 250 | 200 | 300 | 320 | 150 | 200 | 250 | 180 | 200 | 240 |
| l_2 | | 500 | 450 | 500 | 400 | 200 | 250 | 300 | 250 | 300 | 480 |
| l_3 | | 200 | 250 | 250 | 450 | 200 | 250 | 300 | 350 | 250 | 200 |
| l_4 | | 600 | 700 | 650 | 800 | 500 | 450 | 400 | 440 | 500 | 550 |
| l_5 | | 400 | 430 | 300 | 320 | 400 | 300 | 350 | 320 | 300 | 475 |
| l_6 | | 520 | 600 | 550 | 650 | 400 | 420 | 480 | 420 | 350 | 540 |
| $J_{пр}$, кгм ² | 0,28 | 0,52 | 0,2 | 0,25 | 0,48 | 0,5 | 0,35 | 0,4 | 0,52 | 0,36 | |
| M_c^* | Нм | 80 | 60 | 120 | 90 | 60 | 75 | 80 | 95 | 100 | 75 |
| M_c^{**} | | 20 | 12 | 25 | 15 | 30 | 32 | 30 | 45 | 20 | 15 |
| λ | 0,06 | 0,12 | 0,16 | 0,22 | 0,25 | 0,08 | 0,15 | 0,14 | 0,1 | 0,09 | |

Министерство образования и науки Российской Федерации
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
 «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
 ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»
 Кафедра «Машиноведение»

Исполнитель
 проекта _____
 (Фамилия, И. О.)

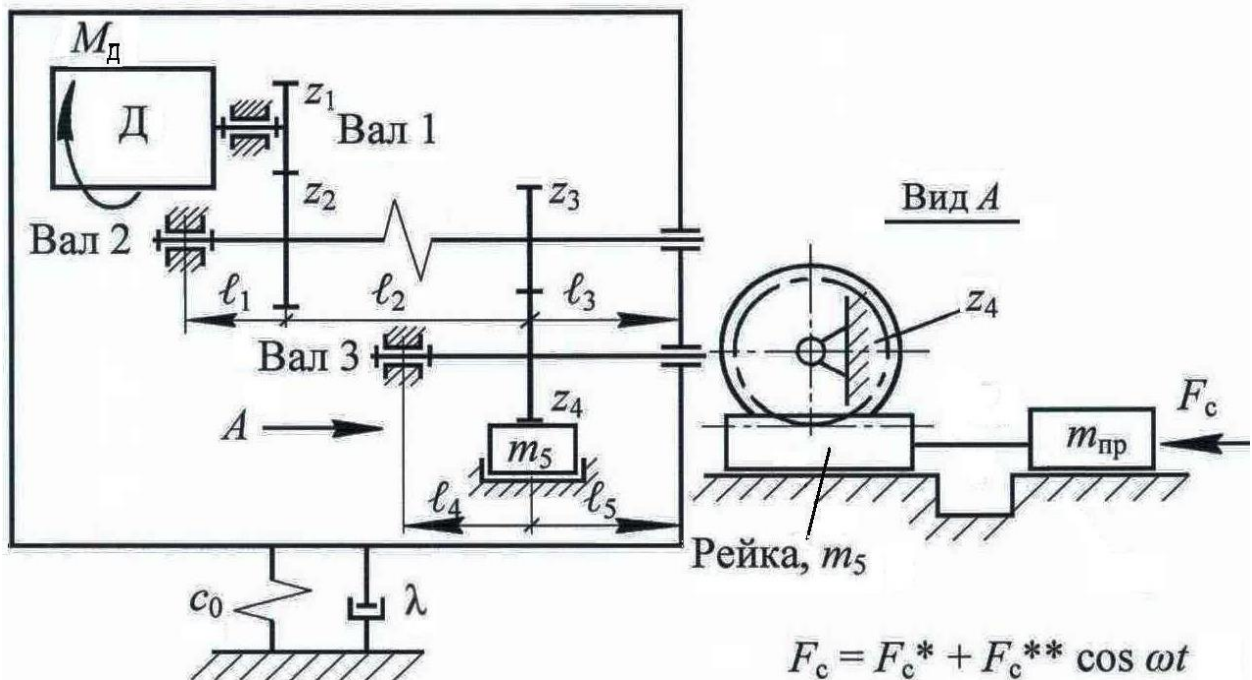
Руководитель
 проекта (работы) _____

Группа _____

Дата выдачи задания _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____
 (Подпись и шифр студента)

ЗАДАНИЕ 2



Т а б л и ц а Б.2.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 270, 400 | 0,6 | 0,022 | 0,0022 | 550 | 39 |

Т а б л и ц а Б.2.2. Варианты исходных данных для задания 2

| Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетки →) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| m_0 , мм | 2 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 6 | 2 | 3 | 4 | |
| z_1 | 32 | 34 | 36 | 38 | 42 | 40 | 36 | 35 | 37 | 34 | |
| z_2 | 40 | 42 | 40 | 44 | 51 | 47 | 42 | 43 | 43 | 42 | |
| z_3 | 35 | 36 | 35 | 38 | 40 | 37 | 37 | 28 | 27 | 36 | |
| z_4 | 38 | 40 | 42 | 42 | 44 | 43 | 44 | 35 | 36 | 40 | |
| m_1 | кг | 0,75 | 0,85 | 1,5 | 2,4 | 2,6 | 2,5 | 1,8 | 1,2 | 1,9 | 2,4 |
| m_2 | | 1,2 | 1,3 | 1,8 | 3,2 | 3,8 | 3,4 | 2,4 | 1,6 | 2,9 | 3,2 |
| m_3 | | 0,9 | 1 | 1,4 | 1,4 | 2,4 | 1,9 | 1,8 | 0,9 | 0,8 | 1,5 |
| m_4 | | 1 | 1,2 | 2 | 2,9 | 3,2 | 3,1 | 3,4 | 1,4 | 1,8 | 2,9 |
| m_5 | | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 2,4 | 2,6 | 1,4 | 2,8 | 3,2 | 1,7 |
| $m_{пр}$ | | 70 | 35 | 120 | 175 | 140 | 65 | 150 | 45 | 13 | 190 |
| d_1 | мм | 35 | 40 | 45 | 32 | 30 | 34 | 42 | 44 | 28 | 45 |
| d_2 | | 30 | 35 | 40 | 38 | 25 | 28 | 38 | 40 | 25 | 40 |
| l_1 | | 100 | 120 | 150 | 180 | 140 | 130 | 160 | 170 | 180 | 160 |
| l_2 | | 450 | 400 | 500 | 480 | 420 | 380 | 460 | 450 | 390 | 490 |
| l_3 | | 150 | 200 | 250 | 220 | 180 | 190 | 240 | 220 | 160 | 240 |
| l_4 | | 300 | 320 | 400 | 350 | 330 | 340 | 420 | 280 | 320 | 360 |
| l_5 | | 150 | 200 | 250 | 220 | 160 | 220 | 190 | 250 | 230 | 250 |
| F_c^* | Н | 70 | 72 | 70 | 70 | 35 | 40 | 60 | 50 | 65 | 60 |
| F_c^{**} | | 7 | 14 | 21 | 28 | 9 | 18 | 22 | 19 | 11 | 15 |
| λ | | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,08 | 0,07 | 0,12 | 0,06 | 0,09 | 0,08 |

Министерство образования и науки Российской Федерации
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
 «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
 ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»
 Кафедра «Машиноведение»

Исполнитель
 проекта _____
 (Фамилия, И. О.)

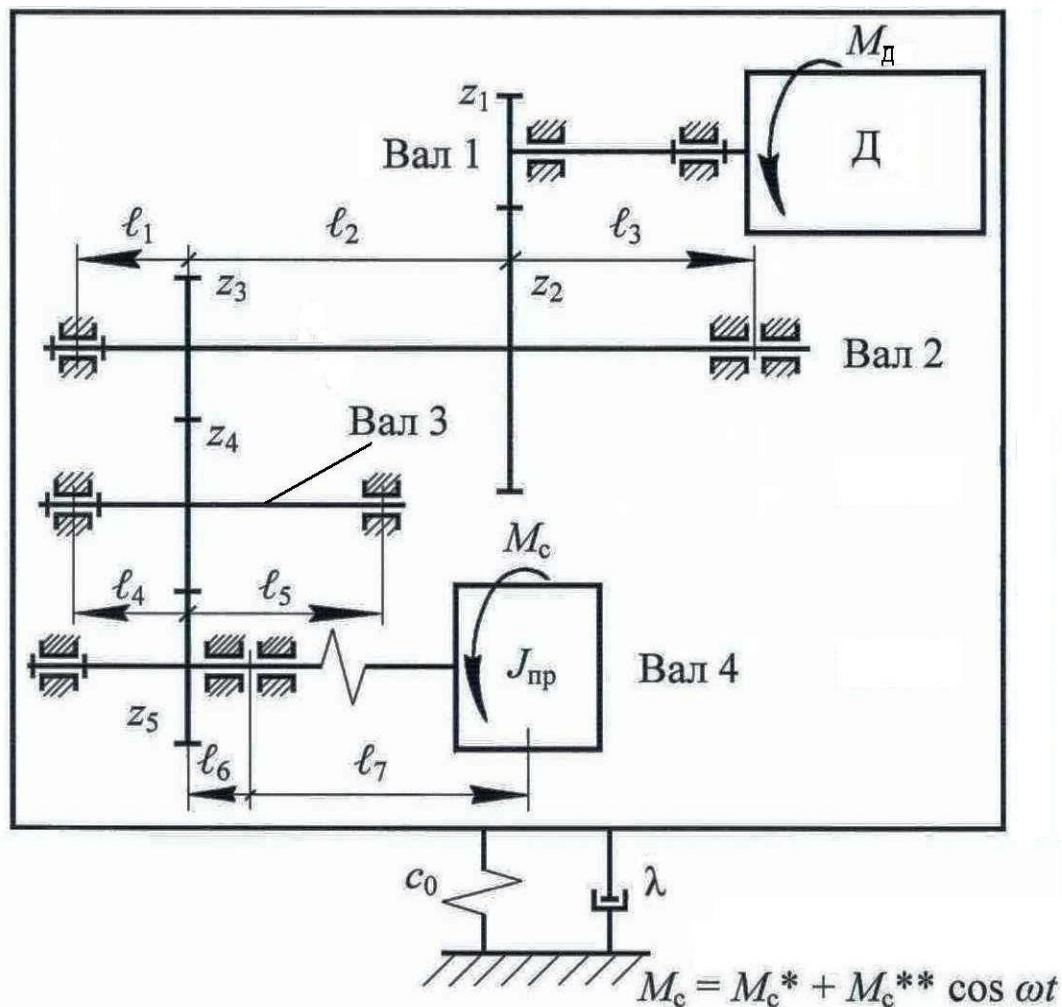
Руководитель
 проекта (работы) _____

Группа _____

Дата выдачи задания _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____
 (Подпись и шифр студента)

ЗАДАНИЕ 3



Т а б л и ц а Б.3.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 280, 410 | 0,65 | 0,025 | 0,0025 | 600 | 38 |

Т а б л и ц а Б.3.2. **Варианты исходных данных для задания 3**

| Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетки →) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| m_0 , мм | 3 | 4 | 1,5 | 4 | 5 | 3 | 4 | 5 | 2,5 | 2 | |
| z_1 | 32 | 40 | 24 | 20 | 33 | 41 | 25 | 21 | 22 | 20 | |
| z_2 | 48 | 52 | 48 | 40 | 49 | 53 | 49 | 41 | 42 | 40 | |
| z_3 | 30 | 38 | 42 | 30 | 31 | 39 | 43 | 31 | 32 | 30 | |
| z_4 | 30 | 40 | 40 | 35 | 31 | 41 | 41 | 36 | 37 | 35 | |
| z_5 | 45 | 42 | 53 | 40 | 46 | 43 | 54 | 41 | 42 | 40 | |
| m_1 | кг | 2,2 | 1,6 | 0,8 | 1,2 | 2,3 | 1,7 | 0,9 | 1,3 | 1,4 | 1,7 |
| m_2 | | 3,4 | 2,4 | 1,6 | 2,4 | 3,5 | 2,5 | 1,7 | 2,5 | 2,6 | 2,5 |
| m_3 | | 2 | 1,5 | 1,3 | 1,8 | 2,1 | 1,5 | 1,4 | 1,9 | 2 | 1,5 |
| m_4 | | 2 | 1,8 | 1,2 | 2,7 | 2,1 | 1,8 | 1,3 | 2,8 | 2,9 | 1,8 |
| m_5 | | 3 | 2 | 2 | 2,4 | 3,1 | 2 | 2,1 | 2,5 | 2,6 | 2 |
| d_2 | мм | 32 | 35 | 30 | 40 | 32 | 36 | 42 | 34 | 36 | 35 |
| d_3 | | 30 | 28 | 26 | 30 | 30 | 28 | 30 | 32 | 28 | 40 |
| d_4 | | 30 | 32 | 28 | 40 | 32 | 30 | 40 | 38 | 34 | 42 |
| l_1 | | 250 | 300 | 280 | 300 | 260 | 310 | 290 | 310 | 270 | 280 |
| l_2 | | 550 | 600 | 620 | 650 | 560 | 610 | 630 | 650 | 570 | 640 |
| l_3 | | 500 | 550 | 450 | 400 | 510 | 560 | 460 | 400 | 510 | 450 |
| l_4 | | 250 | 300 | 280 | 300 | 260 | 310 | 290 | 310 | 280 | 270 |
| l_5 | | 400 | 450 | 400 | 500 | 410 | 450 | 410 | 510 | 430 | 400 |
| l_6 | | 150 | 120 | 100 | 130 | 140 | 100 | 120 | 140 | 110 | 150 |
| l_7 | | 450 | 500 | 520 | 600 | 460 | 650 | 530 | 610 | 470 | 530 |
| $J_{пр}$, кгм ² | 0,03 | 0,03 | 0,04 | 0,04 | 0,03 | 0,04 | 0,04 | 0,05 | 0,03 | 0,02 | |
| M_c^* | Нм | 72 | 76 | 80 | 84 | 73 | 74 | 81 | 85 | 74 | 64 |
| M_c^{**} | | 14 | 16 | 18 | 20 | 15 | 16 | 19 | 22 | 23 | 23 |
| λ | 0,1 | 0,11 | 0,12 | 0,13 | 0,08 | 0,09 | 0,1 | 0,07 | 0,14 | 0,13 | |

Министерство образования и науки Российской Федерации
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
 «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
 ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»
 Кафедра «Машиноведение»

Исполнитель
 проекта _____
 (Фамилия, И. О.)

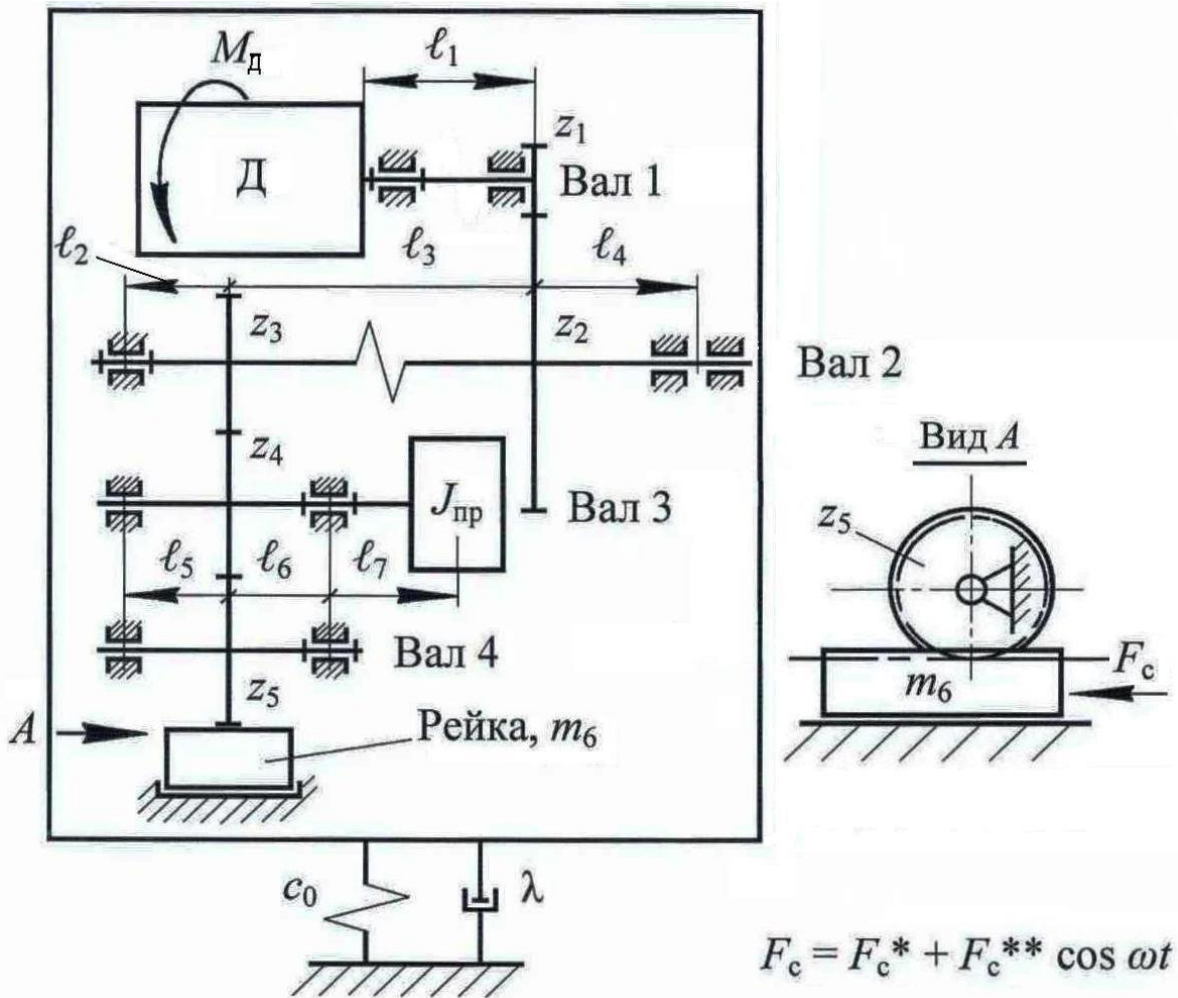
Руководитель
 проекта (работы) _____

Группа _____

Дата выдачи задания _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____
 (Подпись и шифр студента)

ЗАДАНИЕ 4



Т а б л и ц а Б.4.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 290, 420 | 0,7 | 0,03 | 0,003 | 650 | 37 |

Т а б л и ц а Б.4.2. Варианты исходных данных для задания 4

| Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетки →) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| m_0 , мм | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 3,5 | 4 | 5 | 2,5 | |
| z_1 | 30 | 28 | 26 | 25 | 32 | 30 | 28 | 27 | 28 | 30 | |
| z_2 | 40 | 38 | 36 | 30 | 42 | 40 | 38 | 32 | 33 | 40 | |
| z_3 | 32 | 24 | 22 | 24 | 34 | 26 | 24 | 26 | 27 | 26 | |
| z_4 | 32 | 24 | 22 | 24 | 34 | 26 | 24 | 26 | 27 | 26 | |
| z_5 | 44 | 30 | 40 | 36 | 46 | 32 | 42 | 38 | 39 | 32 | |
| m_1 | кг | 1,2 | 0,8 | 1,1 | 1,3 | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 0,9 | 1 | 1,1 |
| m_2 | | 2 | 1,4 | 1,2 | 1,8 | 2,1 | 1,5 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,2 |
| m_3 | | 1,4 | 0,6 | 0,6 | 1 | 1,5 | 0,7 | 0,6 | 0,7 | 1 | 0,6 |
| m_4 | | 1,4 | 0,6 | 0,6 | 1 | 1,5 | 0,7 | 0,6 | 0,8 | 0,9 | 0,6 |
| m_5 | | 2,5 | 1,2 | 1,5 | 2,2 | 2,6 | 1,3 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,5 |
| m_6 | | 20 | 25 | 18 | 28 | 23 | 27 | 29 | 25 | 27 | 18 |
| d_1 | мм | 25 | 28 | 30 | 32 | 26 | 30 | 32 | 34 | 35 | 30 |
| d_2 | | 40 | 38 | 36 | 40 | 42 | 36 | 38 | 42 | 44 | 36 |
| d_3 | | 32 | 32 | 34 | 36 | 35 | 32 | 36 | 38 | 36 | 32 |
| d_4 | | 36 | 34 | 35 | 38 | 34 | 30 | 38 | 40 | 38 | 34 |
| l_1 | | 550 | 500 | 450 | 600 | 560 | 610 | 460 | 610 | 620 | 440 |
| l_2 | | 200 | 200 | 250 | 350 | 210 | 210 | 250 | 360 | 360 | 260 |
| l_3 | | 600 | 650 | 650 | 700 | 610 | 660 | 650 | 710 | 710 | 630 |
| l_4 | | 500 | 450 | 550 | 550 | 510 | 460 | 560 | 560 | 560 | 550 |
| l_5 | | 200 | 200 | 250 | 350 | 210 | 210 | 250 | 360 | 360 | 270 |
| l_6 | | 400 | 450 | 500 | 550 | 410 | 460 | 500 | 560 | 570 | 520 |
| l_7 | 150 | 250 | 200 | 250 | 160 | 260 | 200 | 260 | 270 | 210 | |
| $J_{пр}$, кгм ² | 0,03 | 0,04 | 0,045 | 0,035 | 0,031 | 0,042 | 0,046 | 0,036 | 0,037 | 0,048 | |
| F_c^* | Н | 40 | 45 | 50 | 55 | 42 | 47 | 57 | 48 | 49 | 52 |
| F_c^{**} | | 6 | 8 | 4 | 5 | 6,5 | 8 | 6 | 7 | 9 | 8 |
| λ | 0,11 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,08 | 0,09 | 0,1 | 0,11 | 0,14 | 0,13 | |

Министерство образования и науки Российской Федерации
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
 «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
 ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»
 Кафедра «Машиноведение»

Исполнитель
 проекта _____
 (Фамилия, И. О.)

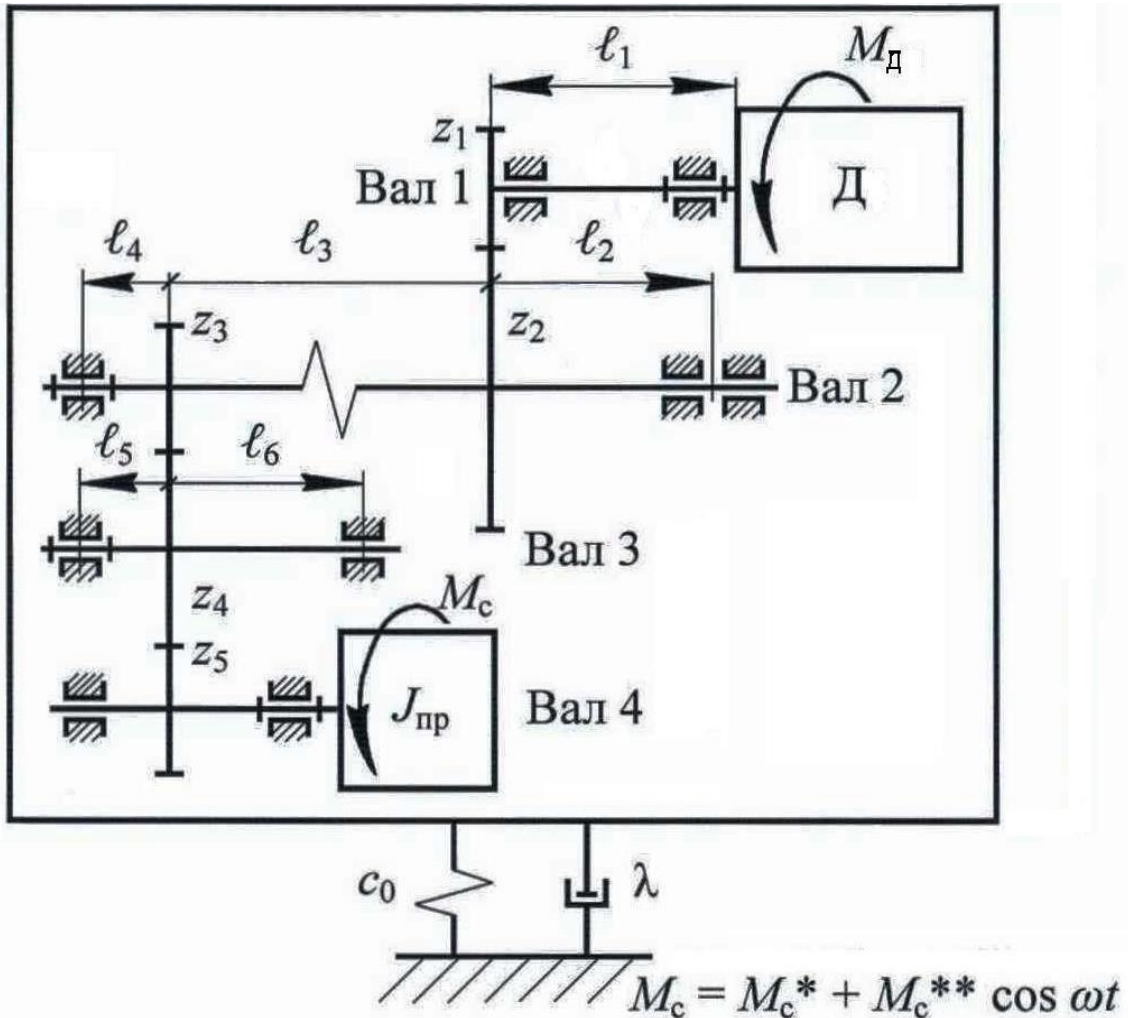
Руководитель
 проекта (работы) _____

Группа _____

Дата выдачи задания _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____
 (Подпись и шифр студента)

ЗАДАНИЕ 5



Т а б л и ц а Б.5.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 300, 440 | 0,75 | 0,032 | 0,0032 | 700 | 36 |

Т а б л и ц а Б.5.2. Варианты исходных данных для задания 5

| Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетки →) | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| m_0 , мм | | 3 | 3,5 | 4 | 5 | 6 | 4,5 | 5 | 3,5 | 2 | 4,5 |
| z_1 | | 40 | 28 | 42 | 36 | 42 | 30 | 44 | 38 | 44 | 44 |
| z_2 | | 50 | 36 | 52 | 48 | 52 | 38 | 54 | 50 | 54 | 54 |
| z_3 | | 36 | 25 | 35 | 28 | 38 | 27 | 37 | 30 | 40 | 37 |
| z_4 | | 40 | 40 | 30 | 44 | 42 | 42 | 32 | 46 | 44 | 32 |
| z_5 | | 49 | 35 | 40 | 42 | 51 | 37 | 42 | 44 | 53 | 42 |
| m_1 | кг | 0,5 | 0,6 | 1,2 | 2 | 0,6 | 0,6 | 1,3 | 2 | 2,6 | 2 |
| m_2 | | 0,8 | 0,9 | 2,2 | 3 | 0,7 | 0,8 | 2,3 | 3,1 | 3,1 | 3 |
| m_3 | | 0,4 | 0,5 | 1,8 | 1,6 | 0,5 | 0,4 | 1,9 | 1,6 | 1,8 | 1,6 |
| m_4 | | 0,5 | 0,62 | 1,1 | 2,8 | 0,5 | 0,62 | 1,1 | 2,8 | 2,9 | 2,8 |
| m_5 | | 0,8 | 0,7 | 1,1 | 2,6 | 0,79 | 0,72 | 1,1 | 2,7 | 2,7 | 2,6 |
| d_1 | мм | 18 | 20 | 25 | 17 | 20 | 22 | 25 | 34 | 32 | 25 |
| d_2 | | 24 | 25 | 30 | 20 | 26 | 28 | 30 | 36 | 35 | 30 |
| d_3 | | 28 | 30 | 35 | 25 | 30 | 30 | 36 | 38 | 36 | 36 |
| l_1 | | 240 | 210 | 200 | 280 | 250 | 220 | 250 | 290 | 300 | 230 |
| l_2 | | 280 | 250 | 300 | 320 | 300 | 250 | 310 | 330 | 340 | 300 |
| l_3 | | 400 | 450 | 500 | 550 | 420 | 450 | 510 | 560 | 570 | 440 |
| l_4 | | 310 | 240 | 250 | 260 | 330 | 250 | 270 | 280 | 290 | 350 |
| l_5 | | 280 | 250 | 300 | 320 | 300 | 250 | 310 | 340 | 350 | 310 |
| l_6 | 350 | 400 | 450 | 500 | 350 | 400 | 440 | 510 | 520 | 360 | |
| $J_{пр}$, кгм ² | | 0,044 | 0,048 | 0,052 | 0,056 | 0,045 | 0,049 | 0,053 | 0,057 | 0,06 | 0,045 |
| M_c^* | Нм | 60 | 50 | 80 | 90 | 70 | 60 | 85 | 91 | 98 | 75 |
| M_c^{**} | | 15 | 20 | 25 | 30 | 17 | 21 | 26 | 32 | 34 | 14 |
| λ | | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,05 | 0,09 | 0,1 | 0,06 | 0,07 | 0,05 |

Министерство образования и науки Российской Федерации
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
 «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
 ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»
 Кафедра «Машиноведение»

Исполнитель
 проекта _____
 (Фамилия, И. О.)

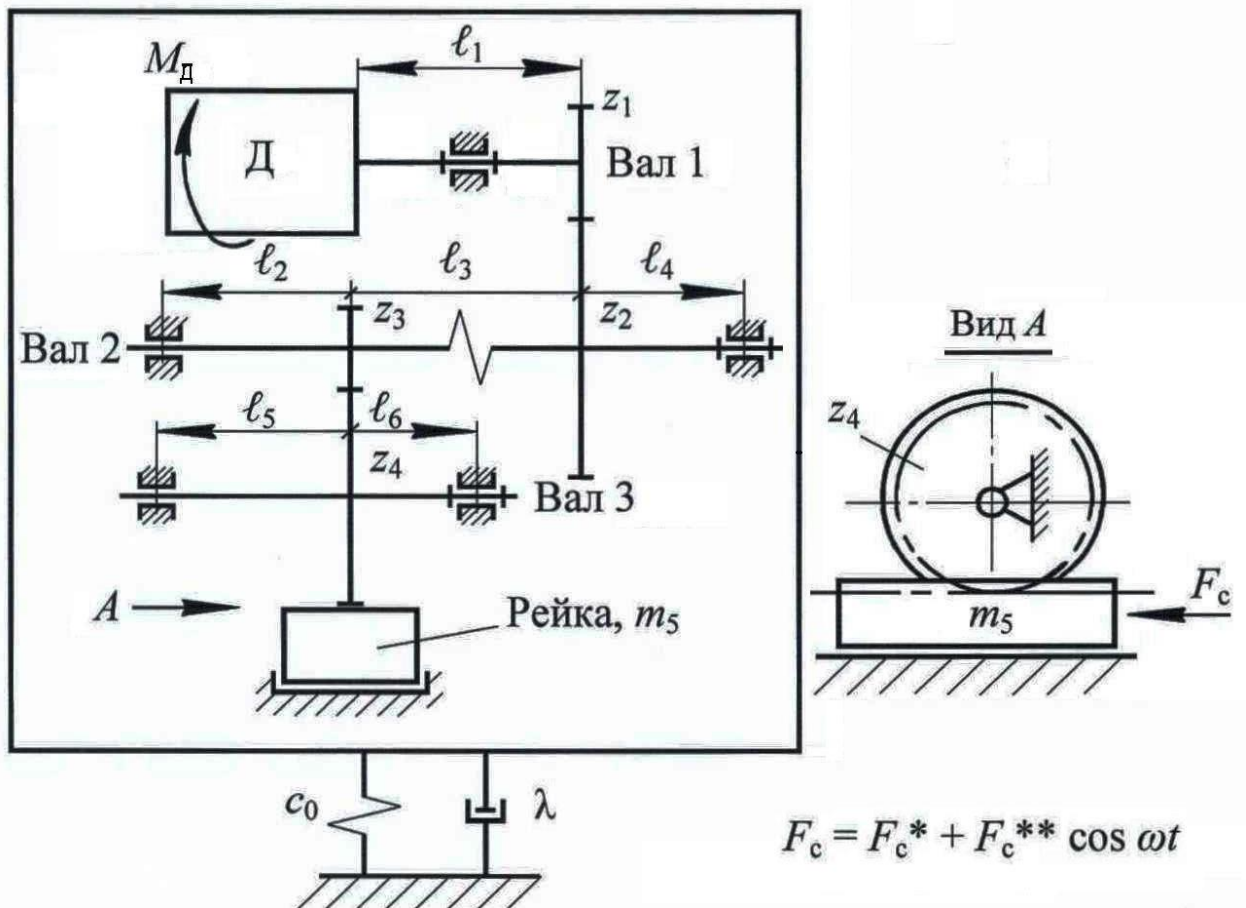
Руководитель
 проекта (работы) _____

Группа _____

Дата выдачи задания _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____
 (Подпись и шифр студента)

ЗАДАНИЕ 6



Т а б л и ц а Б.6.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 310, 450 | 0,75 | 0,034 | 0,0034 | 750 | 35 |

Т а б л и ц а Б.6.2. **Варианты исходных данных для задания 6**

| Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетки →) | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| m_0 , мм | | 3 | 2 | 4 | 4,5 | 2,5 | 3 | 3,5 | 5 | 4 | 2 |
| z_1 | | 24 | 26 | 30 | 32 | 25 | 27 | 31 | 33 | 26 | 33 |
| z_2 | | 48 | 39 | 45 | 46 | 49 | 40 | 46 | 47 | 50 | 47 |
| z_3 | | 20 | 22 | 25 | 24 | 21 | 23 | 26 | 25 | 22 | 25 |
| z_4 | | 45 | 50 | 44 | 48 | 46 | 51 | 45 | 49 | 50 | 49 |
| m_1 | кг | 2,1 | 1,8 | 1,2 | 1,6 | 2,1 | 1,8 | 1,4 | 1,7 | 2,2 | 1,8 |
| m_2 | | 4,2 | 2,6 | 2,6 | 2,4 | 4,2 | 2,7 | 2,8 | 2,3 | 2,8 | 2,1 |
| m_3 | | 1,8 | 1,4 | 0,9 | 1,2 | 1,9 | 1,6 | 0,9 | 1,4 | 1,6 | 1,5 |
| m_4 | | 2,6 | 3 | 3,2 | 2,4 | 2,7 | 3,2 | 3,3 | 2,6 | 2,8 | 2,2 |
| m_5 | | 0,38 | 0,46 | 0,54 | 0,62 | 0,39 | 0,47 | 0,55 | 0,63 | 0,64 | 0,6 |
| d_1 | мм | 18 | 20 | 24 | 16 | 20 | 22 | 18 | 36 | 20 | 18 |
| d_2 | | 20 | 25 | 28 | 24 | 22 | 28 | 26 | 36 | 24 | 26 |
| d_3 | | 25 | 30 | 35 | 30 | 26 | 36 | 38 | 35 | 28 | 30 |
| l_1 | | 250 | 320 | 340 | 360 | 270 | 330 | 360 | 370 | 260 | 330 |
| l_2 | | 200 | 220 | 280 | 320 | 210 | 230 | 300 | 320 | 210 | 260 |
| l_3 | | 450 | 500 | 520 | 600 | 450 | 500 | 540 | 600 | 450 | 530 |
| l_4 | | 400 | 350 | 320 | 300 | 410 | 350 | 320 | 300 | 410 | 340 |
| l_5 | | 200 | 250 | 280 | 320 | 210 | 250 | 300 | 320 | 220 | 270 |
| l_6 | | 400 | 450 | 500 | 500 | 410 | 450 | 520 | 500 | 420 | 520 |
| F_c^* | Н | 250 | 300 | 350 | 400 | 270 | 320 | 350 | 400 | 280 | 350 |
| F_c^{**} | | 60 | 70 | 80 | 90 | 68 | 75 | 81 | 95 | 68 | 90 |
| λ | | 0,07 | 0,05 | 0,04 | 0,06 | 0,09 | 0,08 | 0,03 | 0,11 | 0,12 | 0,07 |

Министерство образования и науки Российской Федерации
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
 «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
 ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»
 Кафедра «Машиноведение»

Исполнитель
 проекта _____
 (Фамилия, И. О.)

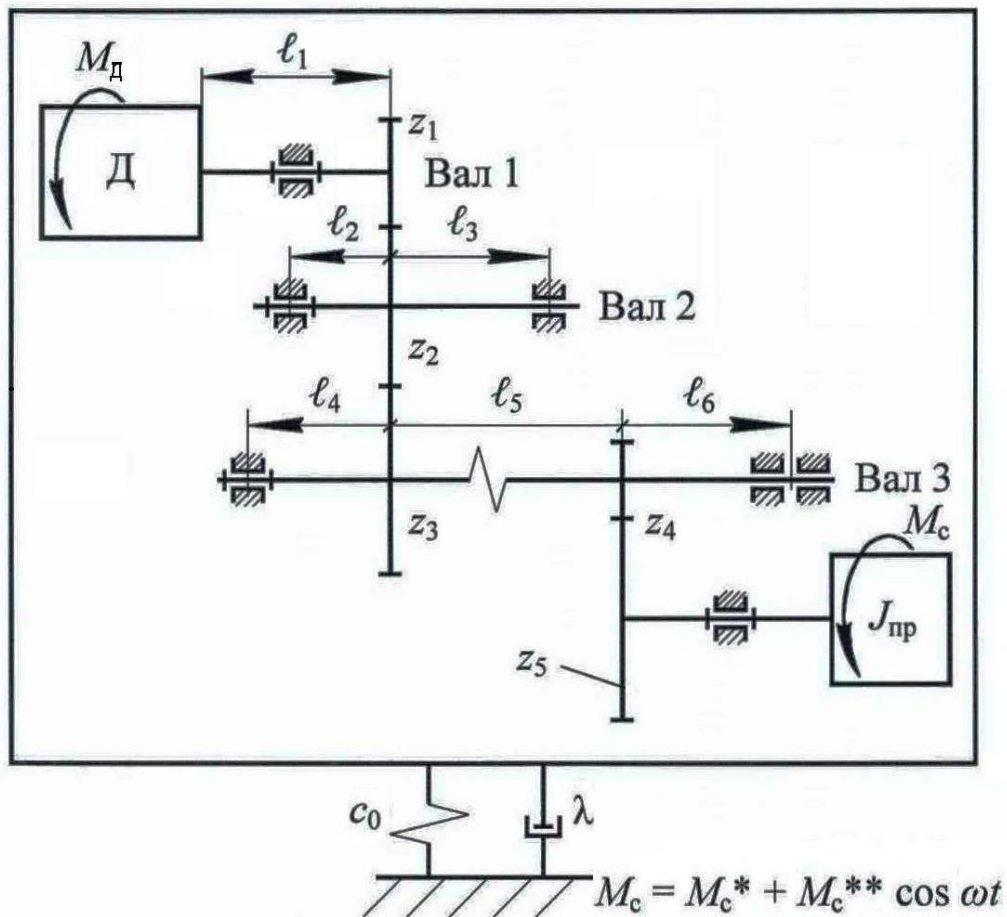
Руководитель
 проекта (работы) _____

Группа _____

Дата выдачи задания _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____
 (Подпись и шифр студента)

ЗАДАНИЕ 7



Т а б л и ц а Б.7.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 320, 460 | 0,8 | 0,036 | 0,0036 | 800 | 34 |

Т а б л и ц а Б.7.2. **Варианты исходных данных для задания 7**

| Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетки →) | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| m_0 , мм | | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2,5 | 4 | 5 |
| z_1 | | 15 | 18 | 20 | 22 | 15 | 20 | 22 | 14 | 15 | 22 |
| z_2 | | 35 | 40 | 45 | 50 | 30 | 40 | 32 | 28 | 30 | 32 |
| z_3 | | 37 | 40 | 45 | 50 | 24 | 32 | 24 | 20 | 18 | 24 |
| z_4 | | 18 | 20 | 22 | 24 | 40 | 60 | 60 | 32 | 40 | 60 |
| z_5 | | 60 | 55 | 50 | 62 | 18 | 20 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| m_1 | кг | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 3,5 |
| m_2 | | 3 | 3,5 | 4 | 7 | 3 | 3,8 | 4 | 7,5 | 7 | 4 |
| m_3 | | 4 | 4,5 | 5 | 6,8 | 4 | 4,5 | 5,5 | 5 | 6,8 | 5 |
| m_4 | | 5 | 5,5 | 3,8 | 4,2 | 5 | 5,5 | 3,8 | 4,2 | 4,5 | 3,6 |
| m_5 | | 6 | 6,5 | 6 | 8 | 6,2 | 6,5 | 6 | 8 | 7,5 | 6 |
| d_1 | мм | 15 | 20 | 25 | 35 | 20 | 15 | 25 | 28 | 30 | 25 |
| d_2 | | 20 | 25 | 30 | 40 | 20 | 25 | 35 | 40 | 42 | 32 |
| d_3 | | 25 | 30 | 35 | 45 | 25 | 30 | 35 | 45 | 40 | 36 |
| l_1 | | 180 | 200 | 220 | 280 | 180 | 200 | 250 | 280 | 300 | 220 |
| l_2 | | 220 | 180 | 260 | 320 | 200 | 150 | 250 | 300 | 320 | 170 |
| l_3 | | 300 | 220 | 240 | 180 | 300 | 150 | 250 | 180 | 200 | 240 |
| l_4 | | 200 | 180 | 230 | 320 | 200 | 180 | 230 | 320 | 350 | 180 |
| l_5 | | 320 | 350 | 220 | 420 | 320 | 350 | 250 | 420 | 320 | 370 |
| l_6 | 200 | 230 | 180 | 250 | 200 | 230 | 180 | 250 | 360 | 250 | |
| $J_{пр} \cdot 10^2$, кгм ² | | 15 | 35 | 55 | 75 | 18 | 20 | 40 | 35 | 60 | 38 |
| M_c^* | Нм | 20 | 25 | 30 | 35 | 20 | 25 | 35 | 30 | 20 | 44 |
| M_c^{**} | | 10 | 15 | 12 | 20 | 10 | 15 | 20 | 15 | 14 | 11 |
| λ | | 0,17 | 0,13 | 0,15 | 0,19 | 0,18 | 0,14 | 0,11 | 0,21 | 0,16 | 0,13 |

Министерство образования и науки Российской Федерации
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
 «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
 ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»
 Кафедра «Машиноведение»

Исполнитель
 проекта _____
 (Фамилия, И. О.)

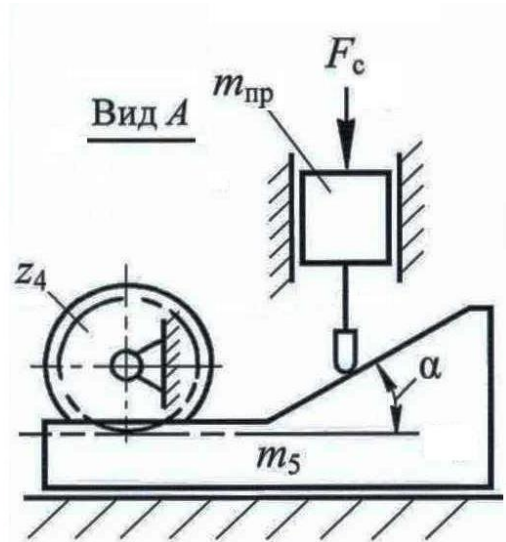
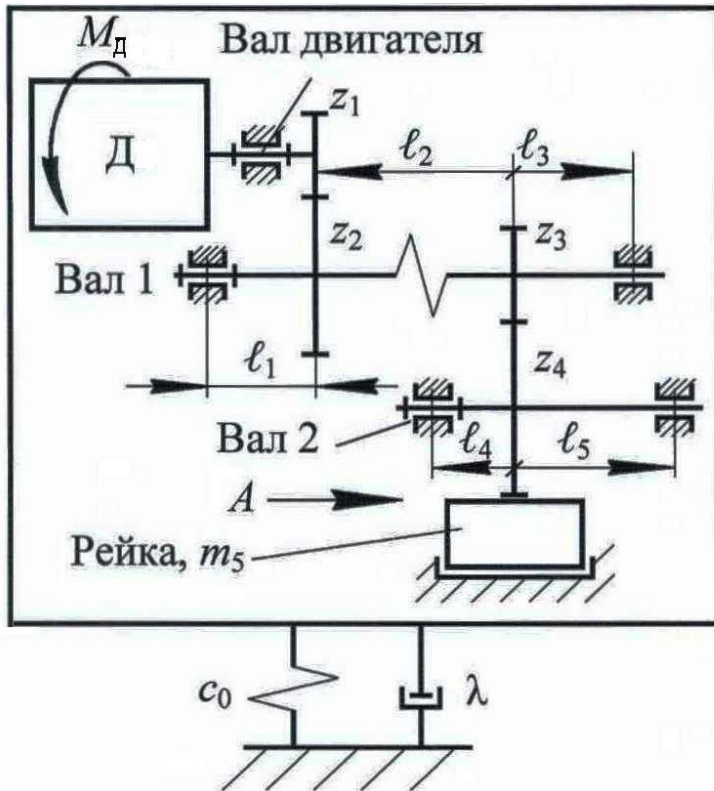
Руководитель
 проекта (работы) _____

Группа _____

Дата выдачи задания _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____
 (Подпись и шифр студента)

ЗАДАНИЕ 8



$$F_c = F_c^* + F_c^{**} \cos \omega t$$

Т а б л и ц а Б.8.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 330, 480 | 0,82 | 0,038 | 0,0038 | 850 | 33 |

Т а б л и ц а Б.8.2. **Варианты исходных данных для задания 8**

| Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетки →) | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|---------|-------|---------|
| m_0 , мм | | 3 | 4 | 5 | 6 | 4,5 | 3 | 2,5 | 2 | 1,5 | 4,5 |
| z_1 | | 20 | 22 | 24 | 26 | 23 | 21 | 22 | 19 | 25 | 23 |
| z_2 | | 30 | 32 | 34 | 38 | 35 | 33 | 36 | 37 | 31 | 35 |
| z_3 | | 15 | 18 | 25 | 35 | 16 | 19 | 23 | 27 | 24 | 16 |
| z_4 | | 45 | 25 | 40 | 55 | 40 | 27 | 32 | 42 | 50 | 40 |
| m_1 | кг | 4,2 | 3 | 1,8 | 2,6 | 3,4 | 3,7 | 1,9 | 2,1 | 2,5 | 1,8 |
| m_2 | | 6,3 | 3,8 | 2,4 | 4,5 | 5,4 | 4,8 | 3,7 | 4,7 | 5,2 | 2,4 |
| m_3 | | 3,8 | 2,4 | 1,9 | 4,2 | 2,5 | 2,8 | 3,6 | 4,2 | 4,7 | 1,9 |
| m_4 | | 8 | 3,2 | 3,4 | 6,3 | 7,2 | 6,8 | 4,9 | 4,5 | 5,4 | 3,4 |
| m_5 | | 20 | 30 | 40 | 50 | 25 | 46 | 34 | 52 | 60 | 40 |
| $m_{\text{пр}}$ | | 15 | 20 | 25 | 30 | 18 | 22 | 35 | 40 | 18 | 25 |
| d_1 | мм | 30 | 35 | 40 | 25 | 32 | 34 | 40 | 28 | 26 | 34 |
| d_2 | | 35 | 40 | 45 | 30 | 28 | 25 | 32 | 35 | 42 | 25 |
| l_1 | | 120 | 140 | 160 | 180 | 220 | 130 | 150 | 140 | 170 | 160 |
| l_2 | | 350 | 400 | 450 | 500 | 360 | 420 | 280 | 300 | 480 | 310 |
| l_3 | | 140 | 160 | 180 | 200 | 250 | 190 | 200 | 250 | 260 | 270 |
| l_4 | | 300 | 400 | 200 | 250 | 180 | 320 | 420 | 280 | 320 | 290 |
| l_5 | 400 | 500 | 300 | 300 | 380 | 480 | 340 | 350 | 700 | 360 | |
| α , град | | | 38 | 35 | 45 | 25 | 28 | 36 | 34 | 27 | 32 |
| F_c^* | Н | 10^3 | 10^3 | 10^3 | 10^3 | 15^3 | 12^3 | 8^3 | $7,5^3$ | 9^3 | $7,7^3$ |
| F_c^{**} | | 200 | 250 | 300 | 350 | 420 | 500 | 180 | 220 | 240 | 210 |
| λ | | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,1 | 0,12 | 0,09 | 0,05 | 0,13 | 0,06 |

Министерство образования и науки Российской Федерации
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
 «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
 ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»
 Кафедра «Машиноведение»

Исполнитель
 проекта _____
 (Фамилия, И. О.)

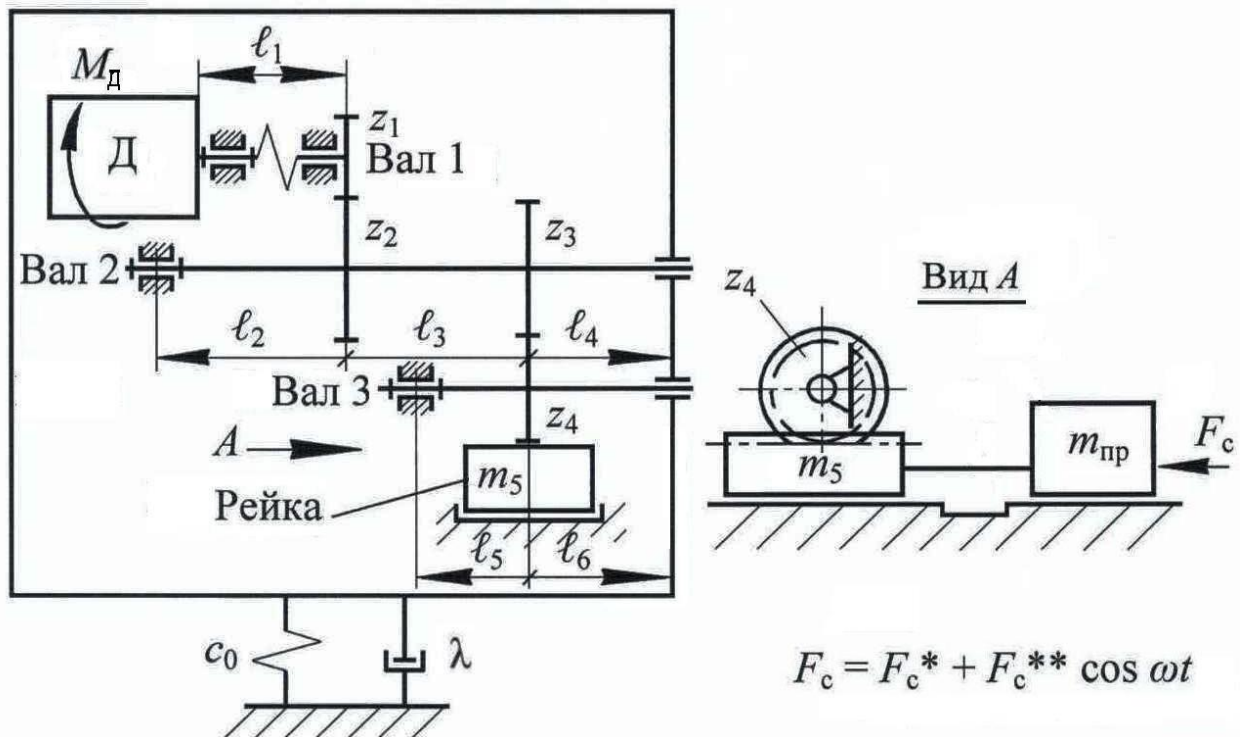
Руководитель
 проекта (работы) _____

Группа _____

Дата выдачи задания _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____
 (Подпись и шифр студента)

ЗАДАНИЕ 9



Т а б л и ц а Б.9.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 340, 500 | 0,85 | 0,04 | 0,004 | 900 | 32 |

Т а б л и ц а Б. 9.2. Варианты исходных данных для задания 9

| Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетки →) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|
| m_0 , мм | 4 | 3 | 4,5 | 5 | 5,5 | 4 | 5 | 6 | 7 | 3,5 | |
| z_1 | 40 | 38 | 36 | 34 | 32 | 30 | 32 | 34 | 36 | 34 | |
| z_2 | 44 | 42 | 40 | 38 | 40 | 44 | 46 | 44 | 42 | 44 | |
| z_3 | 36 | 34 | 32 | 30 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 34 | |
| z_4 | 42 | 40 | 38 | 36 | 34 | 32 | 34 | 38 | 42 | 38 | |
| m_1 | кг | 3,2 | 2 | 1,8 | 1,6 | 1,4 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 1,7 |
| m_2 | | 3,4 | 2,8 | 2,4 | 1,2 | 1 | 2,6 | 2,8 | 3 | 3,2 | 1,3 |
| m_3 | | 3 | 2,4 | 1,2 | 1 | 0,8 | 2,2 | 2,6 | 2,8 | 3 | 1 |
| m_4 | | 3,3 | 2,6 | 2 | 1,8 | 1,6 | 2,9 | 2,4 | 3 | 3,4 | 1,9 |
| m_5 | | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 6 | 5 | 4 | 7 |
| $m_{\text{пр}}$ | | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 90 | 80 | 70 | 90 |
| d_1 | мм | 25 | 30 | 35 | 32 | 30 | 28 | 32 | 35 | 25 | 30 |
| d_2 | | 30 | 35 | 40 | 38 | 35 | 32 | 38 | 42 | 40 | 35 |
| d_3 | | 28 | 32 | 38 | 35 | 40 | 42 | 40 | 36 | 32 | 36 |
| l_1 | | 150 | 120 | 180 | 160 | 200 | 240 | 260 | 300 | 250 | 200 |
| l_2 | | 250 | 180 | 240 | 220 | 200 | 220 | 240 | 260 | 300 | 230 |
| l_3 | | 200 | 160 | 220 | 180 | 240 | 260 | 280 | 320 | 340 | 240 |
| l_4 | | 150 | 120 | 180 | 160 | 200 | 240 | 300 | 400 | 420 | 210 |
| l_5 | | 160 | 150 | 200 | 150 | 220 | 200 | 180 | 300 | 280 | 220 |
| l_6 | 200 | 140 | 180 | 800 | 250 | 220 | 240 | 350 | 350 | 250 | |
| F_c^* | Н | 500 | 550 | 600 | 650 | 700 | 750 | 800 | 850 | 900 | 750 |
| F_c^{**} | | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 110 |
| λ | | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,15 | 0,16 | 0,17 | 0,18 | 0,19 | 0,1 | 0,11 |

Министерство образования и науки Российской Федерации
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
 «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
 ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»
 Кафедра «Машиноведение»

Исполнитель
 проекта _____
 (Фамилия, И. О.)

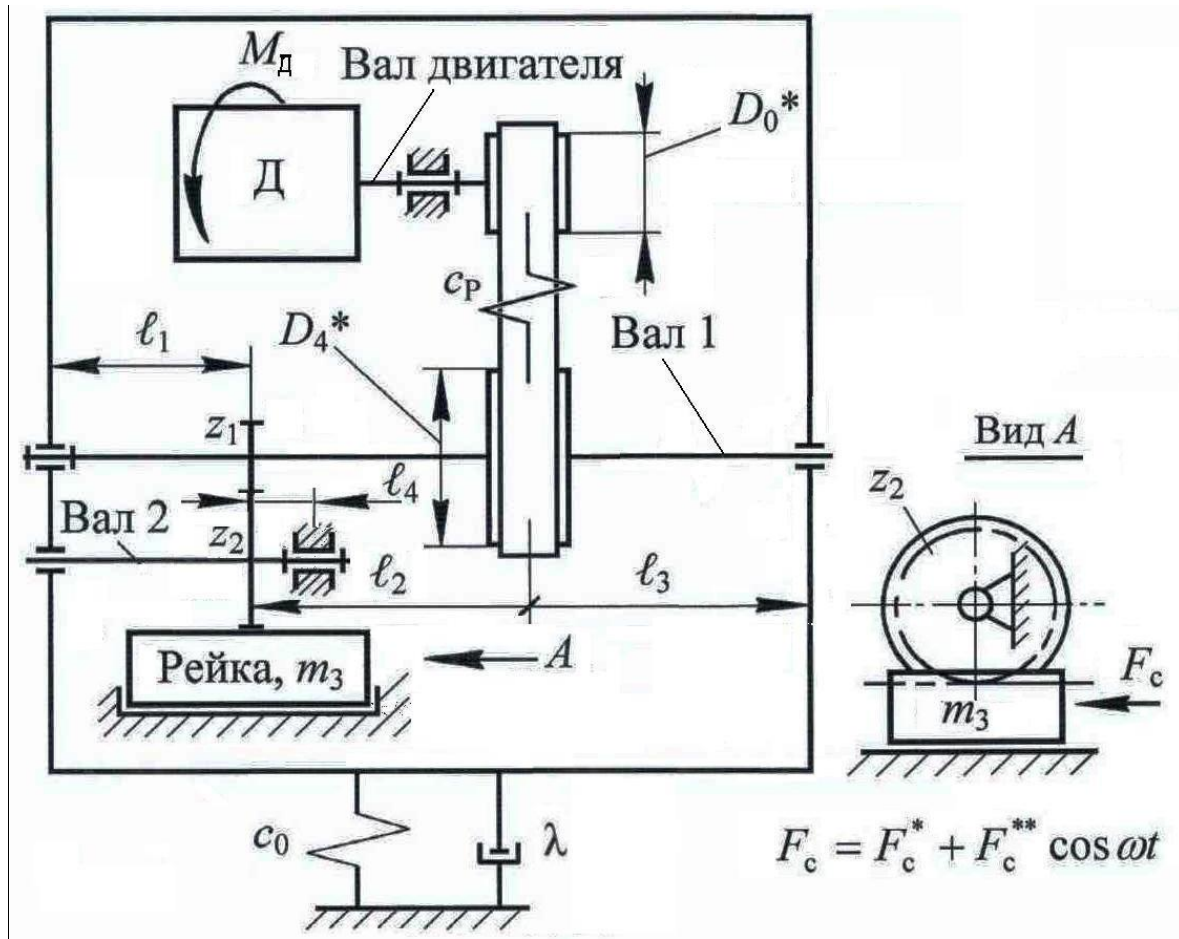
Руководитель
 проекта (работы) _____

Группа _____

Дата выдачи задания _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____
 (Подпись и шифр студента)

ЗАДАНИЕ 10



Т а б л и ц а Б.10.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 250, 370 | 0,55 | 0,02 | 0,0015 | 450 | 40 |

Т а б л и ц а Б.10.2. Варианты исходных данных для задания 10

| Исходные данные (предпоследняя цифра номера зачетки →) | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| m_0 , мм | | 4,5 | 5 | 6 | 3 | 4 | 4,5 | 4 | 5 | 3,5 | 2,5 |
| z_1 | | 32 | 34 | 38 | 40 | 42 | 36 | 30 | 27 | 21 | 30 |
| z_2 | | 54 | 62 | 48 | 60 | 56 | 58 | 52 | 51 | 37 | 52 |
| m_0^* | кг | 1,8 | 2,3 | 2,1 | 1,9 | 1,7 | 1,7 | 1,5 | 1,9 | 2,2 | 1,9 |
| m_1 | | 2,8 | 2,9 | 2,7 | 3,4 | 3,8 | 3,3 | 2,7 | 2,9 | 2,9 | 3,4 |
| m_2 | | 4,3 | 5,6 | 4,1 | 5,2 | 4,7 | 5,2 | 4,6 | 3,8 | 4,8 | 5,2 |
| m_3 | | 10,5 | 12,6 | 15 | 18 | 14,5 | 11,6 | 13,5 | 13 | 15 | 22 |
| m_4^* | | 2,4 | 4,2 | 3,2 | 3,6 | 3 | 3,3 | 2,7 | 2,6 | 3,9 | 3,6 |
| D_0^* | мм | 80 | 90 | 85 | 95 | 75 | 70 | 65 | 68 | 90 | 95 |
| D_4^* | | 140 | 160 | 120 | 170 | 130 | 150 | 180 | 150 | 210 | 175 |
| d_1 | | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 35 | 34 | 34 | 36 |
| d_2 | | 35 | 38 | 36 | 38 | 40 | 42 | 40 | 38 | 40 | 38 |
| d_3 | | 36 | 39 | 37 | 40 | 42 | 44 | 42 | 40 | 42 | 40 |
| ℓ_1 | | 200 | 220 | 180 | 240 | 250 | 280 | 260 | 180 | 380 | 210 |
| ℓ_2 | | 650 | 420 | 520 | 600 | 620 | 540 | 580 | 600 | 400 | 420 |
| ℓ_3 | | 600 | 550 | 480 | 400 | 380 | 500 | 420 | 450 | 520 | 550 |
| ℓ_4 | | 100 | 110 | 50 | 85 | 60 | 140 | 130 | 100 | 170 | 115 |
| $c_p \cdot 10^{-3}$, Н/м | | 16 | 17 | 24 | 23 | 18 | 22 | 19 | 15 | 20 | 19 |
| F_c^* | Н | 205 | 195 | 185 | 175 | 165 | 150 | 145 | 130 | 190 | 150 |
| F_c^{**} | | 55 | 60 | 70 | 80 | 90 | 65 | 50 | 45 | 70 | 50 |
| λ | | 0,09 | 0,17 | 0,12 | 0,13 | 0,11 | 0,14 | 0,1 | 0,15 | 0,08 | 0,11 |

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

Институт информационных технологий и автоматизации

Направление подготовки:

15.03.02 «Технологические машины и оборудование»

Кафедра «Машиноведение»

КУРСОВАЯ РАБОТА

(пояснительная записка)

по дисциплине «Механика машин и теория колебаний».

Тема проекта (работы)

«Расчет колебаний привода. Виброизоляция машины»

Исполнитель проекта – студент группы 3 – МЗ – 48 «С»

_____ *Калинина Н. Г.*

Шифр зачетной книжки студента: XXXXX**2Z**

Руководитель проекта _____

Проект выполнен и защищен с оценкой _____

« _____ » _____ 20 .. г.

Содержание курсовой работы

| | |
|---|--|
| Введение | |
| Схема задания и таблица расчетных данных | |
| В.1. Расчет колебаний привода машины | |
| В.1.1 Составление динамической модели привода машины | |
| В.1.2 Выбор обобщенных координат | |
| В.1.3. Определение кинематических характеристик | |
| В.1.4. Определение инерционных характеристик | |
| В.1.5 Составление математической модели (ММ) крутильных колебаний элементов привода машины | |
| В.2. Расчет частоты свободных крутильных колебаний | |
| В.3. Расчет амплитуды вынужденных крутильных колебаний | |
| В.4. Определение максимального значения движущего момента | |
| В.5. Определение собственных частот и коэффициентов формы изгибных колебаний вала. Оценка низшей частоты с помощью метода Данкерлея | |
| В.6. Составление системы неоднородных дифференциальных уравнений изгибных колебаний вала с $H = 2$ | |
| В.7. Определение критической скорости (частоты) вращающегося вала | |
| В.8. Виброизоляция машины на упругом основании | |
| В.9. Построение АЧХ и ФЧХ остова машины на упругом основании | |
| В.10. Выводы по работе | |
| Библиографический список | |

Введение

К исследованию предлагается привод механизма, содержащий упруго-диссипативный элемент – податливый вал. При переменной внешней нагрузке в системе возникают упругие колебания, величину которых следует оценить. В разделе виброзащиты объекта от вынужденных колебаний рассчитываются параметры виброизоляции машины на упругом основании.

Ориентировочный объем работы 30 ÷ 35 стр.

Ввиду ограниченности объема методических указаний все комментарии по разделам курсовой работы из предлагаемого к рассмотрению примера исключены.

Рекомендации:

– выбор модели машины для всех этапов работы и последовательность выполнения этих этапов – см. пп. 2.1 и 2.2.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

Кафедра «Машиноведение»
Дисциплина: «Механика машин и теория колебаний»

Студент Калинина Н. Г.
(Фамилия, И.О.)

Руководитель работы _____

Группа _____

Дата выдачи работы _____ 20 ____ г.

Принял к исполнению _____ XXXXXX2Z
(Дата и подпись студента)

ЗАДАНИЕ Z (приближенное и сокращенное)

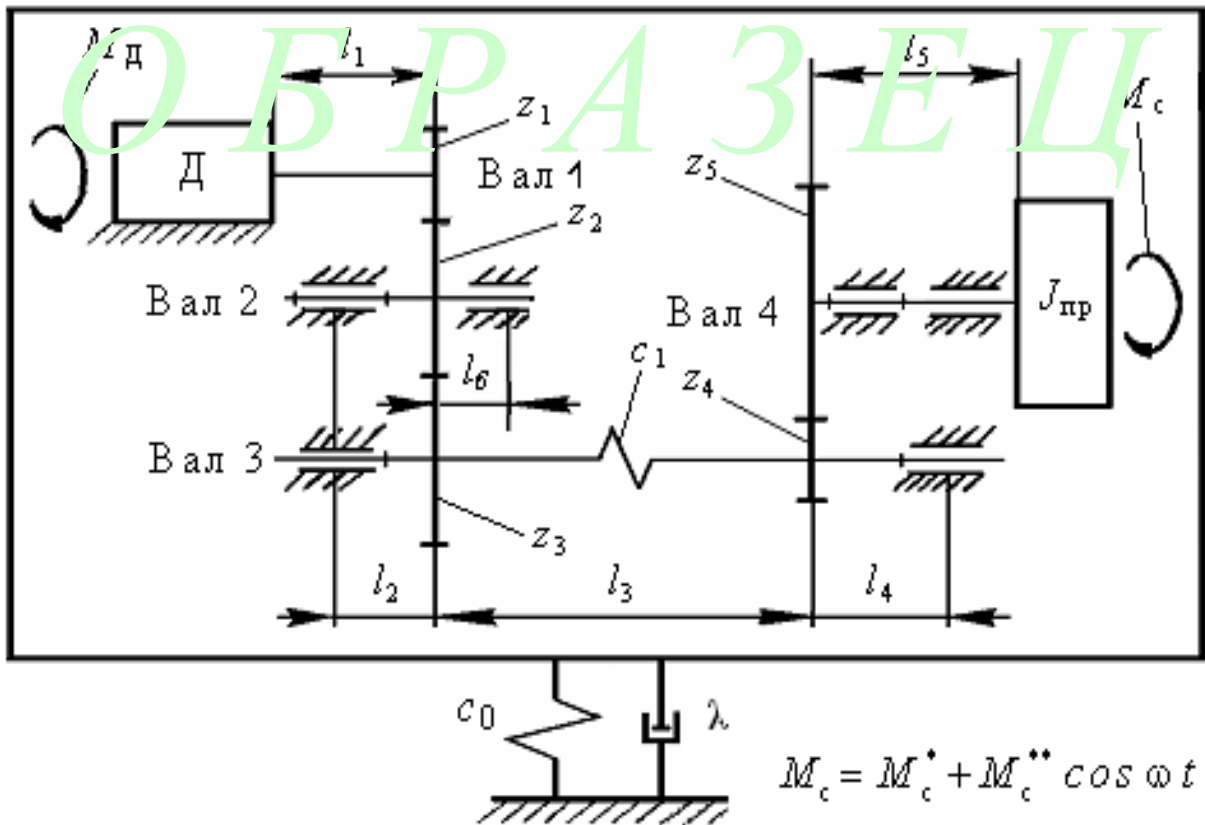


Таблица Б.4.1. Исходные данные для расчета виброизоляции

| m_*, m_{**} , кг | α_* | Δ_* , м | A_* , м | F_0 , Н | ω , рад/с |
|--------------------|------------|----------------|-----------|-----------|------------------|
| 200, 300 | 0,85 | 0.002 | 0.02 | 400 | 40 |

Данные для расчета по заданию 4.2. – в Табл. Б.4.2.
В предлагаемом примере исходные данные отличаются от исходных табличных значений.

Рис. В.1. Типовое расчетное задание

Содержание, последовательность выполнения работы и ее основные этапы приведены в п. 2.1.

В качестве объекта расчета колебаний в курсовой работе принимаем машинный агрегат, конструктивная схема которого приведен на *рис. В.1*.

В.1. Расчет колебаний привода машины.

В.1.1 Составление динамической модели привода машины

Рассмотрим расчетную схему привода машины, изображенную в задании, включающую в себя, в частности, зубчатые передачи.

В соответствии с рекомендациями составим динамическую модель привода машины (*рис. В.2*), выделяя лишь наиболее массивные элементы, отображенные сосредоточенными массами (моментами инерции), соединенными между собой кинематическими аналогами и упруго-диссипативными связями наиболее податливых элементов. Здесь не забываем рекомендации, приведенные в п. 1.3 и 2.2.1 методических указаний. Инерционные и упругие свойства остальных элементов учтем в виде некоторых их приведенных характеристик.

На схеме машины выделено уточнение – *вал 3* – наиболее податливый элемент, в наибольшей степени подверженный крутильной деформации. К входному звену привода приложен движущий момент M_D , к выходному – некоторый момент сопротивления

$$M_c = M_c^* + M_c^{**} \cos \omega t ,$$

где M_c^* – статическая составляющая момента сопротивления;

M_c^{**} – амплитуда динамической составляющей момента сопротивления;

ω – круговая частота возмущения.

Привод расположен в корпусе, связанном с основанием через упругодиссипативную подвеску с характеристиками c_0 и λ .

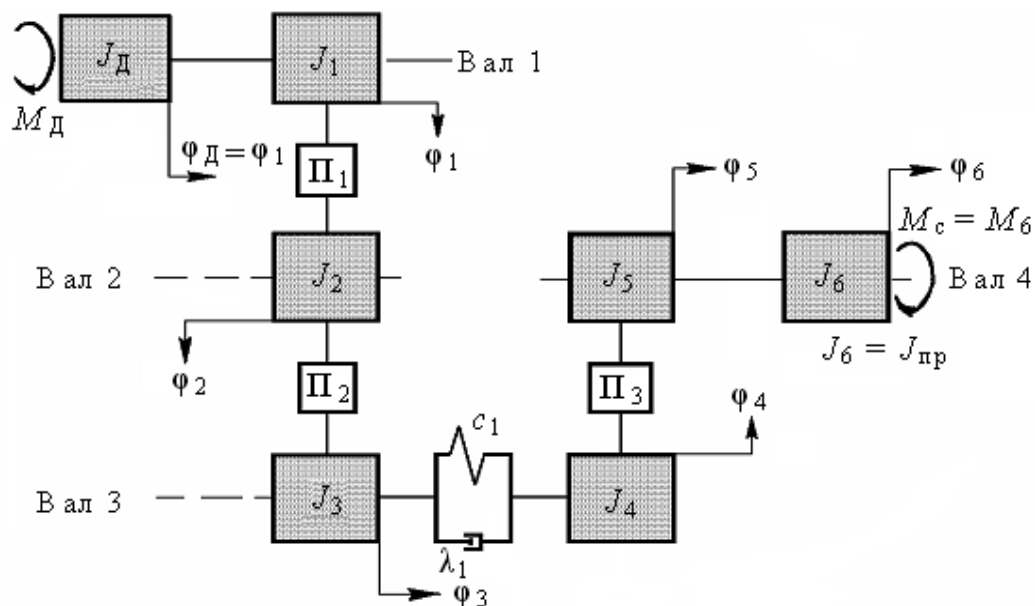


Рис. В.2. Динамическая модель привода

Составляя динамическую модель, будем использовать следующие условные обозначения:

φ_i – текущий угол поворота диска i ;

Π'_i – первые геометрические передаточные функции i -х передач;

u_{21}, u_{31}, u_{54} – положительные значения передаточных отношений между валами $1 - 4$;

J_i – моменты инерции зубчатых колес относительно осей их вращения;

c и λ – коэффициент крутильной жесткости и логарифмический декремент для соответствующего упругого участка вала.

z_i – числа зубьев зубчатых колес.

В.1.2 Выбор обобщенных координат

В качестве первой обобщенной координаты (q_1) примем абсолютную координату в начале кинематической цепи – угол поворота ротора двигателя.

Таким образом $\varphi_d = \varphi_0 = q_1$.

Здесь φ_1 – угол поворота колеса 1 (или ротора двигателя).

Здесь и далее индексы параметров движения соответствуют номерам подвижных звеньев передач (номерам моментов инерции).

Переходя от одного элемента кинематической цепи к другому, выразим абсолютные координаты φ_i через обобщенные координаты q_1 и q_2 .

Далее по аналогии с (2.1) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = \varphi_1 \Pi'_1 = u_{21} q_1; \\ \varphi_3 = u_{21} u_{32} q_1 = u_{31} q_1; \\ \varphi_4 = u_{31} q_1 + q_2; \\ \varphi_5 = \varphi_6 = \varphi_{пр} = (u_{31} q_1 + q_2) u_{54} \end{array} \right.$$

Обобщенная координата q_2 здесь соответствует угловой деформации участка вала 3 . Число обобщенных координат соответствует числу закреплений, превращающих исходную упругую кинематическую цепь в неподвижную систему (п. 2.2.2).

В.1.3. Определение кинематических характеристик

Для зубчатых передач запишем:

$$u_{21} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{34}{54} = 0,63, \quad u_{31} = \frac{z_1}{z_3} = \frac{34}{85} = 0,4, \quad u_{54} = \frac{z_4}{z_5} = \frac{20}{40} = 0,5.$$

В.1.4. Определение инерционных характеристик

Для колеса 1 ($m_0 = 5$ мм; $m_1 = 5,8$ кг; $z_1 = 34$) радиус делительной окружности $R_1 = 0,5m_0 z_1 = 0,5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 34 = 8,5 \cdot 10^{-2}$ м; момент инерции колеса 1 :

$$J_1 = 0,5m_1 R_1^2 = 0,5 \cdot 5,8 \cdot (8,5 \cdot 10^{-2})^2 = 2,09525 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Для колеса 2 ($m_0 = 5$ мм; $m_2 = 9,2$ кг; $z_2 = 54$) радиус делительной окружности $R_2 = 0,5m_0z_2 = 0,5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 54 = 0,135$ м; момент инерции колеса 2:

$$J_2 = 0,5m_2R_2^2 = 0,5 \cdot 9,2 \cdot 0,135^2 = 8,3835 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Для колеса 3 ($m_0 = 5$ мм; $m_3 = 13,5$ кг; $z_3 = 85$) радиус делительной окружности $R_3 = 0,5m_0z_3 = 0,5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 85 = 0,2125$ м; момент инерции колеса 3:

$$J_3 = 0,5m_3R_3^2 = 0,5 \cdot 13,5 \cdot 0,2125^2 = 0,3048 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Для колеса 4 ($m_0 = 6$ мм; $m_4 = 3,5$ кг; $z_4 = 20$) радиус делительной окружности $R_4 = 0,5m_0z_4 = 0,5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0,06$ м; момент инерции колеса 4:

$$J_4 = 0,5m_4R_4^2 = 0,5 \cdot 3,5 \cdot 0,06^2 = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Для колеса 5 ($m_0 = 6$ мм; $m_5 = 7$ кг; $z_5 = 40$) радиус делительной окружности $R_5 = 0,5m_0z_5 = 0,5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 40 = 0,12$ м; момент инерции колеса 5:

$$J_5 = 0,5m_5R_5^2 = 0,5 \cdot 7 \cdot 0,12^2 = 5,04 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Для выходного звена момент инерции задан: $J_{\text{пр}} = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

В.1.5 Составление математической модели (ММ) крутильных колебаний элементов привода машины

Составление системы дифференциальных уравнений (ММ) проведем на базе уравнения Лагранжа второго рода (п. 2.2.3). Для динамической модели с $H = 2$ ММ примет вид системы двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка вида (2.7):

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = Q_1; \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = Q_2. \end{cases}$$

Для определения *инерционных* коэффициентов a_{ij} составим выражение кинетической энергии для элементов модели привода (рис. В.2)

$$T = 0,5(J_{\text{д}}\dot{\varphi}_{\text{д}}^2 + J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + J_3\dot{\varphi}_3^2 + J_4\dot{\varphi}_4^2 + J_5\dot{\varphi}_5^2 + J_{\text{пр}}\dot{\varphi}_{\text{пр}}^2).$$

Заменив в последнем выражении углы поворота звеньев (абсолютные координаты φ_i) обобщенными координатами (q_i), получим выражение вида

$$T = 0,5[J_{\text{д}}\dot{q}_1^2 + J_1\dot{q}_1^2 + J_2u_{21}^2\dot{q}_1^2 + J_3u_{31}^2\dot{q}_1^2 + J_4(u_{31}\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + (J_5 + J_{\text{пр}})u_{54}^2(u_{31}\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2].$$

Здесь предполагается, что $u_{31} = u_{21}u_{32}$.

«Стандартным» для системы с $H = 2$ является выражение кинетической энергии в квадратичной форме [по аналогии с формулой $(a + b)^2$] вида:

$$T = 0,5(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2).$$

Путем сравнения двух последних выражений найдем расчетные формулы для *инерционных* коэффициентов a_{ij} и вычислим их значения.

Инерционный коэффициент a_{11} определим как множитель при \dot{q}_1^2 :

$$\begin{aligned} a_{11} &= J_{\text{д}} + J_1 + J_2 u_{21}^2 + (J_3 + J_4) u_{31}^2 + (J_5 + J_{\text{пр}}) u_{54}^2 u_{31}^2 = \\ &= J_{\text{д}} + 2,09525 \cdot 10^{-2} + 8,3835 \cdot 10^{-2} \cdot 0,63^2 + (0,3048 + 6,3 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,4^2 + \\ &\quad + (0,0504 + 0,5) \cdot 0,5^2 \cdot 0,4^2 = J_{\text{д}} + 0,126 \text{ кгм}^2. \end{aligned}$$

Инерционный коэффициент a_{22} определим как множитель при \dot{q}_2^2 :

$$a_{22} = J_4 + (J_5 + J_{\text{пр}}) u_{54}^2 = 6,3 \cdot 10^{-3} + 0,5504 \cdot 0,5^2 = 0,1439 \text{ кгм}^2;$$

Инерционный коэффициент a_{12} определим как множитель при удвоенном произведении, т. е. при $2\dot{q}_1\dot{q}_2$:

$$a_{12} = [J_4 + (J_5 + J_{\text{пр}}) u_{54}^2] u_{31} = [6,3 \cdot 10^{-3} + 0,5504 \cdot 0,5^2] \cdot 0,4 = 5,765 \cdot 10^{-2} \text{ кгм}^2.$$

Для определения *квазиупругих* коэффициентов c_{ij} составим выражение потенциальной энергии для элементов той же динамической модели (2.10)

$$V = 0,5c_1(\varphi_4 - \varphi_3)^2 = 0,5c_1q_2^2.$$

«Стандартным» для системы с $H = 2$ является выражение потенциальной энергии в квадратичной форме вида:

$$V = 0,5(c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + 2c_{12}q_1q_2).$$

Путем сравнения двух последних выражений также найдем расчетные формулы для *квазиупругих* коэффициентов c_{ij} и вычислим их значения.

Инерционный коэффициент c_{11} определим как множитель при q_1^2 ; инерционный коэффициент c_{12} определим как множитель при $2q_1q_2$. Искомый результат получим в виде

$$c_{11} = c_{12} = 0, \quad c_{22} = c_1.$$

Крутильную жесткость участка вала 3 постоянного поперечного сечения длиной l_3 можно определить из (2.5)

$$c_{22} = c_1 = \frac{GI_{p_3}}{l_3} = 8 \cdot 10^{10} \cdot 3,1416 \cdot (40 \cdot 10^{-3})^4 / 32 \cdot 0,7 = 2,8723 \cdot 10^4 \text{ Нм},$$

где для вала 3 $d_3 = 40$ мм; скручиваемый пролет $l_3 = 0,7$ м.

Здесь координата q_1 считается *циклической*, q_2 – *позиционной*.

При определении обобщенных сил учтем движущий момент ($M_{\text{д}}$), момент технологического сопротивления ($M_{\text{с}}$) и момент от диссипативных сил – момент трения (M_{λ}), возникающий при колебаниях вала 3. Его определим из

$$M_{\lambda} = b(\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) = b\dot{q}_2,$$

где b – коэффициент пропорциональности (см. п. 2.2.3)

Определяя обобщенные силы Q_j , составим уравнение работ на возможных (бесконечно малых) перемещениях δ (здесь и далее не путаем с диссипацией) системы, выраженное через обобщенные координаты δq_j

$$\delta W = M_{\text{д}} \delta \varphi_{\text{д}} - M_{\lambda} \delta(\varphi_4 - \varphi_3) - M_{\text{с}} \delta \varphi_{\text{пр}} = M_{\text{д}} \delta q_1 - M_{\lambda} \delta q_2 - M_{\text{с}} u_{54} \delta(u_{31} q_1 + q_2).$$

Теперь в общем виде запишем «стандартное» уравнение элементарных работ на возможных перемещениях для системы с $H = 2$

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2.$$

Сравнивая два последних выражения, определим (по аналогии с предыдущими процедурами) значения обобщенных сил в виде

$$Q_1 = M_{\text{д}} - M_{\text{с}} u_{54} u_{31}, \quad Q_2 = -M_{\lambda} - M_{\text{с}} u_{54}.$$

При учете того, что $M_{\text{с}}$ здесь представляется суммой статической и динамической составляющих, выражения для Q_i перепишем в виде

$$\begin{cases} Q_1 = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}^* u_{54} u_{31} - M_{\text{с}}^{**} u_{54} u_{31} \cos \omega t; \\ Q_2 = -M_{\lambda} - M_{\text{с}}^* u_{54} - M_{\text{с}}^{**} u_{54} \cos \omega t. \end{cases}$$

Исходя (в первом приближении) из условия предполагаемого равномерного вращения ротора двигателя ($\varphi_{\text{д}} = q_1 = \omega_{\text{д}} t \approx \text{const}$ и $\ddot{q}_1 = 0$) система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} a_{12} \ddot{q}_2 = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}^* u_{54} u_{31} - M_{\text{с}}^{**} u_{54} u_{31} \cos \omega t; \\ a_{22} \ddot{q}_2 + c_{22} q_2 = -M_{\lambda} - M_{\text{с}}^* u_{54} - M_{\text{с}}^{**} u_{54} \cos \omega t. \end{cases}$$

Решая отдельно второе уравнение системы, определим значение $q_2(t)$ – угловую (крутильную) деформацию вала 3 (**вторая задача динамики**).

Первым уравнением системы в дальнейшем воспользуемся для определения неизвестного движущего момента ($M_{\text{д}}$) – **первая задача динамики**.

В.2. Расчет собственной частоты крутильных колебаний

При условии, что момент диссипативных сил определяется из $M_{\lambda} = b \dot{q}_2$, перепишем второе уравнение системы дифференциальных уравнений в виде

$$a_{22} \ddot{q}_2 + b_{22} \dot{q}_2 + c_{22} q_2 = -M_{\text{с}}^* u_{54} - M_{\text{с}}^{**} u_{54} \cos \omega t.$$

Свободные колебания привода описываются однородным дифференциальным уравнением, получаемым из последнего уравнения при его нулевой правой части. Его решение имеет вид

$$q_2 = A_2 e^{-nt} \sin(kt + \alpha).$$

Собственная частота при малых значениях диссипации (параметр δ) определяется из выражения

$$k = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}} = \sqrt{\frac{2,8723 \cdot 10^4}{0,1439}} \approx 446,77 \text{ с}^{-1} \text{ (446,77 Гц)}.$$

В.3. Расчет амплитуды вынужденных крутильных колебаний при заданной частоте вынуждающей силы (момента)

Вынужденные колебания привода с $H = 2$ и гармонической вынуждающей силой описываются дифференциальным уравнением с правой частью, отлич-

ной от ноля, т. е.

$$a_{22}\ddot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{22}q_2 = -M_c^* u_{54} - M_c^{**} u_{54} \cos \omega t$$

или (для компактности записи)

$$a_{22}\ddot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{22}q_2 = Q_2^* + Q_2^{**} \cos \omega t.$$

Здесь Q_2^* и Q_2^{**} – постоянная и амплитудное значения переменной составляющих вынуждающей силы.

Вынужденные колебания определяются частным решением последнего уравнения. Представим это решение в виде суммы постоянной и переменной составляющих (в соответствии с принципом суперпозиции)

$$q_2 = q_2^* + q_2^{**} = q_2^* + A_2 \cos(\omega t - \gamma),$$

где q_2^* и q_2^{**} – постоянная и амплитуда переменной составляющих деформации упругого элемента передачи под действием вынуждающей силы Q_2 .

Для определения q_2^* представим эту постоянную как $q_2 = q_2^*$. Подставим это выражение во второе дифференциальное уравнение системы, т. е.

$$c_{22}q_2^* = Q_2^* = -M_c^* u_{54},$$

откуда

$$q_2^* = \frac{Q_2^*}{c_{22}} = \frac{-M_c^* u_{54}}{c_{22}} = \frac{-80 \cdot 0,5}{2,8723 \cdot 10^4} = -1,3926 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx -0,08^\circ.$$

Гармоническая составляющая вынужденных колебаний определяется амплитудой A_2 и фазовым сдвигом (γ) вынужденных колебаний относительно вынуждающей силы. $A_2(\omega)$ – АЧХ машины, $\gamma(\omega)$ – ФЧХ машины.

Расчет динамической амплитуды вынужденных колебаний A_2 выполним по зависимости $A_2 = A_2^{\text{ст}} \alpha$, где статическая амплитуда

$$A_{2\text{ст}} = \frac{Q_2^{**}}{c_{22}} = \frac{-M_c^{**} u_{54}}{c_{22}} = \frac{-20 \cdot 0,5}{2,8723 \cdot 10^4} = -3,4815 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx -0,02^\circ.$$

После выполнения данного этапа расчета задаемся частотой вынуждающей силы (см. **Примечание** п. 2.4). При условии $z = \frac{\omega}{k} = \frac{0,7k}{k} = 0,7$ – режим дорезонансный, поэтому коэффициент динамичности определим по упрощенной формуле вида

$$\alpha = \frac{1}{|1 - z^2|} = \frac{1}{|1 - 0,7^2|} = 1,96.$$

Фазовый сдвиг (γ) вынужденных колебаний определим из ФЧХ по зависимости

$$\gamma = \arctg \frac{2\delta z}{1 - z^2} = \arctg \frac{2\lambda z}{2\pi(1 - z^2)} = \arctg \frac{0,12 \cdot 0,7}{3,1416 \cdot (1 - 0,7^2)} = 3^\circ;$$

значение диссипации берем из задания.

Окончательно имеем:

$$A_2 = A_2^{\text{сг}} \alpha = -3,4815 \cdot 10^{-4} \cdot 1,96 = -6,824 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

и полная деформация упругого вала 3

$$q_2 = (-1,3926 \cdot 10^{-3}) + (-6,824 \cdot 10^{-4}) \cos \omega t \text{ рад.}$$

Максимум угловой деформация в упругом элементе определим из

$$q_2^{\text{max}} = -(1,3926 \cdot 10^{-3} + 6,842 \cdot 10^{-4}) = -2,075 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx -0,12^\circ.$$

В.4. Определение максимального значения движущего момента

Используя первое уравнение системы дифференциальных уравнений при фиксированном значении $\omega = 0,7k = 0,7 \cdot 446,77 = 312,74 \text{ с}^{-1}$, определим нагрузку на двигатель.

Решив это уравнение относительно неизвестного $M_{\text{д}}$, имеем

$$M_{\text{д}} = a_{12} \ddot{q}_2 + M_{\text{с}}^* u_{54} u_{31} + M_{\text{с}}^{**} u_{54} u_{31} \cos \omega t.$$

Приняв во внимание (2.28) и (2.29) при условии

$$q_2 = q_2^* + q_2^{**} = q_2^* + A_2 \cos(\omega t - \gamma) \text{ и } \gamma \rightarrow 0, \text{ получим } \ddot{q}_2 = -\omega^2 A_2 \cos \omega t.$$

После всех подстановок (при $A_2 < 0$) получим

$$\begin{aligned} M_{\text{д}} &\approx M_{\text{с}}^* u_{54} u_{31} + (M_{\text{с}}^{**} u_{54} u_{31} - \omega^2 A_2 a_{12}) \cos \omega t = \\ &= 80 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + (20 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 312,74^2 \cdot 6,824 \cdot 10^{-4} \cdot 5,765 \cdot 10^{-2}) \cos \omega t = \\ &= 16 + (4 + 3,848) \cos \omega t \text{ Нм.} \end{aligned}$$

Предельное значение $M_{\text{д}}$ при фиксированном значении частоты вынуждающей силы определим из

$$M_{\text{д}}^{\text{max}} = 16 + 7,848 = 23,848 \text{ Нм (при } \cos \omega t = 1).$$

В.5. Определение собственных частот и коэффициентов формы изгибных колебаний вала.

Оценка низшей частоты с помощью метода Данкерлея

Расчет основан на решении частотного уравнения (2.37) методических указаний. Основная расчетная зависимость, определяющая величины собственных частот изгибных колебаний вала, имеет вид, с^{-1}

$$k_i = \sqrt{\frac{-h_1 \mp \sqrt{h_1^2 - 4h_0 h_2}}{2h_2}},$$

где $h_2 = m_3 m_4 (e_{11} e_{22} - e_{12}^2)$, $h_1 = -(e_{11} m_3 + e_{22} m_4)$, $h_0 = 1$.

Для вала 3 привода, схема которого приведена в задании на проект, с учетом необходимых расчетных данных, расположения опор и т. д. (см. табл. 2.1) коэффициенты влияния определим из

$$e_{11} = \frac{a^2 b^2}{3EJl} = \frac{\ell_2^2 (\ell_3 + \ell_4)^2}{3EJl} = \frac{0,2^2 \cdot 1,2^2 \cdot 64}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 0,04^4 \cdot 1,4} = 5,1969 \cdot 10^{-7} \text{ м/Н;}$$

$$e_{22} = \frac{c^2 d^2}{3EJl} = \frac{(\ell_2 + \ell_3)^2 \ell_4^2}{3EJl} = \frac{0,9^2 \cdot 0,5^2 \cdot 64}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 0,04^4 \cdot 1,4} = 1,827 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н};$$

$$e_{12} = e_{21} = \frac{ad}{6EJl} (\ell^2 - a^2 - d^2) = \frac{\ell_2 \ell_4 [(\ell_2 + \ell_3 + \ell_4)^2 - \ell_2^2 - \ell_4^2]}{6EJl} =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,5 \cdot 64 \cdot (1,4^2 - 0,2^2 - 0,5^2)}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 0,04^4 \cdot 1,4} = 7,534 \cdot 10^{-7} \text{ м/Н}.$$

Затем после подстановок получим:

$$h_2 = m_3 m_4 (e_{11} e_{22} - e_{12}^2) = 13,5 \cdot 3,5 [5,1969 \cdot 10^{-7} \cdot 1,827 \cdot 10^{-6} - (7,534 \cdot 10^{-7})^2] =$$

$$= 1,8043 \cdot 10^{-11}$$

$$h_1 = -(e_{11} m_3 + e_{22} m_4) = -(5,1969 \cdot 10^{-7} \cdot 13,5 + 1,827 \cdot 10^{-6} \cdot 3,5) = -1,341 \cdot 10^{-5};$$

$$h_0 = 1.$$

Собственные частоты изгибных колебаний вала 3 определим из

$$k_i = \sqrt{\frac{-h_1 \mp \sqrt{h_1^2 - 4h_0 h_2}}{2h_2}} = \sqrt{\frac{1,341 \cdot 10^{-5} \mp \sqrt{(-1,341 \cdot 10^{-5})^2 - 4 \cdot 1,8043 \cdot 10^{-11}}}{2 \cdot 1,8043 \cdot 10^{-11}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1,341 \cdot 10^{-5} \mp 1,0375745 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 1,8043 \cdot 10^{-11}}} \text{ с}^{-1}.$$

Низшая собственная частота изгибных колебаний вала 3 принимает значение $k_1 = 289,97 \text{ с}^{-1}$, высшая – $k_2 = 811,86 \text{ с}^{-1}$.

Оценка низшей частоты по методу Данкерлея основана на вычислении приближенного значения первого (низшего) действительного корня частотного уравнения высокого порядка (2.41), т. е.

$$k_D = \sqrt{-\frac{h_0}{h_1}} = \frac{1}{\sqrt{e_{11} m_1 + e_{22} m_4}} = \frac{1}{\sqrt{1,341 \cdot 10^{-5}}} = 273,07 \text{ с}^{-1}.$$

Как видно из полученных данных $k_D < k_1$.

Зависимости, определяющие величины коэффициентов формы, при учете (2.42) имеют вид (см. рис. В.3)

$$\beta_1 = \frac{B_1}{A_1} \Big|_{k=k_1} = \frac{1 - e_{11} m_3 k_1^2}{e_{12} m_4 k_1^2} = \frac{e_{21} m_3 k_1^2}{1 - e_{22} m_4 k_1^2} = \frac{1 - 5,1969 \cdot 10^{-7} \cdot 13,5 \cdot 289,97^2}{7,534 \cdot 10^{-7} \cdot 3,5 \cdot 289,97^2} =$$

$$= \frac{7,534 \cdot 10^{-7} \cdot 13,5 \cdot 289,97^2}{1 - 1,827 \cdot 10^{-6} \cdot 3,5 \cdot 289,97^2} = 1,8497;$$

$$\beta_2 = \frac{B_1}{A_1} \Big|_{k=k_2} = \frac{1 - e_{11} m_3 k_2^2}{e_{12} m_4 k_2^2} = \frac{e_{21} m_3 k_2^2}{1 - e_{22} m_4 k_2^2} = \frac{1 - 5,1969 \cdot 10^{-7} \cdot 13,5 \cdot 811,86^2}{7,534 \cdot 10^{-7} \cdot 3,5 \cdot 811,86^2} =$$

$$= \frac{7,534 \cdot 10^{-7} \cdot 13,5 \cdot 811,86^2}{1 - 1,827 \cdot 10^{-6} \cdot 3,5 \cdot 811,86^2} = -2,0853.$$

Итак, в качестве окончательных результатов частотного анализа имеем:

- собственные частоты изгибных колебаний
 $k_1 = 289,97 \text{ с}^{-1}; k_2 = 811,86 \text{ с}^{-1};$
- низшая частота по методу Данкерля
 $k_D = 273,07 \text{ с}^{-1}.$

График форм изгибных колебаний аналогичен приведенному на рис. 2.4.

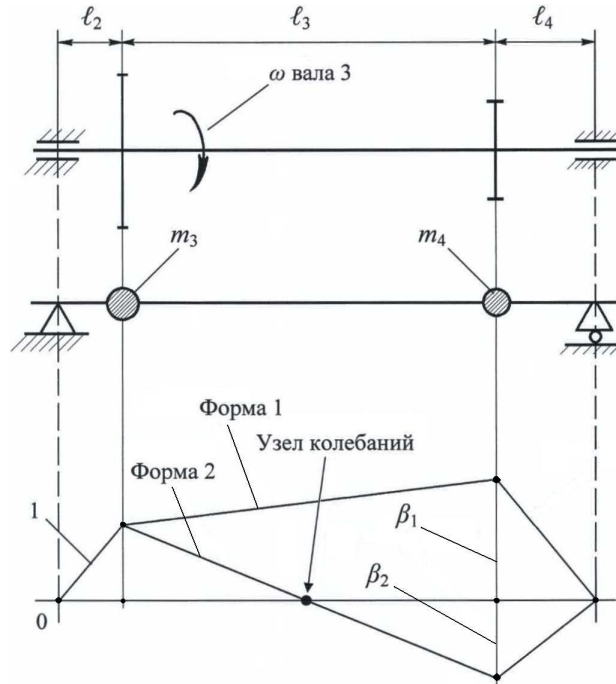


Рис. В.3. Формы изгибных колебаний вала 3

В.6. Вынужденные изгибные колебания вала (Выполняется по указанию преподавателя)

Рассмотрим вал 3 с приложенными к нему переменными силами, возникающими в зацеплениях передач. При анализе изгибных колебаний балку следует рассматривать в двух плоскостях XOY и XOZ (п. 2.6 и рис. 2.5).

В упрощенном виде для пояснения методики определения действующих сил F_3 и F_4 ограничимся рассмотрением лишь плоскости XOY , приняв, что эти силы являются окружными силами зубчатой передачи, условно лежащими в этой плоскости. Для определения действующих сил при учете выявленных ранее крутильных колебаний обратимся к рис. 2.6.

Для колеса 3 окружное усилие в зацеплении определим из выражения

$$F_3 = M_3/r_3 = c_1 q_2/r_3.$$

Максимальное его значение при условии $q_2 = q_2^* + A_2 \cos \omega t$ определяется зависимостью

$$F_3^{max} = c_1 (q_2^* + A_2)/r_3.$$

Для зубчатого колеса с z_4 уравнение равновесия имеет вид

$$J_4 \ddot{\phi}_4 = -c_1 q_2 + M_4,$$

откуда $M_4 = J_4 \ddot{\varphi}_4 + c_1 q_2$ – момент, действующий со стороны ведомой части механизма, где $\varphi_4 = u_{31} q_1 + q_2$; $\ddot{\varphi}_4 = \ddot{q}_2$.

Искомое окружное усилие в этом зацеплении определим из выражения

$$F_4 = M_4 / r_4 = (J_4 \ddot{q}_2 + c_1 q_2) / r_4 .$$

Максимальное его значение при условии $q_2 = q_2^* + A_2 \cos \omega t$ определяется зависимостью

$$F_4^{max} = [A_2 (c_1 - J_4 \omega^2) + c_1 q_2^*] / r_4 .$$

Численные значения всех входящих величин с учетом направления действующих сил подставим в (2.33), после чего данную систему решим относительно неизвестных y_3 и y_4 .

Далее воспользуемся этой системой неоднородных дифференциальных уравнений (2.33), в которой не учтено влияние диссипативных сил. Напомним, что в инженерных расчетах это вполне допустимо при расчетах режимов вынужденных колебаний, удаленных от резонансных частот.

Представим вынуждающую силу как сумму постоянной и гармонической составляющих: $F_i(t) = F_i^* + F_i^{**} \cos \omega t$. Для системы линейных дифференциальных уравнений справедлив принцип суперпозиции, согласно которому колебания от суммы сил определяются как сумма колебаний от каждой силы в отдельности. Методику расчета проиллюстрируем на примере $i = 3$.

Тогда решение будем искать в виде

$$y_{33} = y_{33}^* + A_{33} \cos \omega t ; y_{43} = y_{43}^* + A_{43} \cos \omega t .$$

Здесь первый индекс отвечает номеру сечения, второй – номеру силы. После подстановки последних уравнений в (2.33) и уравнивания коэффициентов в левой и правой частях уравнений (без учета диссипации) получаем, что при

$$F_3 = F_3^* + F_3^{**} \cos \omega t ; F_4^* = 0 ; F_4^{**} = 0 ,$$

$$A_{33} = \frac{\Delta_{13}(\omega^2)}{\Delta(\omega^2)} ; A_{43} = \frac{\Delta_{23}(\omega^2)}{\Delta(\omega^2)} ,$$

где

$$\Delta_{13}(\omega^2) = \begin{vmatrix} e_{11} F_3^{**} & -e_{12} m_4 \omega^2 \\ e_{21} F_3^{**} & 1 - e_{22} m_4 \omega^2 \end{vmatrix} ; \quad \Delta_{23}(\omega^2) = \begin{vmatrix} 1 - e_{11} m_3 \omega^2 & e_{11} F_3^{**} \\ -e_{21} m_3 \omega^2 & e_{21} F_3^{**} \end{vmatrix} ;$$

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 1 - e_{11} m_3 \omega^2 & -e_{12} m_4 \omega^2 \\ -e_{21} m_3 \omega^2 & 1 - e_{22} m_4 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 ; y_{33}^* = e_{11} F_3^* ; y_{43}^* = e_{21} F_3^* .$$

Аналогичным способом при подстановке F_4^* , F_4^{**} и, принимая $F_3^* = 0$; $F_3^{**} = 0$; $i = 4$, получаем $A_{34}, A_{44}, y_{34}^*, y_{44}^*$:

$$A_{34} = \frac{\Delta_{14}(\omega^2)}{\Delta(\omega^2)}; \quad A_{44} = \frac{\Delta_{24}(\omega^2)}{\Delta(\omega^2)};$$

$$\Delta_{14}(\omega^2) = \begin{vmatrix} e_{21}F_4^{**} & -e_{12}m_4\omega^2 \\ e_{22}F_4^{**} & 1 - e_{22}m_4\omega^2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_{24}(\omega^2) = \begin{vmatrix} 1 - e_{11}m_3\omega^2 & e_{12}F_4^{**} \\ -e_{21}m_3\omega^2 & e_{22}F_4^{**} \end{vmatrix};$$

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 1 - e_{11}m_3\omega^2 & -e_{12}m_4\omega^2 \\ -e_{21}m_3\omega^2 & 1 - e_{22}m_4\omega^2 \end{vmatrix} = 0; \quad y_{34}^* = e_{12}F_4^*; \quad y_{44}^* = e_{22}F_4^*.$$

В качестве примера здесь также можем принять
 $\omega = 0,7k_1 = 0,7 \cdot 289,97 = 202,98 \text{ с}^{-1}$.

После всех подстановок имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} (5,1969 \cdot 10^{-7} \cdot 13,5)\ddot{y}_3 + (7,534 \cdot 10^{-7} \cdot 3,5)\ddot{y}_4 + y_3 = \\ \quad = (-5,1969 \cdot 10^{-7} \cdot 280,47 + 7,534 \cdot 10^{-7} \cdot 986,33)\cos\omega t; \\ (7,534 \cdot 10^{-7} \cdot 13,5)\ddot{y}_3 + (1,827 \cdot 10^{-6} \cdot 3,5)\ddot{y}_4 + y_4 = \\ \quad = (-7,534 \cdot 10^{-7} \cdot 280,47 + 1,827 \cdot 10^{-6} \cdot 986,33)\cos\omega t. \end{array} \right.$$

В окончательном виде получим

$$\left\{ \begin{array}{l} 7,0158 \cdot 10^{-6} \ddot{y}_3 + 2,637 \cdot 10^{-6} \ddot{y}_4 + y_3 = 5,973 \cdot 10^{-4} \cos\omega t; \\ 1,017 \cdot 10^{-5} \ddot{y}_3 + 6,3945 \cdot 10^{-6} \ddot{y}_4 + y_4 = 1,591 \cdot 10^{-3} \cos\omega t. \end{array} \right.$$

На основании решения этих дифференциальных уравнений определим значения y_3 и y_4 – колебания балки в сечениях 3 и 4 (под массами m_3 и m_4).

В качестве иллюстрации результаты расчета свободных изгибных колебаний представим в виде графиков на *рис.В.4*. Здесь приняты следующие начальные условия: $y_{3,0} = 0,002$, $\dot{y}_{3,0} = 0$, $y_{4,0} = 0,001$, $\dot{y}_{4,0} = 0$.

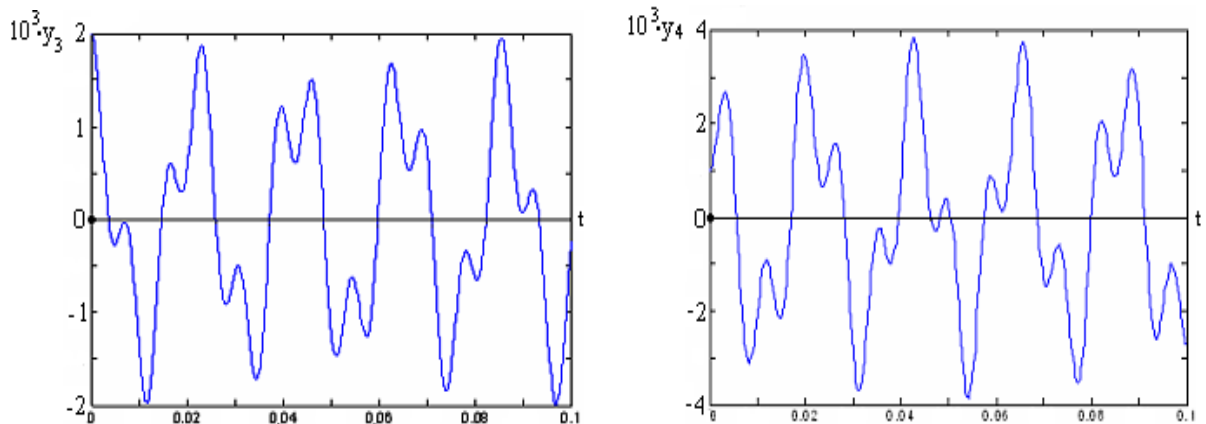
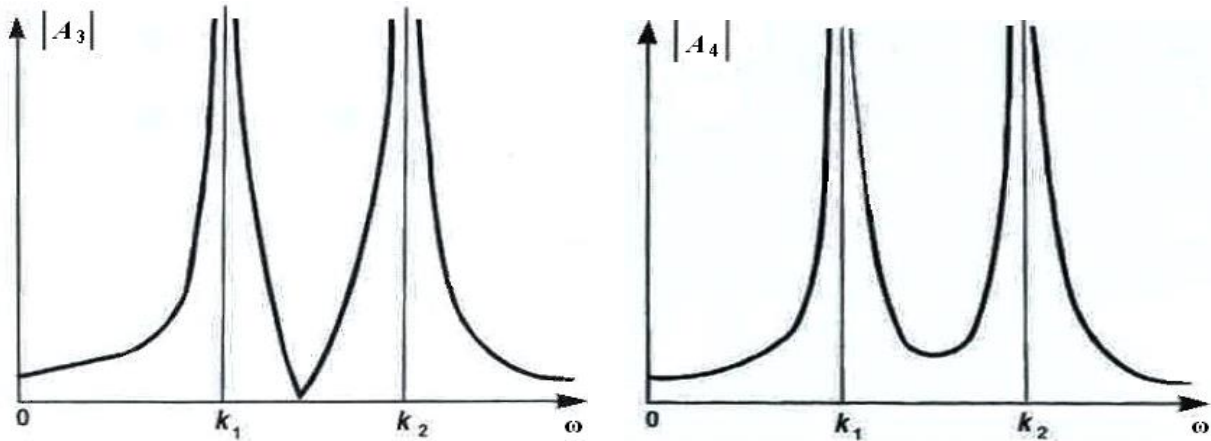


Рис. В.4. Амплитуды свободных колебаний масс 3 и 4 на валу 3 (м):
 а – для массы 3; б – для массы 4

График изменения амплитуд вынужденных изгибных колебаний представляет собой АЧХ двухмассовой модели. Типовые АЧХ для такой модели приведены на рис. В. 5. Как уже отмечалось, при учете линейной силы сопротивления резонансные значения амплитуд будут ограничены некоторыми предельными значениями (см. п. 1.4).

Рис. В.5. Типовые АЧХ для $H = 2$

В.7. Определение критической скорости (частоты) вращающегося вала

Здесь в качестве расчетной схемы примем вал 2, по своим краям закрепленный на двух подшипниках. Для упрощения расчетов этот вал представим невесомым.

Расчетную зависимость коэффициента податливости вала e_{11} определим из справочной табл. 2.1. С учетом расположения опор получим

$$e_{11} = \frac{a^2 b^2}{3EJl} = \frac{l_2^2 l_6^2}{3EJl} = \frac{0,2^2 \cdot 0,1^2 \cdot 64}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3,1416 \cdot (32 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 0,3} = 4,1118 \cdot 10^{-8} \text{ м/Н.}$$

Здесь E – модуль упругости материала вала; $J = \frac{\pi d_b^4}{64}$ – осевой момент инерции поперечного сечения вала; d_b – диаметр вала 2.

Критическая угловая скорость вала 2

$$\omega_{кр} = \frac{1}{\sqrt{e_{11} m_2}} = \frac{1}{\sqrt{4,1118 \cdot 10^{-8} \cdot 9,2}} = 1625,89 \text{ рад/с, где } m_2 \text{ – масса колеса 2.}$$

Частотный диапазон в окрестности значения $n_{кр}$ обычно не используется при условии

$$0,7n_{кр} \leq n \leq 1,4n_{кр}.$$

В.8. Виброизоляция машины на упругом основании

Подробно алгоритм данного расчета изложен в п. 2.9 методических указаний. Рассмотрим некоторый числовой пример.

Согласно исходным данным имеем

- наименьшее значение массы машины $m_* = 200$ кг;
- наибольшее значение массы машины примем $m_{**} = 1,5 m_*$;
- допускаемое значение коэффициента динамичности $\alpha_* = 0,85$;
- допускаемая осадка упругой подвески машины под действием ее собственного веса $\Delta_* = 0,02$ м;
- допускаемое значение амплитуды вынужденных колебаний

$$A_* = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$
- значение амплитуды вынуждающей силы $F_0 = 400$ Н;
- частота приложенной вынуждающей силы $\omega = 40 \text{ с}^{-1}$.

Для выполнения виброизоляции будем исходить из четырех неравенств, каждому из которых на координатной плоскости $c_0 - m$ (рис. В.4) соответствует своя граничная линия под номером данного неравенства.

1. Из условия ограничения величины массы машины выше некоторого ее предельного значения, т. е. $m_* \leq m \leq m_{**}$; при расчете примем $m_{**} = 1,5 m_*$.

Условию 1 на графике $c_0 - m$ отвечает область параметров, находящаяся **между вертикальными прямыми**, соответствующими значениям m_* и m_{**} .

2. Из условия обеспечения максимально допустимого коэффициента динамичности, т. е. $\alpha \leq \alpha_*$, имеем

$$c_0 \leq \frac{m\omega^2}{1 + \alpha_*^{-1}}.$$

Этой зависимости на графике $c_0 - m$ отвечает область, лежащая **ниже прямой 2**. Для построения этой прямой зададимся значениями $m = 0$ и $m = m_*$ (или $m = m_{**}$). Так, например, при $m = 0$ имеем $c_0 = 0$; при $m = m_{**} = 300$ кг

$$c_0 = \frac{300 \cdot 40^2}{1 + 0,85^{-1}} = 2,2054 \cdot 10^5 \text{ Н/м}.$$

На полученных таким образом осях через соответствующие две точки с координатами (0; 0) и (300; $2,2054 \cdot 10^5$) проводим прямую 2.

3. Из условия обеспечения минимально допустимой амплитуды вынужденных колебаний, т. е. $A \leq A_*$ имеем

$$c_0 \leq m\omega^2 - \frac{F_0}{A_*};$$

при $m = m_*$ $\tilde{n}_0 = 1,2 \cdot 10^5$ Н/м; при $m = m_{**}$ $\tilde{n}_0 = 2,8 \cdot 10^5$ Н/м.

нию массы машины и наибольшему значению жесткости ее упругой подвески (п. 2.9). Точке N соответствуют некоторый коэффициент жесткости c_{0N} и масса машины m_N , значения которых определяем аналитически или графически (из диаграммы).

При минимальной массе машины аналитическое определение c_{0N} осуществляется при подстановке $m_* = m_N = 200$ кг в (2.48), т. е.

$$c_0 \leq m_* \omega^2 - F_0/A = 200 \cdot 40^2 - 400/2 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Н/м.}$$

Отсутствие области совместного решения свидетельствует о взаимной несовместимости сформулированных исходных условий, что требует их корректировки.

После завершения этапа расчета виброизоляции на основе полученных оптимальных значений массы машины и жесткости ее упругой подвески выполняется проверка результатов расчета.

Этапы проверки результатов расчетов:

1. Определяем собственную частоту

$$k_N = \sqrt{c_{0N}/m_N} = \sqrt{1,2 \cdot 10^5/200} = 24,49 \text{ с}^{-1}.$$

2. Определяем коэффициент динамичности $\alpha_N = 1/|1 - z_N^2|$,

где $z_N = \omega/k_N = 40/24,49 = 1,633$;

$$\alpha_N = 1/|1 - z_N^2| = 1/|1 - 1,633^2| = 0,6 \text{ при допустимом значении } \alpha_* = 0,85.$$

| |
|------------------------------------|
| Проверка: $\alpha_N \leq \alpha_*$ |
|------------------------------------|

3. Определяем амплитуду вынужденных колебаний $A_N = A_{ct} \alpha$,

где $A_{ct} = F_0/c_{0N} = 400/1,2 \cdot 10^5 = 3,3 \cdot 10^{-3}$ м;

тогда $A_N = A_{ct} \alpha = 3,3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6 = 2 \cdot 10^{-3}$ м при $A_* = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

| |
|-----------------------|
| Проверка: $A_N = A_*$ |
|-----------------------|

4. Определяем осадку машины под действием ее собственного веса

$$\Delta_N = m_N g/c_{0N} = 200 \cdot 9,81/1,2 \cdot 10^5 = 1,635 \cdot 10^{-2} \text{ м при } \Delta_* = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

| |
|---------------------------------|
| Проверка: $\Delta_N < \Delta_*$ |
|---------------------------------|

Таким образом, все поставленные условия выполнены.

В качестве окончательных результатов расчета параметров виброизоляции имеем:

- оптимальная жесткость упругой подвески машины $c_{0N} = 1,2 \cdot 10^5$ Н/м;
- оптимальная масса машины $m_N = 200$ кг;
- максимальная осадка машины под действием ее собственного веса $\Delta_N = 1,635 \cdot 10^{-2}$ м;
- максимальное значение коэффициента динамичности $\alpha_N = 0,6$;

- максимальная амплитуда вынужденных колебаний $A_N = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

После окончания проверки, как уже отмечалось, следует показать точку N на АЧХ (рис. В.3), отвечающую режиму виброизоляции ($z = z_N$, $\alpha = \alpha_N$).

В.9. Построение АЧХ и ФЧХ остова машины на упругом основании

Расчеты АЧХ и ФЧХ состоят в определении численных значений функций $\alpha(z)$ и $\gamma(z)$ с последующим построением соответствующих графиков (рис. В.3).

Исходным параметром на данном этапе расчета является диссипативная характеристика системы, задаваемая в виде численного значения δ или λ .

Этап выполняется по аналогии с п. 2.9 методических указаний с разницей лишь в величине $\alpha_{рез}$ и том, насколько резко ФЧХ переходит резонанс, поскольку при увеличении диссипации этот процесс проходит более плавно.

Расчетные формулы (1.29) – (1.32) используются в интервале $z \in (0; 2,5)$

Численные значения полученных величин удобно свести в таблицу вида

| z | α | γ , рад |
|-----|----------|----------------|
| 0 | 1 | 0 |
| 0,1 | | |
| --- | --- | --- |
| 2,4 | | |
| 2,5 | | |

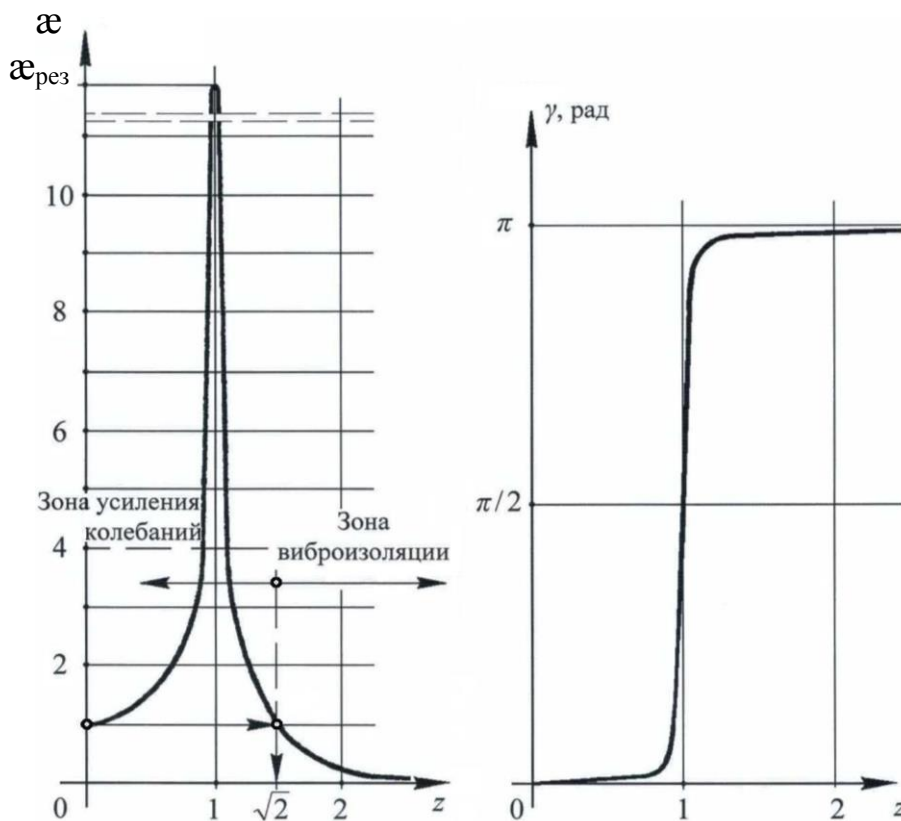


Рис. В.3. АЧХ и ФЧХ остова машины на упругом основании

В.10. Выводы по работе

В курсовой работе выполнены все основные требуемые пункты:

1. Составлены ДМ и ММ привода машины.
2. Определено значение собственной частота крутильных колебаний.
3. Рассчитана амплитуда вынужденных крутильных колебаний при заданной частоте вынуждающей силы.
4. Определено максимальное значение движущего момента при заданной частоте вынуждающего момента.
5. Определены собственные частоты и коэффициенты формы изгибных колебаний упругого вала, выполнена оценка низшей частоты с помощью метода Данкерлея. Построены соответствующие графики.

Продолжение прил. В

6. Составлена система неоднородных дифференциальных уравнений изгибных колебаний вала 3 с $H = 2$.
7. Определено значение критической частоты вращения промежуточного вала. Выявлен диапазон динамической неустойчивости его работы.
8. Выполнена виброизоляция машины на упругом основании. Даны рекомендации по подбору элементов упругой подвески машины.
9. Рассчитаны и построены АЧХ и ФЧХ машины на упругом основании.

Библиографический список для курсовой работы

- 1.
- 2.

ВОПРОСЫ

для самоконтроля по курсу "Теория механических колебаний"

1. Какие цели преследует изучение колебаний в машинах?
2. Перечислите критерии, по которым классифицируются колебательные явления.
3. Охарактеризуйте основные этапы динамического расчета.
4. Приведите классификацию колебаний по кинематическим признакам.
5. Приведите классификацию колебаний по виду возмущений.
6. Приведите классификацию колебаний по виду деформации упругого элемента.
7. Что понимают под динамической моделью и числом ее степеней свободы?
8. Приведите классификацию колебаний по виду динамической и математической моделей.
9. Какие допущения используются при построении динамических моделей?
10. Приведите примеры разновидностей динамических моделей приводов машин.
11. На каких положениях основано приведение масс, моментов инерции, коэффициентов жесткости и коэффициентов рассеяния?

12. Как определяется приведенный коэффициент жесткости при параллельном и последовательном соединениях упругих элементов?
13. Как практически определить величину жесткости упругого элемента (растяжение, скручивание, изгиб)?
14. Что определяют коэффициент рассеяния и логарифмический декремент?
15. От каких факторов зависят собственные частоты и период свободных колебаний системы с одной степенью свободы?
16. В чем проявляется существенное влияние сил сопротивления на свободные и вынужденные колебания?
17. При каком условии положение равновесия системы является устойчивым?
18. Выразите кинетическую и потенциальную энергии системы при малых ее колебаниях в виде квадратичных форм.
19. Что определяют коэффициенты формы и узлы колебаний?
20. Чем определяется число собственных частот динамической модели?
21. Что такое парциальные частоты?
22. При каких условиях возникает и что собой представляет режим биений?
23. На чем основан обратный способ составления систем дифференциальных уравнений малых колебаний?
24. Как определяется собственная частота и период свободных колебаний системы с одной степенью свободы?
25. Как определяются собственные частоты системы с двумя степенями свободы?
26. В чем проявляется влияние линейной силы сопротивления на свободные колебания?
27. В чем проявляется влияние постоянной силы сопротивления (кулонова трения) на свободные колебания?
28. С какой целью осуществляется переход к нормальным (главным) координатам?
29. Проанализируйте график коэффициента динамичности в зависимости от коэффициента частотной расстройки.
30. От чего зависят амплитуда вынужденных колебаний и резонансная амплитуда?
31. В чем особенности свободных колебаний систем с распределенными параметрами?
32. На какую величину отличается фаза вынужденных колебаний от фазы гармонической вынуждающей силы?
33. Что такое силовое и кинематическое возмущение; в чем сходство и различие этих процессов?
34. При каких условиях наступает резонанс в случае действия параметрической или периодической вынуждающей силы?
35. В чем состоит задача виброзащиты и виброизоляции; какими техническими средствами она решается?
36. Что определяет коэффициент динамичности и от чего он зависит?

37. От каких факторов зависит резонансная амплитуда при действии периодической вынуждающей силы?
38. Что такое динамический гаситель и в чем состоит принцип его работы?
39. Каким образом осуществляется динамическая разгрузка?
40. От чего зависит критическая скорость вращения вала? Что такое самоцентрирование?
41. Приведите примеры динамических моделей с переменными параметрами.
42. При каких условиях возникает параметрический резонанс, каковы способы его подавления? Что такое глубина пульсации?
43. В чем отличие параметрического резонанса от резонанса силового?
44. Перечислите основные источники появления нелинейности?
45. В чем состоит особенность нелинейных вынужденных колебаний?
46. Приведите графики и проанализируйте АЧХ при нелинейных колебаниях.
47. Сформулируйте рекомендации при выборе законов программного движения ведомого звена.
48. Как следует рациональным образом изменять параметры системы, работающей при гармоническом возбуждении?
49. Какова структура автоколебательной системы?
50. Какие существуют виды автоколебаний?
51. Каковы причины возникновения фрикционных автоколебаний?

Библиографический список

1. Вульфсон И.И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника, 2013. – 417 с.
2. Вульфсон И.И. Колебания в машинах: Учеб. пособие. для втузов. 3-е изд. – СПб.: изд-во СПГУТД, 2008. – 260 с.
3. Вульфсон И.И. Динамика машин. Колебания: Учеб. пособие. для втузов. М.: ООО «Изд. Юрайт», 2017. – 275 с.
4. Вульфсон И.И. Краткий курс теории механических колебаний: Учеб. пособие. для втузов. М.: Вестник научно-технического развития. Библиотека vnttr, 2017. – 238 с.
5. Вульфсон И.И., Грибкова Т.С., Преображенская М.В. Механика машин и теория колебаний. Методика решения типовых задач по теории колебаний: Методические указания. – СПб.: изд-во СПГУТД, 2016. – 38 с.
6. Вульфсон И.И., Преображенская М.В., Шарапин И.А. Расчет колебаний привода машины.: учеб. пособие. – М.: ООО «Изд. Юрайт», 2017. – 168 с.
7. Механика машин: Учеб. пос. для втузов / И.И. Вульфсон, М.З. Коловский, Э.Е. Пейсах и др.; под ред. Г.А. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.
8. Расчет колебаний привода машины.: учеб. пособие для втузов / И.И. Вульфсон, И.А. Шарапин, М.В. Преображенская. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: ФГБОУВПО «СПГУТД», 2013. – 180 с.
9. Семенов Ю.А. Механика. Теория механических колебаний: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 412 с.
10. Сорокин Е.С. Динамический расчет несущих конструкций / М.: Госстройиздат, 1958. – 325 с.
11. Справочник конструктора: справочно-методическое пособие / под ред. И.И. Матюшева. – СПб.: Политехника, 2006. – 1027 с.
12. Теория механизмов и машин: Учеб. пос. для втузов / М.З. Коловский, А.Н. Евграфов, Ю.А. Семенов и др.; 2-е изд., испр. – М.: Изд. центр «Академия», 2008. – 560 с.
13. Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; под ред. К.В. Фролова. 5-е изд. – М.: Высш. шк., 2005. – 496 с.
14. Шарапин И.А. Расчет колебаний привода. Виброизоляция / под ред. И.И. Вульфсона. – СПб.: СПГУТД, 2007. – 84 с.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----|
| Предисловие | 3 |
| ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ | 5 |
| 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О СХЕМАТИЗАЦИИ МЕХАНИЗМОВ ПРИ ИХ ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ | |
| 1.1. Динамическая модель механизма и ее математическое описание | 10 |
| 1.2. Геометрические характеристики механизма и некоторые динамические критерии кинетостатической модели | 12 |
| 1.3. Исходные предпосылки, используемые при составлении динамической модели механизма | 14 |
| 1.4. Колебания системы с одной степенью свободы | 24 |
| 1.5. Математическое описание динамических моделей механизмов | 31 |
| 2. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ | |
| 2.1. Основные этапы и порядок выполнения курсовой работы | 35 |
| 2.2. Расчет колебаний привода машины | |
| 2.2.1. Составление динамической модели (ДМ) привода машины | 38 |
| 2.2.2. Выбор обобщенных координат | 39 |
| 2.2.3. Составление системы дифференциальных уравнений привода машины | 42 |
| 2.3. Расчет частоты свободных колебаний | 45 |
| 2.4. Расчет вынужденных колебаний | 45 |
| 2.5. Определение максимального значения движущего момента | 47 |
| 2.6. Изгибные колебания. Математическая модель | 47 |
| 2.7. Вынужденные изгибные колебания вала | 52 |
| 2.8. Определение критической скорости вала (ротора). Самоцентрирование | 53 |
| 2.9. Виброизоляция машины | 55 |
| <i>ПРИЛОЖЕНИЕ А.</i> Порядок выполнения этапов самостоятельной (контрольной) работы по анализу частотных и диссипативных характеристик машины | 60 |
| <i>ПРИЛОЖЕНИЕ Б.</i> Задания | 68 |
| <i>ПРИЛОЖЕНИЕ В.</i> Пример выполнения курсовой работы | 88 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК | 110 |

Учебное издание

Вульфсон Иосиф Исаакович

Шарапин Игорь Александрович

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН
КОЛЕБАНИЯ ПРИВОДА
МАШИНЫ

Оригинал-макет подготовлен авторами

Издательский редактор Т. Н. Козлова

Подписано в печать 13. 11. 2017 г. Формат 60 x 84 1/16.
Усл. печ. л. 5,8. Печать трафаретная. Тираж ___ экз. Заказ **667**
<http://publish.sutd.ru>

Отпечатано в типографии ФГБОУВО «СПбГУПТД»
191028, Санкт-Петербург, ул. Моховая, 26